Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Matematicko – Fyzikálna Fakulta Univerzity Komenského
Jednota Slovenských Matematikov a Fyzikov
Centrum voľného času – IUVENTA

Školský rok 2001/2002 — 1. séria letnej časti

Vzorové riešenia

1. Najprv si mince nejako nazvime, aby sa nám o nich lepšie hovorilo. Napríklad nech sa volajú A, B, C, D, E a zároveň nech sú to aj ich hmotnosti. Pozrime sa, či Feldo môže nájsť pravú mincu na jedno váženie. Zrejme nebude mať veľký význam vážiť nerovnaký počet mincí (napríklad 1 mincu a 3 mince). A keďže Feldo je rozumný, bude vážiť buď 1 a 1 mincu, alebo 2 a 2 mince. Ak bude vážiť po jednej minci, výsledok mu nič nepovie. Ak budú váhy v rovnováhe, nebude vedieť, či sú na nej pravé alebo falošné mince. Takisto to nebude vedieť povedať ani o zvyšných minciach a ani keď váhy nebudú v rovnováhe. Feldo bude teraz vážiť po dve mince a to $A + B$ a $C + D$. Uvedomme si, že je jedno, ktoré mince to budú, lebo ich vždy môžme premenovať tak, aby to boli A, B, C, D. Medzi týmito 4 mincami je určite aspoň jedna falošná. Feldo môže zistiť nasledovné stavy:

1. $A + B = C + D$. Toto môže nastať iba vtedy, ak je na oboch stranách váhy jedna pravá a jedna falošná minca. Teda zostávajúca minca je pravá.
2. $A + B \neq C + D$. Z tohto stavu ale nevieme zistiť, či zostávajúca minca je pravá alebo falošná. Teda Feldo nemôže naisto nájsť pravú mincu na jedno váženie.

Na dve váženia na to Feldo príde napríklad takto. Odváži $A + B$ a $C + D$ tak, ako je napísané vyššie. Buď našiel pravú mincu, alebo $A + B \neq C + D$. Ak sa nerovnajú spraví druhé váženie, kde odváži $A + C$ s $B + D$. Ak sa váhy vyrovnajú, dostane sa Feldo zasa do stavu, že na oboch stranách váh je 1 pravá a 1 falošná minca. Teda tá čo ostala, je pravá. Ak sa váhy nevyrovnajú, znamená to, že Feldo váži 3 pravé a 1 falošnú mincu. Teraz ak sa poloha váh nezmenila, musel vymeniť dve pravé mince. Ak sa poloha váh zmenila, vymenil falošnú a pravú mincu. Teda tie dve, ktoré nemenil, sú pravé. Týmto postupom našiel Feldo hľadanú pravú mincu pre Slava.

2a. *Riešenie podľa Ondreja Oravca.* Každému je jasné, že ak máme iba $1, 2, 3$ alebo 4 stromy, tak naši barbari sa nezapotia a odvezú si domov všetky stromy.

Ak máme 5 stromov, tak podľa *Dirichletovho princípu* existuje riadok v ktorom sú aspoň dva stromy. Ak naši barbari nemajú v hlave prázdno, tak tento riadok vyrúbu a potom nám ostanú maximálne 3 stromy. Tie ale už ľahko vyrúbu troma ťahmi.

Čo ak máme 6 stromčekov? Opäť podľa nebohého pána *Dirichleta* existujú dva také riadky, že v nich sú spolu aspoň 4 stromčeky. BBB vyrúbe tieto dva riadky, a ostanú nám ešte maximálne dva stromčeky. Oni ale majú ešte dva ťahy, takže žiaden stromček sme nezachránili. Teda nestačí, ak naši amatérski lesníci vysadia šesť stromčekov. Teraz ukážeme, že sa dá rozostaviť 7 stromčekov tak, aby po nájazde BBB zostal aspoň 1 živý stromček. To rozsadenie môže vyzerať takto:

			$\bullet$
	$\bullet$	$\bullet$	
$\bullet$		$\bullet$	
$\bullet$	$\bullet$		

$\bullet$ = stromček

Ak nejaký barbar vie vyrúbať dva riadky a dva stĺpce z tohto rozsadenia tak, aby nestal žiadny stromček naživo, nech sa ozve a my mu pošleme nejaké sladkosti (alebo motorovú pílu).

2b. Zo zadania priamo vieme, že v každom z 2002^2 štvorcov rúbaniska bude jeden stromček, a teda každý stromček musí byť vysadený. Predpokladajme, že všetky stromčeky budú jedličky alebo borovičky. Aby po odchode BBB zostala aspoň jedna jedlička, musí byť vysadený aspoň jeden riadok zo samých jedličiek, inak by v tomto riadku bola borovička a všetky jedličky by boli vyťaté. To ale znamená, že v každom stĺpci bude aspoň jedna jedlička, teda všetky borovičky budú vyťaté. Teda nemôže z každého druhu zostať aspoň $1\,002\,001$ stromčekov. Ak však predpokladáme, že medzi vysadenými stromčekmi bude okrem borovičiek a jedličiek aj nejaký tretí druh stromčekov, úloha naopak riešenie má. Keď si predstavíme rúbanisko ako tabuľku, stačí napr. do jej pravej hornej časti $1\,001 \times 1\,001$ nasadiť samé jedličky, do ľavej dolnej časti nasadiť samé borovičky a na zvyšné miesta tretí druh stromčekov. Takto budú splnené všetky podmienky zadania, t.j. v každom štvorci bude vysadený jeden stromček, medzi stromčekmi budú jedličky a borovičky a po odchode BBB zostane z každého druhu aspoň požadované množstvo stromčekov.

3a. S úsmevom vám môžem oznámiť, že keď sa Tinka aspoň raz usmiala, určite sa ešte usmeje. Dokážeme to sporom. Nech by sa Tina niekoľkokrát usmiala a potom sa už vôbec neusmievala. Označme posledné číslo z jej postupnosti, pri ktorom sa usmiala, ako $a_i = n^2$ pre $n \in \mathbb{N}$. Nech diferencia jej aritmetickej postupnosti je $d \in \mathbb{Z}$ (ináč by Tina nehovorila prirodzené čísla). Preskúmajme niekoľko možností:

1. $d < 0$, potom Tina skôr či neskôr (najneskôr po n^2 číslach) príde k číslu, ktoré nebude prirodzené, čo je spor so zadaním. Preto $d \geq 0$.
2. $d = 0$, potom aj $a_{i+1} = n^2$, Tina sa pri $(i+1)$-vom čísle usmeje, čo je spor s tým, že sa pri i-tom usmiala naposledy.
3. $d > 0$, potom Tina bude postupne hovoriť čísla n^2+d, $n^2+2d, \ldots$ a časom príde k číslu $n^2+(2n+d)\cdot d = (n+d)^2$. Keďže n aj d sú kladné, platí $i + 2n + d > i$ a číslo a_{i+2n+d} bude štvorcom prirodzeného čísla $(n + d)$, ktorý Tina povedala až po a_i. No a to je spor.

Preto ak sa Tina aspoň raz usmiala, usmeje sa znova a znova a znova a ....

Komentár. Mnohí z vás vôbec neuvažovali o tom, čo by sa stalo, keby $d \leq 0$. Pritom napríklad prípad $d = 0$ neodporuje zadaniu. Tu ste prišli o nejaké tie bodíky. No a veľa z vás dokázalo, že keď sa Tina raz usmiala, ešte sa usmeje, ale čo ak už naozaj naposledy? Nakoniec by som chcela upozorniť, že nikde v zadaní nie je napísané, že sa Tina už usmiala. Je tam iba otázka, že keby sa usmiala aspoň raz, či by sa mohla potom už navždy neusmievať. Vaše riešenia preto mali začínať: „Preedpokladajme, že sa Tina usmiala. “Takže si pozorne čítajte zadania!

3b. Desiata mocnina hociktorej cifry je najviac 9^{10}, súčet desiatych mocnín cifier k-ciferného čísla je teda najviac $9^{10}k$. Ak teda máme (11 alebo menej)-ciferné číslo, súčet desiatych mocnín jeho cifier je nanajvýš $9^{10} \cdot 11$ a vďaka tomu, že

$$9^{10} \cdot 11 = 99 \cdot 9^9 < 100 \cdot 10^9 = 10^{11}$$

je to znovu (11 alebo menej)-ciferné číslo.

Je zrejmé, že Šaňo dostáva iba prirodzené čísla začínajúc s číslom 2002, ktoré nemá viac ako 11 cifier. Potom však podľa predchádzajúcej úvahy už nikdy nedostane číslo s viac ako 11 ciframi (matematická indukcia). Prirodzených čísel s najviac 11 ciframi je však iba $10^{11} - 1$ a teda najneskôr 10^{11}-te číslo už Šaňo musel predtým dostať. Ostáva teda už len skonštatovať, že táto hra skončí.

4a. *Riešenie podľa Karola Végsöa.* Sporom dokážeme, že Rúža nemohol dostať všetky kryhy na jednu úroveň a teda, že nemohol jazdiť na kajaku na zátoke cez Silvestra. Predpokladajme, že Rúža dokázal dostať všetky kryhy na jednu úroveň a nech bola táto úroveň m cm od hladiny vody ($m \in \mathbb{Z}$). Vytvorme si tabuľku veľkosti 2002×2002, ktorej políčka budú obsahovať výšky jednotlivých krýh vzhľadom na hladinu. Označme si súčet všetkých čísel v tabuľke S. Zrejme na začiatku je $S = 2001$ a na konci, keď sú všetky kryhy vo výške m, je $S = 2002^2m$. Predpokladajme, že Rúži sa podarilo po k zatlačeniach ($k \in \mathbb{N}$) dostať všetky kryhy do výšky m. Zrejme po každom zatlačení niektorej kryhy sa zvýši S o $4002 - 1 = 4001$, z čoho vyplýva, že kryhy sa môžu dostať na jednu úroveň iba nad hladinou vody (t.j. $m \in \mathbb{N}$). Z toho ale tiež vyplýva, že na konci je $S = 2001 + 4001k$, čiže musí platiť nasledovná rovnosť:

$$2002^2m = 2001 + 4001k$$

$$k = \frac{2002^2m - 2001}{4001}$$

Keďže $k \in \mathbb{N}$, tak $2002^2m - 2001$ musí byť deliteľné 4001 a teda

$$2002^2m - 2001 \equiv 0 \pmod{4001}$$

$$3003m - 2001 \equiv 0 \pmod{4001}$$

Skúmaním tejto kongurencie dôjdeme k záveru, že $m = 4001j + 2223$ (kde $j \in \mathbb{N}_0$) a teda

$$k = \frac{2002^2(4001j + 2223) - 2001}{4001} = 2002^2j + 2226891$$

Na začiatku sa medzi 2002×2002 kryhami nachádza 2001 krýh 1 cm nad hladinou a tak podľa *Dirichletovho princípu* existuje aspoň jeden riadok a jeden stĺpec, v ktorom sú všetky kryhy vo výške hladiny vody. V tabuľke teda existuje stĺpec (označme si ho i), v ktorom na začiatku je súčet čísel $S_i = 0$. Nech počas celého procesu zarovnávania krýh stlačil Rúža x-krát (kde $x \in \mathbb{N}$ a $x \leq k$) niektorú kryhu mimo daného stĺpca i a $(k - x)$-krát niektorú kryhu v stĺpci i. Zrejme každým stlačením kryhy mimo stĺpca i sa S_i zväčší o 1 a každým stlačením kryhy v stĺpci i sa nám S_i zväčší o $2001 - 1 = 2000$. Z toho vyplýva, že na konci je $S_i = 0 + x + 2000(k - x) = 2000k - 1999x = 2000(2002^2j + + 2226891) - 1999x$. A keďže na konci je výška všetkých krýh rovná $m = 4001j + 2223$, tak pre konečnú hodnotu S_i platí tiež $S_i = 2002(4001j + 2223)$ a teda musí platiť nasledovná rovnosť:

$$2002(4001j + 2223) = 2000(2002^2j + 2226891) - 1999x$$

$$1999x = (2000 \cdot 2002^2 - 2002 \cdot 4001)j + 2000 \cdot 2226891 - 2002 \cdot 2223$$

$$x = \frac{8007997998j + 4449331554}{1999} = 4006002j + \frac{4449331554}{1999}$$

Keďže 4449331554 nieje deliteľné 1999 ($4449331554 \equiv 1331 \pmod{1999}$), tak x nemôže byť celé číslo, čo je spor s tým, že $x \in \mathbb{N}$. Čiže Rúža nemohol na Silvestra dostať všetky kryhy na zátoke na jednu úroveň a nemohol tam jazdiť na kajaku.

4b. Ukážeme, že túra nemôže mať párny počet prémií. Najprv si však do Tinovej mapy zaveďme súradnicovú sústavu so stredom na Lúke a osami rovnobežnými s čiarami pôvodnej štvorčekovej siete. Bez ujmy na všeobecnosti, nech strana jedného štvorčeka má dĺžku 1. Je potom zrejmé, že všetky cyklistické prémie sú v našej súradnicovej sústave označené celočíselnými súradnicami (vrátane Lúky, ktorá leží v bode $[0, 0]$).

Nazvime úsekom trať medzi dvoma prémiami a označme d dĺžku úseku (všetky úseky sú rovnako dlhé). Ďalej nech (x_i, y_i) vyjadruje pohyb z $(i-1)$-vej do i-tej prémie (v smere x-ovej súradnice sa posunieme o x_i, v smere y-ovej súradnice o y_i). Keďže všetky prémie ležia v mrežových bodoch štvorčekovej siete, zrejme sú x_i a y_i celočíselné. Zároveň (všetky prémie ležia v rovnakej nadmorskej výške)

$$x_i^2 + y_i^2 = d^2, \qquad \text{pre všetky } \ i \in \{2, \ldots, n\},$$

kde n je počet prémií. Uvažujme teraz chvíľu d^2 – zrejme celé číslo.

Ak d^2 je nepárne číslo, nutne práve jedno číslo z dvojice x_i, y_i (pre všetky uvažované i) musí byť párne a práve jedno nepárne, a teda $x_i + y_i$ je nepárne číslo.

Ak $d^2 \equiv 2 \pmod 4$, nutne musia byť x_i, y_i obe nepárne (pre všetky uvažované i).

Ak $d^2 \equiv 0 \pmod 4$, nutne musia byť x_i, y_i obe párne (pre všetky uvažované i).

Tým sme rozobrali všetky možnosti pre d^2. Predtým ako pristúpime k samotnému dôkazu si ešte treba uvedomiť, že súčet jednotlivých posunov v oboch súradniciach sa v cieli – na Lúke, po absolvovaní všetkých $(n-1)$ úsekov musí rovnať nule, čiže

$$\sum_{i=2}^{n} x_i = \sum_{i=2}^{n} y_i = 0. \tag{1}$$

V nasledujúcej časti dokážeme sporom, že túra nemôže mať párny počet prémií, čiže nepárny počet úsekov.

Predpokladajme, že $(n-1)$ je nepárne, t.j. túra má nepárny počet úsekov.

Ak d^2 je nepárne, potom pre všetky $i \in \{2, \ldots, n\}$ je číslo $(x_i + y_i)$ nepárne a suma všetkým takýchto čísel (nepárny počet nepárnych sčítancov) je opäť nepárna, čo je spor s (1) (lebo 0 nie je nepárna).

Z uvedeného je zrejmé, že d^2 je párne. Ak $d^2 \equiv 2 \pmod 4$, tak sú všetky x_i (pre $i \in \{2, \ldots, n\}$) nepárne. Zrejme je tak aj suma všetkých týchto x_i nepárna, čo je opäť spor s (1).

Nutne teda $d^2 \equiv 0 \pmod 4$ a čísla x_i a y_i sú všetky párne. Zoberme najväčšie prirodzené číslo k také, že všetky $x'_i = \dfrac{x_i}{2^k}$, $y'_i = \dfrac{y_i}{2^k}$ sú celé čísla. Zrejme teraz existuje také $j \in \{2, \ldots, n\}$, že aspoň jedno z dvojice x_j, y_j nie je párne. Potom však $d'^2 = \dfrac{x'^2_j}{4^k} + \dfrac{y'^2_j}{4^k} = \dfrac{d^2}{4^k}$ nebude deliteľné 4-mi (ak by bolo deliteľné štyrmi, tak, ako sme už vyššie ukázali, x_j, y_j by museli byť párne, čo by bol spor s výberom čísla k). Teraz si už len stačí uvedomiť, že aj dvojice (x'_i, y'_i) opisujú nejakú túru (2^k-krát zmenšenú) vyhovujúcu zadaniu. Dĺžka jej úseku je pritom také d', že $d'^2 \not\equiv 0 \pmod 4$. Počet úsekov novej túry je pritom rovnaký ako u pôvodnej, $(n-1)$, čiže nepárny. Ako sme už však odvodili, potom nutne $d'^2 \equiv 0 \pmod 4$, čo je spor.

5a. Zvoľme $a = 1, b = 101!$. Ak sa Kika opýta otázku prislúchajúcu k týmto dvom číslam, zistí od Felda najväčší spoločný deliteľ (ďalej len NSD) čísel $n+1$ a $101!$. Kika vie, že $n+1$ je aspoň 1 a najviac 101 (lebo $0 \leq n \leq 100$). Číslo $101!$ je deliteľné všetkými prirodzenými číslami od 1 po 101, preto NSD $n+1$ a $101!$ bude číslo $n+1$. Feldo jej teda na túto otázku odpovie $n+1$ a z tohto čísla si už Kika poľahky vie zistiť koľko bolo samotné n (premyslite si ako). Kika dokáže určiť počet Feldových bývalých už pomocou prvej otázky, čiže aj pomocou siedmych otázok. A to napríklad tak, že zvyšnými šiestimi otázkami sa bude pýtať na hocičo (napríklad iné oblasti z jeho intímneho života).

Komentár. Väčšina z vás si neuvedomila, že ich riešenie by nefungovalo ak by mal Feldo 0 bývalých. Bola to síce len malá chyba, ale vzhľadom na to, že v tomto príklade v podstate nebolo čo riešiť, aj táto malá chyba znamenala celkom slušnú bodovú stratu.

Ako si väčšina z vás všimla, zadanie bolo akési ľahšie oproti zvyčajnej obtiažnosti príkladu 5a. Bolo to spôsobené tým, že nám nejakým nedopatrením zo zadania vypadla jedna podmienka. Zadanie v pôvodnom znení si môžete prečítať nižšie. Trochu nás sklamal váš prístup k tomuto inak celkom peknému príkladu. Nebolo totiž vôbec náročné domyslieť si správne znenie zadania a ak by aj bolo, v každých zadaniach uvádzame e-mailovú adresu na ktorú sa môžete kvôli zadaniam hocikedy obrátiť. Napriek tomu sa zo 49 riešiteľov tohto príkladu pokúsili nájsť a vyriešiť správne zadanie len štyria. Títo štyria, menovite *Veronika Brezová, Michal Ďuriš, Vítězslav Kala* a *Marek Vrábel*, majú našu pochvalu aj napriek tomu, že sa im úplne presné zadanie nájsť nepodarilo. Ich riešenia sa však poľahky dajú aplikovať aj na to pôvodné zadanie. Zvyšní sa skúste zamyslieť nad tým, či riešite tento seminár pre nejaké body do listiny alebo pre seba. Ak by náhodou niekto zistil, že patrí do tej druhej kategórie môže si skúsiť tento, ešte raz opakujem, celkom pekný príklad vyriešiť.

Pôvodné zadanie. Kika sa pokúša od Felda zistiť počet jeho bývalých frajeriek, ktorých bolo n. Feldo jej prezradil len to, že ich bolo najviac 100. Na veľké naliehanie, jej dovolil zvoliť si celé čísla a a b, pričom $1 \le a \le 100$ a $1 \le b \le 100$ a spýtať sa otázku: „Aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $n + a$ a b?". Zistite, či Kika dokáže určiť hodnotu n pomocou siedmich otázok.

5b. Všetkých možností ako usporiadať 5 čísel je $5! = 120$. Na určitú otázku môže Pišta odpovedať áno alebo nie. Dovtedy nevylúčené možnosti (nech ich je n) sa rozdelia na dve skupiny, z ktorých podľa toho, ako znie odpoveď, jednu môžme vylúčiť. Ak chceme určite vylúčiť čo najviac možností, menšia z tých dvoch skupín by mala byť čo najväčšia, čo zrejme nastáva, ak majú obe $\frac{n}{2}$ prvkov (pre n párne) respektíve majú $\frac{n+1}{2}$ a $\frac{n-1}{2}$ prvkov (pre n nepárne).

Foto ale nemôže klásť hocijaké otázky, len sa pýtať, či platí $a < b < c$ pre niektoré tri čísla. Spomedzi všetkých 120 usporiadaní čísel a, b, c, d a e platí $a < b < c$ pre 20 možností (máme 4 možnosti pre umiestnenie čísla d a potom 5 možností pre číslo e). Teda Foto vie jednou otázkou vylúčiť najviac 20 možností (nemôže zaručiť, že nedostane odpoveď nie, ak by to vedel, prečo by sa na to teda pýtal?). Piatimi otázkami tak vie vylúčiť najviac 100 možností (ak sú tieto otázky "disjunktné") a teda mu môže ostať (ak dostane päťkrát odpoveď nie) aspoň 20 nevylúčených možností a 4 otázky. Šiestou otázkou vie určite vylúčiť najviac 10 možností, teda mu ich môže ostať aspoň 10. Po siedmej otázke mu môže ostať aspoň 5 možností, po ôsmej aspoň tri. Poslednou, deviatou otázkou by mal rozlíšiť (aspoň) tri možnosti, ale má len dve možné odpovede: áno a nie. Takže pomocou deviatich otázok Foto nedokáže určiť, ako sú dané čísla usporiadané.

Poznámka. Už desať otázok by Fotovi stačilo. Prvými (najviac) piatimi otázkami zistí usporiadanie čísel a, b a c. Toto má šesť možností. Na ne sa bude postupne pýtať, kým nedostane pozitívnu odpoveď. Ak mu Pišta päťkrát odpovie nie, je jasné, že je to tá šiesta možnosť. Potom dvoma otázkami zistí polohu čísla d. Tá má štyri možnosti. Prvou otázkou ich rozdelí na dve a dve a druhou už tie dve vie rozlíšiť. A troma otázkami zistí polohu čísla e (podobne ako d).

Túto sériu opravovali: Kika Černeková a Šesťo Šesták (1), Pišta Gyürki a Buggo Steskal (2a), Janka Szolgayová a Paľo Jurča (2b) Tinka Gancárová a Poko Pokorný (3a), Vlado Marko (3b), Rúža Potočný (4a), Šaňo Erdélyi (4b), Foto Potočný (5a), Feri Kardoš (5b).