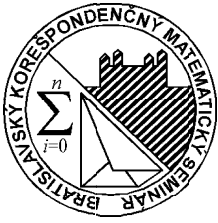


BRATISLAVSKÝ KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR



Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského
Jednota Slovenských Matematikov a Fyzikov
Vzdelávacia nadácia Jana Husa

Školský rok 2001/2002 — 3. séria letnej časti
Nerovnosti

1. Nech a a x sú reálne čísla, pričom $a > 1$. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a - 1}} \geq 2.$$

2a. Označme a a c reálne čísla, pre ktoré platí $a \leq 1 \leq c$. Nájdite najväčšie reálne číslo b , pre ktoré platí

$$a + bc \leq b + ac \leq c + ab.$$

2b. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo $x \neq 1$ a pre každé kladné celé číslo n platí

$$\frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \geq (2n + 1) \cdot x^n.$$

3a. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla. Dokážte, že aspoň jedna z nasledujúcich nerovností neplatí

$$\begin{aligned} a + b &< c + d \\ (a + b)(c + d) &< ab + cd \\ (a + b)cd &< ab(c + d). \end{aligned}$$

3b. Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

4a. Nech a, b, p, q, r, s sú kladné celé čísla, pre ktoré platí

$$\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s} \quad \text{a} \quad qr - ps = 1.$$

Dokážte, že $b \geq q + s$.

4b. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo x a kladné celé číslo n , platí

$$\lfloor nx \rfloor \geq \frac{\lfloor x \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} + \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3} \dots + \frac{\lfloor nx \rfloor}{n},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x t.j. najväčšie celé číslo menšie ako x .

5a. Označme $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ postupnosť celých čísel, pre ktoré platí $a_1 = 0$ a $|a_i| = |a_{i-1} + 1|$ pre $i > 1$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq -\frac{n}{2}.$$

5b. Dané sú dve n -tice reálnych čísel a_1, a_2, \dots, a_n a b_1, b_2, \dots, b_n pre ktoré platí $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ a

$$b_1 \geq a_1, \quad b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \quad b_1 b_2 b_3 \geq a_1 a_2 a_3, \quad \dots, \quad b_1 b_2 \dots b_n \geq a_1 a_2 \dots a_n$$

Dokážte, že potom platí $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

TERMÍN ukončenia tejto série je 6. mája 2002.

POZOR! Riešenia odoslané, resp. osobne doručené po tomto termíne nebudú opravované.

Vaše riešenia posielajte na adresu:

BKMS, KATČ, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Odporúčaná literatúra

L.C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov

F. Veselý: O nerovnostech, ŠMM 5

A. Kufner: Nerovnosti a odhady, ŠMM 39

Prednáška k 3. sérii

Prednáška bude v pondelok **22. 4.** o 16⁰⁰ hod. v matematickom pavilóne FMFI UK v Mlynskej doline (autobusy č. 31, 39 – zastávka pri budove televízie, autobus č. 32, 29 a električky č. 1, 4, 5, 9, 12 – zastávka pri internáte Družba). Stretneme sa pri vrátnici matematického pavilónu o 15⁵⁵. Všetkých záujemcov pozývame a tešíme sa na stretnutie s vami.

Pravidlá

- Riešenie každého príkladu píše na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveďte svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodnite. Príklady riešte samostatne. V prípade, že v časti či celom riešení používate odbornú literatúru, uveďte jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za opísané riešenie, riešenie využívajúce výpočtovú techniku a riešenie bez zdôvodnenia spravidla nedostanete veľa bodov.
- Pokiaľ máte dojem, že vaše riešenie bolo nesprávne obodované, môžete do jedného týždňa poslať písomnú sťažnosť. Nezabudnite k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Príklady 2b a 3b musia riešiť tí študenti matematických tried GAMČA, GVOZA, G Tajovského BB, G Párovská NT, G Poštová KE, G Alejová KE a všetkých českých gymnázií so zameraním na matematiku, ktorí dosiahli aspoň v jednom konečnom poradí najmenej 45 bodov. Ostatným sa bude započítavať lepší z príkladov 2a, 2b (resp. 3a, 3b).
- Príklady 4b a 5b musia riešiť tí tretiaci a štvrtáci, ktorí aspoň dvakrát získali aspoň 45 bodov, **alebo sa najmenej dvakrát zúčastnili sústredu BKMS**. Ostatným študentom sa bude započítavať lepší z príkladov 4a, 4b (resp. 5a, 5b).
- Limit na získanie 5-bodovej prémie je pre študentov k-teho ročníka 14+2k bodov.
- Nadalej sú vítané riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v \TeX .

Veľký Aprílový Výlet

Milí naši udatní a šlachetní rytieri, ctení a veľavážení šlachťici a zemepáni, pôvabné a krásne hradné panie ... a samozrejme aj vy, majetkuchtiví župani :-). Tiež sa vám stáva, že sa prichytíte, ako v duchu bojujete po Herkulovom boku proti Xene, alebo za spravodlivosť a slobodu namiesto Robina Húda? Či len tak radi tasíte meče? Alebo by ste sa radi zahrali na dobrodruhov? Alebo naopak, radi zhromažďujete majetok, no bojovať na bitevnom poli vás nudí?

Potom máte jedinečnú šancu splniť svoje sny!!! Príďte na Veľký Aprílový Výlet, ktorý bude **v sobotu 13. apríla**. Stretneme sa **o 8:20 na Autobusovej stanici SAD** na Nivách na niektorom z nástupišť 29, 31 alebo 33 (každému podľa vôle :-)) odkiaľ pôjde **o 8:35** autobus do **Svätého Jura**. Pokiaľ by ste to náhodou nestihli, ale boli by ste odhodlaní ísť za nami, tak nás nájdete na telefónnych číslach 0907/622 102 (Poko) alebo 0905/633 465 (Buggo).

Bolo by dobré, ak by ste si so sebou priniesli aj **meč** (ak budete chcieť šermovať...). To ale neznamená, že si ho priniesť musíte. Na výrobu meča potrebujete asi **36 listov** papiera z novín formátu **SME** (asi 4 čísla). Tieto listy položte na seba a poriadne ich zrolujte, aby ste dostali taký skorovalec. Na túto činnosť môžete zavolať aj brata, sestru, alebo aj iných rodinných príslušníkov, aby vám s tým pomohli. Získaný valec celý oblepte lepiacou páskou. Tak! A už máte čepeľ aj rúčku meča hotové. Už len pripevnite do vhodnej výšky **chránič na ruku** (to je tá vec, čo je nad rukoväťou kolmo na meč). Ten môžete urobiť podobne ako meč, alebo ľubovoľným iným spôsobom. Prípadné otázky posielajte na **1steskal@st.fmph.uniba.sk**.

Ak nechcete bojovať, nevadí, aj o vašu zábavu bude postarané. Vaša úloha v hre bude potom viac strategická. Veď sa nechajte prevapíť.

Zbohom udatní bojovníci, ctení šlachťici a pôvabné krásky ... Nech je k vám osud priaznivý.

Splav TROJSTENU

Aj tento rok sme pre Vás v spolupráci s FKS a KSP pripravili trojdňový kopec srandy, presnejšie splav TROJSTENU. Tentoraz bude v termíne **24.–26. mája 2002** a bude sa splavovať **Morava**. Pozorne si prečítajte vzorové riešenia, kde sú všetky potrebné informácie.

Letné sústredenie

Tohtoročné letné sústredenie sa uskutoční v **Oravskej Lesnej** v termíne **23.–30. júna 2002**. Preto si už teraz rezervujte čas a poctivo riešte príklady, aby sme sa tam stretli.