Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Na papieri je nakreslený pravidelný n-uholník. Zistite, koľkými spôsobmi je možné z jeho vrcholov vybrať 3 tak, aby tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.*

Riešenie: (opravoval Mišo)
Rovnoramenné trojuholníky spočítame tak, že pre každý vrchol pravidelného n-uholníka spočítame základne, pre ktoré môže byť hlavným vrcholom. Môže sa nám však stať, že nejaký trojuholník započítame viackrát. To, že nejaký trojuholník XYZ započítame viackrát, znamená, že sme ho započítali ako rovnoramenný s hlavným vrcholom pri X aj Y (napríklad). No ale to je práve vtedy, keď je daný trojuholník rovnostranný.
Rovnostranný trojuholník vyberieme vtedy, ak vyberieme vrcholy rovnako vzdialené od seba. To znamená, že medzi každými dvoma vrcholmi je $(n-3)/3$ vrcholov. To je však možné iba vtedy, keď je n deliteľné 3. Vtedy ku každému vrcholu vieme priradiť rovnostranný trojuholník, ale každý takto započítame 3–krát (pre každý vrchol raz). Rôznych rovnostranných trojuholníkov je potom 3–krát menej a od počtu zisteného horeuvedeným postupom budeme musieť odpočítať n a pripočítať $n/3$ (teda odpočítať $n - n/3 = 2n/3$).
Vyberme si teraz nejaký vrchol A. Základňu pre rovnoramenný trojuholník s hlavným vrcholom A môžu tvoriť každé dva vrcholy, ktoré sú od neho rovnako vzdialené. Ak je n nepárne, tak zvyšných $n-1$ vrcholov (okrem vrcholu A) môže tvoriť $(n-1)/2$ párov vrcholov pre základňu. Ak je n párne, základňu môže tvoriť len $n-2$ vrcholov (pretože vrchol oproti A nemôže byť časťou základne) a teda počet párov pre základňu je $(n-2)/2$.
Vyčíslili sme počet všetkých možných základní pre jeden vrchol. Všetkých vrcholov je n, teda tento počet vynásobíme n. Ak je však n násobkom 3, musíme odpočítať viackrát započítané rovnostranné trojuholníky, teda od takto získaného počtu odpočítať $2n/3$. Celkový počet trojuholníkov v závislosti od n rozdelený podľa deliteľnosti 2 a 3, ukazuje nasledujúca tabuľka:

	n je násobkom 3	n nie je násobkom 3
n je párne	$\frac{1}{2}n(n-2) - \frac{2}{3}n$	$\frac{1}{2}n(n-2)$
n je nepárne	$\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{2}{3}n$	$\frac{1}{2}n(n-1)$

Úloha č. 2: *Starý otec má dvoch vnukov. Nebol až taký úplne starý kmeť, že by mal viac ako 99 rokov. Keď pred vek starého otca napíšeme vek jedného z jeho vnukov, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné vekom tohoto vnuka. Okrem toho, vynásobením vekov všetkých troch dostaneme už spomínané štvorciferné číslo. Koľko rokov má starý otec?*

Riešenie: (opravoval Čermo)
Čavte všetci. Dostalo sa mi tej cti opravovať tento príkladík, tak hopsa hejsa na vec:
Pre prehľadné počítanie si označme vek starého otca ako S a veky jeho vnukov ako A a B. Potom tvrdenia vyslovené v zadaní môžeme prepísať do tvaru:
(a) „Nebol až taký úplne starý kmeť, že by mal viac ako 99 rokov. “ $\longrightarrow S \leq 99$
(b) „Keď pred vek starého otca napíšeme vek jedného z jeho vnukov, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné vekom tohoto vnuka.“ Nech vek vnuka, o ktorom sa hovorí, je A. Potom $100A + S = k \cdot A$, kde k je nejaké vhodné prirodzené číslo.
(c) „Vynásobením všetkých troch vekov dostaneme už spomínané štvorciferné číslo.“ $\longrightarrow 100A + S = A \cdot B \cdot S$

Keď už to máme takto pekne napísané, pozrime sa na dôsledky jednotlivých viet. Začneme napríklad s rovnicou (c), ktorú predelíme S:

$$100\frac{A}{S} = AB - 1 \qquad (1)$$

Z prvej vety tvrdenia (b) po jednoduchej úvahe zistíme, že A a S sú dvojciferné a že A delí S, $S = A \cdot u$. Podiel S/A potom môže nadobúdať len hodnoty $u = 1, \ldots, 9$. Ale podľa rovnice (1) musí byť stonásobok jeho prevrátenej hodnoty celé číslo. Tomu vyhovujú len $u = 1, 2, 4, 5$. Rozoberme si pekne po poriadku všetky prípady:

$u = 1$ To by znamenalo, že vnuk aj starý otec majú rovnaký vek. Pre jednoduchosť sa budeme zaoberať len pokrvnými príbuznými, takže táto situácia nemôže nastať.

$u = 2$ $A \cdot B = 51$, teda B delí 51, preto nadobúda jednu z hodnôt $1, 3, 17, 51$.
$B = 1$, teda $A = 51$ a $S = 102$, to je ale väčšie ako 99, takže nevyhovuje zadaniu.
$B = 3$, potom $A = 17$ a $S = 34$, všetky podmienky zadania sú splnené, máme prvé riešenie.
Pre hodnoty $B = 17$ a 51 je A jednociferné číslo, čo je v spore so zadaním.

$u = 4$ $A \cdot B = 26$, teda B delí 26, preto nadobúda jednu z hodnôt $1, 2, 13, 26$.
$B = 1$, preto $A = 26$ a $S = 104$, to je väčšie ako 99, takže nevyhovuje zadaniu.
$B = 2$, takže $A = 13$ a potom $S = 52$, všetky podmienky zadania sú splnené, teda máme druhé riešenie.
Pre hodnoty $B = 13$ a 26 je A opäť jednociferné číslo.

$u = 5$ $A \cdot B = 21$, teda B delí 21, preto nadobúda jednu z hodnôt $1, 3, 7, 21$.
$B = 1$, teda $A = 21$ a $S = 105$, to je zas väčšie ako 99.
Pre hodnoty $B = 3, 7, 21$ je A opäť jednociferné.

Po jednoduchom počítaní sme sa dopracovali ku všetkým (dvom) riešeniam (starý otec môže mať 34 alebo 52 rokov). Obe tieto riešenia vyhovujú všetkým podmienkam v zadaní, o čom sa môžete presvedčiť sami. Skôr než skončíme, ešte by som na margo prvého riešenia poznamenal, že je síce pre našinca dosť nereálne, ale matematika neberie ohľad na ľudskú sociológiu, takže ho ani my v tomto príklade nemôžeme diskriminovať. No a to už je vážne koniec.

Úloha č. 3: *Mazo a Rado hrávajú takúto hru: Striedavo dopĺňajú namiesto hviezdičiek v rovniciach celé čísla. Začína Mazo.*

$$\begin{aligned} * &= * \\ * + * &= * \\ * + * + * &= * \\ &\vdots \\ * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * &= * \end{aligned}$$

Zistite, či môže Mazo dosiahnuť, aby po poslednom ťahu boli pravdivé všetky rovnosti.

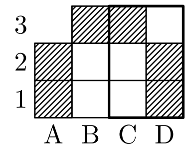
Riešenie: (opravoval Buggo)
Je jasné, že ak v niektorom riadku ostane už len jedna hviezdička a Mazo je na ťahu, musí ju doplniť vhodným číslom, aby dodržal rovnosť. Ak by tak neurobil, Rado by tam vo svojom ťahu doplnil nejaké škaredé číslo tak, aby rovnosť nesedela. Tiež, ak je Mazo na ťahu, tak nemôže nahradiť žiadnu hviezdičku, ktorá je v riadku, kde sú už len dve hviezdičky. Rado by totiž potom vo svojom ťahu poslednú hviezdičku nahradil číslom kaziacim rovnosť. Naopak, ak ja na ťahu Rado a nahradí jednu z dvoch ostávajúcich hviezdičiek, je to pre Maza dobré, lebo potom už len doplní poslednú hviezdičku.
Pre Maza by bolo veľmi dobré, ak by Rado prepísal predposlednú hviezdičku v každom riadku. Preto Mazo sa bude snažiť ťahať tak, aby nikdy neprepísal nejakú predposlednú hviezdičku a ak Rado nahradí nejakú predposlednú, Mazo nahradí poslednú. Hviezdičiek je spolu 35. Keď vynecháme v každom riadku poslednú a predposlednú hviezdičku, ostane nám ich 21 (tieto hviezdičky nazvime *voľné*). Keďže Mazo začína, bude po jeho ťahu vždy párny počet *voľných* hviezdičiek a pred jeho ťahom nepárny počet (lebo ak Rado prepíše *voľnú*, tak sa zmení ich parita a ak Rado nezmení *voľnú*, potom ani Mazo nezmení *voľnú*). A keďže 1 je nepárne číslo, prepíše Mazo poslednú *voľnú* hviezdičku a potom Rado prepíše predposlednú hviezdičku v nejakom riadku. Mazo prepíše poslednú a Rado opäť prepisuje nejakú predposlednú... A takto píšu a píšu, až nakoniec neostane žiadna hviezdička a všetky rovnosti budú platiť. Maziačik sa zaraduje, Radko mu zablahoželá k úspešnej výhre a pôjdu na kofolu...

Komentár: Keďže túto hru už hrať viete, môžete pouvažovať nad tým, prečo nemôže mať pri obyčajných piškvorkách druhý hráč vyhrávajúcu stratégiu (tj. takú, že jej dodržiavaním vyhrá bez ohľadu na ťahy prvého hráča).

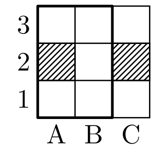
Úloha č. 4: *Niektoré políčka nekonečnej štvorcovej tabuľky sú ofarbené na čierno, zvyšné sú biele. Každý obdĺžnik* 2×3 *resp.* 3×2 *obsahuje práve* 2 *čierne políčka. Koľko čiernych políčok môže obsahovať obdĺžnik* 9×11*, ktorý spĺňa toto pravidlo?*

Riešenie: (opravovala Aňa)

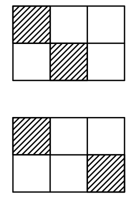
obr. 1



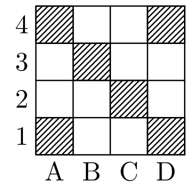
obr. 2



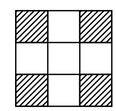
obr. 3



obr. 4



Najprv poďme porozmýšľať nad tým, ako musí vyzerať nekonečná štvorcová tabuľka, ktorá vyhovuje zadaniu. Budeme v nej skúmať vzájomnú polohu čiernych štvorcov. Môžu v nej niekde existovať dva čierne susediace štvorce (majúce spoločnú stranu)? Pozrime sa na *obr. 1.* Ak by existovali vedľa seba dva čierne štvorce, označme ich A1 a A2, tak obdĺžnik 2×3 A1C2 (A1–ľavý dolný štvorček, C2–pravý horný) už nesmie obsahovať čierne štvorce. Kvôli obdĺžnikom B1D2 a B1C3 musia byť štvorce D1, D2, B3, C3 čierne. Keď sa ale pozrieme na obdĺžnik C1D3, všimneme si, že má 3 čierne štvorce. Teda dva čierne štvorce vedľa seba v tabuľke byť nemôžu.
Môžu byť niekde v tabuľke dva čierne štvorce v jednom riadku (pre stĺpec sa to spraví analogicky) tak, že medzi nimi bude jeden biely? Pozrime sa na *obr. 2.* Čierne štvorce sú označené A2 a C2. Potom ale v obdĺžnikoch A1C2, A2C3 už musia byť len biele. Obdĺžnik A1B3 nevyhovuje zadaniu (má jeden čierny štvorček).
Z doteraz zisteného vyplýva, že žiaden obdĺžnik 1×3 ani 3×1 v tabuľke neobsahuje naraz dva alebo viac čiernych štvorčekov. Ale každé dva obdĺžničky 1×3 ležiace pod sebou, či vedľa seba musia obsahovať práve dva čierne štvorčeky, lebo tvoria obdĺžnik 2×3. Čiže každý z týchto obdĺžničkov musí obsahovať práve jeden čierny štvorec. A ešte si môžeme uvedomiť, že v tabuľke tým pádom môžu byť len obdĺžniky ako na *obr. 3* (prípadne otočené).
A existuje zadaniu vyhovujúca tabuľka? Skúsme ju vytvoriť z prvého obdĺžnika v *obr. 3*. Označme ho B2D3 (*obr. 4*). Potom obdĺžniky A2C3, B1C3, B2C4 už neobsahujú čierne štvočeky. Ale z obdĺžnikov A1C2, B1D2, A3C4, B3D4 musia byť štvorce A1, D1, A4, D4 čierne, takto pokračujeme ďalej získame jednoznačne určenú tabuľku. Analogicky, ak by sme začali druhým obdĺžnikom, vznikne rovnaká, ale otočená tabuľka. Koľko bude teda čiernych štvorčekov v obdĺžniku 9×11? Keďže ho vieme rozrezať na obdĺžniky 1×3, v každom je práve jeden čierny štvorec, bude ich $\frac{9 \cdot 11}{3} = 33$.



obr. 5

Komentár: Niektorí použili priamu úmernosť: ak každý obdĺžnik 2×3 má dve čierne políčka, tak obdĺžnik 9×11 má $\frac{9 \times 11}{2 \times 3} \cdot 2 = 33$ čiernych políčok. To všeobecne neplatí. Pozrite sa na *obr. 5.* Tu platí, že každý obdĺžnik 2×3 má dve čierne (podľa zadania), ale celý obdĺžnik 3×3 by podľa vás mal mať $\frac{3 \times 3}{2 \times 3} \cdot 2 = 3$, čo sa nezhoduje s obrázkom.

Úloha č. 5: *Aladin sa chce dostať do jaskyne, pred ktorou je sud. Sud má navrchu štyri otvory tvoriace vrcholy štvorca. Pod každým otvorom je džbán, v ňom je ryba otočená hlavou alebo chvostom nahor. Jaskyňa sa otvorí len vtedy, keď budú všetky ryby otočené rovnako. Aladin môže dať ruky do ľubovoľných dvoch otvorov a potom otočiť žiadnu, jednu alebo dve ryby. Aladin necíti, ktorým smerom sú ryby, ktore práve drží, otočené. Akonáhle Aladin vytiahne ruky, sud sa roztočí a po zastavení Aladin nepozná jeho pôvodnú polohu. Takto môže pokračovať ľubovoľne dlho. Existuje postup, pomocou ktorého sa Aladin do jaskyne dostane po konečnom počte krokov?*

Riešenie: (opravovali Miki a Janka)
Najprv si musíme uvedomiť, aké polohy rýb sa môžu Aladinovi vyskytnúť. Keďže sud sa vždy točí a Aladin *nevie*, o koľko sa vlastne otočil, tak je rozumné uvažovať všetky polohy, ktoré môžu vzniknúť iba otočením suda, za rovnaké. Ďalej vieme, že jaskyňa sa otvorí vtedy, keď budú všetky ryby otočené rovnakým smerom (a je jedno akým), takže nie je podstatné, či sú 3 ryby hore hlavou a jedna hore chvostom alebo 3 hore chvostom a jedna hore hlavou. Týmto sa nám všetky polohy rýb rozdelili do 4 skupín:

4+0 - to je prípad, keď sú všetky otočené rovnakým smerom a jaskyňa je otvorená,

3+1 - prípad, keď sú 3 ryby otočené jedným smerom a jedna opačným,

2+2(D) - dve ryby ležiace na diagonále (uhlopriečke) sú otočené jedným smerom a ostatné ryby druhým smerom,

2+2(S) - dve ryby ležiace na strane štvorca sú otočené jedným smerom a druhé dve ryby opačným smerom.

Takisto si môžeme zhrnúť, čo Aladin vlastne môže urobiť:
2D - otočiť dve ryby ležiace na uhlopriečke,
2S - otočiť dve susedné ryby - na jednej strane štvorca,
1Ľ - otočiť len jednu rybu (ľubovoľnú).
Neotočiť žiadnu rybu sa mu neoplatí, lebo by sa nič nezmenilo.

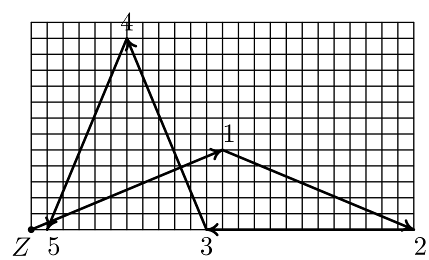
A teraz si už len stačí uvedomiť, čo každý Aladinov ťah spraví s jednotlivými prípadmi (okrem prvého, lebo tam už je jaskyňa otvorená a Aladin už nič robiť nebude - teda len si pôjde po poklady :-).
1. Ak Aladin otočí 2D, tak 3+1 sa vlastne nezmení, takisto 2+2(S) sa zachová. A 2+2(D) sa zmení na 4+0(hurááá).
2. Ak Aladin otočí 2S, tak 3+1 sa zachová, ale z 2+2(D) dostaneme 2+2(S). Pri stave 2+2(S) máme dve možnosti. Buď sa trafí a otvorí jaskyňu(4+0) alebo vznikne 2+2(D).

3. Podobne uvažujeme s 1Ľ. Z 3+1 musíme dostať 2+2, ale nevieme ktoré. Naopak, z oboch 2+2(S) aj 2+2(D) dostávame 3+1.
Všimnime si, že ťah 2D je veľmi dobrý, lebo buď otvorí jaskyňu (ak bol stav 2+2(D)), alebo zachová pôvodný stav rýb. To znamená, že ak Aladin vyskúša 2D a jaskyňa sa neotvorí, tak stav rýb v sude je 2+2(S) alebo 3+1. A pri tejto situácii je už aj ťah 2S jednoznačný, lebo 3+1 nezmení a pri 2+2(S) nám buď otvorí jaskyňu, alebo vznikne 2+2(D). Takže po druhom Aladinovom ťahu zostávajú možnosti 3+1 alebo 2+2(D). Teraz už len jednoducho „odstránime“ možnosť 2+2(D) ťahom 2D. Inými slovami ak po trojici ťahov 2D, 2S, 2D zostane jaskyňa zatvorená, v sude je stav rýb 3+1. Tu konečne môže Aladin vyskúšať ťah 1Ľ a vyrovná stav rýb na dva-dva. Teraz použije svoju už známu fintu (2D,2S,2D) a jaskyňa sa musí otvoriť. Presnejšie, ak bol stav rýb 2+2(D), otvorí sa už po prvej časti finty (2D), ak bol 2+2(S), tak buď po druhej alebo až po tretej.

Komentár: Tým podvodníkom, ktorí sa napriek zadaniu snažili zistiť polohu rýb inak (drievkami a podobným značením) odkazujeme, že „… Aladin necíti, ktorým smerom sú ryby, ktoré práve drží, otočené.“ má znamenať presne to, čo znamená :-)

Úloha č. 6: *Na nekonečnej štvorcovej sieti (s jednotkovou dĺžkou strany jedného štvorčeka) sedí v mrežovom bode blcha. Je to blcha konzervatívna a pri pohybe sa riadi prísnymi pravidlami:*
1) Dráha jej skoku je úsečka.
2) Dĺžka jej skoku je vždy 13.
3) Skáče len z mrežového bodu do mrežového bodu (pohybuje sa len medzi mrežovými bodmi).
V nejakom inom mrežovom bode sedí blšiak. Zistite, či k nemu vie doskákať blcha po konečnom počte skokov.

Riešenie: (opravovali Malic a Šesťo)



Keďže nevieme, kde sa v nekonečnej štvorčekovej sieti nachádza blšiak, musíme sa vedieť dostať na ľubovoľný mrežový bod tejto siete. Ak sa budeme vedieť posunúť o jeden mrežový bod ľubovoľným smerom, tak sa postupným posúvaním o jeden mrežový bod vieme dostať na ľubovoľný bod, teda aj k blšiakovi. Najprv si ukážeme, že blška sa vie posunúť o jedno doprava. Prečo? Lebo ľahko vieme celú sieť otočiť o 90, resp. 180, resp. 270 stupňov a teda keď sa budeme vedieť posunúť doprava, otočeným postupom sa budeme vedieť posunúť aj hore, doľava či dole.
Ako na to? Blška sa vie posúvať o 13 vodorovne, alebo zvislo, alebo po prepone pravouhlého trojuholníka s odvesnami 5 a 12. Toto si ľahko overíte aj sami.
Ako sa teda posunie? (viď obrázok). Najprv skočí blška doprava o 12 a o 5 hore, a potom opäť o 12 doprava, ale o 5 dole. Teda je 24 bodov doprava od začiatku, ale neposunula sa vo zvislom smere. Teraz sa posunie o 13 doľava, teda je 11 bodov od začiatku. Nasleduje skok o 5 doľava a o 12 hore a posledným skokom o 5 doľava a o 12 dole sa dostala do bodu o 1 vpravo od začiatku skákania. Čím sme ukázali, že sa vie posunúť o 1 ľubovoľným smerom rovnobežným so stranou nejakého štvorčeka v sieti.
Blšiak sedí od blšky vo všeobecnosti o m bodov vo vodorovnom smere a o n bodov v zvislom smere. A keďže sa vieme posúvať o jeden bod ľubovoľným smerom, teda ak tento postup zopakujeme $m+n$ krát, tak sa blška stretne s blšiakom.
Keďže m a n sú celé čísla, tak sa blška dostane k blšiakovi po konečnom počte skokov.

Úloha č. 7: *V kruhu na ľade stojí x hokejistov, h namyslených z nich sa pozerá hore, d hanblivých zasa dole ($x = h + d$). Tréner raz za čas skríkne na jedného namysleného hokejistu, aby šiel do šatne. Súčasne jeho susedia v kruhu (ak nejakí sú, ale dvaja najviac) zmenia svoje správanie (hanbliví sa stanú namyslenými a naopak). Pre aké h, d existuje možnosť dostať všetkých hokejistov do šatne?*

Riešenie: (opravovali Rado a Feri)
V zadaní nebolo úplne jasne formulované, či keď tréner zavolá namysleného hokejistu do šatne, tak po ňom ostane medzera alebo nie. Je tu teda vzorové riešenie pre oba prípady.

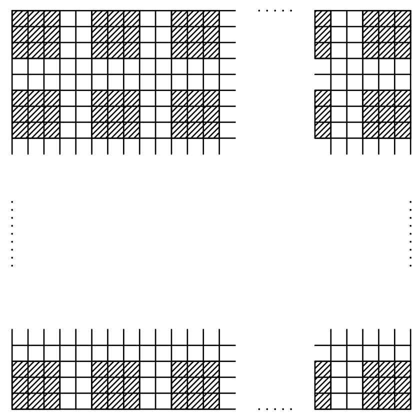
Prvý prípad: V tomto riešení predpokladáme, že keď tréner pošle niekoho do šatne, jeho susedia sa pomknú a sú si navzájom susedmi. Pozrime sa na to odzadu. Ak už ostal iba jeden hokejista, určite musel byť namyslený. Keď ostali dvaja, jeden musel byť namyslený a druhý hanblivý. Všimnime si, že ak sú aspoň traja, parita hanblivých sa nemení pri poslaní hokejistu do šatne (overte si). Teda keďže nakoniec nám má ostať jeden hanblivý a jeden namyslený hokejista, počet hanblivých musel byť vždy nepárny. Zrejme na to, aby sa dala nejaká skupinka poslať do šatne, musí obsahovať aspoň jedného namysleného. Teraz ešte ukážeme, že ak máme aspoň troch hokejistov, kde je nepárny počet hanblivých a aspoň jeden namyslený, vieme ich pri ľubovoľnom rozostavení poslať do šatne. Stačí vždy poslať do šatne takého namysleného hokejistu, ktorý má aspoň jedného hanblivého suseda, taký zrejme existuje, keďže hanblivých je nepárny počet a existuje aspoň jeden namyslený. Daný hanblivý sused sa stane namysleným, a teda znovu dostaneme situáciu s apoň jedným namysleným a nepárnym počtom hanblivých hokejistov, pričom hokejistov je o jedného menej. Keď počet klesne na dvoch, tak určite teda dostaneme jedného namysleného a jedného hanblivého, ktorých už vieme poslať do šatne. Teda do šatne vieme poslať jedného namysleného hokejistu alebo ľubovoľné rozostavenie aspoň dvoch hokejistov s nepárnym počtom hanblivých a aspoň jedným namysleným hokejistom.

Druhý prípad: Rozdiel oproti prvému prípadu je v tom, že ak na začiatku pri sebe napríklad stáli Šatan, Bondra a Pálffy a tréner poslal do šatne Bondru, tak Šatan a Pálffy nie sú jeden druhému susedmi, teda ak tréner neskôr pošle jedného z nich do šatne, tak druhý nezmení svoje správanie.
Každý hokejista môže svoje správanie zmeniť najviac dvakrát – keď odchádza do šatne jeho pravý sused a keď odchádza do šatne jeho ľavý sused. Preto ak je nejaký hokejista hanblivý, svoje správanie musí zmeniť len raz, potom musí ísť do šatne skôr, ako jeho druhý sused (ak mu ešte nejaký ostal).
Nech h a d označujú taký počet namyslených a hanblivých hokejistov, že existuje možnosť poslať ich všetkých do šatne. Keď tréner pošle do šatne prvého hokejistu, kruh sa otvorí a vznikne z neho rad. Keď tréner pošle do šatne ďalšieho hokejistu, môže to byť hokejista uprostred radu – vtedy sa rad rozpadne na dva kratšie – na kraji radu – vtedy sa rad skráti o jedného – alebo hokejista, ktorý už nemá žiadnych susedov. čiže sám tvorí osobitný rad.
Osamelí namyslení hokejisti pre nás nepredstavujú žiaden problém – môžeme ich hocikedy poslať do šatne. Osamelí hanbliví hokejisti i osamelé skupinky hanblivých hokejistov sú ale na druhej strane istou prehrou. Skúsme sa teraz bližšie pozrieť na to, čo sa stane, ak do šatne pošleme krajného alebo stredného hokejistu z radu.
Ak rad končí (alebo začína) namysleným hokejistom, tak ho musíme do šatne poslať skôr ako jeho suseda, pretože inak by sa nám zmenil na osamelého hanblivého hokejistu, z ktorým si nevieme rady. Pošlime ho teda do šatne hneď. Ak bol jeho sused namyslený, tak počet namyslených klesne o dvoch zatiaľ čo počet hanblivých stúpne o jedného. Ak bol jeho sused hanblivý, tak počet hanblivých klesne o jedného, zatiaľ čo počet namyslených sa zachová, navyše opäť dostávame namysleného hokejistu na konci radu, ktorého by sme mali (ak chceme do šatne dostať všetkých) do šatne poslať skôr, ako jeho suseda (ak ešte nejakého má).
Takto môžeme (alebo musíme?) posielať do šatne krajných namyslených hokejistov, až kým nedostaneme rad, na ktorého oboch koncoch sú hanbliví hokejisti. Aby sa títo hokejisti dali poslať do šatne, musí rad obsahovať aspoň jedného namysleného hokejistu.
Pozrime sa najprv na rad, v ktorom je len jeden namyslený hokejista. Keď ho pošleme do šatne (inú možnosť nemáme), jeho dvaja susedia sa stanú namyslenými. Vzniknú dva kratšie rady, zložené z niekoľkých hanblivých hokejistov a zakončené jedným namysleným hokejistom, ktoré do šatne už vieme poslať hravo. Preto rad s jedným namysleným hokejistom (či už na kraji alebo uprostred) vieme celý poslať do šatne.
Pozrime sa teraz na rad, v ktorom sú dvaja namyslení hokejisti (nie na kraji). Ak sú navyše susedia, tak nech pošleme do šatne ktoréhokoľvek z nich, dostaneme dva rady, z ktorých v jednom bude jeden namyslený hokejista („dobrý“ rad), no a v druhom budú len hanbliví hokejisti. Nech teda susedia nie sú. Potom keď pošleme do šatne hociktorého z nich, vznikne nám rad hanblivých zakončený namysleným a rad, v ktorom budú opäť dvaja namyslení hokejisti, z nich jeden vnútri a jeden na kraji. Keď poposielame do šatne všetkých krajných, prvý rad odíde celý, no z druhého nám ostane skupinka osamelých hanblivých hokejistov. Preto rad, v ktorom sú dvaja namyslení hokejisti, do šatne poslať nedokážeme.
Majme teraz rad, v ktorom je niekoľko namyslených hokejistov, z nich žiaden nie je na kraji. Ukážme, že tento rad sa dá do šatne poslať iba vtedy, ak je namyslených hokejistov nepárny počet. Keď pošleme do šatne namysleného hokejistu, počet namyslených sa zmení o 1 alebo o 3, takže určite zmení paritu. Ak bol počet párny, tak teraz je nepárny, takže určite práve jeden z nových radov obsahuje párny počet namyslených. Toto sa však nemôže opakovať donekonečna a časom dostaneme rad, v ktorom budú len dvaja namyslení hokejisti, no ako sme už ukázali, tento vedie na rad hanblivých, s ktorými už nepohneme. Rad s párnym počtom namyslených sa teda do šatne poslať nedá.
Ostáva ukázať, že rad s nepárnym počtom namyslených sa do šatne dostať dá. Ale to už je ľahké vymyslieť, stačí napríklad posielať do šatne vždy prvého namysleného zľava. Tým vzniknú dva rady, jeden bude mať práve jedného namysleného, druhý toľko ako pôvodný alebo o dvoch menej, každopádne bude kratší a bude mať opäť nepárny počet namyslených. Po konečnom počte takýchto krokov dostaneme len rady s jedným namysleným, ktoré už do tej šatne pomaly sami od nudy naskáču.
Posledná vec je zistiť, z akých rozostavení do kruhu môžeme prvým ťahom dostať rad s nepárnym počtom namyslených. No to je ľahké. Keďže jeden namyslený odíde do šatne a -2, 0 alebo 2 namyslení pribudnú, tak je jasné, že prvým ťahom sa zmení parita počtu namyslených. No a pretože my potrebujeme rad s nepárnym počtom, v pôvodnom kruhu musí byť párny počet namyslených.

Všetkých hokejistov teda vieme do šatne dostať iba vtedy, ak je h párne (a samozrejme nenulové). Na počte hanblivých d nezáleží.

Úloha č. 8: *Na šachovnici* 48×48 *je porozhadzovaných* 99 *štvorcov* 3×3 *tak, že sa neprekrývajú (štvorce zapadajú do mriežky šachovnice). Dokážte, že tam vždy vieme umiestniť ešte aspoň jeden ďalší štvorec* 3×3.

Riešenie: (opravovali Peťo a Erika)



Chceme ukázať, že pri ľubovoľnom rozhádzaní 99 štvorcov 3×3 na šachovnicu 48×48 nám určite niekde ostane voľná plocha 3×3. Pomohlo by nám, keby sme našli 100 takých plôch 3×3, že každý z tých 99 štvorcov by mal prienik najviac s jednou z nich (potom totiž ostane aspoň jedna plocha voľná a na ňu môžeme umiestniť stý štvorec 3×3).
Podarí sa nám to tak, ako je nakreslené na obrázku. Skutočne! Vidíme, že každý štvorec 3×3 vhodený na šachovnicu pretína práve jednu z vyfarbených plôch. To znamená (keďže tých plôch je tam 100 – spočítajte si, či naozaj!), že po ľubovoľnom rozhádzaní 99 štvorcov 3×3 na šachovnici ostane určite aspoň jedna plocha celá voľná. A na ňu môžeme umiestniť ten stý štvorec.

Komentár: Kľúčom k riešeniu bolo objavenie správneho *ofarbenia*. To bolo pomerne netradičné. Ale keď si uvedomíme, čo chceme, dalo sa objaviť. Veľká časť riešení sa odvolávala na efektívne rozloženie 99 štvorcov 3×3. Keď ale považujete niečo za najefektívnejšie, musíte svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť. V tomto prípade to bolo nemožné.

Úloha č. 9: *Na katedre cudzích jazykov je* 500 *učiteľov a každý z nich ovláda aspoň n jazykov. Počet všetkých jazykov je $2n$. Ukážte, že vieme vybrať* 14 *jazykov tak, že každý učiteľ z nich hovorí aspoň jedným jazykom.*

Riešenie: (opravovali Šaňo a Tina)
Pre $n \leq 7$ tvrdenie triviálne platí (prípadne pri istom výklade zadania nemá zmysel). Pre $n > 7$ ukážeme, akým spôsobom možno vybrať 14 jazykov tak, aby neexistoval učiteľ, ktorý žiaden z nich neovláda.
Hovorme, že učiteľ má *certifikát* z nejakého jazyka práve vtedy, keď tento jazyk ovláda. Keďže každý učiteľ ovláda aspoň n jazykov, spolu je na katedre aspoň $500n$ certifikátov. Rôznych certifikátov (jazykov) je $2n$, preto existuje (z Dirichletovho princípu) jazyk J_1, ktorý ovláda aspoň 250 učiteľov. Vyberme z nich (ľubovoľne) práve 250 profesorov a zamerajme sa na zvyšných 250.
Úvahu teraz zopakujeme. Ostávajúci 250 učitelia majú spolu aspoň $250n$ certifikátov z (najviac) $2n$ jazykov. Existuje preto jazyk J_2 (nie nutne rôzny od J_1), ktorý ovláda aspoň 125 učiteľov. Vyberme z nich nejakých 125 a zamerajme sa na zvyšok.
Pokračujme overenou metódou. Zostávajúci 125 učitelia spolu disponujú aspoň $125n$ certifikátmi z (nanajvýš) $2n$ rôznych jazykov. Preto existuje jazyk J_3, ktorým hovorí aspoň 63 učiteľov. Z nich vyberme 63 a ostane 62 učiteľov. Postup zopakujeme ešte šesťkrát a postupne vyberieme 31 učiteľov s jazykom J_4, 16 s jazykom J_5, 8 s jazykom J_6, štyroch s jazykom J_7, dvoch s J_8 a posledného učiteľa s nejakým jazykom J_9.
Tým sme ukázali, že možno vybrať deväť (nie nutne rôznych) jazykov tak, aby všetci učitelia aspoň jeden z vybraných jazykov ovládali. Keďže zvyšné jazyky možno vybrať ľubovoľne, dokázali sme tvrdenie v zadaní.

Iné riešenie:
Tvrdenie v zadaní dokážeme sporom. Inými slovami, predpokladáme, že pre každú štrnásticu jazykov existuje učiteľ, ktorý neovláda ani jeden zo 14 vybraných jazykov. Všimnime si, že každý učiteľ neovláda najviac n jazykov (z celkového počtu $2n$). Preto nutne $n \geq 14$ – v opačnom prípade prichádzame hneď k sporu.
Počet všetkých štrnástic jazykov je $\binom{2n}{14}$. Pre $n \geq 14$ každý učiteľ neovláda maximálne $\binom{n}{14}$ štrnástic jazykov. Keďže ku každej štrnástici možno priradiť aspoň jedného učiteľa, ktorý ju neovláda, nutne

$$500\binom{n}{14} \geq \binom{2n}{14}.$$

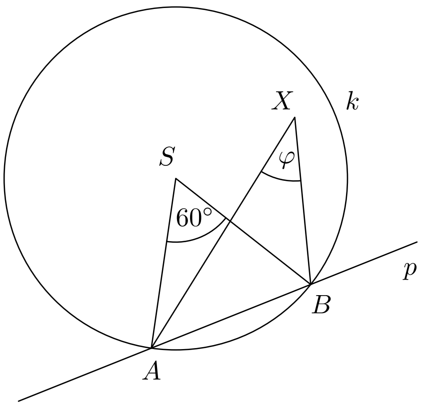
Túto nerovnosť postupne upravíme

$$500 \geq \binom{2n}{14} \Big/ \binom{n}{14} = \frac{2n!}{14!\,(2n-14)!}\,\frac{14!\,(n-14)!}{n!} = \frac{2n\,(2n-1)\dots(2n-13)}{n\,(n-1)\cdot\dots\cdot(n-13)} > 2^{14}$$

a dostávame spor. Tým sme dokázali tvrdenie v zadaní.

Úloha č. 10: *V rovine je daných* 6 *kruhov a priamka. Prienikom každého kruhu s priamkou je úsečka, ktorej dĺžka je rovná polomeru daného kruhu. Žiadne dve z týchto šiestich úsečiek nemajú spoločný bod. Dokážte, že neexistuje bod ležiaci vo vnútri všetkých šiestich kruhov.*

Riešenie: (opravoval Feldo)
Našu úlohu vyriešime sporom. Predpokladajme, že existuje bod X, ktorý leží vo všetkých kruhoch. Pozrime sa, čo znamená, že bod X leží v kruhu k. Označme S stred kruhu k a úsečku, ktorá vznikne ako prienik kruhu k s danou priamkou p označme AB (pozri obrázok).



Keďže dĺžka úsečky AB je rovná veľkosti polomeru kruhu k, tak vidíme, že trojuholník ABS je rovnostranný, teda $|\sphericalangle ASB| = 60°$. Keď bod X leží v rovnakej polrovine určenej danou priamkou ako bod S, tak nutnou a postačujúcou podmienkou na to aby ležal vo vnútri kruhu k je aby $|\sphericalangle AXB| \geq 30°$. Pokiaľ bod X leží v opačnej polrovine ako bod S, tak nutnou a postačujúcou podmienkou na to aby ležal vo vnútri kruhu je aby $|\sphericalangle AXB| \geq 150°$. Navyše bod X môže ležať na úsečke AB.
Predpokladajme, že bod X leží vo všetkých šiestich kruhoch. Prienik každého kruhu s priamkou p je úsečka. Tieto úsečky nemajú podľa zadania žiaden spoločný bod, teda bod X nemôže ležať na priamke p. Z podmienok napísaných vyššie vyplýva, že z bodu X vidno každú z úsečiek pod uhlom aspoň 30°. Potom časť priamky, ktorá obsahuje všetky naše úsečky vidno pod uhlom aspoň $6 \cdot 30° = 180°$, čo je spor. Tým sme dokázali, že neexistuje bod, ktorý leží vo všetkých kruhoch.

Poznámka: Z uvedeného riešenia je vidieť, že existuje päť kruhov, ktoré vyhovujú podmienkam zadania a majú spoločný bod. Skúsme si to dokázať. Nech je v rovine daná priamka p, zvoľme si ľubovoľný bod X, ktorý neleží na priamke p. Ako sme už vyššie ukázali, bod X leží v niektorom z daných kruhov práve vtedy, keď je z bodu X vidieť úsečku vyťatú týmto kruhom pod uhlom väčším ako 30° (teraz uvažujeme iba kruhy, ktoré majú stred v rovnakej polrovine určenej priamkou p ako bod X). Veďme bodom X priamku q rovnobežnú s priamkou p. Tá nám spolu s bodom X vytvorí priamy (veľkosti 180°) uhol. Rozdeľme teraz tento uhol na päť častí, z ktorých každá má veľkosť aspoň 32°. Zrejme v každej časti vieme nájsť na priamke p úsečku, ktorú vidno z bodu X pod uhlom 31°, tieto úsečky nemajú spoločný bod. Pomocou nich už môžeme zostrojiť päť kruhov, ktoré vyhovujú podmienkam zadania a majú spoločný bod X.

Komentár: Poprosil by som všetkých riešiteľov, aby sa snažili písať zrozumiteľné riešenia. To napríklad znamená, že keď začnem používať nejaký bod, tak by som mohol najskôr povedať, čo je to za bod (a vyhýbajte sa označeniu dvoch rôznych bodov či iných objektov rovnakým písmenom). Keď dokazujem tvrdenie sporom alebo dokazujem všeobecnejšie tvrdenie, tak to tam napíšem. Vedúci, aj keď to znie neuveriteľne, nemajú doma krištáľovú guľu, z ktorej by vedeli vyčítať vaše myšlienky. A aj vy budete mať viacej bodov.

Úloha č. 11: *Nech S je podmnožina $m+n$ mrežových bodov v obdĺžniku $m\times n$. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojníc.*

Riešenie: (opravoval Foto)
Komentár: Väčšina z vás pochopila, že v zadaní sme pod obdĺžnikom $m \times n$ mysleli obdĺžnik obsahujúci $m \times n$ mrežových bodov. Zo zadania ďalej plynie, že tento obdĺžnik je po prvé obdĺžnik a po druhé obsahuje aspoň $m+n$ mrežových bodov, z čoho vieme, že $m \geq 2$, $n \geq 2$. Niektorí z vás pochopili zadanie tak, že obdĺžnik má mať strany dĺžok m a n a mrežové body pochopili ako mrežové body vnútri tohto obdĺžnika (je ich $(m-1) \times (n-1)$). Toto bola takmer identická úloha a jej riešenie bolo hodnotené ako správne. Ospravedlňujeme sa za to, že celkové znenie zadania bolo trochu mätúce, stále však platí, že akékoľvek nejasnosti v zadaniach môžete kedykoľvek konzultovať emailom a túto možnosť využil jedine *Víťa Kala*. Najskôr si ukážeme klasické riešenie využívajúce matematickú indukciu a potom riešenie využívajúce teóriu grafov.

Riešenie podľa Michala Busa Burgera. Matematická indukcia vzhľadom na $m+n$.

1° Pre $m = n = 2$ tvrdenie zjavne platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky obdĺžniky $a \times b$, kde $2 \leq a \leq m$ a $2 \leq b \leq n$ (samozrejme okrem obdĺžnika $m \times n$). Dokážeme, že potom musí platiť aj pre obdĺžnik $m \times n$. Ak $m \neq n$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $m > n$, kde m označuje počet stĺpcov. Z *Dirichletovho princípu* vyplýva, že existuje stĺpec, v ktorom je najviac jeden bod patriaci do množiny S. Predstavme si teraz obdĺžnik $(m-1)\times n$, ktorý vznikne vynechaním tohoto stĺpca. K tomuto obdĺžniku prislúcha množina bodov, ktorá vznikla z množiny S a obsahuje $m+n-1$ alebo dokonca až $m+n$ bodov. Podľa indukčného predpokladu obsahuje tento obdĺžnik uzavretú lomenú čiaru. Potom sa ale dá nájsť analogicky k nej aj uzavretá lomená čiara v pôvodnom obdĺžniku $m \times n$.

Ak $m = n > 2$. Buď existuje riadok alebo stĺpec, kde je najviac jeden bod z S, alebo sú v každom riadku aj stĺpci práve dva takéto body. Pre prvý prípad sa to dokáže podobne ako vyššie, v druhom prípade je zrejmé, že každý bod z S je spojený s práve dvoma ďalšími bodmi. Začnime v bode B_1 a spojme ho s bodom $B_2 \in S$, ktorý leží v rovnakom riadku ako bod B_1. Bod B_2 spojme potom s bodom $B_3 \in S$, ktorý leží v rovnakom stĺpci ako bod B_2. Takto postupujme ďalej. Keďže v každom riadku aj stĺpci sú práve dva body z množiny S, tak ku každému bodu B_i vieme nájsť bod B_{i+1}, ktorý leží v rovnakom riadku resp. stĺpci ako bod B_i, pričom bod B_{i-1} ležal v rovnakom stĺpci resp. riadku ako B_i. Bodov je len konečný pocet, preto sa raz dostaneme do bodu, kde sme už boli a uzavrieme tak uzavretú lomenú čiaru. Tvrdenie teda platí aj pre obdĺžnik $m \times n$.

Riešenie podľa Hanky Budáčovej. Majme m stĺpcov a n riadkov. Postupne vyberajme $m+n$ bodov tak, že vždy, keď nejaký vyberieme, spojíme ho so všetkými už vybranými (s ktorými môžeme). Spojnicu dvoch bodov nazvime hrana. Zaoberajme sa najprv vodorovnými hranami. Keďže máme n riadkov, vieme vybrať maximálne n bodov tak, aby sme po ich výbere nedokreslili žiadnu vodorovnú hranu. Čiže vyberieme aspoň $m+n-n=m$ bodov tak, že dokreslíme vodorovnú hranu. Ak vyberieme bod na už existujúcej hrane, tak nám namiesto jednej hrany vzniknú dve a počet vodorovných hrán tiež stúpne o jedna. Počet vodorovných hrán je teda aspoň m. Podobne zvislých hrán je minimálne n. Máme $m+n$ bodov spojených aspoň $m+n$ hranami a tu už ľahko ukážeme (každý sám), že v tomto grafe existuje cyklus resp. kružnica, čiže v obdĺžniku existuje uzavretá lomená čiara.