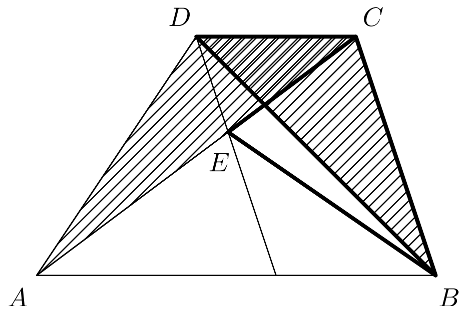
Vzorové riešenia 2. série letného semestra 2002/2003

Úloha č. 1: *Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD, |AB| > |CD|$). Bodom D veďme rovnobežku so stranou BC a jej prienik s priamkou AC označme E. Dokážte, že obsahy trojuholníkov ACD a EBC sú rovnaké.*

Riešenie: (opravoval Mazo)



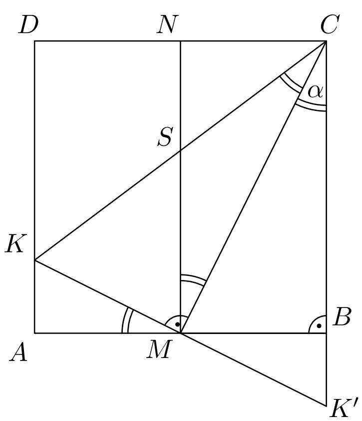
Obsah trojuholníka vieme vypočítať viacerými spôsobmi, my ho budeme počítať ako $S = av_a/2$, kde a je veľkosť základne a v_a veľkosť výšky na ňu. Dobre sa pozrime na tento vzorec. Je jasné, že ak majú dva trojuholníky rovnako veľké základne a tiež rovnako veľké zodpovedajúce výšky, tak majú aj rovnaký obsah. Skúsme takéto trojuholníky nájsť na obrázku. Napríklad sú to trojuholníky CDA a CDB, ktoré majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku rovnú vzdialenosti priamok AB a CD ($ABCD$ je lichobežník). Ďalšiu takúto dvojicu tvoria trojuholníky BCD a BCE, keďže majú spoločnú základňu BC a rovnakú výšku (rovnú vzdialenosti priamok BC a DE, ktoré sú podľa zadania rovnobežné). A máme to: trojuholník ACD má rovnaký obsah ako trojuholník BCD a ten zase rovnaký ako trojuholník BCE, preto trojuholníky ACD a BCE majú rovnaký obsah a to sme chceli dokázať.

Komentár: Veľmi slávne to nedopadlo. Preto jednu všeobecnú radu: dobre si prečítajte zadanie, najmä v korešpondenčnom seminári, kde máte dostatok času.

Úloha č. 2: *Vo štvorci $ABCD$ označme M stred strany AB. Priamka kolmá na MC, prechádzajúca bodom M, pretína stranu AD v bode K. Ukážte, že veľkosti uhlov BCM a KCM sú rovnaké.*

Riešenie: (opravovala Katka)

Ukážeme si tri rôzne riešenia tohto príkladu (a asi stále nie všetky).



Prvé riešenie: Vyznačíme bod N, ktorý je stredom úsečky CD a bod S, ktorý leží v prieniku priamok KC a MN. Nech uhol MCB má veľkosť α. Uhly MCB a CMN sú zhodné, lebo priamky MN a BC sú rovnobežné. Bod S je stredom Tálesovej kružnice, na ktorej ležia body K, M a C, lebo S delí úsečku KC na dve rovnako dlhé úsečky (dokážte sami). Potom sú aj úsečky MS a CS rovnako dlhé (obe sú polomerom kružnice). Trojuholník MCS je teda rovnoramenný s ramenami MS a CS a teda uhol SCM je rovnako veľký ako uhol SMC. Ale o ňom už vieme, že je rovnako veľký ako uhol α.

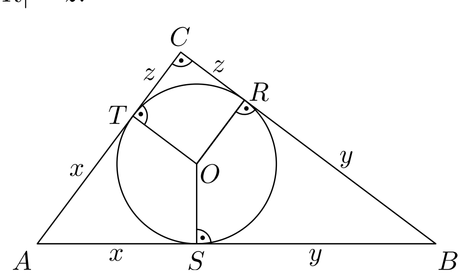
Druhé riešenie: Obraz bodu K v stredovej súmernosti so stredom M označme K'. Trojuholník AMK je potom zhodný s trojuholníkom BMK'. V trojuholníku $KK'C$ tvorí úsečka MC ťažnicu, pretože $|KM| = |K'M|$ a zároveň výšku (uhol KMC je pravý). Trojuholník $KK'C$ je potom rovnoramenný s ramenami KC a $K'C$ a úsečka MC, ktorá je aj osou uhla KCK' delí uhol na dva rovnaké uhly.

Tretie riešenie: Najprv sa bližšie pozrime na trojuholníky MBC a KAM. Tieto dva pravouhlé trojuholníky sú podobné s koeficientom podobnosti 2, čo si môžeme ľahko overiť porovnaním uhlov ($|\sphericalangle AMK| = \alpha$) a dĺžok strán ($|BC|/|AM| = 2$). Potom platí aj $|MC|/|KM| = 2$, z čoho vyplýva, že trojuholníky KMC a MBC sú podobné (oba sú pravouhlé a pre ich odvesny platí $|MC|/|KM| = |BC|/|MB| = 2$). Uhly KCM a MCB sú potom zhodné.

Úloha č. 3: *Na stene je nakreslený pravouhlý trojuholník ABC. Nech S je bod, v ktorom sa kružnica vpísaná trojuholníku ABC dotýka prepony AB. Zistite, či sa obsah trojuholníka ABC dá vypočítať ako $|AS| \cdot |BS|$? Tvrdenie zdôvodnite.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Rúža)

Nech S, R, T sú body v ktorých sa kružnica dotýka trojuholníka ABC a O jej stred. Označme x, y, z dĺžky úsečiek tak ako na obrázku. Zo zhodnosti trojuholníkov TAO a SAO (majú dve rovnako dlhé strany a príslušný uhol pravý) platí, že $|AT| = |AS| = x$. Analogicky $|BR| = |BS| = y$, $|CT| = |CR| = z$.



Vyjadrime si súčin xy. Vieme, že

$$\begin{aligned} c &= x + y \\ a &= y + z \\ b &= x + z \end{aligned}$$

Ďalej vieme, že v pravouhlom trojuholníku platí *Pytagorova* veta:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ (x+y)^2 &= (x+z)^2 + (y+z)^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2 \\ xy &= xz + z^2 + yz \end{aligned}$$

Súčin xy je teda rovný súčtu obsahov obdĺžnikov so stranami x, z a y, z a štvorca so stranou z. Plocha yz je rovná súčtu obsahov trojuholníkov BRO a BSO, plocha xz je rovná súčtu obsahov trojuholníkov TAO a SAO a z^2 je obsah štvorca $CTOR$. Keďže trojuholnníky BRO, BSO, TAO, SAO a štvorec $CTOR$ spolu tvoria trojuholník ABC, súčin xy je obsahom trojuholníka ABC. Teraz sa na to poriadne pozrime. V oboch rovnostiach sme pri upravovaní používali ekvivalentné úpravy a na konci sme dostali tú istú rovnosť. To znamená, že ak platí Pytagorova veta, potom platí aj tvrdenie, ktoré sme chceli, aby platilo. Teda platí, že obsah pravouhlého trojuholníka ABC zo zadania je $|AS| \cdot |SB|$.

Úloha č. 4: *Na lúke v lese je ohnisko. Foto sa postavil do jeho stredu a otočil sa nejakým smerom. Potom sa vydal rovno za nosom a po nejakom čase sa zastavil (nevošiel do lesa). Na kartičku si zapísal azimut, ktorým išiel a počet krokov, ktorý urobil. Z miesta, kde ostal stáť, potom tento postup zopakoval, údaje si však zapísal už na novú kartičku. Toto opakoval, až kým nepopísal* 12 *kartičiek, ktoré mal zo sebou. Všetky azimuty boli rôzne. Tam, kde zostal stáť, zakopal poklad. Kartičky zamiešal a dal ich Ferimu s Feldom so stručným komentárom: "Začnite v ohnisku."*

a) *Dá sa pomocou tých kartičiek nájsť poklad aj keď sú pomiešané? Svoje tvrdenie dokážte.*

Oni to nevedeli a začali sa s kartičkami hrať. Postavili sa do ohniska. Feldo si zobral 11 *kartičiek a vydal sa podľa nich. Feri si zobral zvyšnú a posunul sa podľa tej. Všimli si, že stred ohniska ležal na ich spojnici. Po celodennej zábave zistili, že sa táto vlastnosť zachová, ak si Feldo vyberie hociktorú postupnosť hociktorých* 11 *kartičiek.*

b) *Vedeli by ste po tomto zistení nájsť presnú polohu pokladu aj bez kartičiek?*

Pozn.: Ak náhodou neviete, čo je azimut, nalistujte si v Príručke pre mladých Svišťov kapitolu Práca s buzolou.

Riešenie: (opravoval Foto)

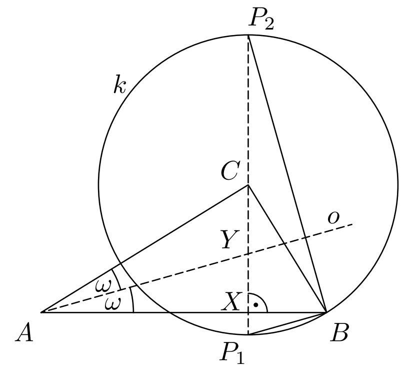
a) Väčšina z vás si všimla, že každá kartička obsahuje údaje, pomocou ktorých je jednoznačne zakódovaný nejaký vektor. Počet krokov určuje jeho veľkosť a azimut jeho orientáciu. Tento postreh však nebol nevyhnutný pre vyriešenie príkladu. Predstavme si súradnicový systém so stredom (bodom $[0, 0]$) v ohnisku, s x–ovou osou orientovanou smerom na východ a s y–ovou na sever. Každé posunutie zapísané na niektorej z kartičiek sa dá zložiť z dvoch posunutí a to o d_x v x–ovom smere ($d_x = 0$, ak je azimut $0°$ alebo $180°$, $d_x > 0$ ak je azimut väčší ako $0°$ a menší ako $180°$ a $d_x < 0$, ak je azimut väčší ako $180°$) a podobne o d_y v y–ovom smere. Ak použijeme všetkých 12 kartičiek v nejakom poradí, dôjdeme na nejaké miesto $M = [m_x, m_y]$. Platí $m_x = d_{x1} + d_{x2} + \cdots + d_{x12}$ a $m_y = d_{y1} + d_{y2} + \cdots + d_{y12}$, čiže poloha miesta, kde ukončíme svoju púť nezávisí od poradia kartičiek a poklad sa podľa nich dá nájsť aj keď sú pomiešané. Pre tých, čo majú radi vyššie spomínané vektory, práve sme dokázali komutatívnosť operácie súčet vektorov.

b) Označme O stred ohniska a X miesto, kde je zakopaný poklad (ako na pirátskych mapách). Zoberme jednu z kartičiek a pošlime Feriho z ohniska podľa nej. Bod, kde zastaví, nazvime R_1. Už sme ukázali, že ak pôjde Feldo podľa zvyšných 11 kartičiek v ľubovoľnom poradí, vždy skončí v tom istom bode. Tento nazvime L_1. Zo zadania vieme, že bod O leží niekde na úsečke R_1L_1. Nemusí však byť nutne v strede, ako zadanie interpretovali niektorí z vás. Teraz vidíme, že ak by Feldo zo svojej pozície išiel podľa poslednej (Feriho) kartičky, ostal by stáť niekde na priamke OR_1. Čiže bod X leží na priamke OR_1. Podobne vieme ukázať, že bod X leží na každej z priamok $OR_2, OR_3, \ldots, OR_{12}$, kde body $R_2, R_3, \ldots, R_{12}$ sú body, kde sa ocitne Feri, ak sa vydá z ohniska podľa niektorej zo zvyšných jedenástich kartičiek. Keďže na kartičkách boli rôzne azimuty, medzi týmito dvanástimi priamkami poľahky nájdeme dve rôznobežné. Bod X leží na každej z nich, preto musí ležať na ich prieniku a ním je bod O. Na základe celodenných pochodových manévrov Feriho a Felda sme zistili, že poklad je zakopaný rovno pod ohniskom a kartičky už môžeme pokojne spáliť.

Poznámka: Tí, čo majú radi reč vektorov, asi vedia, že by sme podobne vedeli dokázať napríklad aj nasledujúce tvrdenie. Máme n vektorov, ktoré nie sú všetky rovnobežné. Ak každý vektor, ktorý je súčtom niektorých $n - 1$ vektorov, je rovnobežný zo zvyšným vektorom, súčet všetkých n vektorov je 0.

Úloha č. 5: *Zadaný je nejaký pravouhlý trojuholník ABC. Zostrojme bod P tak, že priamka PC je kolmá na preponu AB a $|PC| = |BC|$. Presvedčte nás, že priamka BP je buď rovnobežná alebo kolmá na os vnútorného uhla pri vrchole A.*

Riešenie: (opravovali Erika a Paľo)



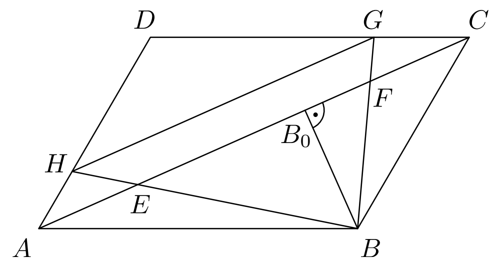
Označme o os uhla CAB a ω polovicu veľkosti uhla CAB. Ďalej nakreslime priamku p, ktorá prechádza bodom C a je kolmá na stranu AB. Priesečník priamky p so stranou AB označme X a jej priesečník s osou o označme Y. Pre bod P máme dve možné polohy na priamke p (označme ich P_1, P_2), ktoré dostaneme ako prienik tejto priamky s kružnicou k s polomerom $|BC|$ a stredom C. Keďže k je Tálesova kružnica nad priemerom P_1P_2, tak uhol P_1BP_2 je pravý. Dokážme, že os o je rovnobežná s priamkou P_1B. Z trojuholníka ABC vyplýva, že $|\sphericalangle CBA| = 90° - 2\omega$. Potom z trojuholníka XBC vyplýva, že $|\sphericalangle XCB| = 2\omega$. Keďže trojuholník CP_1B je rovnoramenný, tak $|\sphericalangle CBP_1| = |\sphericalangle CP_1B| = 90° - \omega$. Vyjadrime si teraz veľkosť uhla ABP_1:

$$|\sphericalangle ABP_1| = |\sphericalangle P_1BC| - |\sphericalangle ABC| = \omega$$

Uhly ABP_1 a XAY majú rovnakú veľkosť a teda priamky o, P_1B sú rovnobežné. Tým sme dokázali tvrdenie pre bod P_1.
Teraz využijeme spomínanú Tálesovu kružnicu k. Vieme, že priamka P_2B je kolmá na priamku P_1B, pričom táto je rovnobežná s osou $o \implies P_2B \perp o$. Tým sme tvrdenie dokázali pre obidve možné polohy bodu P.

Úloha č. 6: *V rovnobežníku $ABCD$ sú na diagonále AC zvolené body E a F tak, že $|AE| = |FC|$. Priamka BF pretne stranu CD v bode G a priamka BE pretne stranu AD v bode H. Dokážte, že $GH \parallel AC$.*

Riešenie: (opravovali Aňa a Šesťo)



Nuž vyhrňme si rukávy a poďme dokázať, že $GH \parallel AC$. Na to nám stačí ukázať, že vzdialenosti bodov H a G od priamky AC sú rovnaké (premysli si!). Na obrázku máme rovnobežník $ABCD$. Všimnime si tieto dvojice podobných trojuholníkov:

1. $\triangle CFG \sim \triangle AFB$ (podľa vety uu), lebo
   $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle GCF|$ (striedavé uhly) a $|\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle CFG|$ (vrcholové uhly).
   Pomer podobnosti týchto trojuholníkov je $k_1 = \frac{|AF|}{|CF|}$.

2. $\triangle AEH \sim \triangle CEB$ (podľa vety uu), lebo
   $|\sphericalangle HAE| = |\sphericalangle BCE|$ (striedavé uhly) a $|\sphericalangle HEA| = |\sphericalangle BEC|$ (vrcholové uhly).
   Pomer podobnosti týchto trojuholníkov je $k_2 = \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|AC|-|AE|}{|AE|} = \frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AF|}{|FC|} = k_1$.

Ukázali sme, že pomery podobnosti trojuholníkov CFG, AFB a AEH, CEB sú rovnaké $(*)$. Všimnime si trojuholníky AFB a CEB. Majú rovnako dlhé základne ($|AF| = |AC| - |CF| = |EC|$) a k týmto základniam prislúcha rovnaká výška BB_0. Ich obsahy sú rovnaké ($S_{\triangle AFB} = S_{\triangle CEB}$). Keďže platí $(*)$, tak $S_{\triangle AEH} = S_{\triangle CFG}$. Čo z toho môžeme vyvodiť? Rovnosť $|AE| = |FC|$ platí zo zadania a teda výšky na tieto strany v trojuholníkoch AEH a CFG musia byť rovnaké. To znamená, že vzdialenosť bodu H od AE je rovná vzdialenosti bodu G od FG. Tým sme dokázali, že vzdialenosti H a G od priamky AC sú rovnaké a $GH \parallel AC$.

Poznámka: Ak ste strany brali ako úsečky, tak muselo platiť $|AE| < |AC|/2$. Alebo ste ich mohli považovať za priamky, potom by riešenie platilo pre ľubovoľne zvolený bod E na uhlopriečke AC.

Komentár: V príklade bolo treba dokázať tvrdenie: Ak sú splnené podmienky zadania, tak platí $GH \parallel AC$ (1). Niektorí vychádzali z toho, že platí $GH \parallel AC$ a z toho ukázali, že potom sú splnené podmienky zadania. Čiže dokázali obrátené tvrdenie: Ak $GH \parallel AC$, tak platí zadanie (2). To nestačí, pretože sa môže stať, že podmienky zadania splnené boli a $GH \nparallel AC$, čiže (1) platí, ale (2) nie!

Úloha č. 7: *Vymyslite príklad, ktorého riešením je rovnoramenný trojuholník s jedným uhlom veľkosti 72°. Pozor, zadanie nesmie obsahovať žiadne čísla, ani slová so slovným základom akejkoľvek číslovky (napr. dvojnásobok a pod.).*

Riešenie: (opravovali Debo a Pišta)
Riešenie podľa Hanky Sikhartovej:
Zadanie: Miško bol veľmi hyperaktívny a chudák chcel sa vybehať. Na pomoc si zavolal Janku a Ferka. Janka mala merať čas a Ferko označovať štart a cieľ. Janka sa postavila uprostred nekonečnej lúky a celú súťaž sa nepohla ani neotočila. Držala v ruke koniec míľového špagátu. Ďalší koniec chytil do ruky Miško. Ferko stál na mieste tam, kde stál Miško na začiatku a nepohol sa počas celej hry. Janka sa pozrela na hodinky aby odštartovala Miška. Malú ručičku nasmerovala na nehybného Ferka a odštarovala na pravé poludnie. Miško sa rozutekal (preč od Ferka). Počas behu, ako aj pri odštartovaní, bol špagát stále napnutý, aby bežal po obvode kruhu. Janka si všimla, že počas celej súťaže ukazovala veľká ručička jej hodiniek na Miška (Miško a ručička sa pohybovali rovnakou uhlovou rýchlosťou). Vrcholy akého plošného geometrického útvaru tvorili deti, keď veľká ručička na Jankiných hodinkách

ukazovala toľko minút, koľko malá ručička hodín? Uvažujte, že Miško nebežal viac ako hodinu. Pohyb malej ručičky zanedbajte.
Korektnosť zadania: $360^\circ : 60$ min $= 6^\circ \Rightarrow 1$ min na hodinkách $= 6^\circ$; 12 min $= 72^\circ$. Hneď, chvíľu po odštartovaní, deti tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka, ktorého ramená zvierajú uhol 72°.

Komentár: Týmto príkladom sme chceli rozvíjať vaše tvorivé schopnosti, ale namiesto toho sme dostali riešenia na tému ako zostrojiť trojuholník s jedným 72°–ovým uhlom v zadaní bez čisloviek. Samozrejme bolo treba dokázať, že riešením bude naozaj trojuholník s jedným 72–stupňovým uhlom. Zadania, ktoré obsahovali slová s číslovkovým základom, boli príslušne odmenené podľa toho, akú úlohu tam hrala tá číslovka. Ak si teraz pozriete výsledkovú listinu, zistíte, že málokto vyriešil tento príklad bezchybne.

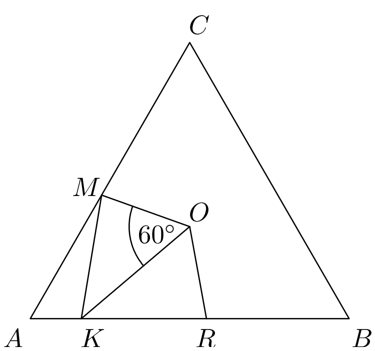
Úloha č. 8: *Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Na kružnici k_1 sú ďalej dané dva rôzne body C a D tak, že sečnica BC kružnice k_1 vytína na kružnici k_2 ďalší bod E, podobne sečnica BD kružnice k_1 vytína na kružnici k_2 bod F. Dokážte, že ak sú úsečky DF a CE rovnako dlhé, tak bod A je rovnako vzdialený od priamok BC a BF.*

Riešenie: (opravoval Rado)

Označme X ľubovoľný bod na kružnici k_1 tak, že sečnica BX vytína na kružnici k_2 druhý bod, ktorý označme Y. Všimnime si trojuholník AXY. Uhol pri bode X bude stále ten istý pre každú polohu bodu X, lebo je to obvodový uhol prislúchajúci oblúku AB na kružnici k_1 (daný uhol bude rovnaký pre všetky polohy bodu X na k_1, rozmyslite si !). To isté platí aj pre uhol pri bode Y. Ak si nahradíme bod X bodmi C a D, tak zistíme, že trojuholníky ACE a ADF majú rovnaké uhly a navyše majú rovnakú stranu ($|CE| = |DF|$), teda sú zhodné podľa vety *usu*. Keďže sú zhodné, tak majú aj rovnako veľké výšky vedené z bodu A, čo sú zároveň vzdialenosti bodu A od priamok CE a DF. To sme chceli dokázať.

Úloha č. 9: *Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom O. Na stranách AB a AC vyznačme po rade body K a M tak, aby platilo $|\sphericalangle KOM| = 60^\circ$. Dokážte, že obvod trojuholníka KAM je rovný dĺžke strany AB.*

Riešenie: (opravovali Šaňo a Tina)



Nech body K a M vyhovujú zadaniu. Potom nutne (dokážte si sami)

$$|AM| < \frac{1}{2}|AC| \qquad |AK| < \frac{1}{2}|AB|. \tag{1}$$

Označme R bod na úsečke AB (presnejšie na úsečke KB, vďaka (1)) taký, že

$$|AM| = |RB|. \tag{2}$$

Keďže O je ťažiskom rovnostranného trojuholníka ABC, bod R je obrazom bodu M v otočení o 120° proti smeru hodinových ručičiek okolo bodu O. Okrem iného potom platí

$$|OM| = |OR|, \qquad |\sphericalangle KOR| = 120^\circ - |\sphericalangle KOM| = 60^\circ = |\sphericalangle KOM|.$$

Keďže trojuholníky KOR a KOM majú navyše spoločnú stranu KO, sú podľa vety *sus* zhodné a

$$|KR| = |KM|. \tag{3}$$

Využijeme vzťahy (2) a (3) a dostávame

$$|AK| + |KM| + |MA| = |AK| + |KR| + |RB| = |AB|,$$

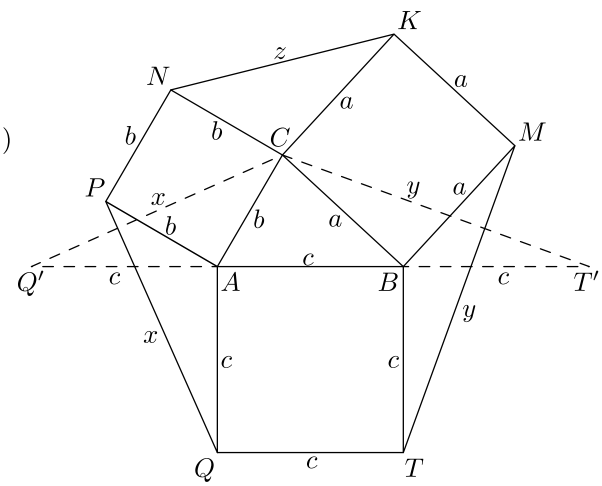
čo sme chceli dokázať.

Úloha č. 10: *Nad stranami trojuholníka ABC zostrojme zvonka štvorce $BCKM$, $BAQT$, $ACNP$. Označme si p_1 obvod trojuholníka ABC a p_2 obvod šesťuholníka $MKNPQT$. Dokážte nerovnosti*

$$5p_1 < 2p_2 < 6p_1.$$

Riešenie: (opravoval Peťo)

Po nakreslení obrázka si ľahko všimneme, že niektoré strany má náš šesťuholník rovnako veľké ako trojuholník ABC. Takže nerovnosti, ktoré máme dokázať, sa asi budú dať trochu prepísať po odpočítaní týchto spoločných častí. Označme si dĺžky strán trojuholníka ABC štandardne (tj. a, b, c) a dĺžky zvyšných úsekov na obvode šesťuholníka x, y, z (tak ako na obrázku).



Máme dokázať nerovnosti

$$5(a+b+c) < 2(a+b+c+x+y+z) < 6(a+b+c)\,,$$

ktoré sú zrejme ekvivalentné (po odpočítaní výrazu $2(a+b+c)$) s nerovnosťami

$$3(a+b+c) < 2(x+y+z) < 4(a+b+c)\,.$$

Dokážme najprv druhú nerovnosť. Už od začiatku to vyzerá tak, že sa budú využívať trojuholníkové nerovnosti (čo myslíte, prečo?), ďalej len TN. Hľadajme trojuholníky, v ktorých po použití TN dostaneme, že nejaký výraz s písmenkami a, b, c je väčší ako nejaký výraz s písmenkami x, y, z. Hneď vidno, že také trojuholníky sú PAQ, TBM a KCN. Takže podľa TN v nich máme

$$b+c > x\,, \quad c+a > y \quad \text{a} \quad a+b > z\,.$$

Sčítaním týchto nerovností dostaneme $2(a+b+c) > x+y+z$, čo po vynásobení dvomi dá presne to, čo chceme. Pozrime sa teraz na prvú nerovnosť. Radi by sme pre zmenu našli trojuholníky, v ktorých po použití TN dostaneme, že nejaký výraz s písmenkami x, y, z je väčší ako nejaký výraz s písmenkami a, b, c. Také tam zatiaľ nie sú. Nuž, musíme si ich vyrobiť. Presnejšie, musíme vyrobiť trojuholníky, ktorých dve strany majú dĺžku zapísateľnú písmenkami x, y, z a jedna strana dĺžku zapísateľnú písmenkami a, b, c. K tomu nám pomôže informácia o uhloch. Totiž, súčet veľkostí uhlov PAQ a CAB je $180°$ (lebo v súčte s dvomi pravými uhlami zo štvorcov $ABTQ$ a $ACNP$ dajú $360°$). To znamená, že keď otočíme trojuholník PAQ o $90°$ okolo bodu A, bod P sa dostane do bodu C, bod A ostane na mieste a bod Q sa zobrazí do bodu Q', pričom vďaka spomenutej vedomosti o uhloch ležia body Q', A a B na jednej priamke. Naviac $|Q'C| = x$ a $|Q'A| = c$ (otočením sa dĺžky nezmenia). Podobne otočíme aj trojuholník MBT okolo bodu B (len v opačnom smere). Dostaneme bod T' taký, že $|T'C| = y$, $|T'B| = c$ a body T', B a A ležia na jednej priamke. Spolu máme trojuholník $Q'T'C$ a v ňom podľa TN žiadané

$$x+y > 3c\,.$$

Zrejme podobným postupom dostaneme nerovnosti

$$y+z > 3a \quad \text{a} \quad z+x > 3b\,.$$

Sčítaním týchto troch nerovností už získame požadované $2(x+y+z) > 3(a+b+c)$.

Komentár: Nerovnosť, ktorú sme dokazovali ako prvú, bola oveľa ľahšia, preto za ňu boli len dva body. Ťažšia nerovnosť sa dala vyriešiť aj bez triku s otáčaním (ten ste použili šiesti, správnych riešení bolo devätnásť). Jeden spôsob je objavenie, že $x = 2t_a$ (a podobne aj $y = 2t_b$ a $z = 2t_c$, kde t_a, t_b, t_c sú dĺžky ťažníc v trojuholníku ABC), čo najľahšie vidno z podobnosti trojuholníkov PAQ a AS_bS_a (S_a a S_b sú stredy strán BC a AC). Druhý spôsob je pozorovanie, že trojuholníky PAQ, TBM a KCN sa dajú zlepiť do jedného trojuholníka, pričom bod, v ktorom sa budú stretať, je ťažisko toho trojuholníka (prečo?). Dokončiť tieto dva spôsoby už zvládnete sami. Stačí si uvedomiť, v akom pomere sa ťažnice pretínajú a využiť nejaké TN.

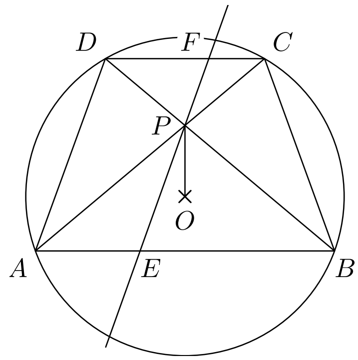
Úloha č. 11: *Označme P priesečník uhlopriečok tetivového štvoruholníka $ABCD$. Bodom P veďme priamku ktorá pretína strany AB a CD v bodoch E a F. Ukážte, že platí ekvivalenicia*

$$|PE| = |PF| \iff EF \perp PO,$$

kde O označuje stred kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$.

Riešenie: (opravoval Tomáš)
Ukážeme si dve riešenia a tretie naznačíme.
Podľa Peťa Matáka: Z vety o obvodových uhloch pre tetivový štvoruholník $ABCD$ platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$ a $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. Potom vidíme, že

$$\triangle ABP \sim \triangle CDP \text{ (podľa vety } uu). \tag{4}$$



Rozoberme najprv špeciálny prípad, ak $AB \parallel CD$, teda $ABCD$ je lichobežník. Navyše vieme, že $ABCD$ musí byť tetivový, preto je to rovnoramenný lichobežník (presvedčte sa!). Prizrime sa na ekvivalencie zo zadania

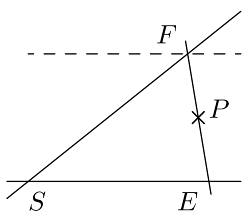
$\boxed{\Rightarrow}$

Zo zhodnosti trojuholníkov AEP a CFP (podľa vety *usu* – vrcholové uhly pri vrchole P, rovnobežnosti základní lichobežníka $ABCD$ a predpokladu $|PE| = |PF|$) máme, že sa zhodujú aj trojuholníky ABP a CDP (z (4) sú podobné, ale z predchádzajúcej zhodnosti majú aj rovnakú stranu $|AP| = |CP|$), t.j. $|AB| = |CD|$. Vidíme, že náš rovnoramenný lichobežník musí byť v tomto prípade obdĺžnik. Potom zrejme $P \equiv O$ a platí $EF \perp PO$, pretože každý bod je kolmý na priamku, ktorá nim prechádza (trochu patologické, ale je to tak).

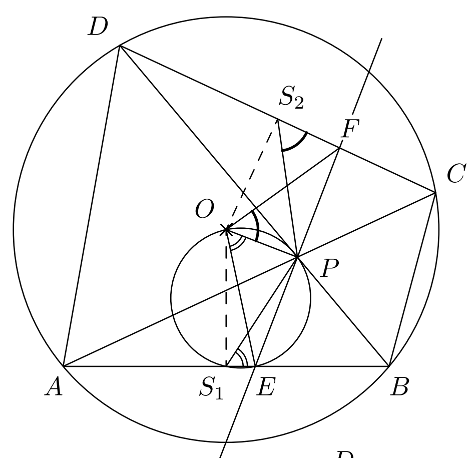
$\boxed{\Leftarrow}$

Pretože $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník, tak je osovo súmerný podľa priamky PO. Potom platí $PO \perp AB$. Keďže predpokladáme, že $EF \perp PO$ a zároveň $PO \perp AB$, tak nutne $PO \parallel AB$ a bod E nevznikne. Teda v prípade $AB \parallel CD$ (a $ABCD$ nie je obdĺžnik) nemôže byť $EF \perp PO$. Opäť sa naskytá prípad $P \equiv O$ (keď $ABCD$ je obdĺžnik). Potom je predpoklad $EF \perp PO$ vždy splnený. Máme ukázať, že potom platí $|PE| = |PF|$. Vieme, že $ABCD$ je obdĺžnik, podobne ako už bolo napísané, zo zhodnosti (4) vyplýva zhodnosť trojuholníkov AEP a CFP a nutne $|PE| = |PF|$.

Ďalej predpokladajme, že $AB \nparallel CD$. Ukážeme, že existuje jediná poloha bodu E (a ním určený bod F) taká, že platí $|PE| = |PF|$.



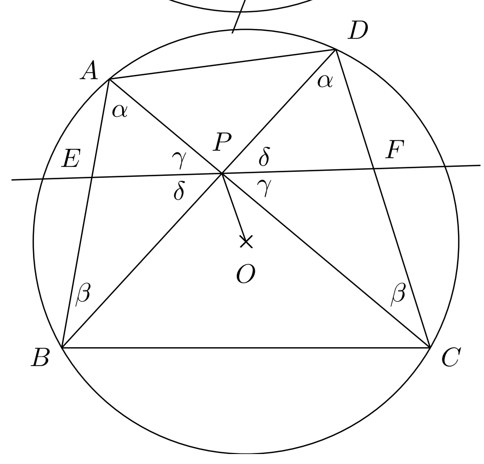
Nech sa priamky AB a CD sa pretnú v bode S. Chceme na ramenách uhla ASD zvoliť body E a F tak, aby $|PE| = |PF|$. Bod E, ktorý leží na ramene SA, sa musí v stredovej súmernosti podľa bodu P zobraziť na bod F, ktorý leží na ramene SD. Teda keď zostrojíme obraz ramena SD v stredovej súmernosti podľa P, tak priesečník s ramenom SA (ktorý bude práve jeden) bude hľadaný bod E. Takto sme sa to učili v škole, nie? To znamená, že exituje jediná možnosť, ako zvoliť priamku EF tak, aby platilo $|PE| = |PF|$. Na dôkaz zadanej ekvivalencie preto stačí ukázať už len druhú implikáciu, t.j. ak $EF \perp PO \Rightarrow |PE| = |PF|$ (premyslite si prečo!).



Pozrime sa na ďalší obrázok a označme si stredy strán štvoruholníka tak ako na obrázku. Z podobnosti trojuholníkov uvedenej v (4) vyplýva, že ťažnica PS_1, resp. PS_2, zviera rovnaký uhol so stranou AB, resp. CD. Inak povedané $|\sphericalangle BS_1P| = |\sphericalangle CS_2P|$. Iste sa nemusíme presviedčať o tom, že $OS_1 \perp AB$ a $OS_2 \perp CD$. Z predpokladu $EF \perp PO$ hneď máme dva tetivové štvoruholníky OS_1EP a OS_2FP (kvôli pravým uhlom nad priemermi PS_1 a PS_2). Teraz je to už jednoduché, keď sa pozrieme na obrázok a spomenieme si na obvodové uhly, nie? Dáme si dokopy rovnosti uhlov

$$\underline{|\sphericalangle EOP|} = |\sphericalangle BS_1P| = |\sphericalangle CS_2P| = \underline{|\sphericalangle FOP|}.$$

Potom výška OP ($EF \perp PO$) trojuholníka EOF je aj osou uhla EOF a preto je trojuholník EOF rovnoramenný so základňou EF, ktorá je pätou výšky PO rozdelená na polovicu. Hotovo!



Podľa Hanky Budáčovej: Toto riešenie je skvelé v tom, že si nevyžaduje špeciálnu diskusiu, ale potrebujeme poznať sínusovú vetu. Ak označíme uhly podľa obrázka a napíšeme sínusové vety pre trojuholníky APE, BPE, CPF a DPF, tak dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \frac{|PE|}{\sin\alpha} &= \frac{|AE|}{\sin\gamma} \\ \frac{|PE|}{\sin\beta} &= \frac{|BE|}{\sin\delta} \end{aligned}\right\} \quad |PE|^2 = \frac{|AE|\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{|BE|\cdot\sin\beta}{\sin\delta}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{|PF|}{\sin\beta} &= \frac{|CF|}{\sin\gamma} \\ \frac{|PF|}{\sin\alpha} &= \frac{|DF|}{\sin\delta} \end{aligned}\right\} \quad |PF|^2 = \frac{|DF|\cdot\sin\alpha}{\sin\delta}\cdot\frac{|CF|\cdot\sin\beta}{\sin\gamma},$$

z čoho hneď dostaneme kľúčový vzťah

$$\left(\frac{|PE|}{|PF|}\right)^2 = \frac{|AE|\cdot|BE|}{|CF|\cdot|DF|} = \frac{r^2 - |OE|^2}{r^2 - |OF|^2}, \tag{5}$$

ktorý sme rozšírili znalosťou mocnosti bodu E resp. F ku kružnici opísanej štvoruholníku $ABCD$ (ktorej polomer sme prezieravo označili r).

Ukážme požadované tvrdenie v dvoch implikáciách.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ak $|PE| = |PF|$, tak podľa vzťahu (5) dostávame $r^2 - |OE|^2 = r^2 - |OF|^2$, z čoho máme $|OE| = |OF|$, trojuholník OEF je teda rovnoramenný so základňou EF, preto $EF \perp PO$ (ťažnica je kolmá na základňu rovnoramenného trojuholníka).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ak $EF \perp PO$, tak použitím Pytagorovej vety na trojuholníky EOP a FOP dostaneme $|OE|^2 = |PO|^2 + |PE|^2$ a $|OF|^2 = |PO|^2 + |PF|^2$. Dosadením do kľúčového vzťahu (5) a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{|PE|^2}{|PF|^2} &= \frac{r^2 - (|PO|^2 + |PE|^2)}{r^2 - (|PO|^2 + |PF|^2)}\\ |PE|^2\left(r^2 - |PO|^2\right) &= |PF|^2\left(r^2 - |PO|^2\right).\end{aligned}$$

Pretože bod P leží vo vnútri kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$ (so stredom O a polomerom $r = |OA|$), tak $r^2 - |PO|^2 > 0$. Po vykrátení a odmocnení dĺžok dostávame, po čom nám duša piští.

Podľa Tomáša Váňu: Tu uvediem len návod. Podobne ako v prvom riešení sa ošetrí prípad $AB \parallel CD$. Skúste si zobraziť celý štvoruholník $ABCD$ v osovej súmernosti podľa priamky PO, tento obraz označte $A'B'C'D'$. Uvedomte si, ako je možné zostrojiť body E, F tak, aby platilo $|PE| = |PF|$. Jediným kandidátom je priesečník priamok $A'B'$ a CD ($X = \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{CD}$). Ťažisko riešenia sa tak presunie na dôkaz toho, že $PX \perp PO$. Na to sa použije prekvapujúci fakt, že štvoruholníky $A'PXD$ a $CPXB'$ sú tetivové.

Komentár: Chceli by sme podotknúť niekoľko detailov.
1) S patologickým prípadom $P \equiv O$ sa treba naučiť žiť a nezabaliť úlohu s tým, že je to kontrapríklad.
2) Fráza „pretína stranu“ znamená, že priesečník leží vo vnútri strany t.j. nie je to ani jeden z krajných bodov úsečky (nemuseli ste sa zaoberať prípadmi $A \equiv E$ alebo $B \equiv E$).
3) Potešili ste nás, že sme sa trápili s tým, ktoré z vašich pekných riešení sa nám sem už nezmestí…