Korešpondenčný Matematický Seminár

Milí naši riešitelia!

Tak sme úspešne uzavreli záverečnú sériu prvého ročníka seminára KMS, pokračovateľa BKMS a SKMS. V rukách máte vzorové riešenia tretej série s komentármi a s celkovými poradiami. Máte tu aj vložený detský kútik a neprehliadnite tiež pozvánku na júlovú stanovačku (tou nadväzujeme na tradíciu stanovačiek SKMS). Tí, ktorým sa tento semester najviac darilo, nájdu samozrejme medzi doručenou zásielkou pozvánku (alebo náhradnícku pozvánku) na letné sústredenie.
Veríme, že sa vám úlohy seminára páčili a že nám ostanete verní aj v budúcom roku. Zadania úvodnej série vám pošleme začiatkom septembra. Želáme príjemný prázdninový oddych.

Vaši vedúci

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Ráno o 8^{00} vyrazil z kláštora mních, aby vystúpil na svätý kopec. Na vrchole sa ocitol presne napoludnie. Tam meditoval a na tretí deň ráno o 8^{00} začal zostupovať. Vracal sa rovnakou cestou a do kláštora dorazil presne o 12^{00}. Dokážte, že existuje miesto, cez ktoré pri svojej púti prechádzal v oboch smeroch presne v rovnaký čas. Pozor, mních nemusel kráčať rovnomerne!*

Riešenie: (opravovala Janka)
Ako mnohí poznamenali (a potešili sa), táto úloha bola ľahká a teda hor sa do riešenia. Predstavme si, že práve v tom okamihu, keď mních začne zostupovať zo svätého kopca, t.j. 8^{00} ráno, vyrazí z kláštora stopovací pes. Ten ide na svätý kopec presne tak, ako išiel mních pred tromi dňami (teda nejde len rovnakou cestou, ale presne tak, ako vtedy mních). Je jasné, že mních vracajúci sa do kláštora a pes sa na ceste stretnú. A keďže pes vlastne kopíruje mníchov pohyb spred troch dní, tak miesto ich stretnutia je vlastne miesto, cez ktoré mních pri svojej púti prechádzal v oboch smeroch v rovnakú dennú dobu.

Úloha č. 2: *Štyria kamaráti, Foto, Feldo, Jano a Peťo, videli v televízii zástup Číňanov (stáli v rade za sebou). Foto si všimol, že prvý Číňan má červenú šatku. Feldo si všimol, že ak má nejaký Číňan červenú šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý je 13 miest pred ním a 13 miest za ním (ak takí existujú). Jano si všimol, že ak má nejaký Číňan červenú šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý je 5 miest pred ním a 5 miest za ním (takisto iba ak existujú). Peťo počul, že ich je 10 000. Potom vypadol prúd a všetkých začalo zaujímať, koľko Číňanov vlastne malo červenú šatku. Viete im poradiť?*

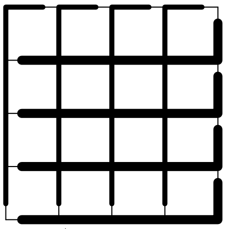
Riešenie: (opravovala Erika)
Očíslujme si našich Číňanov číslami 1 až 10000. Vieme, že prvý má šatku a že ak má nejaký Číňan šatku, tak ju má aj Číňan stojaci trinásť miest za ním a pred ním. Na základe toho môžeme povedať, že šatku majú aj Číňania s číslami 14, 27, 40, 53. Ďalej vieme, že ak má nejaký Číňan šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý stojí päť miest pred ním a za ním. Takže ak má šatku Číňan 14, tak ju majú aj 4, 9, 19, 24, 29, …, teda každý Číňan, ktorého číslo končí cifrou 4 alebo 9. Keďže Číňan 27 má šatku, tak ju musí mať aj každý Číňan s číslom zakončeným cifrou 2 či 7. Podobný postup zopakujeme pre Číňanov 40, 53 a 1. Zistíme, že šatku majú tí Číňania, ktorých čísla končia číslicami 0, 1, …, 9, teda všetci.

Úloha č. 3: *Palindróm je číslo, ktoré keď napíšeme odpredu i odzadu, tak vyzerá rovnako (napr. 12321). Nájdite všetky palindrómové dvojičky, t.j. palindrómy, ktorých rozdiel je 2. Predpokladáme, že čísla sú zapísané v desiatkovej sústave.*

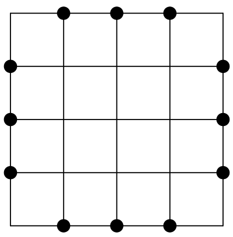
Riešenie: (opravoval Malic)
Úloha bola pomerne ľahká a väčšina z vás ju hravo zvládla. Nebudeme sa zaoberať zápornými číslami, lebo nevieme, či sú to palindrómy. Problém totiž robí znamienko mínus. Netreba zabudnúť na jednociferné čísla, teda máme 8 riešení: $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,7)$, $(6,8)$, $(7,9)$, $(9,11)$. Teraz sa pozrieme, akú cifru môže mať menší palindróm. Ak je posledná cifra 1, 2, 3, 4, 5, 6 alebo 7, ľahko zistíme, že číslo o dva väčšie nemôže byť palindróm (uvážte si). Ak by to bola cifra 8, tak číslo o dva väčšie bude končiť na 0, teda to opäť nemôže byť palindróm, lebo palindrómy nemôžu začínať na 0. Teda nutne musí byť posledná cifra 9. Teda číslo o dva väčšie musí začínať a končiť na 1, to je možné, len ak menší palindróm obsahoval len samé deviatky (dôkaz opäť nechávam na vás). Teda nakoniec sme dostali, že riešením je 8 triviálnych riešení a nekonečne veľa riešení tvaru $(10^k-1,\ 10^k+1)$, kde k je prirodzené číslo väčšie ako 1.

Úloha č. 4: *Zistite, či sa dá štvorcová sieť* 4×4 *nakresliť*
a) 8 *lomenými čiarami dĺžky* 5
b) 5 *lomenými čiarami dĺžky* 8
Dĺžka strany malého štvorčeka je 1 *a lomené čiary sa môžu ľubovoľne prekrývať.*

Riešenie: (opravoval Miki)



Na vyriešenie prvej časti príkladu stačilo zobrať farebnú ceruzku a chvíľu si omaľovávať :-), pričom ak v tom mal niekto systém, tak sa to urýchlilo. Na obrázku je jedno z možných riešení.
Druhá časť bola o niečo ťažšia (žiadne béčko :-)) a na tú už bolo treba aj rozmýšľať. Najprv si náš obrázok zo zadania nazveme. Body, ktoré ležia vo vrcholoch tých malých štvorčekov o strane 1, nazveme vrcholy (pre skúšku: má ich tam byť 25), tie čiary, ktoré ich spájajú, budú hrany. Všetky hrany majú dĺžku 1. Počet hrán, ktoré vchádzajú (alebo vychádzajú – je to jedno) do vrchola nazvime stupeň vrchola.



Keď sme si ujasnili, čo sa ako volá, začnime si všímať náš obrázok. Stupne všetkých vrcholov sú medzi 2 a 4. Lomená čiara dĺžky x (jasné, že $x \in \mathbb{N}$) pokryje presne x hrán a prejde cez najviac $x+1$ vrcholov (ak neprejde cez žiadny vrchol viackrát, tak to bude presne $x+1$, inak to bude menej). My máme k dispozícii 5 čiar dĺžky 8 a máme pokryť 40 hrán. Z toho vyplýva, že po žiadnej nemôžeme prejsť viac než raz, takže keď prejdeme po nejakej hrane, môžeme ju zmazať (aby sme po nej už nechodili). Našim cieľom bude piatimi lomenými čiarami zmazať celý obrázok. Čo znamená, že potrebujeme vynulovať stupne všetkých vrcholov. Pozrime sa teda, čo sa deje so stupňami vrcholov, cez ktoré prejde jedna lomená čiara. Stupeň prvého a posledného vrchola klesne o jedna a stupne všetkých ostatných vrcholov, ktorými čiara prejde, klesnú o 2 (raz vojde a raz vyjde), pričom sa dôsledky môžu sčítať, t.j. ak čiara začína a končí v tom istom vrchole, tak jeho stupeň klesne spolu o 2. Keď si však všimneme tých 12 podozrivých vrcholov (tie väčšie „guľôčky“), tak všetky majú stupeň 3, čo znamená, že v každom musia buď tri čiary začínať (alebo končiť) alebo jedna začínať a jedna musí tadiaľ prechádzať. My máme poruke len 5 čiar (to je 10 koncov/začiatkov), no potrebovali by sme ich minimálne 12 a tak sa nám to nemôže podariť.

Úloha č. 5: *Nech* m *je kladné celé číslo. Dokážte, že ak sú* $2m+1$ *a* m^2+1 *zložené čísla, tak aj* $5m-3$ *je zložené číslo.*

Riešenie: (opravovali Mišo a Paľo)
Tvrdenie zo zadania neplatí. Stačí vziať napríklad $m = 22$. Potom sú $2m+1 = 2 \cdot 22 + 1 = 45 = 3^2 \cdot 5$ a $m^2+1 = 22^2+1 = 485 = 5 \cdot 97$ zloženými číslami a $5m-3 = 107$ prvočíslom.

Komentár: V zadaní chyba nebola. Šlo nám o to, aby ste skúsili dokázať tvrdenie, pri ktorom nie je na prvý pohľad jasné, že neplatí. Väčšinou ste sa nenechali zmiasť a podarilo sa vám nájsť *kontrapríklad.* Ale našli sa aj takí, ktorí si mysleli, že tvrdenie dokázali. Skúste sa však zamyslieť nad tým, čo by vyplývalo z platnosti tvrdenia. Nebolo by prvočísel zrazu akosi priveľa? A nevedeli by sme potom hľadať ďalšie prvočísla veľmi rýchlo?

Úloha č. 6: *Dvaja hráči hrajú veľmi zaujímavú hru. Striedajú sa a každý vo svojom ťahu vyberie nejaké prirodzené číslo spomedzi* 2 *až* 9*. Po každom ťahu sa spočíta súčin čísel, čo vybrali obaja, a ak prevýši* 1000*, tak ten, čo vyberal posledné číslo, vyhral. Napríklad prvý vyberie* 3*, druhý* 6*, prvý* 8*, druhý* 9*,* $3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 1296$*, teda vyhral druhý hráč. Zistite, ako má hrať prvý hráč, aby určite vyhral (ak sa to dá).*

Riešenie: (opravovali Mazo a Pišta)
Hra bola vcelku jednoduchá. Vybraté čísla sa mohli opakovať (skúste si úlohu vyriešiť za podmienky, že čísla sa opakovať nemôžu; je to o čosi ťažšie). Po pár pokusoch zistíme, že prvý hráč si musí starostlivo zvoliť svoj prvý ťah, lebo inak prehrá a tiež to, že hru je výhodné rozoberať od konca. Zjavne ak doteraz dosiahnutý súčin (budeme ho označovať S) je aspoň 112, tak hráč, ktorý je na ťahu, vyhrá. Ako dostať súpera do intervalu $[112, 1000]$? Aby nemohol prekročiť 1000 (a tým vyhrať), môže byť S pred jeho ťahom nanajvýš 111. A aby po jeho ťahu bol súčin aspoň 112, musí pred jeho ťahom byť aspoň 56, pretože si môže vybrať číslo 2. Takže ak súper ťahá z intervalu $[56, 111]$, dostane sa súčin do intervalu $[112, 1000]$. V akom intervale môže byť S, aby sme ho vedeli dostať do $[56, 111]$? Nuž musí platiť $S \geq 56/9 > 6$ a súčasne $S \leq 111/2 < 56$, teda $S \in [7, 55]$. A podobnou úvahou zistíme, že ak chceme dosiahnuť pre S tento interval, tak predtým musel byť súčin S v intervale $[4, 6]$. A pre prvého hráča nie je problém dostať súčin (trocha degenerovaný, keďže máme len jedno číslo) do tohto intervalu.
Už len popíšeme stratégiu prvého hráča (jednu z možných). Vo svojom prvom ťahu vyberie číslo 4. Ak druhý hráč dá jedno z čísel 2, 3, prvý dá 8; ak druhý dá 4, 5 alebo 6, prvý dá 4; ak druhý dá 7, 8 či 9, prvý dá 2. A potom na akúkoľvek odpoveď druhého prvý si vo svojom treťom ťahu vyberie číslo 9, čím vyhrá (uvážte si; vyplýva to z vlastností tých intervalov v úvode, podobne aj to, že druhý hráč vo svojom druhom ťahu nemôže vyhrať).

Komentár: Nedá nám nenapísať to sem: *víťaz* sa píše tak, ako sa píše, t. j. nie s ypsilonom. Niektorí (v snahe vyhnúť sa tomuto problému :-) použili anglický výraz *winner*, ten sa zase píše s dvoma n.

Úloha č. 7: *Každá z cifier $0, 1, \ldots, 9$ je napísaná na práve dvoch lístkoch (spolu 20 lístkov, na každom lístku práve jedna cifra). Je možné uložiť týchto 20 lístkov do radu tak, aby medzi dvoma lístkami s číslom k ležalo práve k lístkov (pre $k = 0, 1, \ldots, 9$)?*

Riešenie: (opravovali Katka a Rúža)
Milí riešitelia. Väčšina z Vás správne zistila, že sa kartičky nedajú uložiť tak, ako sme požadovali. Našli sa dva správne typy riešenia, ktoré tu oba spomenieme.

Prvé riešenie: Dvadsať políčok, na ktoré chceme uložiť kartičky, môžeme zafarbiť striedavo dvomi farbami, čiernou a bielou. Takto dostaneme desať kartičiek zafarbených na bielo a desať zafarbených na čierno. Všimnime si, aké políčka zakryje dvojica kartičiek s rovnakým číslom. Ak je na kartičkách párne číslo, kartičky prekryjú jedno čierne a jedno biele políčko. Naopak pri nepárnom čísle budú prekryté dve kartičky s rovnakou farbou. Párne čísla (0, 2, 4, 6, 8) zaberú teda 5 políčok z každej farby a ostane nám 5 nepokrytých políčok čiernej a 5 bielej farby. Teraz si už stačí všimnúť iba to, že každá dvojica kartičiek s nepárnym číslom zníži počet voľných políčok napr. bielej farby o párne číslo (0 alebo 2), teda nikdy nedosiahneme, aby bol počet voľných políčok bielej farby rovný 0 (teda párny).
Druhé riešenie: Toto riešenie je podobné prvému v tom zmysle, že tiež ukáže problém s paritou nejakej veličiny. Budeme sledovať súčet pozícií čísel uložených v rade (predpokladáme, že kartičky sa dajú uložiť). Podľa zadania ak leží kartička s číslom k na pozícii a_k (menšia z pozícií kartičiek s číslom k), potom ďalšie k leží na pozícii $a_k + k + 1$. Súčet pozícii S_1 bude teda rovný

$$S_1 = (a_0 + a_1 + \cdots + a_9) + (a_0 + 1) + (a_1 + 2) + \cdots + (a_9 + 10) = 2 \cdot (a_0 + a_1 + \cdots + a_9) + 55\,.$$

Na druhej strane je tento súčet rovný

$$S_2 = 1 + 2 + \cdots + 20 = 210$$

Na to, aby sme mohli kartičky uložiť, muselo by byť $S_1 = S_2$. Vidíme však, že S_1 je nepárne číslo a S_2 je párne, teda sa nerovnajú. Preto úloha nemá riešenie.

Úloha č. 8: *Uvažujme postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definovanú nasledovne:*
i) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,
ii) *ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je párne, tak $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n$,*
iii) *ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je nepárne, tak $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.*
Ukážte, že $a_n \neq 0$ pre ľubovoľné celé číslo $n \geq 3$.

Riešenie: (opravovala Tina)
Po vypísaní niekoľkých členov postupnosti si všimneme, že žiaden z nich nie je deliteľný tromi. Po bližšom pohľade si všimneme, že zvyšky po delení 3 sa v postupnosti striedajú, konkrétne

$$a_{2k+1} = 3m + 1 \qquad \text{a} \qquad a_{2k+2} = 3l + 2.$$

Skúsime toto tvrdenie dokázať matematickou indukciou.

1° Pre $k = 1$ tvrdenie platí, $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$.

2° Nech pre $k = n$ platí $a_{2k+1} = 3m + 1$ a $a_{2k+2} = 3l + 2$.
Pre $k = n + 1$ platí

- ak $a_{2n+1}a_{2n+2}$ je párne, potom

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = 5a_{2n+2} - 3a_{2n+1} = 5(3l + 2) - 3(3m + 1) = 3(5l - 3m + 2) + 1.$$

- ak $a_{2n+1}a_{2n+2}$ je nepárne, potom

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = a_{2n+2} - a_{2n+1} = (3l + 2) - (3m + 1) = 3(l - m) + 1.$$

V oboch prípadoch $a_{2(n+1)+1} = 3x + 1$. Pozrime sa teraz na člen $a_{2(n+1)+2}$.

- ak $a_{2n+2}a_{2n+3}$ je párne, potom

$$a_{2(n+1)+2} = a_{2n+4} = 5a_{2n+3} - 3a_{2n+2} = 5(3x + 1) - 3(3l + 2) = 3(5x - 3l - 1) + 2.$$

- ak $a_{2n+2}a_{2n+3}$ je nepárne, potom

$$a_{2(n+1)+2} = a_{2n+4} = a_{2n+3} - a_{2n+2} = (3x + 1) - (3l + 2) = 3(x - l - 1) + 2.$$

V oboch prípadoch $a_{2(n+1)+2} = 3y + 2$.

Tým sme dokázali, že zvyšky po delení tromi sa v postupnosti striedajú, žiaden z členov však nie je tromi deliteľný. Avšak nula je deliteľná tromi, a teda nula nie je členom tejto postupnosti.

Komentár: Podobným spôsobom sa dá pri dôkaze využiť aj deliteľnosť štyrmi či šiestimi, vyskúšajte si!
Iná možnosť je dokázať, že čísla sa v postupnosti striedajú NPNNPNNPN..., kde N je nepárne a P párne číslo. Nula je párna, a preto si stačí všímať iba párne členy. Ak označíme $p_k = a_{3k-1}$, postupnosť p_k zahŕňa všetky členy postupnosti, ktoré sú párne. Sami zvládnete dokázať, že $p_{k+2} = 2p_{k+1} - 9p_k$. Potom ak p_{k+1} nie je deliteľné 3, tak ani p_{k+2} nie je. No a použijúc matematickú indukciu nie je deliteľné tromi žiadne p_i.

Úloha č. 9: *Nájdite najväčšie kladné celé číslo* m*, pre ktoré je číslo* $1978^m - 1$ *deliteľné číslom* $1000^m - 1$.

Riešenie: (opravoval Šaňo)
Výsledok prezradíme hneď na začiatku: neexistuje také prirodzené číslo m, pre ktoré je číslo $1978^m - 1$ deliteľné číslom $1000^m - 1$. Toto tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje také prirodzené číslo m, že $1000^m - 1$ je deliteľom $1978^m - 1$. Inými slovami, existuje prirodzené číslo k také, že

$$1978^m - 1 = k(1000^m - 1).$$

Keďže $1978^m > 1000^m$, určite $k > 1$. Po úprave dostávame

$$2^m(989^m - 500^m k) + k - 1 = 0. \tag{1}$$

Preto nutne $2^m \mid (k-1)$, $(k-1) > 0$, čiže existuje prirodzené číslo l také, že

$$2^m l = k - 1. \tag{2}$$

Dosadíme (2) do (1), vydelíme 2^m a máme $989^m - 500^m(2^m l + 1) + l = 0$, z čoho po jednoduchej úprave dostaneme

$$l = \frac{989^m - 500^m}{1000^m - 1}.$$

Všimnime si, že v zlomku na pravej strane sú čitateľ aj menovateľ kladné čísla, pričom čitateľ je menší ako menovateľ. Preto l nemôže byť celé číslo, čo je spor. Preto naozaj neexistuje také prirodzené číslo m, pre ktoré je číslo $1978^m - 1$ deliteľné číslom $1000^m - 1$.

Úloha č. 10: *Nájdite sústavu nanajvýš kvadratických rovníc, ktorá má v reálnych číslach práve*
a) 3 *riešenia,*
b) 47 *riešení,*
pričom za kvadratickú rovnicu považujeme napríklad $x^2 + 2xy - y^2 = 1$*, ale nie rovnicu* $x^2 \cdot y = 5$.

Riešenie: (opravoval Rado)
Ukážeme, že vo všeobecnosti sa dá vymyslieť sústava, ktorá má n riešení. Majme n neznámych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sústava môže vyzerať napríklad takto:

$$a_i \cdot a_j = 0 \quad \forall i \neq j$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$$

Každá z týchto rovníc je naozaj nanajvýš kvadratická. Ukážeme, že táto sústava má práve n riešení. Ak by existovali dve nenulové a_i, a_j také, že $i \neq j$, tak potom $a_i \cdot a_j \neq 0$, čo nemôže nastať. Zároveň nemôžu byť všetky neznáme nuly, lebo ich súčet je 1, takže práve jedna neznáma musí byť 1. Teda riešenia vyzerajú tak, že jedna neznáma je 1, zvyšné 0. Preto je riešení práve n. Tým sú vyriešené obe úlohy, stačí položiť $n = 3$ a $n = 47$.

Úloha č. 11: *Dokážte, že existuje reálne číslo* A *také, že grafu funkcie* $y = A \cdot \sin(x)$ *možno vpísať aspoň 2003 rôznych (s rôznou dĺžkou strany) štvorcov. Štvorec sa nazýva vpísaný do grafu, ak na grafe ležia všetky vrcholy štvorca.*

Riešenie: (opravoval Feldo)
Najprv zistime, ako môžeme vpísať aspoň jeden štvorec do grafu Γ funkcie $A \sin x$. Po chvíli skúšania objavíme, že štvorce, ktoré sa nám podarilo vpísať do nášho grafu sú stredovo symetrické so stredom symetrie v počiatku súradnicovej sústavy (áno, máte pravdu, vo všeobecnosti okolo bodu typu $(2\pi n, 0)$, kde n je celé číslo). Skúsme teda nájsť počet štvorcov, ktoré sa dajú vpísať do grafu Γ a sú symetrické okolo počiatku súradnicovej sústavy.
Keďže funkcia $A \sin x$ je nepárna, tak bod $(x, y) \in \Gamma$ je vrcholom štvorca vpísaného do grafu Γ so stredom $(0, 0)$, ak aj bod $(-y, x)$ patrí grafu Γ. To znamená, že čísla x, y spĺňajú sústavu rovníc

$$y = A \sin x\,, \qquad -x = A \sin y\,.$$

Na prvú rovnicu aplikujme funkciu sínus a dosaďme do nej druhú rovnicu. Dostaneme sústavu rovníc

$$\sin(A\sin x) = -\frac{x}{A}, \qquad x > 0, \qquad y = A\sin x > 0. \tag{3}$$

Riešením tejto sústavy sú súradnice (x, y) vrcholu štvorca, ktorý má stred v bode $(0, 0)$ a dá sa vpísať do grafu Γ. Dokážeme, že pri dostatočne veľkom A má táto sústava dostatočne veľa (aspoň 2003) riešení.
Na každom z intervalov $[2k\pi, 2k\pi + \pi/2]$, $(k \in \mathbb{Z})$ prebieha funkcia $y = A\sin x$ interval od 0 po A a na každom z intervalov $[2l\pi + \pi/2, 2l\pi + \pi]$, $(l \in \mathbb{Z})$ prebieha funkcia $y = A\sin x$ interval od A po 0. Uvažujme $A = 2\pi n$. Potom hodnoty funkcie $z = \sin y$ pre $y \in [0, A]$, prejdú interval $[-1, 1]$ aspoň n krát.
Zvoľme si pevné číslo $k < n$. Potom na každom z intervalov $[2k\pi, 2k\pi + \pi/2]$ a $[2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi]$ dosiahne funcia $z = \sin(A\sin x)$ hodnotu 0 práve $2n$ krát a interval $[-1, 1]$ prejde aspoň n krát. Na druhej strane graf funkcie $\sin(A\sin x)$ pretína priamku $z = -\frac{x}{A}$ aspoň n krát, keďže $|x/A| < 1$ pre $0 \le x \le 2k\pi + \pi < A$ (a naša funkcia prejde aspoň n krát interval $[-1, 1]$). Potom sústava (3) bude mať spolu aspoň n^2 riešení.
Na to, aby sme overili, že nájdené štvorce sú rôzne, uvažujme $x \in [0, \pi/2]$. Pre $A > 2003\pi$ má sústava (3) na tomto intervale aspoň 2003 riešení. Pričom čím väčšie x volíme, tým väčšie $y = A\sin x$ a aj $\sqrt{x^2 + y^2}$ dostávame. To znamená, že všetkých 2003 štvorcov je rôznych.
Iné geometrickejšie riešenie je založené na otočení grafu Γ o $90°$ okolo bodu $(0, 0)$. Potom každý priesečník grafu Γ a otočeného grafu Γ' (okrem bodu $(0, 0)$) je vrcholom štvorca so stredom $(0, 0)$ vpísaného do grafu Γ.
Poznamenajme, že všetky štvorce vpísané do Γ majú stred v jednom z bodov $(2k\pi, 0)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Toto tvrdenie si skúste dokázať sami.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roc.	Škola	k_α	k_β	Pred.	5	6	7	8	9	10	11	p	$\sum$
1.	Bodnár Jozef	2	GFiľak	4	1	90		9	9	9	9	9	9	0	135
1.	Simančík František	2	GAMČA	5	1	90		9	9	9		9	9	0	135
3.	Váňa Tomáš	3	GŽiar	5	3	88			8	9	9	9	9	0	132
4.	Kala Vítězslav	3	GJarBR	7	3	80	9		9	9	9	9	9	0	125
5.	Budáč Ondrej	1	GLuč	2	0	78	9	8	9	9		9		0	122
6.	Zemianek Juraj	3	GIH	3	0	73	9	8	9	9	9	8		0	117
6.	Adamčík Martin	2	GPovBy	5	1	82		9	9	6	2	9		0	117
8.	Maták Peter	3	GPriev	5	1	71		9		8	8	9	5	0	110
9.	Budáčová Hana	3	GLuč	8	3	86			9	9		3		0	107
10.	Lenhardt Rastislav	3	GJH	7	2	70		8	9	9		9		0	105
11.	Jančuška Marek	3	GPárNR	7	1	70		8	9	2		9	6	0	104
11.	Perešíni Peter	1	GJGT	3	0	77	9	9	9					0	104
13.	Knebl Jaroslav	1	GNám	2	1	82	9	9	9	2				0	102
14.	Strapková Lucia	3	GPárNR	5	0	63		9	9	9		9		0	99
14.	Tekel Juraj	4	GLipMi	4	0	62	9	8	9	2	1	9		0	99
16.	Kesely Michal	2	GPárNR	6	1	68		9	9	9		3		0	98
16.	Ceľuchová Zuzana	3	GKonPO	5	1	68		9	9	9		3		0	98
16.	Štolc Miroslav	3	GPárNR	7	1	71		8	8		2	9		0	98
19.	Komendová Lucia	3	GJGT	4	0	55	9	9	9	9		3		0	94
20.	Vitásek Matej	2	GAMČA	5	1	54		9	9	9		3	9	0	93
21.	Takács Michal	1	GJGT	3	0	70	9	9	3					0	91
22.	Polovková Darina	3	GSNV	5	1	54		8	9	9		9		0	89
23.	Miček Roman	3	GPárNR	3	0	64		8	6			9		0	87
24.	Cibiček Jozef	1	BiGSuč	2	0	57	9	9	9					0	84
25.	Pepríková Ľubica	2	GVOZA	5	0	59		8		9	0	6	0	0	82
26.	Kovalčinová Lenka	2	GPošKE	6	1	58		8	3	2	3	6		0	80
27.	Mikulík Andrej	3	GAMČA	8	2	59		8		3		9		0	79
27.	Šoltésová Mária	3	GAMČA	6	2	62		8		2		7		0	79
29.	Kurilla Milan	2	GPárNR	3	0	70		8						0	78
30.	Bachratá Veronika	2	GVOZA	6	1	51		8	9	9			0	0	77
30.	Struhár Pavel	2	GJH	3	0	60	9	8						0	77
32.	Brisuda Martin	3	GKysNM	6	1	54		1	3	9	2	6		0	75

Por.	**Meno**	**Roc.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**Pred.**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	$\sum$
32.	Ďuriš Michal	2	GAMČA	5	1	75								0	75
34.	Sojáková Stana	2	GJH	6	2	46			9	2	9	8	0	0	74
34.	Batmendijnová Zuzana	3	GStĽub	5	1	63		8	9	9		5		-20	74
36.	Labuda Tomáš	3	GAMČA	7	1	55		9				9		0	73
36.	Tinajová Andrea	2	GVPTMT	4	0	61	9	6	3			3		-9	73
38.	Augustín Peter	3	GNMes	8	3	56			8	2	2	4		0	72
38.	Stohlová Lucia	2	GAMČA	3	0	56		7	9					0	72
40.	Gallusová Barbora	2	GAMČA	4	0	54		1	9			6		0	70
40.	Burger Michal	3	GAMČA	9	5	70								0	70
42.	Masárová Zuzana	2	GBilBA	5	1	51		8	0	2		4	3	0	68
42.	Božík Daniel	2	GLipMi	3	0	51	9	8						0	68
44.	Rychnovský Michal	2	GJarBR	5	2	48		9	9					0	66
45.	Labudová Zuzana	2	GAMČA	5	1	46		9		2		8		0	65
46.	Prievalský Juraj	3	GPriev	3	0	45	9	9						0	63
46.	Haško František	1	GPošKE	3	0	46		8		9				0	63
48.	Horecká Barbora	2	GGolNR	4	0	45	9			8				0	62
48.	Novák Ľubomír	1	GJH	2	0	45	9	8						0	62
48.	Jureček Martin	3	GPriev	3	0	41	9	9	3					0	62
51.	Kumorovitz Matej	3	GAMČA	4	0	44	9	8						0	61
52.	Rjaško Michal	4	GDVran	10	5	59								0	59
52.	Mlynárik Miroslav	3	GAMČA	4	0	34	9	7				9		0	59
54.	Pešková Eva	2	GVOZA	3	0	42		8		2		6		0	58
55.	Galovič Marián	4	GEisen	5	2	43		1	2	9	2			0	57
56.	Sikhartová Hana	3	GAMČA	7	1	43				9		3		0	55
56.	Švihranová Ivana	2	OAHrBA	4	0	44		8					3	0	55
58.	Podstupková Jana	3	GAMČA	6	0	54								0	54
59.	Duník Matej	1	GVOZA	2	0	34	9	8						0	51
60.	Fiala Martin	3	GAMČA	4	0	50								0	50
61.	Virčík Vlado	2	GHMich	4	0	48								0	48
61.	Přibyla Vojtech	2	GJarBR	3	0	36	2	8	9	2				-9	48
63.	Zajac Peter	3	GAMČA	7	1	47								0	47
63.	Sayed Roman	3	GAMČA	4	0	34	9	4						0	47
65.	Poliačková Vlasta	3	GVOZA	6	0	46								0	46
66.	Závodný Michal	3	GBilBA	3	0	36		9		0				0	45
67.	Závodný Jakub	3	GAMČA	6	3	43								0	43
67.	Kóša Peter	1	GGolNR	1	0	33		9	1					0	43
69.	Hlinková Janka	3	GAMČA	4	0	42								0	42
69.	Hrdá Marcela	1	GTurTe	1	0	34		8						0	42
71.	Fabriková Jana	3	GJarBR	5	1	40								0	40
72.	Hlavatá Ivana	2	GJH	4	0	39								0	39
73.	Sanislo Michal	3	GPošKE	6	1	36								0	36
74.	Krčah Marcel	2	GPárNR	3	0	35								0	35
75.	Kysel Róbert	3	KGŠMBB	3	0	31								0	31
76.	Korenčiak Miloš	1	GVarZA	2	0	5	9	8		1		7		0	30
77.	Šibík Juraj	2	GPovBy	2	0	18		9	1					0	28
77.	Škorupa Martin	3	GLipMi	7	2	28								0	28
79.	Adamková Jana	3	GAMČA	4	0	22								0	22
80.	Potočárová Mária	2	GsvR	4	0	20								0	20
80.	Blahutová Martina	3	GLipMi	4	0	20								0	20
80.	Pancák Maťo	3	GPošKE	5	1	20								0	20
83.	Slovák Ľuboš	2	GPárNR	3	0	19								0	19
83.	Hoč Vladimír	4	GPošKE	6	1	19								0	19
83.	Beno Marcel	2	GAMČA	3	0	19								0	19
83.	Drábková Alena	4	GJarBR	5	0	19		9	9					-20	19
87.	Tekeľ Jakub	3	GJH	3	0	0		8				9		0	17

Por.	**Meno**	**Roc.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**Pred.**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	$\sum$
88.	Bittová Barbara	2	PiaGTN	4	1	11								0	11
88.	Burjanová Zuzana	2	GAMČA	4	0	11								0	11
88.	Kotrbčík Michal	4	GJH	4	0	11								0	11
91.	Potočková Zuzana	3	GLipMi	4	0	10								0	10
91.	Čudai Štefan	3	GAMČA	5	0	10		0						0	10
91.	Novák Marek	3	GPošKE	4	0	10								0	10
94.	Špalek Lukáš	2	GČadca	2	0	3								0	3
95.	Györi Karol	3	GmGal	4	0	1								0	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roc.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**Pred.**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Borsuk Andrej	1	GAMČA	3	89			9	9	9	9	9	0	134
2.	Vojtela Martin	1	GAMČA	3	88			9	9	1	8	9	0	124
3.	Imriška Jakub	1	GJH	2	78		9	9	3	9	9	9	0	123
4.	Novák Ľubomír	1	GJH	2	85		9	0	9	9	8		0	120
5.	Trnovcová Zuzana	2	GJH	3	83			9	4	9	8		0	113
6.	Májek Michal	1	GAMČA	2	74		9	9	3	9	8	0	0	112
6.	Struhár Pavel	2	GJH	3	77			9	9	9	8		0	112
8.	Lobotková Martina	1	GAMČA	3	72			8	8	9	8	1	0	106
9.	Lenhardtová Slavomíra	1	ŠPMNDaG	2	60		9	9	9	9	8		0	104
10.	Petruchová Zuzana	1	GAMČA	3	69			8	9	9	8	0	0	103
11.	Mindek Peter	1	ŠPMNDaG	2	63		9	9	3	9	8		0	101
12.	Jendželovský Michal	1	ŠPMNDaG	2	62		9	2	3	9	8		0	93
13.	Mesežnikov Grigorij	1	GJH	1	54	9	3	9	3	9	8	0	0	92
14.	Gottweis Martin	1	GJH	1	57	9	9	4			5	1	0	85
15.	Feldsamová Zora	1	ŠPMNDaG	1	53	2	9	1	3	9	2		0	78
16.	Marušiakova Ľubica	1	GJH	1	45		9	3	3	9	8		0	77
17.	Zeleník Dušan	2	GJH	2	72								0	72
18.	Zemianek Juraj	3	GIH	3	45					9	8	9	0	71
19.	Bizoň Pavol	2	GJH	2	62								0	62
20.	Stohlová Lucia	2	GAMČA	3	33						7	9	0	49
21.	Kuliffay Martin	1	ŠPMNDaG	1	13		9	0	9	9	8		0	48
22.	Dittinger Tomáš	2	GJH	2	47								0	47
23.	Dobiaš Michal	1	GJH	1	45								0	45
24.	Závodný Michal	3	GBilBA	3	33						9		0	42
25.	Mihál Vladimír	1	ŠPMNDaG	1	32						8		0	40
26.	Kottman Michal	2	GJH	2	29								0	29
27.	Ujbányai Roman	1	ŠPMNDaG	1	21								0	21
28.	Polák Ján	1	GJH	1	20								0	20
29.	Beno Marcel	2	GAMČA	3	18								0	18
30.	Tekeľ Jakub	3	GJH	3	0				9		8		0	17
31.	Saxunová Miroslava	3	GJH	3	13								0	13
32.	Tichá Stanislava	2	GJH	2	3		4		0				0	7

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roc.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**Pred.**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Škrovinová Katarína	1	GPárNR	3	80			9	9	2	8	9	0	117
2.	Štolcová Jana	1	GPárNR	3	72			9	9	9	7	9	0	115
3.	Kóša Peter	1	GGolNR	1	67		7	4	9		9	1	0	97
4.	Jureček Martin	3	GPriev	3	59			9	7	9	9	3	0	96
5.	Kurilla Milan	2	GPárNR	3	76			8	3		8		0	95
6.	Prievalský Juraj	3	GPriev	3	66			6	3	9	9		0	93
7.	Zámečník Peter	1	GNMes	2	66		3	4	3			9	0	85
8.	Meňhartová Ivana	1	GPárNR	3	36			8	9		8	9	0	70
9.	Princzkel Tomáš	2	GŽel	2	65								0	65
10.	Bakaová Monika	1	GPárNR	3	35								0	35
10.	Miček Roman	3	GPárNR	3	21						8	6	0	35

Por.	Meno	Roc.	Škola	k_α	Pred.	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
12.	Komorovský Marek	1	GDubn	2	31								0	31
13.	Slovák Ľuboš	2	GPárNR	3	18								0	18
13.	Krčah Marcel	2	GPárNR	3	18								0	18
15.	Pribila Tomáš	2	GMalac	2	15								0	15
16.	Horváthová Jana	3	GDubn	3	12								0	12
17.	Némethová Katarína	1	GAMS	1	8								0	8

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roc.	Škola	k_α	Pred.	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Knebl Jaroslav	1	GNám	2	90		9	9	9	9	9	9	0	135
2.	Budáč Ondrej	1	GLuč	2	89		9	9	9	9	8	9	0	134
2.	Cibiček Jozef	1	BiGSuč	2	89		9	9	4	9	9	9	0	134
4.	Veselovská Lenka	1	GLipMi	2	88		9	9	9	9	8	9	0	133
5.	Macka Oto	1	GVOZA	3	86			9	9	9	8	9	0	130
6.	Perešíni Peter	1	GJGT	3	81			9	9	9	9	9	0	126
7.	Hrdá Marcela	1	GTurTe	1	87	9	9	9	3		8		0	125
8.	Takács Michal	1	GJGT	3	87			6	9	9	9	3	0	123
9.	Pôbišová Zuzana	1	GJGT	3	84			9	9	9	8	3	0	122
10.	Duník Matej	1	GVOZA	2	73		9	9	9	9	8		0	117
11.	Mikuláš Ján	1	GLuč	2	71		9	9	9	9	9	9	0	116
12.	Selečéniová Ivana	1	GJGT	3	70			9	9	9	9	3	0	109
13.	Bachratá Alenka	1	GVOZA	3	64			5	9	9	8	9	0	104
14.	Kvietková Ivana	1	GJGT	2	68		9	9	3		8	1	0	98
15.	Šibík Juraj	2	GPovBy	2	49		9	9	3		9	1	0	80
16.	Hergelová Beáta	1	GLuč	2	38		9	9	9		7	9	-9	72
17.	Hroudná Zuzana	1	GVOZA	2	40		4	6	3		4		0	57
18.	Trojáková Lenka	1	GVOZA	3	55								0	55
19.	Korenčiak Miloš	1	GVarZA	2	19		2	9		9	8		0	47
20.	Božík Daniel	2	GLipMi	3	27					9	8		0	44
21.	Bukový Roman	1	GDKubí	2	41								0	41
22.	Pešková Eva	2	GVOZA	3	31						8		0	39
23.	Kysel Róbert	3	KGŠMBB	3	31								0	31
24.	Magic Ľuboš	1	GJGT	2	29								0	29
25.	Konôpková Klaudia	1	GJGT	2	24								0	24
26.	Špalek Lukáš	2	GČadca	2	19								0	19
27.	Jankechová Katarína	2	GJGT	3	14								0	14
28.	Jagoš Miroslav	2	GVarZA	2	9								0	9
29.	Cimerman Martin	0	EvGBB	0	8								0	8

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roc.	Škola	k_α	Pred.	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Dzurňák Tomáš	1	GSNV	2	80		9	9	3	9	8	8	0	123
2.	Prusák Michal	1	GJARPO	2	84		3	9	9	9	8		0	122
3.	Bertová Slávka	1	GAlKE	3	54			9	6	0	8	1	0	78
4.	Haško František	1	GPošKE	3	61			9			8		0	78
5.	Beran Jakub	1	GAlKE	2	35		0	8	9	2	8	0	0	62
6.	Pettyová Silvia	1	GAlKE	3	44			9	3	0	0	1	0	57
7.	Lendel Gabriel	1	GAlKE	2	24		0	9	9		8	0	0	50
8.	Bažalik Marián	1	GPošKE	2	0								0	0

kategória VŠ

Meno	Roč.	Škola	Odb.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Tina Gancárová	5	FMFI UK	efm	9	9	9	9	9	9		9		9	9
Peťo Novotný	4	FMFI UK	mat	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8
Rúža	3	FMFI UK	inf							9				
Erika Trojáková	1	FMFI UK	mat	9	9	9	5	9	8	9	9	3	9	