Korešpondenčný Matematický Seminár

Ahoj študent, študentka!

Do rúk sa Ti dostávajú vzorové riešenia historicky prvej série KMS. Popravde, snažili sme sa napísať také riešenia, ktoré sú správne, ale nemusí to byť vždy tak (aj my sme len ľudia `:)`). Navyše, naše riešenia nie sú úplné, nechávame Ti v nich premyslieť si pár maličkostí, ktoré by ale v Tvojich riešeniach nemali chýbať. Máme ešte jednu dobrú správu. Sústredenie bude. Tentokrát od 25.–31. 1. 2003 v ŠvP v Lazoch pod Makytou pre riešiteľov kategórie **ALFA** a od 18.–24. 1. 2003 v ŠvP pod Sitnom pre riešiteľov kategórie **BETA**.

Výlet

Výlet bude pre ľudí z Bratislavy a okolia a vlastne pre všetkých, čo prídu. Podobne ako po minulé roky, aj tento rok bude organizovaný spolu s KáeSPákmi (oslávime jubilejný prvý ročník spoločných KMS+KSP výletov). Tentokrát sa stretneme o **9:57** **na Patrónke** (tak, aby sme tam 10:10 boli). Odtiaľ pôjdeme na hrad Pajštún (chvíľku autobusom, potom pešo) a cestou stretneme peknú lúčku, na ktorej si zahráme hry podľa počasia a nálady. Dátum konania výletu bude **9.11.2002**. Pozvaní sú všetci riešitelia, kamaráti riešiteľov, skrátka koho si so sebou prinesiete. Nie je pripravený nejaký špeciálny program, ide nám o to, aby sa nás tam zišlo straaaašne veľa a mohli si užiť prírodu `:)`.

Voľby loga KMS 2002

Ak chceš aj Ty prispieť svojou troškou k tomu, aké logo bude nosiť tento seminár, pozri sa na internetovú stránku seminára alebo priamo na `http://kms.sturak.sk/logo.php`. Tam sa dozvieš, kam máš poslať svoj hlas. Ak budeš dosť rýchly a tvoja fantázia nepozná hraníc, môžeš nám dokonca poslať svoj vlastný návrh na logo. Teraz sa už môžeš vrhnúť na zisťovanie toho, prečo nemáš 45 bodov.

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *V každom políčku tabuľky* 5×5 *je napísané jedno z čísel* 1, 2, 3, 4 *a* 5 *tak, že v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je každé z týchto čísel práve raz. Súčet čísel v diagonále tesne pod hlavnou* (4 *políčka*) *označme ako skóre. Dokážte, že nie je možné dosiahnuť skóre* 20.

Úvodom by som rád vyslovil svoje potešenie nad počtom výborných riešení, ale aj napriek vášmu úspechu si dovolím skromne zverejniť také kratučké, ale postačujúce riešenie:

Riešenie: (opravoval Čermo)
Budeme postupovať sporom (to, čo chceme vyvrátiť budeme považovať za pravdu (možno dosiahnuť skóre 20) a z toho vyplývajúce závery potom porovnáme s našimi predpokladmi (to, čo stojí v zadaní)). Nuž, aby mohlo byť skóre 20, musia byť vo všetkých štyroch políčkach na druhej diagonále 5-ky (políčka označené $*$ v tabuľkách).

$*$				
5	$*$			
	5	$*$		
		5	$*$	
			5	$*$

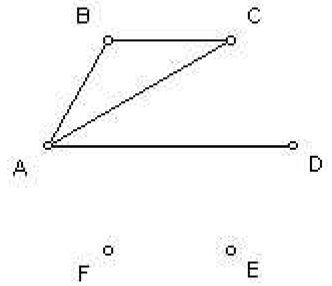
				$*$
			$*$	5
		$*$	5	
	$*$	5		
$*$	5			

Podľa zadania musí byť aspoň jedna 5-ka na diagonále. Ale akokoľvek sa ju tam snažíme položiť (na ľubovoľné políčko), vždy je už v danom riadku alebo stĺpci 5-ka iná (z druhej diagonály). Tu prichádzame do sporu so zadaním, takže náš predpoklad o skóre bol nepravdivý.

A záver znie, že nemožno dosiahnuť skóre 20.

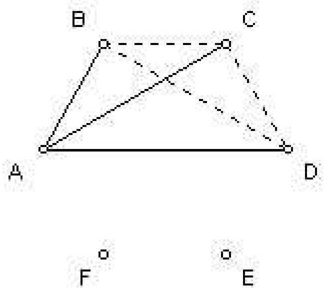
Komentár: Čo sa týka smerovania vašich obrázkov, „doľava stúpajúci" porazili „doprava stúpajúcich" 27:8, ale ako možno zistiť z dôkazu, na riešení to nijako nezaváži... Avšak apelujem na pravocítiacich, aby sa nabudúce držali trochu lepšie a neutrpeli tak zdrvujúcu porážku `:)`.

Úloha č. 2: *Na Slovensku je šesť veľkomiest (Banská Bystrica, Bratislava, Košice, Nitra, Prešov a Žilina) a leteckú dopravu medzi nimi zabezpečujú dve spoločnosti. Medzi každými dvoma veľkomestami zabezpečuje letecké spojenie (linku) práve jedna spoločnosť. Dokážte, že sa nájdu tri také veľkomestá, že tri linky medzi nimi zabezpečuje tá istá spoločnosť.*



Riešenie: (opravovali Erika a Buggo)
Zvoľme si ľubovoľné mesto A. Toto mesto je spojené linkami so zvyšnými piatimi mestami. S istotou môžeme povedať, že aspoň 3 linky z mesta A do iných troch miest prevádzkuje rovnaká spoločnosť (premyslite si to!). Tieto mestá si označme B, C, D. Ak by bola ľubovoľná z liniek BC, CD, DB prevádzkovaná touto spoločnosťou, tak už máme trojicu miest prepojenú linkami rovnakej spoločnosti (ABC, ACD alebo ADB), pozri si prvý obrázok.

Ak by ale tieto linky prevádzkovala druhá spoločnosť, tak zasa máme trojicu BCD, pozri si druhý obrázok. A teda vždy nájdeme trojicu miest takých, že tri linky medzi nimi zabezpečuje tá istá spoločnosť.



Komentár: Niektorí ste úlohu riešili tak, že ste rozoberali rôzne spôsoby rozostavenia liniek. To by bolo v poriadku len vtedy, ak by ste overili všetky možnosti. Inak by sa vám mohlo stať, že práve v tom prípade, ktorý ste nevyskúšali, by žiadna trojica miest spojená linkami rovnakej spoločnosti neexistovala.

Úloha č. 3: *Na stretnutie prišlo* 2002 *ľudí, medzi nimi pán Abdul. Okrem nich je tam aj jeden novinár, ktorý hľadá pána Abdula. Novinár vie, že pán Abdul pozná každého, ale pána Abdula nikto nepozná. (Konečne príklad, v ktorom známosti nie sú vzájomné.) Novinár môže ukázať na nejakého človeka a spýtať sa niekoho iného, či pozná toho, na koho práve ukazuje a ten pravdivo odpovie áno alebo nie.*
a) Zistite, či dokáže novinár za každých okolností nájsť Abdula na menej ako 2002 *otázok.*
b) Koľko najmenej otázok by potreboval novinár na nájdenie Abdula, ak by mal obrovské šťastie?

Riešenie: (opravovali Katka a Malic)
Na začiatok si treba uvedomiť, že vzťahy medzi ľudmi v spoločnosti novinár nepozná a tak nemôžeme vyhlásiť, že sa všetci poznajú a ani, že niekto nikoho nepozná. Môže to tak byť, ale nemusí. Novinárovi stačí na to, aby zistil, kto je Abdul 2001 otázok. A ako to urobí? Vyberie si náhodne nejakú dvojicu A a B. Spýta sa A, či pozná B. Môže dostať odpoveď áno, čo znamená, že B nie je Abdul (lebo Abdula nikto nepozná), alebo nie a potom A nie je Abdul (lebo Abdul pozná všetkých). Takto teda ľahko vylúči práve jednu osobu na jednu otázku. No a potom si odchytí toho z predchádzajúcej úvahy, kto ostal a spýta sa na C. Týmto spôsobom pokračuje ďalej. Takto na 2000 otázok vylúči 2000 ľudí a zostanú mu dvaja (Abdul a ešte jeden) a na základe odpovede určí, kto je Abdul (podľa toho hore). No a čo to obrovské štastie? Tak to tu nehrá žiadnu úlohu, lebo jednou odpoveďou vie novinár vylúčiť práve a len jednu osobu a tak nutne potrebuje vždy práve 2001 otázok na určenie Abdula, nech už sú vzájomné vzťahy medzi ľuďmi akékoľvek. Mohlo by sa totiž stať, že existuje v skupine ľudí taký človek, ktorý pozná všetkých ostatných okrem Abdula a po 2000 otázkach by ostal on s Abdulom. Takto by sme nevedeli určiť, kto je kto.

Komentár: Najviac z Vás stratilo body na „obrovskom šťastí". Novinár totižto nevie, aké sú známosti medzi ľuďmi a tak nemôžete povedať, že najväčšie štastie bude vtedy, keď sa všetci poznajú. Novinár tak či onak na presné určenie potrebuje 2001 otázok. On totižto nepozná tie vzťahy. No a ešte ste často nevysvetlili prečo menej ako 2001 otázok nestačí. To, že to vyjde pre 2001 otázok nedokazuje, že je to najmenší možný počet.

Úloha č. 4: *Keď nemá Jano Lašák čo robiť, vytrhne sieť z bránky a rozloží si ju na ľad. Tá vytvorí štvorcovú sieť. Potom náhodne rozloží niekoľko pukov tak, aby ich stredy ležali na rôznych mrežových bodoch. (Mrežový bod je vrchol štvorca, ktorý je súčasťou štvorcovej siete.) Potom sa pozrie na každú dvojicu pukov a ak stred spojnice stredov týchto dvoch pukov leží v mrežovom bode, dá žuvačku na toto miesto. Koľko najmenej pukov musí Jano umiestniť na sieť, aby si mohol byť istý, že nájde miesto na umiestnenie aspoň jednej žuvačky?*

Riešenie: (opravovali Mišo a Mazo)
Sieť z bránky si môžeme predstaviť ako nekonečnú štvorčekovanú sieť v rovine so stranou štvorca dlhou 1. Označme nejaký vrchol nejakého štvorca za počiatok (súradnicovej) sústavy, zvolíme si na seba kolmé osi (rovnobežne so stranami štvorcov). Teraz už vieme každému vrcholu každého štvorca priradiť jeho súradnice x a y (to budú presne mrežové body zo zadania, premyslite si!).

Ukážeme, že štyri puky nestačia: stačí ich uložiť napríklad do rôznych vrcholov ľubovoľného štvorca so stranou dĺžky 1 a miesto pre žuvačku nenájdeme. Ukážeme, že päť pukov stačí. Všimnime si stred spojnice ľubovoľných dvoch mrežových bodov: jeho x-ová súradnica je v strede medzi x-ovými súradnicami krajných bodov spojnice. To isté platí aj pre y-ové súradnice. Rozdeľme si všetky mrežové body tak, x-ové aj y-ové súradnice bodov jednej skupiny mali rovnakú paritu (to znamená, že ak spojíme ľubovoľné dva body rovnakej farby, tak aj stred takejto úsečky bude mrežovým bodom—premyslite si!):

- červené body – také, že prvá súradnica je párna a druhá nepárna,
- modré body – prvá nepárna a druhá párna,
- zelené body – obe párne a
- žlté body – obe nepárne.

Ak je na sieti (v mrežových bodch) aspoň 5 pukov, tak aspoň 2 z nich budú rovnakej farby (lebo máme iba 4 farby). Potom ale stred úsečky danej týmito dvoma bodmi leží v mrežovom bode. Jano môže pri aspoň piatich pukoch do takto nájdeného stredu s pokojným svedomím umiestniť žuvačku.

Komentár: Vyskytli sa riešenia založené na princípe: umiestnim puk a vyškrtám zlé miesta, snažiace sa popísať najhorší spôsob rozmiestnenia pukov. Problém je v tom, ako ukázať, že je to ten najhorší spôsob, že umiestňujem správne a že konečný výsledok nezávisí od poradia umiestňovania. Za takéto riešenia ste preto mohli pár bodov stratiť. Vo všeobecnosti neodporúčame takýto spôsob dokazovania.

Úloha č. 5: *Množina 2002 (rôznych) čísel má vlastnosť, že keď zameníme každé z čísel súčtom zvyšných 2001 čísel, dostaneme tú istú množinu 2002 čísel. Dokážte, že súčin týchto 2002 čísel je záporný.*

Riešenie: (opravovali Miki a Janka)
Označme si ľubovoľnú množinu, ktorá spĺňa podmienky zo zadania $\mathcal{A}$ a jej prvky zoradené podľa veľkosti ako $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$ (čiže platí $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2002}$). Zamenením každého čísla súčtom ostatných dostávame množinu $\mathcal{B} = \{a_2 + a_3 + \ldots + a_{2002}, a_1 + a_3 + \ldots + a_{2002}, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{2001}\}$. My zo zadania vieme, že tieto množiny sa rovnajú, no nevieme, ktorý prvok z $\mathcal{A}$ prislúcha ktorému prvku z $\mathcal{B}$ a naopak. Keby sme však vedeli zoradiť prvky z $\mathcal{B}$ podľa veľkosti, už by bolo jasné, že najmenší prvok z $\mathcal{A}$ je rovnaký ako najmenší z $\mathcal{B}$, druhý najmenší z $\mathcal{A}$ je druhý najmenší z $\mathcal{B}$ atď. Na to, aby sme vedeli ľahšie zoradiť prvky z $\mathcal{B}$, napíšeme si ich jednoduchšie, a to pomocou súčtu $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2002}$. Potom sa totiž číslo $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2002}$ dá napísať ako $s - a_1$, a teda prvky množiny $\mathcal{B}$ budú $s - a_1$, $s - a_2$, ..., $s - a_{2002}$. Teraz vieme určiť, že prvky v $\mathcal{B}$ sú vlastne usporiadané zostupne (čiže každý nasledujúci prvok je menší ako predchádzajúci), lebo s je konštanta a $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2002}$. Takže $s - a_1 > s - a_2 > \cdots > s - a_{2002}$. Ale keďže $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, tak potom najmenší prvok z $\mathcal{A}$ musí byť najmenší aj v $\mathcal{B}$ a naopak

$$\begin{aligned} a_1 &= s - a_{2002} \\ a_2 &= s - a_{2001} \\ &\vdots \\ a_{2002} &= s - a_1 \end{aligned}$$

Z toho dostaneme $s = a_1 + a_{2002} = a_2 + a_{2001} = \cdots = a_{1001} + a_{1002}$. Teda množina $\mathcal{B}$ sa musí skladať z 1001 dvojíc čísel, ktorých súčet je rovnaký a rovný s. Lenže s je zároveň súčet všetkých čísel z tej množiny, takže musí platiť

$$s = (a_1 + a_{2002}) + (a_2 + a_{2001}) + \ldots + (a_{1001} + a_{1002}) = s + s + \ldots + s = 1001s,$$

ale to má jediné riešenie $s = 0$. Potom ale $a_{1001} + a_{1002} = 0$ a keďže aj $a_{1001} < a_{1002}$, tak $a_{1001} < 0 < a_{1002}$.

Z toho, ako sme mali zoradené prvky v $\mathcal{A}$, platí aj

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{1001} < 0 < a_{1002} < \cdots < a_{2002}.$$

Množina $\mathcal{A}$ teda obsahuje 1001 kladných a 1001 záporných čísel - nulu neobsahuje, keďže podľa zadania sú čísla rôzne a čísla máme zoradené podľa veľkosti. Súčin jej prvkov je teda pochopiteľne záporný.

Komentár: Viacerí z vás zistili, že prvky množiny $\mathcal{A}$ musia byť v tvare $\{a_1, a_2, \ldots, a_{1001}, -a_{1001}, \ldots, -a_2, -a_1\}$. Treba si však uvedomiť, že nestačí nájsť nejakú množinu, ktorá spĺňa podmienky zadania a zistiť že súčin jej prvkov je záporný, ale treba ukázať, že tak musí vyzerať každá množina zo zadania.

Úloha č. 6: *V spoločnosti nazývame niekoho bojazlivým, ak má maximálne troch známych. (Známosti sú vzájomné, t.j. ak Janko pozná Ferka, tak aj Ferko pozná Janka.) V istej spoločnosti pozná každý aspoň troch bojazlivých ľudí. Ukážte, že sú všetci v tejto spoločnosti bojazliví. Koľko členov môže mať táto spoločnosť?*

Riešenie: (opravovali Kubo a Paľo)
Nech by v spoločnosti existoval nejaký nebojazlivý človek N. Tento pozná aspoň troch bojazlivých ľudí. Vezmime si jedného z nich B. Človek B pozná troch bojazlivých a okrem toho ešte nebojazlivého N. Celkovo teda pozná 4 ľudí, čo je spor s tým, že je bojazlivý.

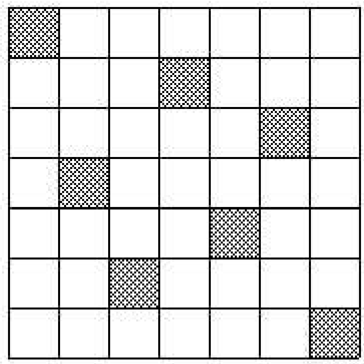
Všetci v spoločnosti sú teda bojazliví. Každý pozná najviac troch ľudí (lebo je bojazlivý) a zároveň aspoň troch (bojazlivých) ľudí (lebo patrí do tejto spoločnosti). Je teda zrejmé, že každý pozná práve troch ľudí. Počet všetkých vzájomných známostí je $z = \frac{3n}{2}$, kde n je počet ľudí v spoločnosti. Počet známostí musí byť prirodzené číslo, preto n musí byť párne. Ešte musíme ukázať, že pre každé párne číslo n (väčšie ako 3, pretože každý má troch známych) existuje n-členná spoločnosť, ktorá vyhovuje všetkým podmienkam. Jedna z možností je táto: Usporiadajme ľudí do kruhu. Každý bude poznať svojich dvoch susedov a ešte človeka, ktorý stojí priamo oproti nemu. Ľahko nahliadneme, že je to možné urobiť pre každé párne číslo (väčšie ako 3).

Komentár: Mnohí ste dokázali, že počet ľudí nemôže byť nepárne číslo a z toho ste usúdili, že všetky párne čísla vyhovujú. To je to isté, ako keby ste dokázali, že číslo deliteľné štyrmi nemôže byť nepárne a z toho by ste usúdili, že každé párne číslo je deliteľné číslom 4 - nezmysel!

Jazyková poznámka: Bojazlivý človek, bojazliví ľudia...

Úloha č. 7: *Štvorec $n \times n$ je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Nejakých n z nich je ofarbených na čierno. Zistite, či je možné vždy vybrať biely obdĺžnik (alebo štvorec) s obsahom $S \geq n$, ak*
a) $n = 7$,
b) $n = 8$.

Riešenie: (opravovali Rado a Feri)
a) Pri ofarbení políčok ako na obr. 1 nie je možné vybrať biely obdĺžnik ani štvorec s obsahom $S \geq 7$, teda tvrdenie zo zadania pre $n = 7$ vo všeobecnosti neplatí.

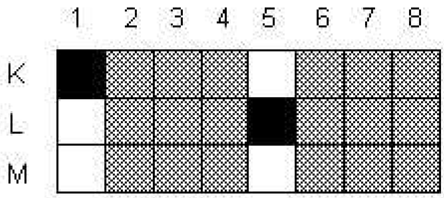


obr. 1

b) Predpokladajme, že takéto ofarbenie pre $n = 8$ existuje. Keďže máme zafarbiť 8 políčok a zároveň v každom riadku i stĺpci musí byť aspoň jedno zafarbené políčko (ináč by nám vznikol prázdny obdĺžnik 8×1), tak v každom riadku i stĺpci musí byť práve jedno zafarbené políčko. Teda aj v prvom stĺpci musí byť zafarbené políčko, nech je v prvých štyroch riadkoch, ináč nám stačí otočit si mriežku a máme ten istý prípad. Označme riadok, v ktorom sa nachádza to zafarbené políčko ako K, riadky pod ním L, M (viď obr. 2). Stĺpce si očíslujme 1-8. Jediná možnosť, ako zabrániť vzniku obdĺžnikov K2-L5 (obdĺžnik s rohmi vo vrcholoch K2, L5) a K5-L8 je zafarbiť políčko L5. Avšak potom, nech zafarbíme ľubovoľné políčko v riadku M, tak nám vznikne aspoň jeden zo štvorcov K2-M4 a K6-M8, čím dostávame spor. Teda platí, že pre $n = 8$ sa dá vždy vybrať obdĺžnik alebo štvorec s obsahom $S \geq 8$.

Komentár: Zaujímavé je, že nikoho nenapadlo vyberať iné obdĺžniky, ako tie, ktorých strany sú rovnobežné so stranami pôvodného štvorca a ich vrcholy sú presne vrcholmi jednotkových štvorcov. Zmenilo by sa tvrdenie, keby sme nepoužívali tieto predpoklady?

Úloha č. 8: *Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si n korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu?*



obr. 2

Riešenie: (opravovali Tina a Feldo)
Úlohu vyriešime dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob. Postupujme radom mincí zľava doprava. Vyrobme číslo tak, že zapíšeme miesto každej mince znakom hore jednotku, miesto mince znakom dole nulu. Ľubovoľná poloha mincí na stole je takto reprezentovaná číslom zloženým z núl a jednotiek, teda nezáporným celým číslom. Pri vykonaní ľubovoľného ťahu sa nám v čísle zmení niektorá jednotka na nulu, a tiež sa nejako pomenia cifry od tejto jednotky napravo. Nech by sa však pomenili akokoľvek, nové číslo bude určite **menšie** ako pôvodné (vyskúšajte si a rozmyslite si prečo to platí!). Keďže začiatočné číslo bolo konečné a každý ťah ho zmenší, nemôžeme takýchto ťahov urobiť nekonečne veľa. Preto hra po konečnom počte ťahov skončí, nech by dievčence ťahali akokoľvek.

Druhý spôsob. Úlohu dokážeme matematickou indukciou podľa počtu mincí.

1° Ak hráme s jedinou mincou, hra skončí buď hneď (ak je minca znakom dole), alebo po prvom ťahu.

2° Indukčný predpoklad je, že ak hráme s n mincami, tak nech by dievčatá hrali akokoľvek, po konečnom počte ťahov bude všetkých n mincí znakom dole. Dokážeme, že takýto výrok potom platí aj pre $n+1$ mincí.

Majme na stole $n+1$ mincí. Rozlišujme dve situácie. Ak je tá najľavejšia znakom dole, do hry už nikdy nezasiahne a hra so zvyšnými n mincami sa podľa IP určite skončí po konečnom počte ťahov.

Ak je najľavejšia znakom hore a počas hry ju otočíme, opäť bude zvyšok hry prebiehať iba so zvyšnými mincami a hra bude nutne konečná. Môže sa však stať, že by dievčatá túto mincu neotočili? To znamená, že by celý čas hrali iba s mincami napravo od nej, ale po konečnom počte ťahov by podľa IP boli všetky tieto mince znakom dole. Hráčka, ktorá má nasledujúci ťah, musí potom otočiť túto mincu. Zvyšok hry bude prebiehať na zvyšných n minciach a bude podľa IP konečný.

Preto, ak by teda dievčatá hrali akokoľvek, hra sa po konečnom počte ťahov skončí.

Všimnime si teraz, že pri ľubovoľnom ťahu sa minca úplne vpravo otočí. Hra sa skončí v okamihu, keď sú všetky mince, teda aj posledná, znakom dolu. Preto hráčka, po ktorej ťahu bude táto minca **vždy** znakom hore, nemôže vyhrať, čo v tejto hre znamená, že prehrá. Ktorá to bude, záleží od počiatočného rozostavenia mincí – ak je na začiatku minca úplne vpravo znakom hore, vyhrá Petra, ináč vyhrá Dalila.

Komentár: Mnohí z vás ste nedokazovali, že hra musí niekedy skončiť, ale že môže. Uvedomte si, aký je v tom rozdiel. Skúste porozmýšľať, ako by sa hra zmenila, keby hráčky sedeli oproti sebe, teda napravo by bolo pre každú iným smerom. Niektorí z Vás prišli o body kvôli nejasnosti ohľadom termínu „víťazná stratégia”. Fakt, že šanca na víťazstvo je ovplyvnená rozostavením mincí ešte neznamená, že neexistuje víťazná stratégia. Pre každé rozostavenie mincí už víťazná stratégia existuje.

Úloha č. 9: *Na pingpongovej súťaži sa hralo systémom každý s každým práve raz. Súťažiaci A dostal cenu, ak každého súpera B buď porazil, alebo porazil niekoho, kto vyhral nad B. Ukážte, že ak iba jeden súťažiaci dostal cenu, tak porazil každého hráča.*

Riešenie: (opravoval Elefant)
Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že turnaj mal jedného víťaza (t.j. súťažiaceho, ktorý splnil podmienky na udelenie ceny), ktorý však aspoň raz prehral. Označme A tohoto víťaza, $\mathcal{B}$ množinu tých súťažiacich,

ktorí so súťažiacim A prehrali, a $\mathcal{C}$ množinu tých, ktorí hráča A porazili. Keď sa pozrieme na zápasy medzi hráčmi v neprázdnej (!) množine $\mathcal{C}$ ako na samostatný turnaj s rovnakými pravidlami, ten má (ako ukážeme o chvíľu) aspoň jedného víťaza, ktorého označíme C. Ten však vyhral aj nad súťažiacim A a aj pre každého hráča z $\mathcal{B}$ existuje hráč, ktorý nad ním vyhral a zároveň prehral so súťažiacim C (tým je hráč A). Potom je však hráč C aj víťazom celého turnaja, čo je spor.

Tým sme skončili hlavnú myšlienku dôkazu. Ostáva nám však ešte dokázať použité pomocné tvrdenie, podľa ktorého má každý turnaj s danými pravidlami aspoň jedného víťaza. Ukážeme si dva dôkazy, ktoré demonštrujú dve rôzne základné myšlienky.

Prvý dôkaz používa matematickú indukciu vzhľadom na počet súťažiacich. Matematickú indukciu použila väčšina riešiteľov rôznymi spôsobmi, uvedieme však len jeden z nich.

1° Pre jedného súťažiaceho tvrdenie zrejme platí, lebo všetkých ostatných porazil.

2° Nech tvrdenie platí pre n ($n \geq 1$) súťažiacich. Pre $n+1$ hráčov najskôr vezmeme ľubovoľných n z nich a zápasy medzi nimi vyhodnotíme ako celý turnaj. Podľa indukčného predpokladu existuje aspoň jeden víťaz, a toho označíme V. Množinu hráčov, ktorých hráč V porazil označíme $\mathcal{P}$ a množinu ostatných $\mathcal{Q}$. Pripomeňme, že hráč V je víťaz, teda pre každého hráča z $\mathcal{Q}$ existuje hráč v P, ktorý ho porazil. Potom však pri pridaní $n+1$-ho hráča X nastanú dve možnosti. Buď hráč X porazil hráča V a všetkých hráčov z $\mathcal{P}$, potom je však podľa predchádzajúcej pripomienky dokonca víťazom, alebo ho porazil hráč V alebo niekto z $\mathcal{P}$, potom však ostáva hráč V víťazom celého turnaja aj pre $n+1$ hráčov. V oboch prípadoch je tvrdenie dokázané aj pre $n+1$ hráčov, čím je indukcia ukončená.

Druhý dôkaz sa opiera o možnosť výberu hráča V, ktorý vyhral najviac zápasov, povedzme k. Pre jednočlenný turnaj tvrdenie platí. Pre viacčlenný je $k \geq 1$ a každý hráč, ktorý vyhral nad V potom vyhral nanajvyš nad $k-1$ inými hráčmi, preto musel prehrať aspoň s jedným hráčom, ktorého hráč V porazil. Keď sa zamyslíme nad poslednou vetou, tá v skutočnosti hovorí, že hráč V je víťaz. Tým je tvrdenie dokázané.

Úloha č. 10: *Jedna veverička zbierala na zimu oriešky a nazbierala ich aspoň dva (počet orieškov je celé číslo). Prvý deň zjedla* 1 *oriešok a jednu stotinu zvyšných, druhý deň zjedla* 2 *oriešky a jednu stotinu zvyšných a tak ďalej, predposledný deň zjedla* $n-1$ *orieškov stotinu zvyšných a nakoniec posledný,* n*-tý deň, zjedla posledných* n *orieškov. Koľko orieškov nazbierala naša veverička na zimu?*
Veverička si môže na ďalší deň nechať neceločíselný počet orieškov.

Riešenie: (opravoval Šaňo)
Označme a_k počet orechov, ktoré mala veverička na začiatku k-teho dňa. Všimnime si, že

$$a_{k-1} = (k-1) + \frac{100}{99} a_k,$$

lebo ak veverička mána začiatku $(k-1)$-ho dňa toľkoto orieškov a zje $(k-1)$ a stotinu zo zvyšku (čiže $a_k/99$) zostane jej do dalšieho dňa práve očakávaných a_k orieškov. Vieme, že na začiatku n-tého dňa mala veverička n orieškov. Postupne potom dostávame

$$\begin{aligned}
a_n &= n \\
a_{n-1} &= (n-1) + \frac{100}{99} a_n, \\
a_{n-2} &= (n-2) + \frac{100}{99} a_{n-1} = (n-2) + (n-1)\frac{100}{99} + n\left(\frac{100}{99}\right)^2, \\
a_{n-3} &= (n-3) + \frac{100}{99} a_{n-2} = (n-3) + (n-2)\frac{100}{99} + (n-1)\left(\frac{100}{99}\right)^2 + n\left(\frac{100}{99}\right)^3, \\
&\vdots \\
a_1 &= 1 + 2 \cdot \frac{100}{99} + 3 \cdot \left(\frac{100}{99}\right)^2 + \ldots + n \cdot \left(\frac{100}{99}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Keďže na začiatku mala veverička celočíselný počet orieškov, ostáva vyriešiť kedy je číslo a_1 celé – vyjadríme si ho preto jednoduchšie. Ide o sčítanie výrazu

$$A = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}$$

pre $q = 100/99 \neq 1$. Ide o pomerne známu a často sa vyskytujúcu úlohu s viacerými peknými riešeniami. Pre tých, ktorým sa sumu nepodarilo sčítať uvádzame zrejme najprirodzenejší postup. Stačí poznať vzťah

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Výraz A preuzátvorkujeme a postupne dostávame

$$\begin{aligned}
A &= (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})+(q+q^2+\ldots+q^{n-1})+\ldots+(q^{n-2}+q^{n-1})+(q^{n-1}) = \\
&= (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})+q\cdot(1+q+\ldots+q^{n-2})+\ldots+q^{n-2}\cdot(1+q)+q^{n-1}\cdot 1 = \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}+q\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+\ldots+q^{n-2}\cdot\frac{q^2-1}{q-1}+q^{n-1}\cdot\frac{q-1}{q-1} = \\
&= \frac{1}{q-1}\left[(q^n-1)+(q^n-q)+(q^n-q^{n-2})+(q^n-q^{n-1})\right] = \\
&= \frac{1}{q-1}\left[nq^n-(1+q+\ldots+q^{n-2}+q^{n-1}\right] = \frac{1}{q-1}\left[nq^n-\frac{q^n-1}{q-1}\right]
\end{aligned}$$

Za q teraz dosadíme $\frac{100}{99}$ a dostávame vzorček pre a_1

$$a_1 = 99\cdot\left((n-99)\left(\frac{100}{99}\right)^n+99\right) = 9801+100^n\cdot\frac{n-99}{99^{n-1}} \tag{1}$$

Zrejme $n\neq 1$, nakoľko veverička nazbierala aspoň jeden oriešok. Úlohou zostáva nájsť také $n\geq 2$, že a_1 je celé číslo. Keďže pre $n\geq 2$ sú 99^{n-1} a 100^n nesúdeliteľné, potrebujeme $99^{n-1}\mid(n-99)$. Navyše pre $n\geq 2$ máme $99^{n-1}>|n-99|$ (dokážte si!). Preto jedinou možnosťou zostáva $n-99=0$. Skutočne, pre $n=99$ máme $a_1=9801$. Z postupu vyplýva, že iné počty orieškov nevyhovujú zadaniu. Preto veverička nazbierala práve 9801 orieškov.

Komentár: Kľúčom k riešeniu bolo vedieť čo vlastne znamená riešiť príklad tohoto typu. V úlohach ako je táto treba, pokiaľ nie je uvedené inak, hľadať všetky vyhovujúce riešenia. Nestačilo teda iba nájsť či uhádnuť riešenie 9801 orieškov – bolo nutné tiež dokázať, že iné počty zadaniu nevyhovujú. Niektorým riešiteľom sa môže zdať, že vyriešili celú úlohu, no majú málo bodov. Je to tak preto, že za zdôvodnenie postupu od vzťahu (1) po koniec som dával 3 body.

Úloha č. 11: *Na šachovnicu 10×10 umiestnime 9 pukov tak, aby bol každý puk na inom políčku. Potom pridávame puky podľa nasledujúceho pravidla: ak má políčko, na ktorom nie je puk, aspoň dve susedné políčka, na ktorých už sú puky, tak na toto políčko dáme puk. (Susedné políčka majú spoločnú stranu.) Ukážte, že týmito krokmi nikdy nezaplníme celú šachovnicu pukmi.*

Riešenie: (opravoval Peťo)
Zafarbime políčka, na ktorých máme na začiatku puky, čiernou farbou. Ostatné políčka nechajme biele. Zakaždým, keď pridáme na nejaké políčko puk, zafarbime ho načierno. Sledujme, ako sa pri tom mení *obvod* čiernej plochy.

Ak políčko, na ktoré pridávame puk, susedí práve s dvoma políčkami s pukmi, obvod sa zrejme nezmení. (Skúste si to!) Ak susedí s tromi alebo štyrmi, dokonca sa zmenší. Takže keď skončíme, obvod čiernej plochy určite nebude väčší ako na začiatku. Na začiatku je obvod najviac 36. (Zamyslite sa, prečo?) Celá šachovnica má ale obvod až 40. Takže nikdy nedosiahneme, aby bola celá zaplnená pukmi.

Komentár: Kľúčom k riešeniu bolo objavenie *invariantu* (tj. niečoho, čo sa nemení). Ten bol pomerne netradičný (nerastúcosť obvodu). Veľká časť riešení sa odvolávala na efektívne rozloženie deviatich pukov na začiatku. Keď ale považujete niečo za najefektívnejšie, musíte svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť. V tomto prípade to bolo takmer nemožné. Iné riešenia analyzovali, ako budú puky pribúdať, keď na šachovnicu budeme pridávať postupne jeden nový puk za druhým. Problém bol v tom, že takéto riešenia nefungovali na situácie, keď pridávame viac pukov naraz.

Za týmto celým stojíme my, KMS.

Rado Bauer	Katka Boďová	Peter Čermo Čermák	Jakub Kubo Daubner
František Debo Debnár	Alexander Šaňo Erdélyi	Juraj Feldo Földes	Štefan Pišta Gyürki
Martin Malic Handlovič	Pavol Jurča	Tomáš Jurík	František Feri Kardoš
Aňa Korduliaková	Eugen Eňo Kováč	Jano Mazák	Michal Miki Mikuš
Paľo Novotný	Peťo Novotný	Mišo Poko Pokorný	Marián Potočný
Martin Foto Potočný	Ivan Yfo Piliš	Ľuboš Buggo Steskal	Janka Szolgayová
Erika Trojáková	Mišo Vaľko	a vysádzal nám to	LaTeX