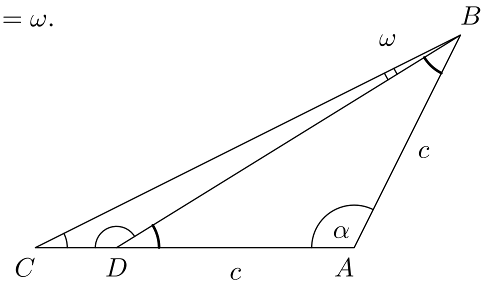
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

<u>Úloha č. 1:</u> *Nakreslite si nejaký trojuholník ABC tak, že $|AC| > |AB|$. Na jeho strane AC si vyznačte bod D tak, aby platilo $|AB| = |AD|$ (bod D leží na úsečke AC). Zabudli sme Vám ešte na začiatku prezradiť, že platí aj $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = 30°$ (ale presné veľkosti uhlov ABC, ACB nepoznáme). Pokúste sa (aj bez znalosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC) zistiť veľkosť uhla CBD.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Marián Rúža)



Označme si $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle BCA| = \gamma$ a hľadanú $|\sphericalangle CBD| = \omega$. Keďže zo zadania platí $|AB| = |AD|$ (označme si $|AB| = |AD| = c$), tak trojuholník DAB je rovnoramenný s ramenami AB, AD, a teda platí $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle ABD|$. Súčet uhlov v trojuholníku DAB je 180°, čiže platí

$$\begin{aligned} \alpha + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| &= 180° \\ \alpha + 2 \cdot |\sphericalangle ABD| &= 180° \\ |\sphericalangle ABD| &= \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Teda $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Keďže uhol CDA je priamy a $|\sphericalangle CDB| + |\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle CDA|$, tak $|\sphericalangle CDB| = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Zo zadania platí $\beta - \gamma = 30°$ a teda $\beta = 30° + \gamma$. Súčet uhlov v trojuholníku ABC je 180° a teda platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Dosadením vyjadrenia β ($\beta = 30° + \gamma$) do tohto vzťahu dostávame

$$\begin{aligned} \alpha + (30° + \gamma) + \gamma &= 180° \\ \gamma &= 75° - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Súčet uhlov v trojuholníku CDB je 180° a teda platí $\omega + \gamma + (90° + \frac{\alpha}{2}) = 180°$. Dosadením vyjadrenia γ ($\gamma = 75° - \frac{\alpha}{2}$) do tohto vzťahu dostávame

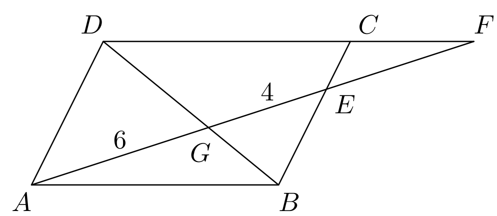
$$\begin{aligned} \omega + 75° - \frac{\alpha}{2} + 90° + \frac{\alpha}{2} &= 180° \\ \omega &= 15° \end{aligned}$$

Čiže hľadaná veľkosť uhla CBD je 15°.

<u>Úloha č. 2:</u> *V nejakom rovnobežníku $ABCD$ (ktorého rozmery nevieme) si na strane BC zvolíme ľubovoľne bod E. Priamka $\overleftrightarrow{AE}$ pretne uhlopriečku BD v bode G a priamku DC v bode F (F leží na polpriamke $\overrightarrow{DC}$ za bodom C). Dokážete zistiť veľkosť úsečky EF (v cm), ak viete iba toľko, že platí $|AG| = 6$ cm a $|GE| = 4$ cm?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Janka a Kubo)

Strany BC a AD rovnobežníka $ABCD$ sú rovnobežné, preto sú rovnaké aj striedavé uhly ($|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBC|$, $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle AEB|$). Dokonca sa rovnajú aj vrcholové uhly ($|\sphericalangle AGD| = |\sphericalangle BGE|$). Z tohto už vieme, že platí $\triangle AGD \sim \triangle EGB$ podľa vety (uu). Z pomeru ich strán dostaneme rovnosti



$$\begin{aligned} \frac{|BE|}{|AD|} &= \frac{|GE|}{|GA|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \\ |BE| &= \frac{2}{3} \cdot |AD| = \frac{2}{3} \cdot |BC| = \frac{2}{3} \cdot |BE| + \frac{2}{3} \cdot |CE| \\ \frac{|CE|}{|BE|} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Podobne ako v úvode, pretože $AB \parallel CD$, dostaneme $\triangle ABE \sim \triangle FCE$ (uu). Dajme do pomeru veľkosti strán týchto podobných trojuholníkov a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{|EF|}{|AE|} &= \frac{|CE|}{|BE|} = \frac{1}{2} \\ |EF| &= \frac{1}{2}\,|AE| = \frac{1}{2}\,(|AG| + |GE|) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \end{aligned}$$

Teda dĺžka úsečky EF je 5 cm.

<u>**Úloha č. 3:**</u> *Viete nakresliť štvoruholník $ABCD$, aby platilo $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|CD| = 13$ cm, $|DA| = 14$ cm a $|AC| = 15$ cm? Ak áno, tak si do obrázka dokreslite kolmice z bodov B a D na uhlopriečku AC a ich päty (priesečníky kolmíc s AC) označte postupne P a Q. Aká je veľkosť úsečky PQ? Viete to ukázať aj bez toho, aby ste to odmerali?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Aňa a Mišo)
Výška DQ rozdeľuje ostrouhlý trojuholník ACD na dva pravouhlé: AQD a CQD. Z Pythagorovej vety máme:

$$|AQ|^2 + |DQ|^2 = |AD|^2 \qquad \text{a} \qquad |CQ|^2 + |DQ|^2 = |CD|^2$$

Ak si z druhej rovnice vyjadríme $|DQ|^2$ a dosadíme to do prvej rovnice, dostaneme:

$$|AQ|^2 - |CQ|^2 = |AD|^2 - |CD|^2 = (14\,\mathrm{cm})^2 - (13\,\mathrm{cm})^2 = 27\,\mathrm{cm}^2$$

Vieme, že $|AQ| + |CQ| = |AC| = 15\,\mathrm{cm}$ a zároveň $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$27\,cm = |AQ|^2 - |CQ|^2 = (|AQ| - |CQ|)(|AQ| + |CQ|) = 15\,cm \cdot (|AQ| - |CQ|) \Rightarrow (|AQ| - |CQ|) = 1.8\,\mathrm{cm}$$

A teraz si už dokážeme vyjadriť dĺžku úsečky CQ:

$$|CQ| = |AQ| - 1.8\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm} - |CQ| - 1.8\,\mathrm{cm} \Rightarrow |CQ| = 6.6\,\mathrm{cm}$$

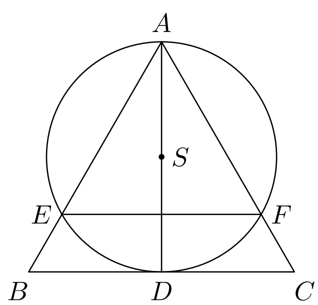
Podobne spočítame, že $|AP| = 5.4\,\mathrm{cm}$. A teraz je už nad slnko jasnejšie, že:

$$|PQ| = |AC| - |QC| - |AP| = 15\,\mathrm{cm} - 6.6\,\mathrm{cm} - 5.4\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}$$

<u>Komentár:</u> Niektorí sa k riešeniu dostali výpočtom uhlov trojuholníkov a následným vyjadrením strán pomocou sínusu či kosínusu týchto uhlov. My však nemáme presné vyjadrenie veľkosti uhlov a preto nemôžeme tvrdiť, že sme výsledné dĺžky strán zrátali presne. Napriek tomu, že kalkulačka nakoniec presné číslo ukáže. Problém je v tom, že kalkulačka nám funkcie ako sínus počíta na konečný počet desatinných miest a tak získaný výsledok je len (aj keď dobrým) odhadom.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *V rovnostrannom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC| = |AC| = 10$ cm) si označme výšku z bodu A ako AD. Nad AD (ako nad priemerom) zostrojme kružnicu, ktorá pretína strany AB a AC v bodoch E a F. Vyrátajte pomer dĺžok $|EF| : |BC|$. Závisí tento pomer od veľkosti strany trojuholníka ABC?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Miki a Paľo J.)



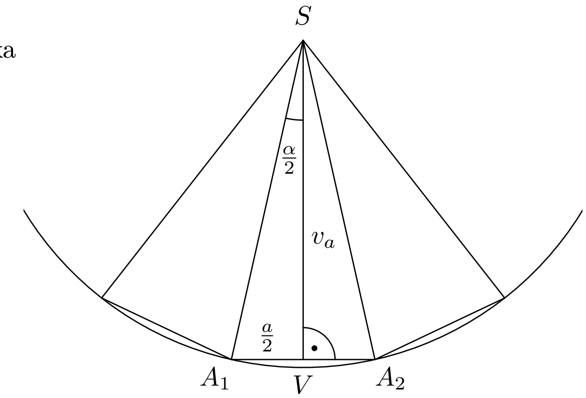
Keďže je trojuholník ABC rovnostranný, je osovo súmerný podľa výšky AD. Preto platí $|AE| = |AF|$, a teda $EF \parallel BC$ a podľa vety (uu) o podobnosti trojuholníkov sú trojuholníky ABC a AEF podobné. Hľadaný pomer $|EF| : |BC|$ môžeme vyjadriť ako pomer výšok v trojuholníkoch AEF a ABC. Označme si stred úsečky AD ako S. Bod S je potom stredom danej (Tálesovej) kružnice prechádzajúcej bodmi E a F. Táto kružnica je opísaná trojuholníku AEF, a keďže tento trojuholník je z podobnosti rovnostranný, stred jemu opísanej kružnice je totožný s jeho ťažiskom. Vzdialenosť AS je polovicou výšky v trojuholníku ABC a zároveň je dvoma tretinami výšky (=ťažnice) v trojuholníku AEF. Odtiaľ hneď vyplýva, že pomer týchto výšok musí byť $3:4$, čo je súčasne hľadaný pomer $|EF| : |BC|$. Tento pomer sme dostali bez ohľadu na veľkosť strany trojuholníka ABC.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Všetci poznáme Pytagorovu vetu: Obsah <u>štvorca</u> nad preponou je rovnaký ako súčet obsahov <u>štvorcov</u> nad odvesnami pravouhlého trojuholníka.*
Mal by bájny matematik pravdu aj v prípade, že by sme namiesto štvorcov použili
a) rovnostranné trojuholníky,
b) pravidelné šesťuholníky,
c) pravidelné 2002-uholníky?

<u>Riešenie:</u> (opravovali Čermo a Poko)
Najprv pre nedočkavcov prezradíme odpoveď: Pythagoras by mal pravdu vo všetkých troch prípadoch. My teraz ukážeme, že by mal pravdu, keby vo svojej vete nahradil "štvorce" za "pravidelné n-uholníky" pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geq 3$.

Ďalej budeme predpokladať, že $n \geq 3$. Pravidelnému n-uholníku $A_1 A_2 \cdots A_n$ sa dá opísať kružnica. Keď spojíme každý vrchol tohoto n-uholníka s jej stredom S, dostaneme n zhodných rovnoramenných trojuholníkov. Základňa každého z nich bude rovná strane pôvodného n-uholníka, označme jej veľkosť a. Uhol oproti základni bude mať veľkosť $\alpha = \frac{360°}{n}$. Na to, aby sme zistili obsah celého n-uholníka, stačí nám zistiť obsah jedného z rovnoramenných trojuholníkov. Obsah n-uholníka bude potom $S = n \cdot S_\triangle$, kde $S_\triangle$ je obsah jedného rovnoramenného trojuholníka.

Poďme vypočítať obsah niektorého rovnoramenného trojuholníka. Vypočítajme napríklad obsah trojuholníka A_1SA_2. Výška v spustená z vrcholu S pretne základňu A_1A_2 v jej strede V (to vieme z vlastností rovnoramenných trojuholníkov). Teda trojuholníky A_1SV a A_2SV sú zhodné, a navyše pravouhlé. Z pravouhlého A_1VS vieme vyjadriť výšku v zo vzťahu $\frac{\frac{a}{2}}{v} = \operatorname{tg}\alpha$, dostávame $v = \frac{a}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Teraz už vieme vypočítať obsah celého trojuholníka A_1SA_2:



$$S_{A_1SA_2} = 2\cdot S_{A_1VS} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Obsah pravidelného n-uholníka so stranou a potom bude

$$S = n\cdot\frac{a^2}{4\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Majme teraz pravouhlý trojuholník so stranami a, b, c s preponou c. Zostrojme nad jeho stranami pravidelné n-uholníky. Ich obsahy nech sú postupne S_a, S_b, S_c. Pre tento trojuholník platí Pythagorova veta $a^2+b^2=c^2$. Úpravou dostávame

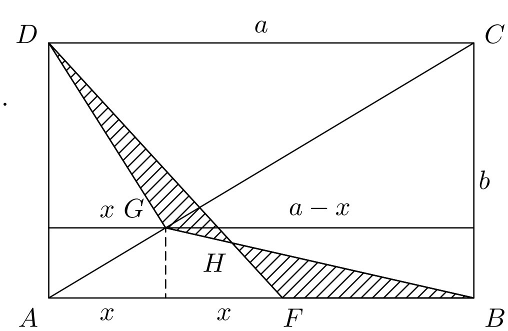
$$\begin{aligned}\frac{n}{4\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot(a^2+b^2) &= \frac{n}{4\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot c^2\\ S_a+S_b &= S_c,\end{aligned}$$

čo sme chceli ukázať.

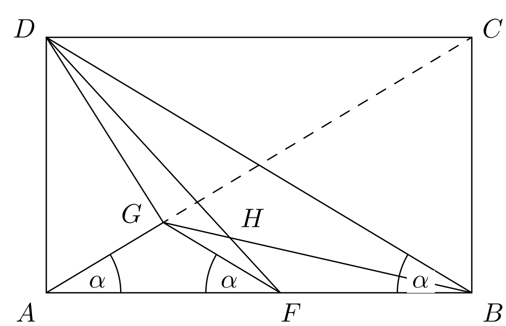
<u>Úloha č. 6:</u> *Na strane AB obdĺžnika $ABCD$ si zvoľme bod F. Os úsečky AF pretína uhlopriečku AC v bode G. Úsečky FD a BG sa pretínajú v bode H. Dokážte, že trojuholníky FBH a GHD majú rovnaký obsah.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Erika a Feri)
Úlohu ste riešili viacerými spôsobmi. Uvedieme dva z nich:

1. Označme $|AB|=a$, $|BC|=b$ a $|AF|=2x$ (pozri obrázok). Počítajme obsahy trojuholníkov podľa vzorca $S=\frac{1}{2}a\cdot v_a$:
(*) $S_{AGD}=\frac{1}{2}bx$, $S_{ADF}=bx$, $S_{GBC}=\frac{1}{2}b(a-x)$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab$.
Pre obsah trojuholníka GHD platí:
$S_{GHD}=S_{ADF}-S_{AGD}-S_{AFHG}$ a použitím vzťahov (*) dostávame
$S_{GHD}=\frac{1}{2}bx-S_{AFHG}$. Podobne si vyjadríme obsah
$S_{FBH}=S_{ABC}-S_{GBC}-S_{AFHG}$, s využitím (*) dostaneme
$S_{FBH}=\frac{1}{2}bx-S_{AFHG}$. Odtiaľ už vidíme, že skutočne platí
$S_{GHD}=S_{FBH}$.



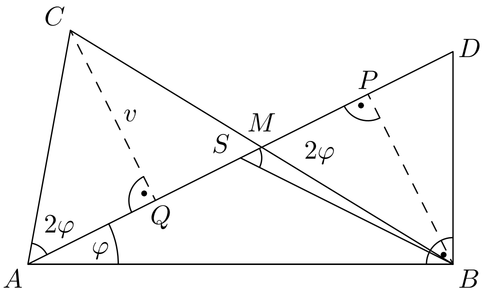
2. Namiesto toho, aby sme dokazovali, že obsahy trojuholníkov FBH a GHD sú rovnaké, stačí dokázať, že obsahy trojuholníkov GFD a GFB sú rovnaké. Tieto dva trojuholníky majú spoločnú stranu GF, teda stačí ukázať, že majú rovnakú výšku na túto stranu a už budú mať rovnaký obsah. To ale znamená, že nám stačí ukázať, že FG je rovnobežné s BD. Označme $|\sphericalangle CAB|=\alpha$ (pozri druhý obrázok). Pretože platí $\triangle ABC\cong\triangle BAD$, vidíme, že $|\sphericalangle DBA|=|\sphericalangle CAB|$. Trojuholník AFG je rovnoramenný a preto $|\sphericalangle GFA|=|\sphericalangle GAB|=|\sphericalangle CAB|=|\sphericalangle DBA|=\alpha$. Zo zhodnosti uhlov sme tak dostali $\overleftrightarrow{GF}\parallel\overleftrightarrow{BD}$. Teda výška trojuholníka GFD na stranu GF a výška trojuholníka GFB na stranu GF sa rovnajú, preto sú obsahy trojuholníkov GFB a GFD rovnaké. Nakoniec podobnou úvahou, ako v predchádzajúcom riešení, dostaneme $S_{GFB}-S_{GFH}=S_{GFD}-S_{GFH}\iff S_{FBH}=S_{GHD}$.



<u>Úloha č. 7:</u> *V trojuholníku ABC delí ťažnica AM uhol BAC tak, že platí $2|\sphericalangle BAM|=|\sphericalangle CAM|$. Na priamke AM si vyznačme ako D taký bod, že uhol DBA je pravý. Dokážte, že potom platí $2|AC|=|AD|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Paľo N. a Peťo)
Označme φ veľkosť uhla BAM a S stred Tálesovej kružnice opísanej trojuholníku ABD nad priemerom AD. (Využívame poznatok zo zadania, že uhol DBA je pravý.) Teraz nám už stačí dokázať, že úsečka AC má rovnakú

veľkosť ako polomer tejto kružnice. Pokúsme sa nejako využiť fakt zo zadania o uhloch. V našej kružnici je uhol BSD stredovým uhlom k obvodovému uhlu BAD, takže $|\sphericalangle BSD| = 2\varphi$. (Dá sa to ľahko odvodiť aj z rovnoramenného trojuholníka ABS.) Ale podľa zadania aj $|\sphericalangle CAM| = 2\varphi$. Takže $|\sphericalangle CAM| = |\sphericalangle BSD|$. Zdá sa, že zhodnosť týchto uhlov budeme môcť využiť na nájdenie nejakých dvoch zhodných trojuholníkov. Ešte ale potrebujeme nejako využiť to, že M je stredom strany BC.



Trojuholníky MBA a MCA majú rovnako veľké obsahy, pretože $|BM| = |MC|$ a výšku z vrcholu A majú tieto trojuholníky spoločnú. Majú ale spoločnú aj stranu AM a teda aj výšky BP a CQ spustené na túto stranu musia mať rovnakú veľkosť v (aby boli obsahy trojuholníkov rovnako veľké).

Pozrime sa na trojuholníky SPB a AQC. Podľa toho, čo sme zistili, sú zhodné (veta *uus*, presnejšie, $|\sphericalangle BSP| = |\sphericalangle CAQ| = 2\varphi$, $|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle AQC| = 90°$ a $|BP| = |CQ| = v$). Takže $|SB| = |AC|$. Ale SB je zároveň polomer už spomínanej Tálesovej kružnice nad priemerom AD, teda $2|SB| = |AD|$. Spolu máme $2|AC| = |AD|$, čo sme chceli.

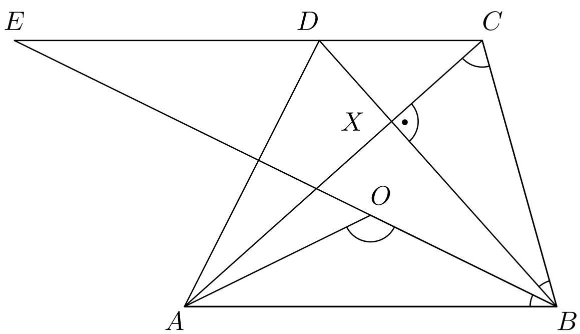
Komentár: Určite ste si všimli, že uvedené riešenie funguje len v prípade, že $2\varphi < 90°$. Prípad $2\varphi > 90°$, alebo dokonca $2\varphi = 90°$, je veľmi podobný a isto si ho urobíte sami.

Úlohu ste zvládli pomerne dobre. Dala sa totiž veľmi jednoducho vyriešiť pomocou sínusových viet. Nakoniec ešte poznámočka pre jazykovedcov: φ sa číta ako „fí".

Úloha č. 8: *Nech v lichobežníku $ABCD$ platí $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, $AC \perp BD$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a E priesečník priamok $\overleftrightarrow{OB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$. Ukážte, že platí rovnosť*

$$|BC|^2 = |CD| \cdot |CE|.$$

Riešenie: (opravovali Foto a Rado)
Označme si priesečník uhlopriečok daného lichobežníka ako X a kružnicu opísanú trojuholníku ABC ako k. Trojuholníky ABX a BCX sú pravouhlé s pravým uhlom pri vrchole X, preto sú uhly CAB a ACB ostré. Stred kružnice k leží preto v uhle ABC a bod E patrí teda polpriamke $\overrightarrow{CD}$.



Označme si $|\sphericalangle DBC| = \alpha$. Trojuholník BCX je pravouhlý, preto $|\sphericalangle BCX| = 90° - \alpha$. Keďže O je stred kružnice k, uhol AOB je stredový k obvodovému uhlu ACB, teda $|\sphericalangle AOB| = 2\ |\sphericalangle ACB| = 2\ (90° - \alpha)$. Naviac platí, že obe úsečky OA aj OB sú polomermi kružnice k, teda $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OBA| = \frac{180° - |\sphericalangle AOB|}{2} = \frac{180° - (180 - 2\alpha)}{2} = \alpha$. Uhly ABE a BEC sú striedavé, teda $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle ABE| = \alpha$. Trojuholníky BCD a ECB sú teda podobné podľa vety (uu) ($|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ECB|$ a $|\sphericalangle DBC| = \alpha = |\sphericalangle CEB|$), preto

$$\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CE|}{|BC|} \implies |BC|^2 = |CD| \cdot |CE|,$$

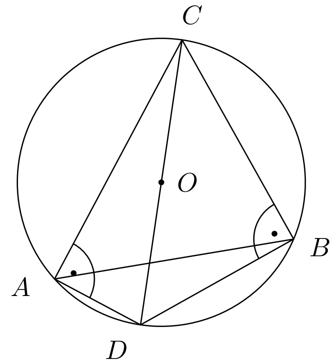
čo bolo treba dokázať.

Úloha č. 9: *Akú vlastnosť musí spĺňať trojuholník ABC, aby pre veľkosti jeho strán (a, b, c) platila rovnosť*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2,$$

kde R označuje polomer opísanej kružnice trojuholníka ABC ?

Riešenie: (opravovali Elefant a Pišta)
Ukážeme, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď trojuholník je pravouhlý. Nech je trojuholník ABC ostrouhlý, O je stred jemu opísanej kružnice (pozri obrázok) s priemerom CD. Potom z pravouhlých trojuholníkov ACD a BCD platí



$8R^2 = 2\,(2R)^2 = (|BC|^2 + |BD|^2) + (|AC|^2 + |AD|^2) = a^2 + |BD|^2 + b^2 + |AD|^2 < a^2 + b^2 + c^2$, lebo teraz uhol BDA je tupý a teda $|BD|^2 + |AD|^2 < c^2$.

Ak je trojuholník ABC tupouhlý, tak $2R > c$, preto $4R^2 > c^2$ a $8R^2 > 2c^2 > a^2 + b^2 + c^2$, kde c je najväčšia strana trojuholníka. Teda ani v tomto prípade rovnosť nenastáva.

V prípade pravouhlého trojuholníka máme $2R = c$, preto $8R^2 = 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, kde c je prepona.

Teda $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ platí práve vtedy, keď trojuholník ABC je pravouhlý.

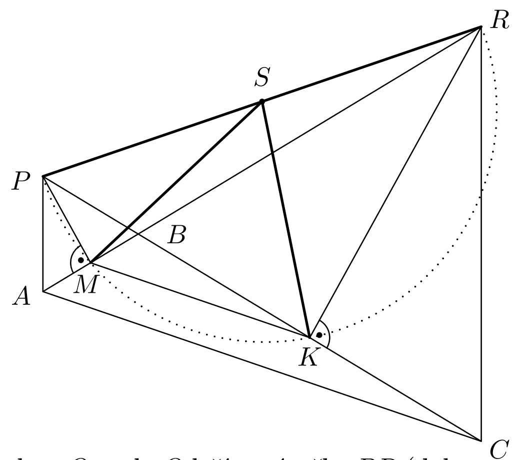
Úloha č. 10: *V trojuholníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Nad stranami AB, BC sú (zvonku) zostrojené rovnostranné trojuholníky ABP a BCR. Stredy strán AB a BC označme M a K. Zostrojme ešte jeden rovnostranný trojuholník MKQ tak, že body B a Q budú ležať v rovnakej polrovine určenej priamkou MK. Dokážte, že body P, Q, R ležia na jednej priamke.*

Riešenie: (opravovali Mazo a Tomáš)
Pokryli ste asi všetky možné spôsoby riešenia tejto úlohy. Od elegantných až po analytické. Tie najkrajšie sa vám pokúsime ponúknuť v nasledovnom.

1. (podľa väčšiny)
Označme si S stred úsečky PR a ukážme, že trojuholník MKS je rovnostranný (ak si navyše uvedomíme, že bod S leží v správnej polrovine, bude úloha dokázaná).
Pretože trojuholníky ABP, BCR sú rovnostranné, tak ich výšky z bodov P a R splývajú s ťažnicami PM resp. RK. Preto platí

$$|\sphericalangle PMR| = |\sphericalangle PKR| = 90°$$

Teraz je už asi každému nad slnko jasnejšie, že (Tálesova) kružnica so stredom v S a priemerom PR prechádza bodmi M aj K. Potrebujeme ešte overiť, že $|\sphericalangle MSK| = 60°$ (spolu s tým, že $|SM| = |SK|$ dostaneme, že trojuholník MKS je rovnostranný). Toto už dorazíme z obvodových a stredových uhlov.



$$|\sphericalangle MSK| = 2 \cdot |\sphericalangle MRK| = 2 \cdot 30° = 60°.$$

Skutočne je trojuholník MSK rovnostranný a bod S musí byť bodom Q, teda Q leží na úsečke PR (dokonca je jej stredom).

2. (podľa Barbory Gallusovej) V druhom riešení si niečo prikreslíme. Konkrétne, označme N stred PB, L stred BR a D stred AC (pozri obrázok). Budeme teraz viackrát používať vlastnosť strednej priečky (je polovicou strany, s ktorou je rovnobežná). Označme si túto vlastnosť (*SP*). Využijeme aj to, že trojuholníky ABP a BPR sú rovnostranné (ich strany sú rovnako dlhé)

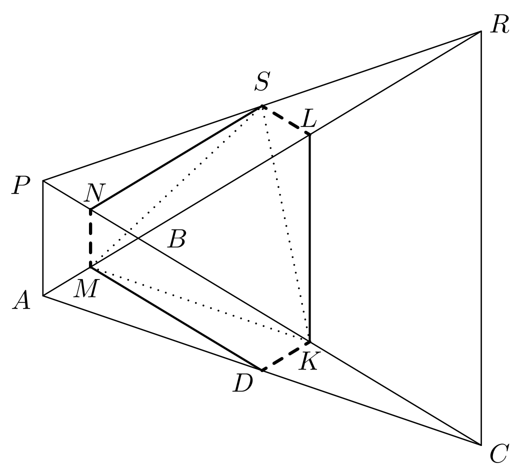
$$\underline{|KD|} \stackrel{SP}{=} \frac{1}{2}|BA| = |BM| \stackrel{\triangle}{=} \underline{|MN|} \stackrel{\triangle}{=} |BN| = \frac{1}{2}|BP| \stackrel{SP}{=} \underline{|SL|}$$
$$\underline{|MD|} \stackrel{SP}{=} \frac{1}{2}|BC| = |BK| \stackrel{\triangle}{=} \underline{|KL|} \stackrel{\triangle}{=} |BL| = \frac{1}{2}|BR| \stackrel{SP}{=} \underline{|SN|}$$

Využijeme teraz to, že stredná priečka je rovnobežná so stranou trojuholníka.

$$\left.\begin{array}{lll} SL \parallel BP & \Rightarrow & |\sphericalangle SLB| = |\sphericalangle PBA| = 60° \\ \triangle BCR \text{ je rovnostr.} & \Rightarrow & |\sphericalangle KLB| = 60° \end{array}\right\},$$

z čoho dostaneme $|\sphericalangle KLS| = 120°$. Úplne rovnako by sa dokázalo, že $|\sphericalangle SNM| = |\sphericalangle MDK| = |\sphericalangle KLS| = 120°$ (navyše si môžete ukázať, že všetky vnútorné uhly v šesťuholníku $DKLSNM$ majú veľkosť $120°$). Dostali sme, že

$$\triangle LKS \stackrel{(sus)}{\cong} \triangle SNM \stackrel{(sus)}{\cong} \triangle MDK \Rightarrow |KS| = |SM| = |MK|.$$



Záver je rovnaký ako v prechádzajúcom riešení.

3. (podľa Miša Burgera) Tu uvedieme už iba myšlienku. Zostrojme bod T tak, aby $PBRT$ bol rovnobežník. Ukážeme zhodnosť $\triangle ABC \cong \triangle TCR$:

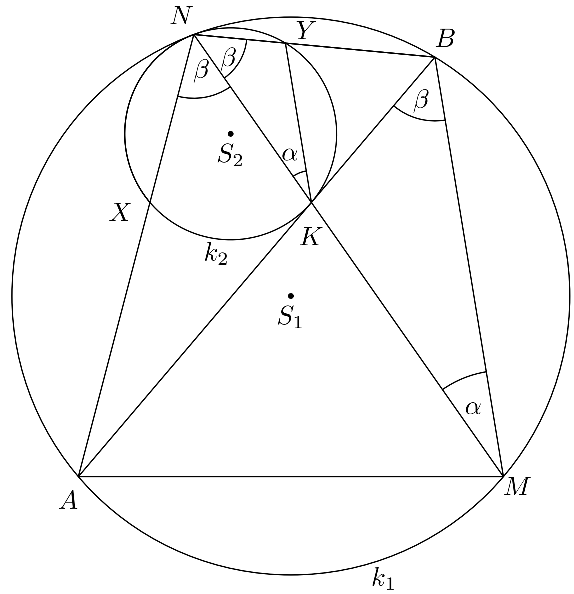
$$\left.\begin{array}{lcc} \left.\begin{array}{r} PBRT \text{ je rovnobežník} \\ |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle PBR| = 120° \end{array}\right\} & \Longrightarrow & \underline{|BA| \stackrel{\triangle}{=} |PB| = |TR|} \\ & & \left.\begin{array}{r} |\sphericalangle BRT| = 60° \\ |\sphericalangle BRC| = 60° \end{array}\right\} \quad \underline{|\sphericalangle CRT| = 120°} \\ \triangle BCR \text{ je rovnostranný} & \Longrightarrow & \underline{|BC| = |RC|} \end{array}\right\} \triangle ABC \cong \triangle TRC.$$

Z tejto zhodnosti dostaneme $|AC| = |TC|$, podobne sa ukáže $|AC| = |TA|$ a preto je trojuholník ACT rovnostranný. Keď ho zobrazíme v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom $\frac{1}{2}$, dostaneme rovnostranný trojuholník MKT', ktorý je podľa zadania presne trojuholníkom MKQ. Bod T sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí na bod Q, t.j. do polovice vzdialenosti BT. V rovnobežníku sa uhlopriečky rozpoľujú, preto bod Q (priesečník uhlopriečok PR a BT) je stredom úsečky PR.

Komentár: Mnohí sa čudujete, prečo to vaše riešenie za pomoci výpočtu iba uhlov nie je 9–bodové? Všimnite si, že skutočne nikde v postupe ste nevyužili to, že body M a K sú stredmi AB a BC. Keby ste body M a K nakreslili hocikde na úsečke AB resp. BC, vaše riešenie by dokazovalo to, čo neplatí. Takýmito úvahami by sa to dalo dokázať, keby ste sa nenechali pomýliť zlým obrázkom (väčšinou ste si bod Q kreslili príliš blízko úsečky PR), a vyznačovali ste iné uhly, ako ste potrebovali k dôkazu.
Všimli ste si v treťom riešení, že $ACRTP$ je tetivový päťuholník?

Úloha č. 11: *Dané dve kružnice sa zvnútra dotýkajú v bode N. Dotyčnica ku vnútornej kružnici v jej bode K pretína vonkajšiu kružnicu v bodoch A a B. Nech M je stred oblúka AB vonkajšej krunice, ktorý neobsahuje bod N. Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku BMK nezávisí na voľbe bodu K.*

Riešenie: (opravovali Tina a Šaňo)



Označme vnútornú z daných kružníc k_2, jej stred S_2 a polomer r_2, väčšiu označme k_1 so stredom S_1 a polomerom r_1. Hľadaný polomer označme r_{BMK}. Na začiatok si uvedomme, že polomer kružnice opísanej trojuholníku BMK bude rovnaký ako polomer kružnice opísanej trojuholníku AMK. Túto vlastnosť si dokážte sami, nám však poslúži na skonštatovanie, že nezáleží na tom, či body K a B budú v rovnakej alebo opačnej polrovine určenej priamkou $\overleftrightarrow{S_2S_1}$. Nech sú teda v rovnakej. Všimnime si rovnoľahlosť so stredom v bode N, ktorá zobrazí menšiu kružnicu na väčšiu. Jej koeficient je rovný pomeru polomerov kružníc, teda $\frac{r_1}{r_2}$. Zobrazuje bod X na A a tiež bod Y na B, teda úsečku XY na AB. Úsečka AB je dotyčnicou kružnice k_2 a teda platí $S_2K \perp AB$, z čoho vyplýva, že aj $S_2K \perp XY$. To ale znamená, že bod K je stred oblúka XKY (rozmyslite si prečo!) a jeho obraz pri danej rovnoľahlosti je stred oblúka AMB, čo je bod M. Potom ale platí, že body N, K a M ležia na priamke.

Zo spomínanej rovnoľahlosti tiež vyplýva, že $MB \| KY$, a preto sú trojuholníky NMB a NKY podobné, a teda platí $\frac{|NM|}{|KN|} = \frac{r_1}{r_2}$. Pretože úsečky MA a MB sú rovnako dlhé, prislúchajú k nim tiež rovnako veľké obvodové uhly, platí teda $|\sphericalangle BNM| = |\sphericalangle MNA| = |\sphericalangle MBA|$. Z toho ale vyplýva podobnosť trojuholníkov BMK a NMB. Preto platí

$$\frac{|MB|}{|MK|} = \frac{|MN|}{|MB|} \implies |MB|^2 = |MN| \cdot |MK| = (|MK| + |KN|)\,|KM| = |KM|^2 \left(1 + \frac{|KN|}{|KM|}\right).$$

Pretože trojuholníky BMK a NKY sú podobné, platí aj pre polomery ich opísaných kružníc

$$\frac{r_{BMK}}{r_{NKY}} = \frac{|MB|}{|KN|} = \frac{|KM|\sqrt{1 + \frac{|KN|}{|KM|}}}{|KN|} = \frac{|KM|}{|KN|}\sqrt{1 + \frac{|KN|}{|KM|}}. \tag{1}$$

Pomer $\frac{|KM|}{|KN|}$ vypočítame ako

$$\frac{|KM|}{|KN|} = \frac{|NM| - |NK|}{|NK|} = \frac{|NM|}{|NK|} - 1 = \frac{r_1}{r_2} - 1 = \frac{r_1 - r_2}{r_2}. \tag{2}$$

Ak si uvedomíme, že $r_{NKY} = r_2$, roznásobíme (1) a dosadíme do vzťahu (2), dostaneme

$$r_{BMK} = r_2 \frac{|KM|}{|KN|}\sqrt{1 + \frac{|KN|}{|KM|}} = r_2\left(\frac{r_1 - r_2}{r_2}\right)\sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}} = (r_1 - r_2)\sqrt{\frac{r_1}{r_1 - r_2}} = \sqrt{r_1(r_1 - r_2)}.$$

Tento výraz je konštantný, nezávisí od polohy bodu K, čo sme mali dokázať.

Prednášky

Prednáška ku tretej sérii bude 18. novembra 2002, o 16^{00} hod. v matematickom pavilóne FMFI UK v Mlynskej doline v Bratislave (autobusy č. 31, 39 – zastávka pri budove televízie, autobus č. 32, 29 a električky č. 1, 4, 5, 9, 12 – zastávka pri internáte Družba). Stretneme sa pri vrátnici matematického pavilónu o 15^{55}.

Matematický **k**lub sa najbližšie uskutoční 30. 11., potom 28. 12. 2002. Konať sa bude v Žiline. Zraz je o 9 : 00 na Hurbanovej ulici pri vrátnici budovy Žilinskej univerzity. Program a bližšie informácie nájdeš na stránke `www.sezam.sk/~visni/MaK.html`.