Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Ukážte, že ak a a b sú také reálne čísla, že $a \geq 0$, $b \geq 0$, tak platí aj nerovnosť:*

$$\frac{a^3+b^3}{3} \leq \frac{(a+b)^3}{2}.$$

Zistite navyše všetky reálne čísla $a \geq 0$ a $b \geq 0$, pre ktoré v tejto nerovnosti nastáva rovnosť.

Riešenie: (opravoval Peťo)
Keď sa skúseným okom pozrieme na pravú stranu a v duchu si ju roznásobíme, uvidíme, že na ľavej strane sa nám vyskytuje výraz a^3+b^3 predelený trojkou, zatiaľ čo na pravej strane je ten istý výraz predelený iba dvojkou a ešte sú tam naviac nejaké nezáporné výrazy. Teda je jasné, že na ľavej strane nemôže byť nikdy väčšie číslo. Aby sme si to uvedomili poriadne a vyšetrili, kedy nastáva rovnosť, urobme zopár úprav. Konkrétne odstráňme zlomky vynásobením nerovnosti číslom šesť, roznásobme zátvorku umocnenú na tretiu a dajme všetko na jednu stranu. Ak sa nepomýlime, dostaneme nerovnosť

$$a^3+9a^2b+9ab^2+b^3 \geq 0\,, \tag{1}$$

ktorá je ekvivalentná so zadanou. Robili sme totiž iba ekvivalentné úpravy. To znamená, že táto nerovnosť platí práve vtedy, keď platí zadaná nerovnosť a aj rovnosť v nej nastáva v tých istých prípadoch. Tu už vidno to, čo sme si uvedomili na začiatku. Na ľavej strane (1) totiž nemôže byť záporné číslo. (Skúste si sami zdôvodniť, prečo.) Ostáva nám určiť, kedy nastáva rovnosť. Aby bola ľavá strana (1) nulová, musia byť všetky jej sčítance nulové, teda aj a^3 a b^3. Potom ale musia byť nulové čísla a aj b. Ak $a=b=0$, tak v zadanej nerovnosti skutočne platí rovnosť. Tým sme úlohu vyriešili.

Komentár: Úloha bola jednoduchá, ale často ste zabudli spomenúť, že úpravy, ktoré ste urobili, boli ekvivalentné. Za to ste mohli nejaký ten bodík stratiť.

Úloha č. 2: *Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, c, ktoré spĺňajú rovnicu:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Riešenie: (opravovali Děbo a Ďebo)
Bez ujmy na všeobecnosti uvažujeme prípady, keď $0<a \leq b \leq c$.
Platí, že $a>1$ (lebo ak by $a=1$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ a to je už väčšie ako 1).
Tiež platí, že $a<4$ (lebo ak by $4 \leq a \leq b \leq c$, potom $\frac{1}{3}>\frac{1}{4} \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ a teda $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$).

- ak $a=2$, potom $b \geq 2$
  - ak $b=2$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ a teda $\frac{1}{c}=0$, no a také c už neexistuje.
  - ak $b=3$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{6}$ a teda $\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$, čiže $c=6$.
  - ak $b=4$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{4}$ a teda $\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$, čiže $c=4$.
  - ak $b>4$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{3}{4}$ a teda $\frac{1}{c}>\frac{1}{4}$, čiže $c<4<b$, a to je spor s tým, že $b \leq c$.
- ak $a=3$, potom $b \geq 3$
  - ak $b=3$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{3}$ a teda $\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$, čiže $c=3$.
  - ak $b>3$, potom $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{2}{3}$ a teda $\frac{1}{c}>\frac{1}{3}$, čiže $c<3<b$, a to je zase spor.

Tým sme vyčerpali všetky možnosti a máme 3 rôzne trojice $[2,3,6]$, $[2,4,4]$ a $[3,3,3]$. Samozrejme to nie sú všetky možnosti. Chýbajú nám tie, pre ktoré neplatí $a \leq b \leq c$, ale tie dostaneme tak, že v niektorej z trojíc povymieňame prvky. To už nechám na vás, spolu je tých možností 10.

Úloha č. 3: *Dokážte, že ak je zlomok $\frac{a}{b}$ v základnom tvare, tak potom sú aj zlomky $\frac{a-b}{a \cdot b}$, $\frac{a+b}{a \cdot b}$ v základnom tvare.*

Riešenie: (opravovali Erika a Čermo)
Čaute študenti, dostali sme s Erikou za úlohu opraviť túto úlohu :) a ako nám bolo uložené, tak sa vykonalo. Nuž a keď sa už skonalo tak si aspoň pár riadkami pripomeňme ako sa malo konať…
Dôkaz tohoto milého tvrdenia budeme robiť sporom. Teda budeme predpokladať že platí negácia tvrdenia, potom sa kukneme na to čo z toho vyplýva a ak náhodou to bude blbosť (spor), tak bude platiť pôvodná veta (to čo máme podľa zadania dokázať). Teraz prakticky prevedieme čo sme si tak pekne teoreticky napísali:

Pôvodná veta: Ak je zlomok $\frac{a}{b}$ v základnom tvare (čísla a, b, sú nesúdeliteľné) tak zlomky $\frac{a+b}{ab}$ a $\frac{a-b}{ab}$ sú tiež v základnom tvare. Pre všetky a, b z množiny celých čísiel okrem $b = 0$.
Znegovaný výrok bude mať túto podobu: Ak je zlomok $\frac{a}{b}$ v základnom tvare (čísla a, b, sú nesúdeliteľné) tak aspoň jeden zo zlomkov $\frac{a+b}{ab}$ a $\frac{a-b}{ab}$ nie je v základnom tvare. Pre všetky a, b z množiny celých čísiel okrem $b = 0$.
Tak sa na to kuknime: Povedzme si, že v základnom tvare nie je napr. zlomok $\frac{a+b}{ab}$ (pre ten druhý by to vyzeralo veľmi podobne, ale pri hľadaní sporu mi stačí rozoberať len jeden prípad.) To znamená, že existuje také prvočíslo k (k môže byť aj zložené, ale nám postačí ak si z toho čísla zoberieme len jeho ľubovoľné prvočíslo), ktoré delí jeho čitateľa aj menovatela). Z toho, že k delí ab (menovateľ) vyplýva, že k delí a alebo b. Nech k delí napríklad a. Potom, keďže k delí $(a + b)$ musí k deliť aj b. A tu je naša hladaná blbosť–spor, pretože ak k delí a aj b potom je zlomok $\frac{a}{b}$ súdeliteľný, teda nie je v základnom tvare. Analogicky to bude platiť ak k bude deliť b.
Howgh. . . .

__**Úloha č. 4:**__ *Zložený zlomok $3\frac{1}{2}$ si človek môže ľahko pomýliť s násobením $3 \cdot \frac{1}{2}$. Zistite, pre ktoré a, b, c platí, že zložený zlomok $a\frac{b}{c}$ predstavuje to isté číslo ako súčin $a \cdot \frac{b}{c}$.*
(V zloženom zlomku $a\frac{b}{c}$ platí iba $b \geq 0$, $c > 0$. Nemusí platiť, že čísla b, c sú nesúdeliteľné alebo že $b < c$).
__Riešenie:__ (opravovali Aňa a Janka)
Úloha bola trochu zmätočne zadaná – nebolo totiž povedané, v akej množine sa má riešiť. Keďže sa jedná o zlomky, očakávali sme množinu celých čísel. Prečo? Prirodzené čísla nám nestačia, keďže poznáme aj zlomky záporné, napr. $-\frac{3}{2}$. A prečo nie v reálnych? V praxi síce používame výrazy ako $\frac{\sqrt{2}}{2}$ alebo $\frac{\pi}{3}$, ale zlomky sú v skutočnosti definované ako $\frac{a}{b}$, kde $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{N}$. A teda keď ste "upravenú" úlohu (t. j. napr. v prirodzených číslach) vyriešili dobre, nezískali ste plný počet bodov – takáto úloha bola totiž jednoduchšia ako tá pôvodne zadaná. Ja viem, život je pes . . . `:-)`, ale mali ste sa spýtať na `kms@realtime.sk`.
Tak a teraz k samotnému riešeniu. To si rozdelíme na tri prípady: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. To preto, lebo ak $a < 0$, tak $a\frac{b}{c}$ nie je $a + \frac{b}{c}$ ale $a - \frac{b}{c}$ ($-4\frac{1}{2}$ je totiž $-\frac{9}{2}$ a nie $-\frac{7}{2}$).

- Pre $a > 0$ si rovnicu $\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c} = a\,\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$ upravíme na tvar :

$$\begin{aligned} ab - b &= ac \\ \frac{b}{c} &= \frac{a}{a-1} \end{aligned}$$

  Tu si treba uvedomiť, že zlomok $\frac{a}{a-1}$ je v základnom tvare. Keby totiž boli čísla a a $a-1$ súdeliteľné, zlomok by sa dal krátiť nejakým číslom $n > 1$. A teda n by delilo aj a aj $a - 1$. Z toho by vyplývalo, že n delí číslo 1 čo je však spor s $n > 1$. A teda a aj $a - 1$ sú nesúdeliteľné a zlomok je v základnom tvare.

  My zo zadania vieme, že b a c nemusia byť nesúdeliteľné. A teda zlomok $\frac{b}{c}$ v základnom tvare byť nemusí. Ale keďže $\frac{b}{c} = \frac{a}{a-1}$, tak vlastne $\frac{b}{c}$ je rozšírený zlomok $\frac{a}{a-1}$, a teda $b = n \cdot a$, $c = n \cdot (a - 1)$, pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ (lebo $b \geq 0$, $c > 0$). Ešte je dôležité si uvedomiť, že naše riešenie funguje, len ak $a \neq 1$, lebo $a - 1$ je v menovateli zlomku – keby $a = 1$, potom by sme delili nulou. Ale pôvodná rovnica v zadaní má pre $a = 1$ tvar $1 + \frac{b}{c} = \frac{b}{c}$, čo zrejme nemá riešenie. Pre $a > 0$ je riešním usporiadaná trojica

  $[a, b, c] = \{[a, n \cdot a, n \cdot (a - 1)], a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N}\}$.

- Čo ak $a = 0$? Potom má rovnica zo zadania tvar $\frac{b}{c} = 0$ a teda $b = 0$. Potom riešenie tohto prípadu je $[a, b, c] = \{[0, 0, c)], c \in \mathbb{N}\}$.

- Ešte zostal prípad, kde $a < 0$. Ten je dosť podobný prvému – podobnou úpravou dostávame rovnicu v tvare

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{a+1},$$

  kde zlomok $\frac{a}{a+1}$ je v základnom tvare (toto si premyslite, dôvod je ten istý ako v prípade $a > 0$). A teda $\frac{b}{c}$ je rozšírený zlomok $\frac{a}{a+1}$ - t. j. $b = n \cdot a$, $c = n \cdot (a + 1)$, pre nejaké $n \in \mathbb{Z}^-$. Inak povedané

  $[a, b, c] = \{[a, n \cdot a, n \cdot (a + 1)], a \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}, n \in \mathbb{Z}^-\}$.

  Tu si tiež bolo treba všimnúť, že $a \neq -1$, aby sme nedelili nulou.

__**Úloha č. 5:**__ *Existuje celé číslo a také, že výraz $\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$ nie je celým číslom? Svoje tvrdenie zdôvodnite.*
__Riešenie:__ (opravovali Pišta a Mazo)
Odpoveď prezradíme hneď na začiatku: takéto celé číslo neexistuje, ako aj väčšina z vás zistila. Úloha sa dala riešiť niekoľkými rozličnými spôsobmi, tu je niekoľko z nich (vo všetkých prípadoch je výhodné dať si zlomky na spoločného menovateľa:

$$\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15} = \frac{3a^5 + 5a^3 + 7a}{15},$$

za "výraz" budeme považovať výraz v čitateli nášho zlomku). Na dôkaz neexistencie čísla a stačí ukázať, že výraz je deliteľný pätnástimi. To sa dá viacerými spôsobmi. Niektoré z nich tu uvedieme.

1. Deliteľnosť výrazu pätnástimi môžeme ukázať drevorubačsky: vezmeme si všetky možné tvary čísla n vzhľadom na deliteľnosť číslom 15, teda $n = 15k + 0, 15k + 1, 15k + 2, \ldots, 15k + 14$ a úpravou výrazu máme, čo chceme (skúste si!). Toto nevyžaduje vlastne žiadne rozmýšľanie naviac a nie je to veľmi perpektívne, keď namiesto čísla 15 budeme mať napríklad 541. (Trocha by nám pomohlo skúmať deliteľnosť výrazu číslami 3 a 5 osobitne, keďže $15 = 3 \cdot 5$ a 3 aj 5 sú prvočísla.) Môže sa to však hodiť, keď potrebujete nejakú metódu, ktorá vám dá naisto výsledok, napríklad v matematickej olympiáde.

2. (matematická indukcia)

   Podstata matematickej indukcie spočíva v tom, že ak z platnosti tvrdenia pre nejaké celé číslo k vieme odvodiť platnosť pre číslo $k + 1$, tak potom nám tvrdenie platí aj pre číslo $(k + 1) + 1 = k + 2$ a tak ďalej pre $k + 3, k + 4, \ldots$ Niekde však musíme začať. Na to nám slúži prvý krok MI. Väčšinou tento typ dôkazu používame pre prirodzené čísla, vtedy v prvom kroku uvažujeme $k = 1$. Skúste sa zamyslieť, prečo MI nemôžeme použiť pre reálne číslo k.

   V tomto prípade si musíme dať pozor na to, že chceme tvrdenie dokázať pre všetky celé čísla, teda aj pre záporné. Preto buď urobíme indukciu oboma smermi (ak platí tvrdenie pre a, platí aj pre $a+1$ a aj pre $a-1$), alebo si všimneme, že náš výraz má pre $-a$ opačnú hodnotu ako pre a (rozmyslite si!), teda deliteľnosť sa nám zachová. Potom stačí aj obyčajná indukcia.

   1° Pre $a = 0$ je hodnota nášho výrazu nula, teda je deliteľný pätnástimi.

   2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $a = k$, teda
   $$15 \mid (3k^5 + 5k^3 + 7k),$$
   toto je náš indukčný predpoklad. Upravme si výraz pre $a = k + 1$ (umocnenie vykonáme roznásobením, tí skúsenejší z vás môžu použiť binomickú vetu):
   $$\begin{aligned} 3a^5 + 5a^3 + 7a &= 3(k+1)^5 + 5(k+1)^3 + 7(k+1) = \\ &= 3k^5 + 15k^4 + 35k^3 + 45k^2 + 37k + 15 = \\ &= 3k^5 + 5k^3 + 7k + 15(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k)\,, \end{aligned}$$
   čo spolu s našim indukčným predpokladom znamená, že výraz pre $a = k + 1$ je deliteľný číslom 15.

3. Pre zjednodušenie si zavedieme nový zápis: ak čísla a a b dávajú po delení číslom k rovnaký zvyšok, budeme to zapisovať ako $a \equiv b \pmod{k}$ a čítať "a je kongruentné s b modulo k". Výhodnosť tohto zápisu spočíva aj v tom, že ak $a \equiv b \pmod{k}$, tak aj $ad \equiv bd \pmod{k}$ pre všetky celé čísla d a z platnosti $a \equiv b \pmod{k}$ a $c \equiv d \pmod{k}$ vyplýva $a + c \equiv b + d \pmod{k}$ (rozmyslite si prečo!). Na to, aby nejaký výraz bol deliteľný pätnástimi, stačí, aby bol deliteľný tromi a piatimi, lebo 3 a 5 sú prvočísla. Tak skúsme skúmať zvyšky nášho výrazu po delení tromi. Po chvíľke si môžeme všimnúť, že čísla n^3 a n dávajú po delení tromi rovnaký zvyšok. Skutočne, ich rozdiel
   $$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$
   je deliteľný tromi, lebo je to súčin troch za sebou idúcich celých čísel. Teda platí
   $$3a^5 + 5a^3 + 7a = 3a^5 + 3a^3 + 2a^3 + 6a + a = 3(a^5 + a^3 + 2a) + 2a^3 + a \equiv 0 + 2a + a = 3a \equiv 0 \pmod{3}\,,$$
   preto je náš výraz deliteľný tromi. Podobná vlastnosť platí pre n^5 a n a deliteľnosť piatimi:
   $$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \equiv n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) \equiv 0 \pmod{5},$$
   lebo je to súčin piatich za sebou idúcich čísel. Teda pre všetky celé čísla n dávajú čísla n^5 a n rovnaký zvyšok po delení piatimi. Preto zvyšok nášho výrazu po delení piatimi je
   $$3a^5 + 5a^3 + 7a = 3a^5 + 2a + 5(a^3 + a) \equiv 3a + 2a + 0 = 5a \equiv 0 \pmod{5}.$$
   A sme na konci, náš výraz je deliteľný 3 aj 5, a teda aj 15. Preto zlomok zo zadania je celé číslo pre všetky celé čísla a.

4. Niektorí z vás prišli na to, že druhé riešenie sa dá skrátiť pomocou malej Fermatovej vety (ľahko si jej platnosť dokážete indukciou podľa n). Konkrétne, ak p je prvočíslo, tak n^p dáva po delení p rovnaký zvyšok ako n (pre všetky celé čísla n). A z tohto ihneď máme rovnosť zvyškov n^3 a n po delení 3 aj n^5 a n po delení 5.

__Úloha č. 6:__ *Nájdite všetky prirodzené čísla a, b a n také, že platí:*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n.$$

__Riešenie:__ (opravovali Katka a Buggo)
Úpravou ľavej strany rovnice

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n \tag{2}$$

na spoločného menovateľa zistíme, že $ab \mid a^2+b^2$ (ab delí a^2+b^2). Preto aj $a \mid a^2+b^2$ aj $b \mid a^2+b^2$. Keďže samozrejme $a \mid a^2$ a $b \mid b^2$, musí platiť

$$a \mid b^2 \qquad \text{a} \qquad b \mid a^2\,. \tag{3}$$

Najčastejšie vyskytujúcou sa chybou bolo, že riešitelia z platnosti $a \mid b^2$ usúdili, že $a \mid b$, čo však nie je pravda (napr. 4 delí 6^2, ale 4 nedelí 6). Dokonca ani z oboch vzťahov v (3) naraz nemožno usúdiť, že $a \mid b$ či $b \mid a$ (napr. $12 \mid 18^2$ a zároveň $18 \mid 12^2$, ale $12 \nmid 18$ a $18 \nmid 12$). Na zaručenie platnosti týchto tvrdení je potrebný predpoklad, že a, b sú nesúdeliteľné. Riešitelia, ktorí mali túto chybu, stratili 3 body.
Možno však postupovať takto. Nech d je najväčší spoločný deliteľ čísel a a b. Potom $a = d\cdot A$ a $b = d \cdot B$, kde A a B sú nesúdeliteľné. Zadaná rovnica po vykrátení zlomkov bude mať tvar

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}=n$$

Teraz však už možno použiť úvahy z predchádzajúceho odstavca, čiže $A \mid B$ a zároveň (keďže úloha je vzhľadom na A, B symetrická) $B \mid A$. Preto $A = B$ a z nesúdeliteľnosti A a B musí byť $A = B = 1$. Zo zápisu a a b tak je $a = b = d \cdot 1 = d$ vyhovujúcim riešením pre ľubovoľné prirodzené číslo d (je ich nekonečne veľa (!)).
__Iné riešenie:__
Pôvodnú rovnicu (2) vynásobíme výrazom $a \cdot b$, presunieme všetky členy na jednu stranu a vzniknutú kvadratickú rovnicu

$$a^2 - abn + b^2 = 0$$

pre neznámu a (príp. b) riešime pomocou vzorca:

$$a_{1,2} = b \cdot \frac{n \pm \sqrt{n^2-4}}{2} \tag{4}$$

Mnohí riešitelia z tohto vzťahu okamžite usúdili, že $n = 2$, avšak toto tvrdenie nedokázali a preto stratili 4 body. Dôkaz možno urobiť napríklad nasledujúcim spôsobom. Prenesieme všetky členy okrem odmocniny v rovnici (4) na druhú stranu

$$\frac{2a_{1,2}-bn}{b} = \pm\sqrt{n^2-4}$$

a zistíme, že $\sqrt{n^2-4}$ musí byť racionálne číslo. Avšak odmocnina z celého čísla n^2-4 je racionálna len ak je n^2-4 druhou mocninou celého čísla. Nie je to vôbec triviálne tvrdenie, aj keď jeho dôkaz ste už asi videli v škole; ak nie, skúste si to sami. Máme teda

$$n^2-4=m^2$$

pre nejaké celé nezáporné m. Z toho

$$\begin{aligned} n^2-m^2 &= 4 \qquad (5)\\ (n-m)(n+m) &= 4\,, \qquad (6) \end{aligned}$$

a teda $n-m$ aj $n+m$ sú celými deliteľmi čísla 4. Ľahko zistíme, že všetky možnosti sú:

- $n-m=1$, $n+m=4$;
- $n-m=2$, $n+m=2$;
- $n-m=4$, $n+m=1$

Keďže však čísla $n-m$ a $n+m$ majú vždy rovnakú paritu, všetky celočíselné riešenia musia vyhovovať vzťahom $n-m=2$ a $n+m=2$, čiže $n=2$, $m=0$, t. j. $a=b$.
Všetky riešenia úlohy sú $n=2$ a $a=b$ je ľubovoľné prirodzené číslo.

__Úloha č. 7:__ *Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že každý zo zlomkov*

$$\frac{7}{n+9},\ \frac{8}{n+10},\ \frac{9}{n+11},\ \ldots,\ \frac{31}{n+33}$$

je v základnom tvare (nedá sa skrátiť).

Riešenie: (opravovali Foto a Malic)
Zlomok $\frac{a}{b}$ sa nedá krátiť práve vtedy, keď $D(a,b)=1$, kde $D(a,b)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b. Naša úloha je teda ekvivalentná nájdeniu najmenšieho prirodzeného čísla n, pre ktoré platí

$$D(7,n+9)=D(8,n+10)=\cdots=D(31,n+33)=1\,.$$

Keďže pre prirodzené čísla a, b ($a<b$) platí $D(a,b)=D(a,b-a)$, tak predchádzajúca sústava rovníc je ekvivalentná tejto

$$D(7,n+2)=D(8,n+2)=\cdots=D(31,n+2)=1\,.$$

Hľadáme teda najmenšie číslo $(n+2)$ nesúdeliteľné s číslami $7,8,\ldots,31$. Pritom musí byť $(n+2)>2$. Ďalej vieme, že $(n+2)$ musí byť nepárne, inak by bolo súdeliteľné s 8. Nemôže to však byť 3 ani 5, inak by bolo súdeliteľné s 9 resp. 10. Nemôže to byť samozrejme ani jedno z čísel $7,8,\ldots,31$, inak by bolo súdelitelné so samým sebou. Ďalej to nemôže byť ani 33 resp. 35, lebo toto by bolo súdeliteľné s 9 resp. 10. Naše $(n+2)$ je teda aspoň 37. Číslo 37 je prvočíslo a preto nemôže byť súdeliteľné so žiadnym z čísel $7,8,\ldots,31$. Hľadané $(n+2)$ je teda 37 a hľadané n je potom 35.

Úloha č. 8: *Nájdite všetky reálne čísla x, ktoré spĺňajú rovnicu*

$$[x]+\frac{1}{\{x\}}=\{x\}+\frac{1}{[x]},$$

kde $[x]$ je celá časť z x, t. j. celé číslo a, pre ktoré platí $a\le x<a+1$ a $\{x\}$ je desatinná časť čísla x, t. j. $\{x\}=x-[x]$.

Riešenie: (opravovali Feri a Miki)
Prvé, čo si môžeme všimnúť, je, že máme výrazy $[x]$ a $\{x\}$ v menovateli, takže pre každé riešenie x zadanej rovnice musí byť $[x]$ i $\{x\}$ rôzne od nuly. Pre takéto x môžme rovnicu upraviť na tvar

$$\begin{aligned}
[x]+\frac{1}{\{x\}}&=\{x\}+\frac{1}{[x]}\\
[x]-\{x\}+\frac{1}{\{x\}}-\frac{1}{[x]}&=0\\
[x]-\{x\}+\frac{[x]-\{x\}}{\{x\}[x]}&=0\\
([x]-\{x\})\left(1+\frac{1}{\{x\}[x]}\right)&=0
\end{aligned}$$

takže musí platiť $[x]-\{x\}=0$ alebo $1+\frac{1}{\{x\}[x]}=0$. V prvom prípade dostávame, že $[x]=\{x\}$, no $[x]$ je celé číslo a $\{x\}\in\langle 0;1)$ a tak jediná možnosť, kedy to platí, je ak $[x]=\{x\}=0$, teda $x=0$, no toto číslo nevyhovuje podmienke, aby $[x]$ i $\{x\}$ boli rôzne od nuly. Musí teda platiť druhá možnosť, teda

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{\{x\}[x]}&=0\\
\{x\}[x]&=-1\\
(x-[x])[x]&=-1\\
x&=[x]-\frac{1}{[x]}
\end{aligned}$$

Riešením zadanej rovnice teda môžu byť len čísla x, ktoré sú tvaru

$$x=m-\frac{1}{m},$$

kde $m=[x]$ je celé číslo. Aby však m bolo naozaj celou časťou čísla $x=m-\frac{1}{m}$, musí platiť

$$m\le m-\frac{1}{m}<m+1.$$

Ľavá časť nerovnice je zrejme splnená len pre záporné čísla m, z nich všetky okrem -1 spĺňajú aj pravú časť.
Preto všetky riešenia zadanej rovnice sú čísla

$$\left\{m-\frac{1}{m};\,m\in\mathbb{Z},\,m<-1\right\}.$$

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne reálne čísla, ktoré spĺňajú $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$ a $ac=bd$. Zistite maximálnu možnú hodnotu výrazu*

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}.$$

<u>Riešenie:</u> (opravovali Tina a Šaňo)
Pokúsime sa najprv upraviť prvú podmienku zo zadania do vhodnejšej formy (vhodnejšou formou väčšinou býva súčin nejakých výrazov, nie súčet). Položme $k=ac=bd$. Pri upravovaní využijeme nenulovosť čísel a, b, c, d, ktoré sa vyskytovali v menovateľoch zlomkov.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} &= 4,\\ a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc &= 4abcd,\\ k(a+c)(b+d) &= 4k^2,\\ (a+c)^2(b+d)^2 &= 16k^2.\end{aligned} \tag{7}$$

Spätným dosadením $k^2=abcd$ dostávame

$$(a+c)^2(b+d)^2=(4ac)\cdot(4bd) \tag{8}$$

Skúsenejšie oko by si na tomto mieste hneď spomenulo na nerovnosť $(a+c)^2>4ac$ pre $a\neq c$. My ostatní si ju radšej odvodíme: Keďže $a\neq c$, zrejme

$$(a-c)^2>0 \quad\Longrightarrow\quad (a-c)^2+4ac>4ac \quad\Longrightarrow\quad (a+c)^2>4ac.$$

Analogicky $b\neq d$, takže dokopy máme

$$(a+c)^2>4ac \qquad (b+d)^2>4bd \tag{9}$$

Porovnaním (8) a (9) by sa zdalo, že sme dospeli do sporu, ale len naoko. V skutočnosti sme iba dokázali, že $k=ac=bd$ je záporné. (Pre nezáporné k by obe pravé strany v nerovnostiach (9) boli nezáporné, a súčin týchto nerovností by bol v spore s (8).) Preto v oboch dvojiciach (a,c) a (b,d) je jedno záporné a jedno kladné číslo. Teraz sa môžeme lepšie prizrieť maximalizovanému výrazu

$$V=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+d^2}{bd}=\frac{(a+c)^2}{ac}+\frac{(b+d)^2}{bd}-4$$

Na tomto mieste sa pre sprehľadnenie situácie núka jednoduchá substitúcia $A=a+c$, $B=b+d$. Potom zostáva maximalizovať výraz

$$V=\frac{A^2+B^2}{k}-4 \tag{10}$$

za podmienky (7) a $k<0$, čiže

$$AB=4k<0.$$

Hoci ohraničiť zhora výraz A^2+B^2 môže byť zložité (KAGH–nerovnosť platí opačným smerom), záporné k v menovateli výrazu V robí túto úlohu jednoduchou. Keďže $(A+B)^2\geq 0$, dostávame

$$A^2+B^2\geq -2AB=-8k.$$

Po vydelení oboch strán nerovnosti záporným k máme

$$\frac{A^2+B^2}{k}\leq -8,$$

čo spolu s (10) dáva

$$V\leq -12. \tag{11}$$

Tým sme dostali horný odhad maximalizovaného výrazu. Ostáva zistiť, či existujú také a, b, c, d, že $V=-12$. Netrpezlivým možno hneď prezradiť, že áno, napríklad pre $[a,b,c,d]=[1,3-\sqrt{8},\sqrt{8}-3,-1]$ – overte si! Samozrejme, takéto riešenie nespadlo z oblakov. Stačilo si všimnúť, že rovnosť v (11) by mohla nastať v prípade $A=-B$. Odtiaľ už možno ľahko odvodiť, že $V=-12$ práve vtedy, keď $[a,b,c,d]=[a,b,-b,-a]$, pričom $a^2-6ab+b^2=0$ a $a>0$. Do takýchto detailov však už nebolo potrebné ísť.

Úloha č. 10: *Nech m a n sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak $m+n-2$ zlomkov*

$$\frac{m+n}{m},\ \frac{2\,(m+n)}{m},\ \frac{3\,(m+n)}{m},\cdots,\ \frac{(m-1)(m+n)}{m},\ \frac{m+n}{n},\ \frac{2\,(m+n)}{n},\ \frac{3\,(m+n)}{n},\cdots,\ \frac{(n-1)(m+n)}{n},$$

zakreslíme na číselnú os, tak v každom z intervalov $(1,2)$, $(2,3)$, $\dots$, $(m+n-2, m+n-1)$ bude ležať práve jeden z týchto zlomkov.

Riešenie: (opravovali Rado a Ivo)
Daných intervalov je presne toľko, koľko je zlomkov, a to $m+n-2$, teda ak ukážeme, že všetky sa nachádzajú v nejakom z týchto intervalov a že žiadne dva nemôžu byť v tom istom, tak sme vyhrali. Ľahko sa dokáže prípad, keď m alebo n je 1 (rozmyslite si!). Ďalej teda nech $m,n>1$. Zlomky $\frac{m+n}{m}$, $\frac{2\,(m+n)}{m},\cdots,$ $\frac{(m-1)(m+n)}{m}$ sa dajú vo všeobecnosti zapísať ako $\frac{k\,(m+n)}{m}$ pre $k\in\{1,2,\dots,m-1\}$, podobne zlomky druhého typu sa dajú zapísať ako $\frac{k\,(m+n)}{n}$ pre $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$. Zoberme si teraz zlomky prvého typu. Z toho, že $k\geq 1$ a $k\leq m-1$ dostávame:

$$\begin{aligned} 1\leq k\ < k\ +k\cdot\frac{n}{m} &\leq\quad m-1+k\cdot\frac{n}{m}<m+n-1\\ 1<\frac{k\,(m+n)}{m} &<\quad m+n-1 \end{aligned}$$

Teda $\frac{k\,(m+n)}{m}$ patrí do $(1,\,m+n-1)$. Ak by bolo $\frac{k\,(m+n)}{m}$ celé číslo, tak by muselo $m\mid k\,(m+n)$, teda $m\mid k\cdot n$ a keďže m, n sú nesúdeliteľné, tak $m\mid k$, ale to je spor, lebo $1\leq k\leq m-1$, teda $\frac{k\,(m+n)}{m}$ nemôže byť celé číslo. Teda $\frac{k\,(m+n)}{m}$ patrí do niektorého z intervalov zo zadania. Analogicky sa to dokáže pre zlomky $\frac{k\,(m+n)}{n}$. Ostáva teda už len ukázať, že žiadne dva zlomky nie sú v jednom intervale. Pre zlomky $\frac{k\,(m+n)}{m}$, resp. $\frac{k\,(m+n)}{n}$ platí, že rozdiel dvoch po sebe idúcich je $\frac{m+n}{m}>1$, resp. $\frac{m+n}{n}>1$, teda ak si zoberieme dva zlomky $\frac{k\,(m+n)}{m}$, resp. $\frac{k\,(m+n)}{n}$, nemôžu byť v tom istom intervale. Ostáva už len ukázať, že ak si zoberieme nejaký zlomok $\frac{k\,(m+n)}{m}$ a zlomok $\frac{l\,(m+n)}{n}$, tak budú tiež v rôznom intervale. BUNV nech je $kn<lm$ ($kn=lm$ nemôže nastať, lebo m, n sú nesúdeliteľné a $k<m$ a $l<n$). Potom:

$$\frac{k\,(m+n)}{m}=k+k\cdot\frac{n}{m}<k+l<l\cdot\frac{m}{n}+l=\frac{l\,(m+n)}{n}.$$

Teda medzi vybranými zlomkami leží ešte iné celé číslo, a to $k+l$ (k, l boli indexy zlomkov, boli teda celé), teda nemôžu ležať v rovnakom intervale. Tým pádom žiadne dva zlomky nemôžu ležať v rovnakom intervale, teda v každom z intervalov zo zadania bude ležať práve jeden. Q.E.D.

Úloha č. 11: *Na tabuli sú napísané čísla 1001^2, 1002^2, $\dots$, 2001^2. V každom kroku je dovolené z tabule zotrieť tri čísla $a\leq b\leq c$ a namiesto nich napísať jedno číslo $\frac{a}{3}$. Dokážte, že ak na tabuli zostane už iba jedno číslo, tak bude menšie ako* 2002.

Riešenie: (opravoval Feldo)
Zo zadania vidíme, že po každom ťahu sa počet čísel na tabuli zmenší o 2. Na začiatku bolo na tabuli 1001 čísel, teda potrebujeme 500 ťahov (zotretí), aby sme dostali iba jedno číslo, toto si označme x. Teraz si situáciu trochu prehoďme. Majme na začiatku na tabuli napísané číslo x a v každom ťahu nahraďme ľubovoľné číslo y na tabuli číslami $3y$, z, w (túto operáciu budeme volať "roztrojenie"), pričom $3x\leq z\leq w$ (každé číslo môžeme "roztrojiť" najviac raz). Teda robíme akýsi spätný postup. Je zrejmé, že ku každému postupu zo zadania existuje spätný postup popísaný vyššie spomenutými pravidlami. Dokážme, že po 500 ťahoch bude na tabuli aspoň jedno číslo väčšie ako $3^7\cdot x$.
Rozdeľme si čísla (všetky, ktoré dostávame, nielen tie, ktoré sú práve na tabuli) do niekoľkých skupín, ktoré si označme $A_0, A_1,\cdots,A_{500}$, kde v skupine A_0 sa nachádza číslo x a v skupine A_i sa nachádzajú čísla, ktoré vznikli z niektorého čísla zo skupiny A_{i-1} "roztrojením". Je zrejmé, že v skupine A_1 sú tri čísla, v skupine A_2 je najviac 9 čísel (každé z čísel zo skupiny A_1 môžeme najviac raz "roztrojiť"). Podobne ukážeme, že v skupine A_i sa nachádza najviac 3^i čísel. Sami si dokážte, že najmenšie číslo, ktoré sa môže nachádzať v i-tej skupine je $3^i\cdot x$
Predpokladajme, že skupiny A_i sú pre $i\geq 7$ prázdne. Potom platí, že v skupinách $A_1, A_2,\cdots,A_6$ je dokopy najviac $1+3+9+\cdots+3^6=1093$ čísel. Všimnime si, že po každom ťahu zvýšime počet čísel v skupinách o 3 (žiadne čísla nezmazávame). Potom po 500 ťahoch musí byť na tabuli $3\cdot 500+1=1501$ čísel. Keďže v skupinách $A_1,\cdots,A_6$ je najviac 1093 čísel, tak niektoré číslo musí byť v skupine s indexom väčším ako 6. Teda na konci nášho obráteného postupu sa na tabuli nachádza číslo väčsie alebo rovné $3^i\cdot x\geq 3^7\cdot x$. Zo zadania vieme, že na začiatku bolo $(2002)^2$ najväčšie číslo na tabuli. To znamená, že $3^7\cdot x\leq(2002)^2$ a teda $x\leq 1832<2002$. Čo je tvrdenie, ktoré sme mali dokázať.
Poznámka: Používanie slova skupina má oproti slovu množina v tomto prípade výhodu v tom, že v skupine môže byť viac čísel rovnakých.