Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Syrovej kocke sa rozutekali číselká* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *a schovali sa do všetkých jej vrcholov (každé číselko do jedného vrchola). Kocku objavila myška Baška a prehrýzla si cestičku z vrcholu s číselkom* 1 *do vrcholu s číselkom* 2. *Ďalej pokračovala postupne po vrcholoch* 3, 4, 5, 6, 7, 8 *a naspäť do vrcholu* 1. *Nato sa jej myšiak Miško spýtal, kadiaľ išla. Presné cestičky si už Baška nepamätala, ale spomenula si, že každá cestička, spájajúca dva za sebou idúce vrcholy, bola rovná a nikdy nehrýzla cestičku po hrane syrovej kocky. Mohla Baška hovoriť pravdu?*

Riešenie: (opravovala Katka)

Odpoveď na otázku „Mohla Baška hovoriť pravdu?“ je áno a všetci ste na otázku odpovedali správne. Na to, aby sme túto odpoveď zdôvodnili, stačilo nájsť jeden príklad, ktorý by podporil Baškine tvrdenie. Tí z vás, ktorí si pozorne prečítali zadanie, našli takýto príklad správne, niektorí dokonca poznamenali, koľko môže byť takýchto ciest, čo je zaujímavé rozšírenie úlohy a môžete sa nad ním zamyslieť. Jedným z možných riešení je takéto riešenie. Označme si vrcholy spodnej podstavy po rade písmenami A, B, C a D a vrcholy hornej podstavy písmenami E, F, G a H tak, aby AE, BF, CG a DH boli zvislé hrany kocky. Potom môžme priradiť vrcholom čísla takto: $A \to 1$, $B \to 7$, $C \to 2$, $D \to 5$, $E \to 6$, $F \to 4$, $G \to 8$, $H \to 3$ Ľahko sa presvedčíme, že sa Baška naozaj dostane z 1 postupne až do 8 a odtiaľ naspäť do 1 a pritom nikdy nejde po hrane kocky.

Úloha č. 2: *Už dlhší čas Miki vymýšľal originálny vianočný darček pre Janku, ale bez úspechu. Až jedného februárového rána našiel v snehu dva zlomky. Všimol si, že ich rozdiel je rovný ich súčinu a tak veľmi sa tomu potešil, že sa rozhodol Janke darovať päť takýchto dvojíc zlomkov. Pomôžte Mikimu nájsť päť dvojíc kladných zlomkov v základnom tvare, ktorých rozdiel je rovný ich súčinu.*

Riešenie: (opravovali Janka a Miki)

Komentár: Táto úloha bola veľmi ľahká. Ale ako vieme, nejde len o napísanie 5 dvojíc zlomkov, treba aj napísať postup, ako sme k nim došli (a ten by mal byť ešte aj správny `:-)`). Body sme ako vždy udeľovali podľa toho, čo ste nám napísali a nie podľa toho čo sme si podomýšľali.

Označme si zlomky v základnom tvare $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$. Čísla a, b, c, d musia byť celé a navyše kladné, lebo zlomok $\frac{0}{x}$ je v základnom tvare len pre $x = 1$. Nech je väčší ten prvý z nich. Chceme, aby platilo :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$
$$\frac{ad - bc}{bd} = \frac{ac}{bd}$$
$$a \cdot (d - c) = bc$$

Teraz by sa na to veľký matematik pozrel a prehlásil, že $a = c$. My si ho nevšímame a rozmýšľame: číslo b nemá v prvočíselnom rozklade žiadne z prvočísel a-čka (inak by sa dali skrátiť a zlomok by nebol v základnom tvare). Ale každé z prvočísel, ktoré delia a, musí deliť aj pravú stranu, teda musí deliť c. Z toho vyplýva, že a delí c. Opačnou úvahou dostávame, že b musí deliť $d - c$. Ale to nám ešte nestačí. Vidíme, že c delí pravú stranu rovnice, takže každé z prvočísel rozkladu c-čka musí deliť aj ľavú. A keďže nemôžu deliť číslo $d - c$ (potom by určite delili aj $(d - c) + c$ a druhý zlomok by sa zase dal skrátiť), tak musia deliť a. No ale z toho už naozaj dostávame, že $a = c$ a teda $b = d - a$. Táto posledná rovnosť nám už umožní hľadať všetky dvojice zlomkov vyhovujúce zadaniu. Proste si zvolíme čitateľa a, potom k nemu nesúdeliteľného menovateľa b a druhý menovateľ bude ich súčtom $d = b + a$. Vidíme, že takto si vieme pohodlne vygenerovať ľubovoľné množstvo dvojíc zlomkov, ktoré sa však ako darčeky vôbec nehodia. :-)

Úloha č. 3: *Peťovi zišli na um tri nezáporné celé čísla. Všimol si to Miťo, ktorý je veľký zberateľ čísel všetkých druhov a začal Peťa prehovárať, aby mu tie čísla prezradil. Peťo nesúhlasil, ale bol ochotný Miťovi povedať ľubovoľnú informáciu v tvare jedného prirodzeného čísla. Pomôžte Miťovi vymyslieť spôsob, ktorým keď Peťo zo svojich troch nezáporných celých čísel vyrobí jedno prirodzené, tak Miťo z neho bude vedieť spätne získať všetky tri Peťove čísla.*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)

Je možných viacero rôznych prístupov. Najkrajší je asi ten, ktorý využíva skutočnosť, že každé prirodzené číslo vieme rozložiť na súčin prvočísel iba jediným spôsobom (teda až na poradie činiteľov je rozklad jednoznačný). Nad týmto tvrdením a jeho dôkazom sa skúste zamyslieť sami. Do informácie koľkokrát sa ktoré z prvočísel v rozklade nachádza môžeme zakódovať Peťove tri čísla. Bude to vyzerať nasledovne: Peťo zakóduje čísla a, b, c do čísla $2^a 3^b 5^c$. Keď sa potom toto číslo dozvie Miťo, stačí mu ho rozložiť naspäť na prvočísla a exponenty pri 2, 3 a 5 mu už prezradia, aké sú Peťove čísla. Mnohí z vás sa ale neuberali týmto smerom, skôr sa pokúšali zakódovať pôvodné tri čísla tak, že si ich zapísali za sebou a prípadne ich ešte nejakými ciframi oddelili. To je síce schodná cesta, treba ale dať pozor, aby sa nám nikdy nestalo, že dve rôzne trojice čísel sa zakódujú do rovnakého výsledku (t.j. aby bolo rozkódovanie vždy jednoznačné). Jeden zo spôsobov, ako to zabezpečiť, je najprv čísla doplniť zľava nulami tak, aby mali toľko cifier, koľko malo najdlhšie z nich. Tieto čísla aj s úvodnými nulami potom napísať za seba (to najväčšie ako prvé) a výsledné číslo bude našim výsledkom. Dekódovanie je jednoduché — stačí číslo rozdeliť na tri rovnako dlhé postupnosti cifier a z každej odstrániť úvodné nuly (ak tam sú). Špeciálne treba ešte ošetriť prípad, ak sú všetky tri čísla rovné nule, vtedy (keďže výsledkom má byť prirodzené číslo) ich môžeme zakódovať napríklad ako ľubovoľné jednociferné prirodzené číslo, pretože také určite nemohlo vzniknúť vyššie popísaným postupom. Skúste si rozmyslieť, ktorý z týchto spôsobov je použiteľný na zakódovanie vopred neznámeho počtu čísel.

Úloha č. 4: *Čermo mal* 8 *čiernych a* 8 *bielych štvorcových dlaždičiek s rozmermi* 10×10 *cm. Každú dlaždičku rozrezal po uhlopriečke na dva trojuholníky. Čermo chce týmito trojuholníkmi vydláždičkovať stenu s rozmerom* 40×40 *cm tak, aby žiadne dva trojuholníky, ktoré susedia hranou, nemali rovnakú farbu. Koľko je takých vydláždičkovaní?*

Riešenie: (opravoval Čermo)

Ako môžeme ukladať dlaždičky na stenu? Rozdeľme si stenu 40×40 cm na 16 rovnakých štvorcov (obyčajná štvorcová sieť). Keďže o centimetre nejde, budeme štvorec 10×10 cm považovať za jednotkový. Nie je triviálne ukázať, že vydláždenie je *pekné*, t.j. že naozaj musia byť v každom štvorci našej štvorcovej siete práve dve dlaždičky, uhlopriečkou oproti sebe. Môžete sa skúsiť zamyslieť nad týmto tvrdením, my sme od vás jeho dôkaz nevyžadovali. Budeme dlaždičky na stenu ukladať tak, aby vydláždenie bolo pekné a zrátame počet takýchto rôznych vydláždičkovaní. Toto je úloha o farbení a kreslení, preto skôr, ako začnete čítať vzorové riešenie, zožeňte si papier a ceruzku.

Nikdy nie je na škodu pohrať sa s malými prípadmi, získame hlbší pohľad na problém. Majme jeden voľný, ešte nevydláždený štvorček 1×1. Sú dva spôsoby, ako naň položiť dlaždičky a ku každému z nich existujú práve dve ofarbenia, buď prvá dlaždička je biela a druhá čierna alebo naopak (nakreslite si). Preto sú 4 možnosti, ako vydláždiť jeden štvorček. Tiež si uvedomme, že v každom prípustnom peknom vydláždení sú trojuholníky tvoriace štvorec rôznej farby, preto použijeme naozaj rovnaký počet bielych a čiernych trojuholníkov.

Pozrime sa na stenu 2×2. Tu nemôžeme vydláždiť všetky štvorčeky 1×1 nezávisle, lebo nie vždy dostaneme prípustné ofarbenie (vyskúšajte si). Ak jedna hrana štvorčeka 1×1 je už ofarbená (štvorček susedí s už vydláždeným štvorčekom), máme stále dve možnosti pre polohu dlaždičiek, ale iba jednu možnosť pre ofarbenie (prečo?), teda dokopy dve možnosti pre vydláždenie tohto štvorčeka. Ak dve susedné hrany už sú ofarbené, máme práve jednu možnosť, ako vydláždiť náš štvorček (rozmyslite si!). A ak sú ofarbené viac ako dve hrany alebo dve protiľahlé hrany sú rovnakej farby, nie vždy existuje prípustné vydláždenie (ozaj?), preto tomuto prípadu sa pri postupnom vyfarbovaní posnažíme vyhnúť. Teraz si sami preskúmajte, ako vydláždiť steny 2×2 a 3×3.

Objavili ste niečo? Môžete použitú metódu zovšeobecniť aj pre väčšie steny? Ak áno, mali by ste vedieť dokončiť riešenie aj sami. Nejde to? Zamyslite sa. Dal by sa použiť výsledok, počet vydláždení malej steny? Skúsme. Predpokladajme, že vieme počet ofarbení (alebo vydláždení, môžeme tieto pojmy voľne zamieňať, keďže vlastne hovoria o tom istom) štvorcovej steny $n \times n$ a pokúsme sa vyfarbiť stenu so stranou o 1 väčšou, $(n+1) \times (n+1)$. Nech stena $n \times n$ obsahujúca ľavý horný roh je nejako ofarbená. Počet možných ofarbení tejto steny vieme, označme si ho teda nejako, napríklad p_n. (O čo je označenie ξ_q^W horšie? Viete vymyslieť iné vhodné označenie?) Poďme ofarbiť dosiaľ neofarbené políčka. Začnime hoci v pravom stĺpci hore, nič tým nepokazíme, keďže toto políčko tak či tak raz musíme ofarbiť. Toto políčko susedí s jednou už ofarbenou hranou, takže ako sme si už povedali v úvode pri skúmaní malých prípadov, máme dve možnosti, ako ho ofarbiť. Po jeho vydláždení políčko pod ním už môžeme ofarbiť len jedným spôsobom (prečo?). Podobne ďalšie políčka v tomto stĺpci; zafarbením horného je ofarbenie ostatných jednoznačne určené, až na pravé dolné rohové políčko, tu máme opäť dve možnosti. A dolný riadok budeme farbiť sprava, opäť vyjde, že máme len jednu možnosť pre každé políčko. Teda pre ofarbenie ľavého horného štvorca $n \times n$ máme p_n možností, k nim nezávisle vyberieme jednu z dvoch možností pre pravé horné políčko a tiež nezávisle jednu z dvoch možností pre pravé dolné políčko. Takže počet ofarbení šachovnice $(n+1) \times (n+1)$ je

$$p_{n+1} = p_n \cdot 2 \cdot 2 = 4p_n \,. \tag{1}$$

Žiadne ofarbenie nerátame viackrát; ofarbenia, ktoré spomínaným spôsobom dostaneme, sú rôzne. Rozmyslite si, prečo nemôžu byť nejaké dve z nich rovnaké – musia sa líšiť v ofarbení aspoň jedného štvorčeka. Ešte treba ukázať, že každé prípustné ofarbenie zarátame aspoň raz, teda že ho vieme dostať spomínaným postupom a že iný postup, napríklad začať so stenou $n \times n$, obsahujúcou pravý dolný roh, nám neprinesie žiadne nové prípustné ofarbenie. Premyslite si to.

Zo vzťahu (1) už ľahko vieme zistiť počet vydláždení šachovnice 4×4; $p_4 = 4p_3 = 4 \cdot 4p_2 = 4^2 \cdot 4p_1 = 4^4 = 256$. (Pre šachovnicu veľkosti $n \times n$ ľahko ukážeme matematickou indukciou, že počet prípustných pekných ofarbení je 4^n.)

Iné riešenie:

Elegantné riešenie dostaneme, ak si všimneme, že políčka našej steny, ktoré ležia na uhlopriečke, vieme ofarbiť nezávislo od seba a navyše po ofarbení uhlopriečky je vydláždenie celej steny jednoznačne určené (premyslite si). Každé zo 4 políčok uhlopriečky vieme ofarbiť 4 spôsobmi, teda pre celú uhlopriečku a aj stenu máme $4^4 = 256$ možných vydláždení. Rovnaký postup sa dá použiť aj pre väčšie steny.

Úloha č. 5: *Na lúke sa stretli Šesťo, Aňa, Katka, Paľo, Janči, Tomáš, Miško a niekoľkí riešitelia KMS a všetci sa pochytali za ruky do jedného kruhu. V kruhu bolo a chlapcov, b dievčat a chlapec s chlapcom sa držali c-krát, dievča s dievčaťom sa držali d-krát. Aký bude rozdiel $c-d$, ak poznáme len rozdiel $a-b$?*

Riešenie: (opravoval Paľo N.)

Označme si e počet držaní medzi chlapcom a dievčaťom. Každý chlapec má dve ruky, spolu majú teda $2a$ rúk. Chlapčenská ruka drží chlapčenskú ruku $2c$-krát (lebo držania medzi chlapcami sú vzájomné) a dievčenskú ruku e-krát. Keď sa nad tým trochu zamyslíme, musí nám byť jasné, že $2a = 2c + e$. Rovnakou úvahou pre dievčatá dostaneme rovnosť $2b = 2d + e$. Vyjadríme si e z oboch rovníc, $e = 2a - 2c = 2b - 2d$. Odtiaľ už jednoduchou úpravou získame hľadaný vzťah: $a - b = c - d$.

Úloha č. 6: *Malá Erika ešte nevie riešiť problémy s číslami väčšími ako ona. Pomôžte jej s týmto: Nech x je prirodzené číslo. Ukážte, že $2005x^2+2002x+2003$ nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.*

Riešenie: (opravoval Miško)

Čo je cieľom? Ukázať, že nejaký výraz nie je štvorcom. Musí teda existovať aspoň jeden dôvod, ktorým vieme toto tvrdenie podoprieť. Vieme si takýto dôvod predstaviť? Pozrime sa na malé prípady. Nech $x = 1$, potom $V(x) = 2005x^2 + 2002x + 2003 = 6010$. Prečo toto číslo nie je štvorcom? Áno, odmocnina z neho nie je celé číslo. Niet však aj nejakého jednoduchšieho kritéria? Najprv sa trocha zamyslite, až potom čítajte ďalej…

Jedna možnosť sú odhady. Vieme, že $77^2 = 5929$, $78^2 = 6084$, keďže sa 6010 nachádza medzi dvoma za sebou idúcimi štvorcami, nemôže byť štvorcom. Skúste použiť túto metódu na ukázanie toho, že $x^2 + x + 1$ nie je štvorcom pre žiadne prirodzené číslo x. Skúsme iný prístup. Číslo 6010 je deliteľné 5, ale nie je deliteľné 25, preto to nemôže byť štvorec – každý štvorec má exponenty prvočísel v prvočíselnom rozklade párne. Podobne je 6010 deliteľné 2, ale nie je deliteľné 4. Preto nie je štvorcom, ak štvorec je párny, musí byť deliteľný štyrmi. Tu sa ponúka ďalšia otázka; čo s nepárnymi štvorcami? Ak umocníme nepárne číslo $2k + 1$ (prečo takto môžeme zapísať každé nepárne číslo?) na druhú, dostaneme $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, čo dáva zvyšok 1 po delení štyrmi. Preto štvorec môže po delení štyrmi dávať len zvyšok 0 alebo 1 (ešte raz si to dobre premyslite). Keďže 6010 dáva zvyšok 2 po delení štyrmi, nemôže to byť štvorec.

Skúsme $x = 2$. Platí $V(2) = 2005 \cdot 2^2 + 2002 \cdot 2 + 2003 = 14027$. Keď vyskúšame metódy z prípadu $x = 1$, zistíme, že niektoré opäť fungujú: $118^2 = 13924 < 14027 < 14161 = 119^2$ a 14027 dáva zvyšok 3 po delení štyrmi, takže to nemôže byť štvorec. Podobne môžeme preskúmať niekoľko ďalších malých hodnôt x.

Čo z našich zistení sa dá použiť pri riešení pôvodnej úlohy? Prvá metóda, odhady, vyzerá vo všeobecnom prípade neúspešne, lebo je ťažké nájsť tieto odhady; problém je najmä v tom, že výraz $V(x)$ nevieme rozumne upraviť na štvorec (rozumne znamená vyhnúť sa necelým číslam, keďže skúmame štvorce a deliteľnosť, to má zmysel len pre celé čísla). Čo nám povie ten druhý prístup, skúmanie zvyšku po delení štyrmi? Náš výraz $V(x)$ po delení štyrmi dáva rovnaký zvyšok ako výraz $R(x) = x^2 + 2x + 3$, zamyslite sa, prečo. Vieme niečo o zvyškoch štvorcov (tento a všetky ďalšie zvyšky budeme uvažovať po delení štyrmi), tak upravme aj $R(x)$ na štvorec; $R(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2$. Číslo $(x + 1)^2$ je štvorec, teda dáva zvyšok 0 alebo 1, preto $R(x)$ dáva zvyšok 2 alebo 3. Aj $V(x)$ teda dáva zvyšok 2 alebo 3, preto nie je štvorcom. A sme hotoví. Pre zaujímavosť si môžete rozobrať, aký zvyšok môže dávať štvorec po delení tromi. Viete vymyslieť výraz, ktorý nie je štvorcom kvôli nevhodnému zvyšku po delení tromi?

Úloha č. 7: *Buggo má v komíne schované 2004-ciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave), o ktorom je známe len to, že keď sa z neho zoberie ľubovoľných 167 po sebe idúcich cifier, bude vzniknuté 167-ciferné číslo deliteľné číslom 2^{167}. Dokážte, že Buggovo číslo je deliteľné 2^{2004}.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Miťo)

Pre väčšinu ľudí je náročné predstavovať si a pracovať s 2004 alebo 167 cifernými číslami. Skúsme sa pozrieť na rovnaké zadanie s menšími číslami a potom sa zamyslíme, či nám riešenie takejto jednoduchšej úlohy nejako pomôže. Predstavme si preto nejaké 8–ciferné číslo, pre ktoré platí, že ak vezmeme jeho ľubovoľné 4 po sebe idúce cifry, bude toto štvorciferné číslo deliteľné číslom 2^4. Prvé štvorciferné číslo zľava tvorené ciframi a_8 až a_5, ktoré označíme ako x, sa dá napísať ako $16k$. (Toto vyplýva z predpokladov.) Druhé takéto číslo tvorené ciframi a_7 až a_4, označené y, je tiež násobok 16, teda $y = 16l$, pričom k, l sú nezáporné celé čísla. Aký vzťah je teda medzi x a y? Zistíme, že $y = 10 \cdot x - 10^4 \cdot a_8 + a_4$. (Zamyslite sa nad tým, prečo to tak je.) Z predpokladov máme, že x aj y sú deliteľné 16–timi. Keďže y je na ľavej strane rovnice, musí byť aj celá pravá strana deliteľná 16–timi. Po krátkej úvahe, ktorú si iste radi sami vykonáte, zisťujeme, že a_4 je deliteľné 16-timi. Keďže a_4 je cifra, teda jednociferné číslo, musí to byť 0. Táto úvaha využívala iba vlastnosť deliteľnosti 16 a nie priamo pozíciu prelínajúcich sa čísel. Preto aj cifry a_3, a_2, a_1 sú rovné 0. Teda celé 8–ciferné číslo bude vyzerať takto: $\overline{a_8a_7a_6a_50000}$, čo je to isté, ako $x \cdot 10^4$. Keďže x je deliteľné 2^4 a aj 10^4 je deliteľné 2^4 a tieto čísla násobíme, bude naše „malé“ Buggovo, t.j. Miťovo, číslo deliteľné 2^8. Tak. A teraz pouvažujte nad súvislosťou medzi týmto príkladom a úlohou v zadaní a pokúste sa ju ešte raz vyriešiť.

Komentár: V zadaní bola jedna drobná chybička. Konkrétne predpoklad, že ak vezmeme ľubovoľných 167 po sebe idúcich cifier Buggovho čísla, bude toto *stošesťdesiatsedemciferné číslo* deliteľné číslom 2^{167}. No Buggovo číslo má na všetkých miestach, okrem prvých 167, nutne samé nuly a preto vybrané čísla budú len jednociferné. Teda ak by sme chceli byť úplne korektní, tak Buggovo číslo neexistuje a preto má hocakú vlastnosť. Zachrániť by sa to dalo napríklad formuláciou „... číslo, tvorené 167-mimi za sebou idúcimi ciframi ...“.

Úloha č. 8: *Kubo má v rovine $n \geq 9$ bodov, pričom platí, že keď vyberie ľubovoľných 9 z nich, tak existujú dve kružnice také, že každý z vybraných bodov leží na aspoň jednej z nich. Dokážte, že existujú dve kružnice také, že každý z n Kubových bodov leží na aspoň jednej z nich.*

Riešenie: (opravoval Janči)

Zoberme z Kubových n bodov ľubovoľných 9. Vieme, že ležia na dvoch kružniciach, preto aspoň 5 z nich leží na jednej. Označme ju k a body na nej nech sú A, B, C, D a E. Rozdeľme všetkých n bodov na tie, ktoré ležia na k a tie, ktoré na k neležia.

Ak najviac 3 body neležia na kružnici k, potom existuje kružnica, ktorá nimi prechádza; okrem prípadu, že 3 z nich ležia na jednej priamke (rozmyslite si, prečo). Sporom ukážeme, že tento prípad nastať nemôže. Označme G, H, I tie 3 body, ktoré nepatria k a ležia na jednej priamke. Keďže $n \geq 9$, tak aspoň 6 Kubových bodov patrí kružnici k, sú to body A, B, C, D, E a šiesty označme F. Týchto 9 označených bodov musí ležať na dvoch kružniciach, označme tieto kružnice p_1 a p_2. Zo šiestich bodov A, B, C, D, E, F aspoň 3 ležia na jednej z kružníc p_1, p_2, nech body A, B, C ležia na p_1. Vieme, že k ľubovoľným trom bodom neležiacim na jednej priamke existuje práve jedna kružnica, ktorá nimi prechádza (rozmyslite si, prečo). Čiže A, B, C určujú jedinú kružnicu, teda p_1 je k. Keďže body G, H, I nepatria kružnici k, musia patriť kružnici p_2, čo je spor s predpokladom, že body G, H, I ležia na jednej priamke. Takže každý z n Kubových bodov leží buď na kružnici k, alebo na kružnici opísanej bodom, ktoré neležia na k.

Ak viac ako 3 body neležia na k, zoberme 5 bodov z k (body A, B, C, D, E) a ľubovoľné 3 mimo k (body G, H, I), ktoré neležia na jednej priamke (prečo také 3 body existujú?). Body G, H, I nám určia kružnicu l. Ukážeme, že všetky body nepatriace kružnici k patria kružnici l. Zoberme ľubovoľný bod X nepatriaci kružnici k rôzny od bodov G, H, I. Vieme, že týchto 9 bodov (A, B, C, D, E, G, H, I, X) leží na dvoch kružniciach, nech sú to p_1 a p_2. Z bodov A, B, C, D, E musia aspoň 3 ležať na jednej z kružníc p_1 a p_2, čiže kružnica k je znovu jednou z nich. Ale body G, H, I, X neležia na k, preto musia ležať na jednej kružnici, je zrejmé, že touto kružnicou je l. Nakoľko to platí pre ľubovoľný bod X, platí to pre všetky body neležiace na k, teda všetky body neležiace na k ležia na kružnici l, čím sme tvrdenie dokázali.

Úloha č. 9: *Rúža a Foto si každý večer krátia čas nasledujúcou zábavkou. Rúža si zoberie štvorčekový papier veľkosti 102×102 štvorčekov a Foto si vymyslí celistvý útvar Ú zložený zo 101 takýchto štvorčekov. Rúža si potom zo svojho papiera vystrihne najväčší možný počet kópií útvaru Ú (pričom strihá iba pozdĺž naznačených línií). Zo všetkých útvarov Ú nájdite aspoň jeden, pre ktorý je počet vystrihnutých kópií minimálny.*
Poznámka: Dva štvorčeky spojené len vrcholom netvoria celistvý útvar.

Riešenie: (opravoval Foto)

Po dlhšom skúšaní, skúmaní a vylepšovaní útvarov *Ú* sa dá vymyslieť hypotéza, že hľadaný útvar *Ú* je útvar v tvare kríža, pozostávajúci z jedného stredového štvorčeka, z ktorého na všetky 4 smery vychádzajú rovné ramená dlhé 25 štvorčekov. Po ďalšom dlhšom skúšaní a skúmaní sa dá vymyslieť hypotéza, že tieto kríže sa z papiera 102×102 dajú vystrihnúť maximálne štyri. Nestačí však iba nájsť tento útvar, treba aj dokázať, že je to naozaj ten hľadaný. Najprv dokážeme, že sa nedajú vystrihnúť viac ako 4 takéto kríže a potom to, že z útvaru *Ú* akéhokoľvek tvaru sa dajú vystrihnúť aspoň 4 kópie.

Dôkaz sporom. Predpokladajme, že sa dá vystrihnúť 5 krížov. Všimnime si ich stredové štvorčeky. Tieto sa musia nachádzať vo vzdialenosti aspoň 25 štvorčekov od kraja, inak by sa na papier nezmestilo nejaké rameno daného kríža. Všetkých 5 stredov sa teda musí nachádzať vo vnútri stredného štvorca 52×52 našeho papiera 102×102. Tento sa skladá zo štyroch štvorcov 26×26 a podľa Dirichletovho princípu musí aspoň jeden z nich obsahovať dva stredové štvorčeky. Dva kríže, obsahujúce tieto stredové štvorčeky, sa ale pretínajú (premyslite si, prečo) a to je spor s tým, že sa dajú oba vystrihnúť.

Druhá časť je postavená na nasledujúcom tvrdení. Pre každý celistvý útvar zložený z n štvorčekov existuje obdĺžnik tvaru $a \times b$, do ktorého sa tento útvar zmestí, pričom platí $a + b \leq n + 1$. Dôkaz tohoto tvrdenia nie je triviálny, ale ani natoľko náročný, aby ho nezvládol urobiť každý sám. Podľa tohto tvrdenia platí aj to, že pre každý útvar *Ú* existuje ohraničujúci obdĺžnik, ktorého súčet rozmerov je menší ako 102. Takýto obdĺžnik sa dá vystrihnúť v dvoch protiľahlých rohoch papiera 102×102. Ak ho otočíme o $90°$, dá sa vystrihnúť aj v zvyšných dvoch rohoch toho istého papiera. Z každého tohto obdĺžnika sa dá vystrihnúť jeden útvar *Ú*, čiže z pôvodného papiera sa dajú vystrihnúť aspoň 4 kópie.

Komentár: Za nájdenie útvaru ste dostali 3 body. Po 3 body sa dali získať aj za dôkaz prvej a druhej časti. $(3 + 3 + 3 = 9)$ Veľká časť z vás sa snažila prvú časť dokázať tak, že vedľa seba sa zmestia najviac 2 kríže, pod seba tiež a keďže $2 \cdot 2 = 4$, maximálny počet je štyri. Aby bol tento dôkaz kompletný, treba ešte ukázať, že sa nedá rozmiestniť 5 krížov tak, aby boli vždy najviac 2 vedľa seba. Iná veľká časť z vás (netvrdím, že disjunktná s prvou veľkou časťou `:-)`) sa snažila druhú časť odbaviť pomocou tvrdenia typu „Náš útvar je optimálny, lebo ostatné útvary zaberajú menej plochy a tak sa ich tam musí zmestiť aspoň toľko isto“. Len toto ako argument nestačí, lebo napríklad útvar 103×1 zaberá oveľa menej plochy, ale nedá sa vystrihnúť ani jeden. Nemôžeme mať teda istotu, že nejaký útvar *Ú* nebude mať natoľko komplikovaný tvar, že sa nám tam štyrikrát jednoducho nezmestí.

Úloha č. 10: *Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o* 1 *políčko doprava, o* 1 *políčko hore alebo o* 1 *políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice* 8×8. *Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?*

Riešenie: (opravoval Feldo)

Po chvíli hrania sa s delfínom zistíme, že sa nám nedarí prejsť s delfínom celú šachovnicu. Sú dve možnosti, buď sme zle skúšali, alebo sa s delfínom naozaj šachovnica prejsť nedá. Prvá možnosť je, že budeme skúšať a skúšať, pokiaľ nás to neprestane baviť. Nakoniec pripusťme, že šachovnica sa obehať nedá. Ale ako to dokázať?

Teraz by som bol rád, keby sa každý z vás zamyslel, ako dokázať, že niečo neplatí. Keď už ste sa zamysleli, tak môžeme pokračovať. Správne, budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že delfín obehal celú šachovnicu. Kde dostať spor? Delfín nie je figúrka ako napríklad strelec, ktorý pri svojom pohybe nemení farbu políčok, na ktorých stojí, ani ako pešiak, ktorý ide iba dopredu (či už rovno, alebo šikmo).

Všimnime si, že pokiaľ si očíslujeme riadky aj stĺpce postupne číslami $1, 2, \cdots, 8$ začínajúc z ľavého dolného rohu, tak zistíme, že delfín pri každom svojom kroku buď zvýši číslo riadku alebo stĺpca, na ktorom stojí, o 1, alebo zníži číslo riadku aj stĺpca o 1.

V tomto okamihu si zas môžeme dať prestávku na zamyslenie. Veď keď som si skúšal prejsť menšie šachovnice, napríklad 3×3, tak som ich vedel obehať. Teda načo skúmať jeden krok delfína, keď nakoniec bude záležať na veľkosti šachovnice?

Dobre, beriem námietku a skúsim dať odpoveď, prečo sme sa zaoberali jedným krokom delfína. Vlastne sa jedná o ideu celého dôkazu. Skúsim si všimnúť v pohybe delfína nejaké zákonitosti (napríklad u pešiaka je takouto zákonitosťou, že v každom kroku sa zvýši číslo riadku o 1, u strelca, že súčet zmien riadku a stĺpca je vždy párne číslo a naopak u jazdca je to vždy nepárne číslo) a s ňou sa pokúsiť dokázať, že neprejdem šachovicu nejakých rozmerov. Teraz prichádza najťažší a najdôležitejší nápad celého dôkazu – nájsť takúto zákonitosť.

Ako na také niečo viem dôjsť? Asi najlepšie praxou a počítaním príkladov. Tak a teraz vám to poviem. Ak si vezmeme súčet riadku a stĺpca, tak táto veličina sa v každom kroku zväčší o jedna, alebo zmenší o dva. To ale znamená, že v každom kroku sa zvyšok po delení troma súčtu riadku a stĺpca zväčší o 1. V tomto okamihu ste už schopní dokončiť príklad sami. Ešte pripomeniem, že sme nevyužili rozmery šachovnice.

Na začiatku stojí delfín na políčku, ktorého súčet riadku a stĺpca je 2. Po 63 ťahoch prešiel celú šachovnicu (to je náš predpoklad). Keďže sa zvyšok súčtu riadku a stĺpca po delení troma mení pravidelne, tak v týchto 63 krokoch budeme stáť 21 krát na políčku zo zvyškom 0, 1 a 2 (začiatočné políčko už nepočítame). Keď si ale spočítame políčka, ktorých súčet riadku a stĺpca dáva zvyšok 2 po delní troma tak dôjdeme k číslu 20 (okrem začiatočného políčka) a aj k hľadanému sporu.

Úloha č. 11: *Peťovi a Pištovi sa zdala táto séria príliš jednotvárna, tak si vymysleli takúto počtársku lahôdku. Nech $a_0, a_1, a_2, \dots$ je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že každé nezáporné celé číslo sa dá práve jedným spôsobom vyjadr1iť v tvare $a_i + 2a_j + 4a_k$, kde i, j a k sú nie nutne rôzne. Určte všetky možné hodnoty a_{2004}.*

Riešenie: (opravoval Pišta)

(podľa *Víťa Kalu*) Takže hľadajme členy našej neklesajúcej postupnosti. Keby $a_0 > 0$, tak je $a_n > 0$ pre všetky nezáporné celé n. Preto číslo 0 sa nedá napísať v požadovanom tvare. A to je spor s tým, že sa to dá a práve raz. Teda nutne $a_0 = 0$. Označme n_l najmenšie číslo, ktoré sa nedá vyjadriť ako $a_i + 2a_j + 4a_k$ pre $i, j, k \in \{0, 1, \cdots, l\}$. Keby bol $a_{l+1} < n_l$, tak by to znamenal, že sa dá vyjadriť nejakým požadovaným spôsobom a tiež ako $a_{l+1} = 1 \cdot a_{l+1} + 2 \cdot a_0 + 4 \cdot a_0$. Dostávame spor s jednoznčnosťou. Keby bol $a_{l+1} > n_l$, tak by bol $a_n > n_l$ pre všetky $n \geq l + 1$. Preto keby $n_l = a_i + 2 \cdot a_j + 4 \cdot a_k$, potom nutne $i, j, k \leq l$, teda máme spor s tým, že n_l sa takto vyjadriť nedá. Čiže jedine $a_{l+1} = n_l$ je prípustné. To pre nás znamená aj to, že keď naša postupnosť existuje, tak je len jedna, lebo jej členy sú jednoznačne určené. Teda stačí nájsť tú jedinú postupnosť, alebo ukázať, že taká neexistuje.

Definujme postupnosť a_n takto: $a_n = (x_m x_{m-1} \cdots x_1 x_0)_8$, kde $(x_m x_{m-1} \cdots x_1 x_0)_2 = n$ je binárny zápis čísla n. Čiže n-tý člen je číslo, ktoré dostaneme tak, že číslo n zapíšeme do dvojkovej sústavy a prečítame ho ako keby bolo napísané v osmičkovej sústave a toto číslo prepíšeme naspäť do desiatkovej sústavy. Napr. ak $n = 5$: $(5)_{10} = (101)_2$, tento zápis prečítame v osmičkovej: $(101)_8 = 65 = a_5$.

Teraz už máme postupnosť, a o nej ukážeme, že:
1. každé nezáporné celé číslo sa dá vyjadriť pomocou nej.
2. žiadne číslo sa nedá vyjadriť viac ako jedným spôsobom.

Tak poďme na to:

1. Majme číslo $(y_m \cdots y_0)_8$, $y_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Číslo y_i sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $y_i = k_i + 2l_i + 4q_i$, kde $k_i, l_i, q_i \in \{0, 1\}$. (Overte si to sami!) Potom ale máme, že $(y_m \cdots y_0)_8 = (k_m \cdots k_0)_8 + 2 \cdot (l_m \cdots l_0)_8 + 4 \cdot (q_m \cdots q_0)_8 = K + 2L + 4Q$. Čísla K, L, Q vo svojom osmičkovom zápise obsahujú iba cifry $0, 1$ preto pre nejaké i, j, k bude $a_i = K$, $a_j = L$ a $a_k = Q$. Teda každé nezáporné celé číslo vieme napísať pomocou tejto postupnosti v požadovanom tvare.

2. Z 1. časti vyplýva aj to, že čísla K, L, Q sú určené jednoznačne, teda a_i, a_j, a_k sú tiež určené jednoznačne.

Teda naša postupnosť vyhovuje zadaniu, a už sme ukázali, že je jediná, preto nám neostáva nič iné, len určiť hodnotu a_{2004}. $2004_{10} = (11111010100)_2$, preto $a_{2004} = (11111010100)_8 = 1227100224$.

<u>**Úloha č. 12:**</u> *Rado vedúcim KMS oznámil, že geometrie nikdy nie je dosť a pokračoval takto. Nech body A_1, B_1, C_1 ležia postupne na výškach (ako úsečkách) AA', BB', CC' ostouhlého trojuholníka ABC tak, že súčet obsahov trojuholníkov ABC_1, BCA_1 a CAB_1 je rovný obsahu trojuholníka ABC. Nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že body A_1, B_1, C_1, H ležia na kružnici. Nakoniec Rado dodal, že čo riešiteľov nezabije, to ich posilní.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mazo)

<u>Poznámka:</u> Často budeme v riešení používať dĺžku úsečky, preto sa dohodneme, že AB bude značiť aj dĺžku úsečky AB, aby sme nemuseli všade písať absolútne hodnoty.

Najprv si trocha podiskutujeme o polohe bodov A_1, B_1, C_1. Ak aspoň dva z nich sú totožné s ortocentrom H, tak sme hotoví. Ak je jeden z nich totožný s H, stačí ukázať, že body A_1, B_1, C_1, H nie sú kolineárne (tento dôkaz ponecháme čitateľovi). Môžeme teda predpokladať, že všetky body A_1, B_1, C_1 sú rôzne od H. Ak by všetky tri boli na úseku zodpovedajúcej výšky medzi vrcholom a bodom H, tak súčet obsahov trojuholníkov zo zadania je väčší ako obsah trojuholníka ABC. Podobne, ak by všetky tri body A_1, B_1, C_1 ležali medzi pätou výšky a bodom H, tak súčet obsahov daných trojuholníkov bude primalý. Preto stačí rozobrať dva prípady; ukážeme tu jeden z nich (druhý sa spraví analogicky). Nech $A_1 \in AH$, $B_1 \in B'H$, $C_1 \in C'H$. Skúsme nejako využiť rovnosť obsahov zo zadania. Trojnásobným použitím známeho vzorca pre obsah trojuholníka $S = 1/2 \cdot a \cdot v_a$ dostaneme

$$AB \cdot C'C_1 + BC \cdot A'A_1 + CA \cdot B'B_1 = 2S_{ABC} .$$

Keď bod H pospájame s vrcholmi trojuholníka ABC, dostaneme tri trojuholníky, pričom ich obsahy v súčte opäť dajú obsah trojuholníka ABC:

$$AB \cdot C'H + BC \cdot A'H + CA \cdot B'H = 2S_{ABC} .$$

Porovnaním dvoch predchádzajúcich vzťahov a drobnou úpravou dostaneme

$$HA_1 \cdot BC = HB_1 \cdot AC + HC_1 \cdot AB . \tag{2}$$

Čo s tým? Pozrime sa, čo chceme dokázať. Ako výhodne popísať, že štyri body ležia na kružnici? Možností je veľa. Opíšeme trom z týchto bodov kružnicu a ukážeme, že na nej leží štvrtý bod pomocou obvodových uhlov (*Víťa Kala*). Využijeme, že súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je 180° (*Feri Simančík*). Opíšeme nejakým dvom rôznym trojiciam z nich kružnice a dokážeme, že majú rovnaký polomer (syntetické riešenie pomocou goniometrie, *Stanka Sojáková*). Alebo nakukneme, čo už máme (vzťah (2)) a všimneme si podobnosť s Ptolemaiovou vetou (*Tomáš Váňa*, *Ondro Budáč*). Na toto riešenie sa pozrieme bližšie. *Ptolemaiova veta* hovorí, že body H, B_1, A_1, C_1 ležia na jednej kružnici (v tomto poradí) práve vtedy, keď platí

$$HA_1 \cdot B_1C_1 = HB_1 \cdot A_1C_1 + HC_1 \cdot A_1B_1 . \tag{3}$$

Opäť to porovnáme so (2) … nechýba veľa, a bolo by to to isté. Úplne by stačilo, aby trojuholníky ABC a $A_1B_1C_1$ boli podobné. Sú, alebo nie? Ľahko si všimneme, že tieto podobnosti sú ekvivalentné s tým, že body H, B_1, A_1, C_1 ležia na kružnici, lebo $|\sphericalangle C'HA| = 90° - |\sphericalangle C'AH| = 90° - (90° - |\sphericalangle ABA'|) = \beta$, analogicky $|\sphericalangle AHB'| = \gamma$. Čo je to podobnosť? Nejaké pomery. Tak si ich spravme. (2) je ekvivalentné s

$$HA_1 = HB_1 \cdot \frac{AC}{BC} + HC_1 \cdot \frac{AB}{BC} = HB_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + HC_1 \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \tag{4}$$

Na vyjadrenie pomerov na pravej strane sme použili sínusovú vetu pre trojuholník ABC. To isté by sme mohli spraviť aj s (3). Problémom je, že sme ešte nedokázali, že uhly v trojuholníku $A_1B_1C_1$ majú veľkosti α, β, γ. Nemohli by sme dokresliť do obrázka niečo nové, aby sme získali trojuholník, v ktorom by uhly mali tieto veľkosti? Zrejme kružnica opísaná trojuholníku HB_1C_1 pretína úsečku AH v nejakom bode, označme ho X. Všimnime si trojuholník B_1C_1X. Tento má všetky dobré vlastnosti, ktoré chceme. Z Ptolemaiovej vety (analogicky ako pri (3))

$$HX \cdot B_1C_1 = HB_1 \cdot XC_1 + HC_1 \cdot XB_1 \,. \tag{5}$$

Teraz však už vieme pomery strán v tomto trojuholníku previesť na pomery sínusov známych uhlov, (5) je ekvivalentné s

$$HX = HB_1 \cdot \frac{XC_1}{B_1C_1} + HC_1 \cdot \frac{XB_1}{B_1C_1} = HB_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + HC_1 \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \,. \tag{6}$$

Aha, porovnáme (4) a (6) a vidíme, že $|HX| = |HA_1|$. Z toho už nutne vyplýva, že $X \equiv A_1$ a sme hotoví.

V prípade, že chceme úlohu riešiť analyticky, potrebujeme vhodne popísať, že štyri body ležia na kružnici. To nie je ľahké, keďže kružnica je krivka druhého stupňa a dostávame nelineárne rovnice. Oveľa ľahšie sa pracuje s priamkami. Ako previesť kružnicu na priamku? Predsa kružnicovou inverziou so stredom H, ako to spravil *Maťo Adamčík*. Inou možnosťou je použiť analytiku cez komplexné čísla; každému bodu v rovine priradíme komplexné číslo a rátame. Čo znamená v Gaussovej rovine, že štyri body ležia na kružnici?

Iné riešenie:

Krásne a elegantné riešenie našla *Hanka Budáčová*. Čo vieme o obsahoch trojuholníkov? Napríklad toto: Nech p je priamka rovnobežná s priamkou AB a nech bod C leží na priamke p. Potom obsah trojuholníka ABC nezávisí od polohy bodu C. Čo s tým? Veďme bodom C_1 rovnobežku p so stranou AB a bodom A_1 rovnobežku q so stranou BC. Označme D prienik priamok p, q. Kde môže ležať bod B_1? Z voľby p, q vieme, že $S(ABC_1) = S(ABD)$ a $S(BCA_1) = S(BCD)$. Zo zadania máme $S(ABC_1) + S(BCA_1) + S(ACB_1) = S(ABC)$. Aby platil tento vzťah, musí bod D ležať vnútri trojuholníka ABC (rozmyslite si!). Preto $S(ABD) + S(BCD) + S(ACD) = S(ABC)$. Z tohto všetkého vyplýva, že $S(ACB_1) = S(ACD)$, teda bod B_1 leží na priamke r prechádzajúcej bodom D a rovnobežnej s AC. A keďže priamky p, q, r sú kolmé na zodpovedajúce výšky, ležia body A_1, B_1, C_1 na Tálesovej kružnici nad priemerom HD.

Túto ideu využil aj *Jaro Knebl*, ktorý tvrdenie zovšeobecnil pre ľubovoľný bod H vnútri trojuholníka ABC a body ležiace na kolmiciach na strany trojuholníka. Analogické tvrdenie platí aj pre štvorsten v trojrozmernom priestore.

Úloha č. 13: *Šéfmág Mazo raz v spánku nechtiac začaroval štvorec čísel a to nasledovne. V magickom štvorci $n \times n$ sú vpísané čísla $1, 2, \dots, n^2$ (každé práve raz). Stredy každých dvoch buniek sú spojené šípkami orientovanými z bunky s menším číslom do bunky s väčším číslom. Dokážte, že súčtom všetkých takýchto vektorov je nulový vektor.*
Poznámka: Štvorec považujte za magický, ak súčet čísel v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci je rovnaký.

Riešenie: (opravoval Mazo)

(podľa *Tomáša Váňu*) Označme si $\vec{u}_{ij}$ vektor vedúci z bunky s číslom i do bunky s číslom j (predpokladáme $i > j$, keďže ďalej budeme uvažovať len o takýchto vektoroch). Chceme dokázať, že súčet $S = \sum_{i<j} \vec{u}_{ij}$ je rovný 0.

Zrejme pre $i < j$ platí $\vec{u}_{in^2} = \vec{u}_{ij} + \vec{u}_{jn^2}$, takže $S = \sum_{i<j} (\vec{u}_{in^2} - \vec{u}_{jn^2})$. V takomto súčte sa vyskytujú len vektory $\vec{u}_{kn^2}$ pre $k = 1, 2, \dots, n^2$ s nejakými koeficientami. Skúsme tieto koeficienty vypočítať. Všimnime si bunku s číslom k. Táto bunka je koncovou bunkou pre vektory $\vec{u}_{1k}, \vec{u}_{2k}, \dots, \vec{u}_{(k-1)k}$,

teda so znamienkom mínus je vektor $\vec{u}_{kn^2}$ zarátaný $(k-1)$-krát. Začiatočnou bunkou je bunka s číslom k pre vektory $\vec{u}_{k(k+1)}, \vec{u}_{k(k+2)}, \dots, \vec{u}_{kn^2}$, teda so znamienkom plus je vektor $\vec{u}_{kn^2}$ zarátaný (n^2-k)-krát. Preto koeficient pri tomto vektore je $-(k-1)+(n^2-k)=(n^2-2k+1)$ $(\star)$. Preto $S=\sum_{k=1}^{n^2}(n^2-2k+1)\vec{u}_{kn^2}$.

Ukážeme, že prvá zložka S (v smere riadkov) je nulová. Vezmime si našu tabuľku, v nejakej bunke je n^2. Zrejme vektory medzi bunkami stĺpca, v ktorom je n^2, dávajú nulový súčet v prvej zložke. Prínosy ostatných vektorov sčitame po stĺpcoch. Nech teda nejaký stĺpec obsahuje čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. Štvorec je magický, teda $x_1+x_2+\dots+x_n=(1+2+\dots+n^2)/n=(n^3+n)/2$. Pre prínos vektorov medzi bunkami s číslami $x_1, x_2, \dots, x_n$ kvôli $(\star)$ platí (d je vzdialenosť medzi stĺpcami s n^2 a x_i)

$$P(d)=d\cdot\sum_{i=1}^{n}(n^2-2x_i+1)=d(\sum_{i=1}^{n}(n^2+1)+2\sum_{i=1}^{n}x_i)=d\left(n\left(n^2+1\right)-(n^3+n)\right)=0\,.$$

Toto platí pre všetky stĺpce, takže aj súčet týchto prinosov je nulový a preto prvá zložka S je nulová. Analogicky sa dá ukázať, že aj druhá zložka je nulová a teda naozaj $S=\vec{0}$.

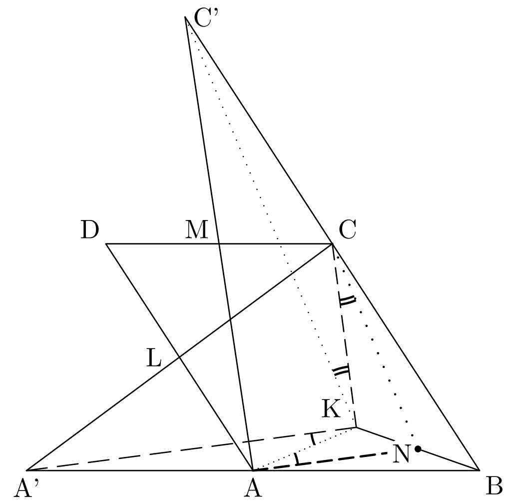
Iné riešenie:

Zaujímavé riešenie využívajúce grafy objavil *Feri Simančík*. Označme $x_1, x_2, \dots, x_n$ čísla v nejakom stĺpci, ich súčet je $S=(1+2+\dots+n^2)/n=(n^3+n)/2$. Do bunky s číslom x_i vchádza x_i-1 šípok (zo všetkých menších čísel) a vychádza z nej n^2-x_i šípok. Teda do celého stĺpca vchádza spolu $\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=S-n$ šípok a vychádza z neho $\sum_{i=1}^{n}(n^2-x_i)=n^3-S=S-n$ šípok.

Vytvorme takýto orientovaný graf: vrcholy reprezentujú jednotlivé stĺpce a medzi dvoma vrcholmi je pre každý vektor práve jedna orientovaná hrana. Niektoré hrany môžu byť viacnásobné či tvoriť slučky (t.j. začínať a končiť v tom istom vrchole), to však neprekáža. Na základe toho, čo sme si už povedali, vieme, že z každého vrchola vychádza rovnaký počet hrán, ako do neho vchádza. Graf sa môže skladať z niekoľkých komponentov (nesúvisiacich častí), vezmime si nejaký z nich. V tejto časti existuje uzavretý Eulerov ťah (teda vieme ju nakresliť jedným ťahom tak, že po každej hrane prechádzame práve raz a skončíme vo vrchole, v ktorom sme začali). Toto sa dá dokázať indukciou podľa počtu hrán; využívame, že v žiadnom vrchole sa nemôžeme zaseknúť. Keďže po prejdení všetkých hrán skončíme v tom vrchole (stĺpci), v ktorom sme začali, je súčet riadkovej zložky vektorov medzi stĺpcami v tejto časti grafu nulový. Toto platí pre všetky časti grafu, teda súčet riadkových zložiek vektorov v tabuľke je 0, keďže každému vektoru z tabuľky prislúcha práve jedna hrana. Analogicky ukážeme, že súčet stĺpcovej zložky vektorov je 0.

Úloha č. 14: *A pozdravuje vás aj Tomáš: Bod K leží vo vnútri rovnobežníka $ABCD$, pričom platí $|CL|=|LK|$ a $|AM|=|MK|$, kde L a M sú postupne stredy strán AD a CD. Označme N stred úsečky BK. Ukážte, že $|\sphericalangle NAK|=|\sphericalangle NCK|$.*

Riešenie: (opravoval Tomáš)



(*podľa Tomáša Váňu*)
Dokreslime si niečo do obrázka. Máme tam stredy strán. Mohla by nám pri tejto príležitosti zísť na um stredová súmernosť podľa týchto stredov. Nech sú teda body A', C' obrazmi bodov C a A podľa stredovej súmernosti so stredmi v bodoch L, resp. M. Pretože $AD \parallel BC$, $|A'L| = 2\,|A'C|$, $2\,|AL| = |AD| = |BC|$, je $\triangle A'AL \sim \triangle A'BC$, teda A je stredom úsečky $A'B$. Podobne si vieme ukázať, že C je stredom úsečky $C'B$. Stredné priečky AN a NC v trojuholníkoch $A'BK$ a $C'BK$ sú rovnobežné s príslušnými stranami, matematickejšie zapísané $AN \parallel A'K$ a $CN \parallel C'K$. Dvojice uhlov na obrázku sú teda nič iné ako dvojice rovnakých striedavých uhlov. Stačí nám na koniec ukázať, že tieto uhly sú rovnaké, t.j. $|\sphericalangle C'KC| = |\sphericalangle A'KA|$.

S pomocou zadania vieme, že $|LC| = |KL| = |A'L|$, preto niet inej možnosti ako tej, že bod L je šťastným stredom Tálesovej kružnice nad primerom $A'C$. Rovnakú situáciu prežíva bod M. Záverom môžeme teda písať

$$\underline{|\sphericalangle CKC'|} + |\sphericalangle C'KA'| = |\sphericalangle CKA'| = 90^\circ = |\sphericalangle C'KA| = |\sphericalangle C'KA'| + \underline{|\sphericalangle A'KA|}.$$