Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Veľká kocka je zložená z $3 \times 3 \times 3$ rovnakých malých kociek. Koľko je všetkých kvádrov (zložených z malých kociek) nachádzajúcich sa v tejto veľkej kocke? Poznámka: Aj kocka je kváder!*

Riešenie: (opravoval Miško R.)

(podľa *Tomáša Bzdušeka*)

Každý kváder v kocke je jednoznačne určený svojimi dvoma protiľahlými vrcholmi (koncami telesovej uhlopriečky, zamyslite sa). Teda ak chceme zistiť počet všetkých kvádrov v kocke, stačí nám nájsť počet všetkých takýchto dvojíc vrcholov, pre ktoré dostaneme kváder. Zároveň však pre každú dvojicu vrcholov musíme dostať iný kváder. V kocke 3×3 máme 4×4 mrežových bodov. Každý z nich je potenciálnym prvým vrcholom nejakého kvádra. Pre každý mrežový bod v kocke ako prvý vrchol kvádra budeme hľadať všetky možné druhé vrcholy kvádra (t.j. možné konce telesových uhlopriečok). Nech ľavý dolný roh kocky má súradnice (0,0,0). Kde všade môže mať kváder s prvým vrcholom v bode (0,0,0) svoj druhý vrchol? Budú to tie mrežové body, ktoré majú všetky súradnice väčšie ako (0,0,0), tých je 27. Ak by bol prvý vrchol kvádra v bode (1,1,0), kde by boli jeho druhé vrcholy? Zase to budú tie mrežové body, ktoré majú všetky súradnice väčšie ako (1,1,0); tých je 12. Tie kvádre, ktoré majú druhý vrchol s nejakou súradnicou menšou ako má (1,1,0), sme už započítali v kvádroch s prvým vrcholom v bode (0,0,0).

Teda ak pre každý mrežový bod zistíme počet bodov, ktoré majú všetky súradnice väčšie ako daný bod, a nakoniec to všetko sčítame, dostaneme počet všetkých kvádrov v kocke. Na obrázku je ku každému mrežovému bodu v kocke zapísaný počet mrežových bodov, ktoré majú všetky súradnice väčšie ako daný bod (vrstvy mrežových bodov sú očíslované odspodu):

1.*vrstva*

0	0	0	0
9	6	3	0
18	12	6	0
27	18	9	0

2.*vrstva*

0	0	0	0
6	4	2	0
12	8	4	0
18	12	6	0

3.*vrstva*

0	0	0	0
3	2	1	0
6	4	2	0
9	6	3	0

4.*vrstva*

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Súčet všetkých napísaných počtov je 216, teda aj všetkých kvádrov v kocke je 216.

Iné riešenie:

V kocke máme $4^3 = 64$ mrežových bodov. Každý z nich je potenciálnym prvým vrcholom nejakého kvádra. Ku každému z týchto vrcholov môžeme vybrať $4^3 - 16 - 12 - 9 = 27$ opačných vrcholov. Prečo? Uvedomme si, že druhý vrchol kvádra musí mať všetky súradnice rôzne od prvého vrcholu. Inak by sme z tých dvoch bodov nedostali kváder, ale obdĺžnik, úsečku či bod. Teda to máme $64 \cdot 27$ možností, ako vybrať dva mrežové body tak, aby určovali kváder. No v týchto možnostiach sme určite započítali nejaký kváder viackrát. Konkrétne sme každý kváder započítali 8-krát – v kvádri máme 4 dvojice protiľahlých vrcholov, pričom každý vrchol z dvojice môže byť aj prvým aj druhým vrcholom. Teda počet kvádrov v kocke je $27 \cdot 64/8 = 216$.

Skúste si úlohu vyriešiť pre väčšie kocky. Dá sa použiť výsledok pre malú kocku? Dala by sa použiť metóda z niektorého riešenia? A čo ešte by sme takto mohli zrátať? Musí byť teleso na začiatku kocka?

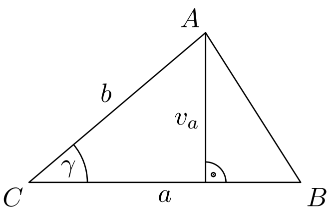
Úloha č. 2: *Rovnoramenný trojuholník, ktorého ramená majú dĺžku 8 cm, budeme volať osmičkový. Odpovedajte na nasledujúce otázky a svoje odpovede odôvodnite.*

a) *Je pravda, že čím je väčší uhol oproti základni osmičkového trojuholníka, tým je väčší jeho obsah?*

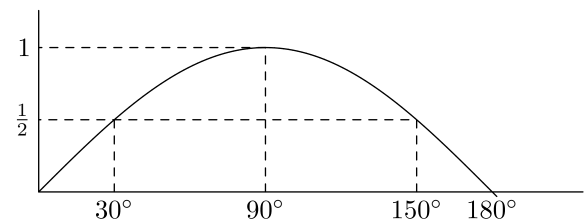
b) *Majme osmičkový trojuholník, ktorého veľkosť uhla oproti základni je* 30°*. Koľkokrát by sme museli tento uhol zväčšiť (zmenšiť), aby sa obsah trojuholníka zdvojnásobil?*

c) *Existuje dvojica nezhodných osmičkových trojuholníkov s rovnakým obsahom? Ak áno, opíšte takéto dvojice.*

Riešenie: (opravovala Erika)



Skúsme odvodiť vzťah pre obsah trojuholníka, ak poznáme dĺžky dvoch jeho strán a, b a veľkosť uhla γ, ktorý zvierajú ($0^\circ < \gamma < 180^\circ$). Vieme, že $\sin\gamma = \frac{v_a}{b}$ (obr. 1). Z toho máme $v_a = b\sin\gamma$. Obsah trojuholníka ABC je teda $S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, v našom prípade $S = 32\sin\gamma$ (keďže $a = b = 8$). Teraz sa pokúsme odpovedať na zadané otázky.



a) Z grafu funkcie sínus vidíme, že pri vzrastajúcej veľkosti uhla γ sa hodnota $\sin\gamma$ zväčšuje. No po presiahnutí $\gamma = 90^\circ$ začne $\sin\gamma$ opäť klesať (obr. 2). Z toho vyplýva, keďže obsah trojuholníka je rovný $32\sin\gamma$, že najskôr so zväčšujúcim sa uhlom γ obsah rastie a potom klesá. Teda odpoveď na túto otázku znie nie.

b) Ak $\gamma = 30^\circ$, tak obsah trojuholníka je 16. My chceme tento obsah zdvojnásobiť, teda má byť rovný 32. Máme $32 = 32 \cdot \sin\gamma$, čiže $1 = \sin\gamma$. Vieme, že táto rovnosť je splnená jedine pre $\gamma = 90^\circ$ ($0^\circ < \gamma < 180^\circ$) a teda uhol musíme strojnásobiť.

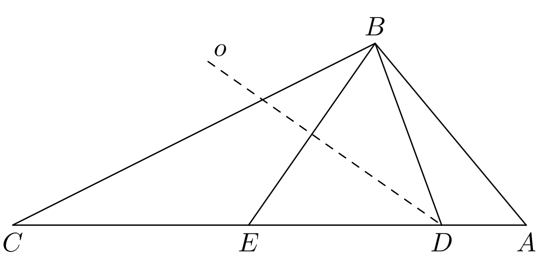
c) Vezmime si dva trojuholníky, z ktorých jeden má uhol $\gamma_1 = 30^\circ$, druhý $\gamma_2 = 150^\circ$. Platí $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2 = \frac{1}{2}$ a teda takéto dva trojuholníky majú rovnaký obsah, aj keď nie sú zhodné.

Komentár: Pri riešení úlohy a) stačí uviesť príklady trojuholníkov, ktoré danú vlastnosť nespĺňajú.

Úloha č. 3: *Na strane AC daného trojuholníka ABC zostrojte bod D taký, že obvod trojuholníka ADB sa rovná dĺžke strany AC.*

Riešenie: (opravoval Šesťo)

Máme daný trojuholník ABC. Úlohou je zostrojiť bod D na strane AC tak, aby obvod trojuholníka ABD bol rovnaký ako dĺžka strany AC.



Skôr ako začneme čokoľvek zostrojovať, zistime, či má vôbec zmysel niečo robiť, teda či bod D môže existovať. Aby mohol trojuholník ABD existovať, musí v ňom platiť trojuholníková nerovnosť. Preto $|AD|+|BD| > |AB|$. Keď k tejto nerovnosti pripočítame $|AB|$, dostávame $|AB| + |AD| + |BD| > 2|AB|$, teda $o_{\triangle ABD} > 2|AB|$. Keďže $o_{\triangle ABD}$ sa má rovnať $|AC|$, tak musí platiť $|AC| > 2|AB|$. Pokiaľ toto neplatí, tak hľadaný bod D vôbec neexistuje.

Ak náš trojuholník ABC túto podmienku spĺňa, môžeme sa pustiť do zostrojovania bodu D. Urobíme si náčrtok (obrázok); bod D má ležať na strane AC tak, aby $|AB| + |AD| + |BD| = |AC|$, alebo inak prepísané $|AD| + |BD| = |AC| - |AB|$. Skráťme si teda stranu AC tým, že na nej zostrojíme bod E tak, aby $|CE| = |AB|$. Potom pre zostávajúci úsek AE bude platiť: $|AE| = |AC| - |CE| = |AC| - |AB| = |AD| + |BD|$. Úsečku AE si môžeme rozdeliť na 2 úseky AD a DE. Potom $|AD| + |DE| = |AE| = |AD| + |BD|$. Dĺžka $|AD|$ sa vyskytuje na oboch stranách rovnice, preto ju môžme odčítať. Dostávame $|DE| = |BD|$. Teda bod D má byť rovnako vzdialený od bodu B aj od bodu E. Vieme, že všetky takéto body ležia na osi úsečky BE. Keďže bod D má ležať aj na strane AC, bod D bude priesečníkom osi BE a úsečky AC.

Bude však tento priesečník vždy existovať? Dostaneme takto vždy ten správny bod D? Nemôže sa stať, že tento priesečník nebude vyhovovať zadaniu? Overte si, že pokiaľ je splnená podmienka $|AC| > 2|AB|$, tak takto získaný bod D bude vyhovovať zadaniu.

Postup konštrukcie:

1. $\triangle ABC$ (zostrojíme trojuholník ABC)
2. k, $k(C, |AB|)$ (kružnica k so stredom v C a polomerom $|AB|$)
3. E, $E = AC \cap k$ (priesečník kružnice k a strany AC je bod E)
4. $\overline{BE}$ (úsečka BE)
5. o, o je os BE (priamka o, ktorá je osou BE)
6. D, $D = AC \cap o$ (priesečník priamky o a úsečky AC je bod D)
7. $\triangle ABD$

Na záver by sa hodilo príklad ešte narysovať.

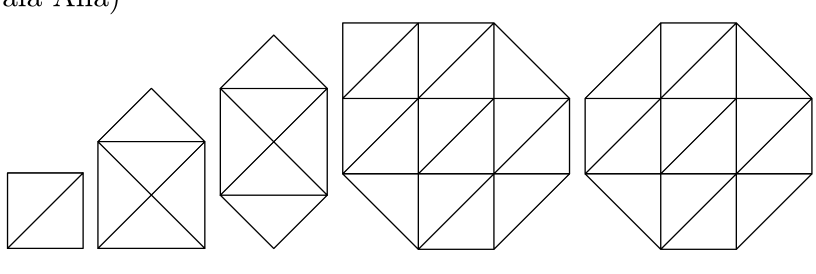
Úloha má jedno riešenie, pokiaľ $|AC| > 2|AB|$ a žiadne riešenie, pokiaľ táto podmienka splnená nie je.

<u>Komentár:</u> Keďže v zadaní bolo napísané „zostrojte bod D tak, aby…“, riešenie by malo obsahovať náčrt, postup konštrukcie, odôvodnenie, prečo sa napísaným postupom dostaneme k hľadanému riešeniu (rozbor), dôkaz správnosti konštrukcie a diskusiu o počte riešení. Ak nejaká z týchto častí chýbala (chýbajúce narysovanie sa prepáčilo), strhával som bod.

Diskusia by mala obsahovať to, za akých podmienok má úloha riešenie a koľko ich má, spolu s odôvodnením. Pri diskusii treba rozobrať všetky možnosti, ktoré môžu nastať. Takisto je vhodnejšie robiť diskusiu vzhľadom na zadané veličiny ako v priebehu postupu. Teda diskusia by nemala byť „Pokiaľ sa os pretne s AC, tak máme bod D a inak nie“, pretože toto nie sme schopní overiť na začiatku, ale až na záver postupu. Nerobiť diskusiu je veľká chyba, lebo pri nevyhovujúcom zadaní môžeme prísť k zlému výsledku a nebudeme o tom vedieť. Napríklad by sme zostrojili nevyhovujúci bod D. Preto za správne riešenie bez diskusie bolo 5 bodov. Pri myšlienke „Asi to nebude mať vždy riešenie“ bolo 6 bodov. Za podmienku $|AC| > |AB|$ bolo 7 bodov. 8 bodov bolo za podmienku $|AC| > |AB|$ a vetu „keď sa os nepretne s AC“. Zamyslite sa nad tým, prečo toto nie je dostatočná podmienka.

<u>Úloha č. 4:</u> *Z rovnakých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov zložte konvexný 4-uholník, 5-uholník, 6-uholník, 7-uholník, 8-uholník, 9-uholník, atď. Pokiaľ sa nejaký n-uholník zložiť nedá, skúste to odôvodniť. Útvary skladajte z čo najmenšieho počtu trojuholníkov.*
Poznámka: Konvexný útvar má všetky vnútorné uhly menšie ako $180°$.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Aňa)



Cieľom úlohy bolo z rovnakých rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov (RRPT) skladať konvexné n-uholníky pre $n \geq 4$. Na obrázkoch vidíte po rade nakreslený konvexný štvor-, päť-, šesť-, sedem- a osemuholník. Vyvstáva teda otázka, ci vieme ešte nejaký iný n-uholník poskladať.

Túto otázku budeme riešiť pomocou uhlov n-uholníka. Súčet vnútorných uhlov ľubovoľného n-uholníka je $(n-2) \cdot 180°$. Dôkaz tohto tvrdenia je celkom zaujímavý, preto ak ste sa s ním ešte nestretli, skúste si to. Aké uhly môže mať náš n-uholník? Rovnoramenný trojuholník má uhly veľkosti 45, 45 a 90 stupňov. Náš n-uholník je vytvorený z takýchto rovnoramenných trojuholníkov. Čiže pre uhol vo vrchole n-uholníka platí, že je tvorený vnútornými uhlami RRPT, preto veľkost každého vnútorného uhla n-uholníka je daná súčtom niekoľkých 45 a 90 stupňových uhlov. Keďže n-uholník musí byť konvexný, jeho vnútorné uhly môžu mať len velkosť 45, 90 a 135 stupňov. Čiže súčet uhlov v n-uholníku, zloženom z RRPT, môže byť maximálne (pri použití všade maximálneho uhla) $n \cdot 135°$. Skutočný súčet vnútorných uhlov nemôže prevýšiť maximálny možný súčet, a teda musí platiť

$$135 \cdot n \geq 180 \cdot (n-2)\,.$$

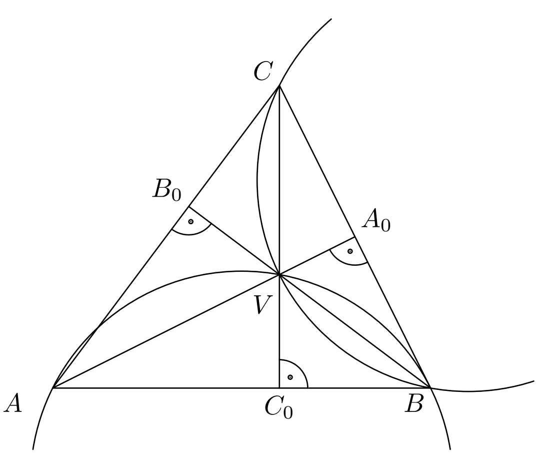
Upravíme nerovnicu a získame $n \leq 8$. Takže vidíme, že poskladať nedokážeme n-uholníky pre $n \geq 9$.

<u>Komentár:</u> Úloha bola vcelku ľahká, väčšine nerobila problémy. Ale práve na takejto ľahkej úlohe sa odrazilo, že zdôvodňovanie vám ešte robí problémy (aj pre vás zrejmých vecí). Častým nedostatkom bola implikácia: Keď rastie n, zvyšuje sa aj súčet vnútorných uhlov n-uholníka, a z toho vyplýva, že rastie aj uhol v pravidelnom n-uholníku. Ak by bol vzorec pre výpočet súčtu uhlov n-uholníka trochu iný, tak to vôbec nemusí platiť. Niektorí sa pokúšali dokazovať, že trojuholníky musíme prikladať preponami k preponám a odvesnami k odvesnám, čo väčšinou viedlo k neúspechu.

<u>Úloha č. 5:</u> *Nech V je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, ACV a BCV majú rovnaký polomer.*

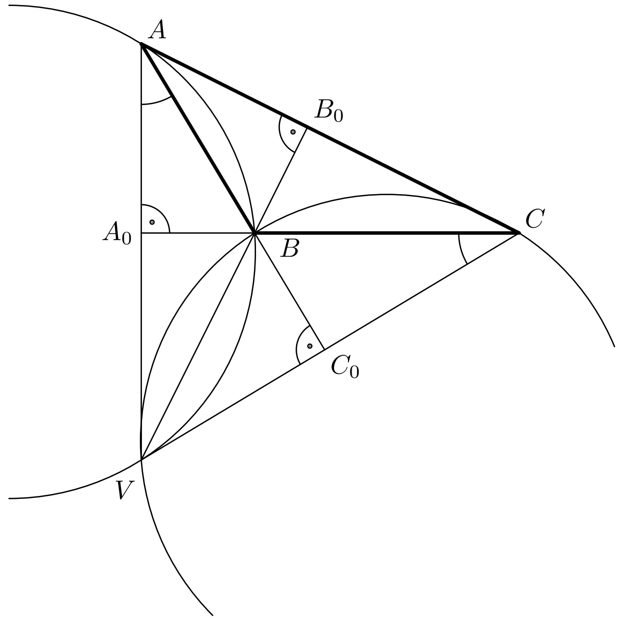
<u>Riešenie:</u> (opravovali Janči a Pišta)

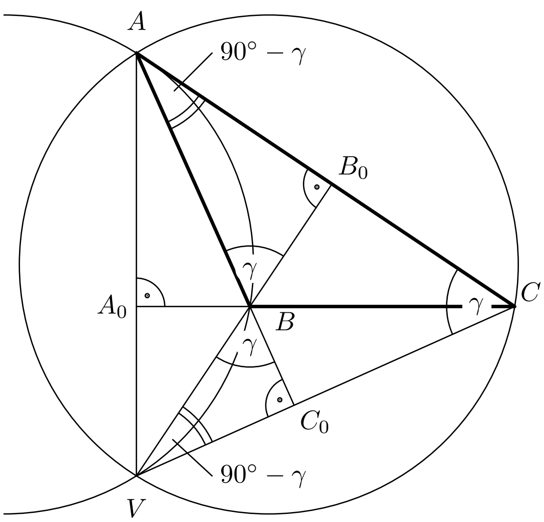
V zadaní sme mali ortocentrum trojuholníka. Poloha ortocentra mala vplyv na vaše úvahy, preto bolo treba uvažovať 3 prípady: ostrouhlý, pravouhlý a tupouhlý trojuholník. Riešenie začnem s najjednoduchším prípadom, a to s pravouhlým trojuholníkom. Takže nech trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Zrejme ortocentrum V splýva s vrcholom A. Nakreslite si to! V tomto prípade zrejme nemá zmysel uvažovať kružnicu opísanú trojuholníku ABV resp. ACV. To znamená, že keď trojuholník je pravouhlý, zadanie stráca zmysel.



Majme teraz ostrouhlý trojuholník ABC. Označme si A_0, B_0, C_0 päty výšok z bodov A, B, C v tomto poradí. Uhly AC_0V a VA_0C sú pravé, hádajte prečo. Uhly AVC_0 a CVA_0 sú vrcholové, preto majú rovnakú veľkosť. Teda trojuholníky AC_0V a CA_0V sú podobné, lebo majú uhly rovnakej veľkosti. Potom aj uhly VCA_0 a VAC_0 sú rovnakej veľkosti, ktorú si označíme ako α. Ak si nakreslíme opísané kružnice trojuholníkom ABV a BCV, tak si môžeme všimnúť, že tieto kružnice majú spoločnú tetivu BV. Túto tetivu vidíme z bodu A pod uhlom α, a z bodu C taktiež pod uhlom α. Toto dokazuje, že tieto dve kružnice majú rovnaký polomer, stačí si spomenúť na vlastnosť bodov, z ktorých vidíme danú úsečku pod rovnakým uhlom. Analogicky dokážeme, že kružnice opísané trojuholníkom ABV a ACV majú rovnaké polomery, stačí si vziať podobnosť trojuholníkov CB_0V a BC_0V, potom úvahy zopakujeme. Takto dostaneme, že všetky tri opísané kružnice majú rovnaký polomer. Teda ostrouhlý trojuholník je hotový.

Poďme teraz na ten prípad, ktorý ste väčšinou neuvažovali. Čo sa stane, keď máme tupohlý trojuholník? Aj v tomto prípade si označíme päty výšok ako A_0, B_0, C_0. Teraz môžeme uvažovať trojuholníky AA_0B a CC_0B. Uhly AA_0B a CC_0B sú pravé. Uhly A_0BA a C_0BC sú vrcholové. Teda trojuholníky AA_0B a CC_0B sú podobné. Potom sa rovnajú aj uhly C_0CB a A_0AB. Teraz si opíšeme kružnice trojuholníkom ABV a BCV. Aj teraz je BV spoločná tetiva týchto kružníc. Túto tetivu vidíme pod rovnakým uhlom z bodov A a C. Preto aj teraz sa rovnajú polomery týchto kružníc. V ďalších úvahách tento trik musíme použiť inak. Napr. chceme porovnať polomery opísaných kružníc trojuholníkov ABV a ACV. Spoločná tetiva týchto kružníc je AV. Priamka AV delí rovinu na dve polroviny.



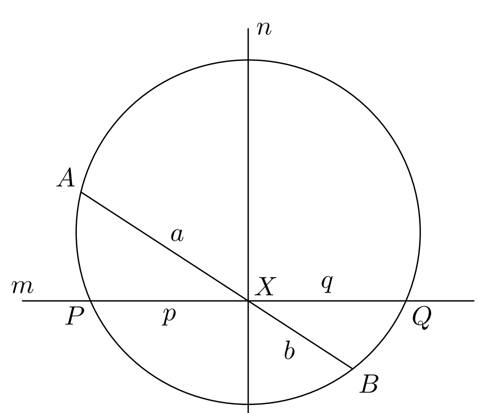


Body B a C ležia v tej istej polrovine, preto musíme ukázať, že ak úsečku AV vidíme z bodu C pod uhlom γ, tak z bodu B pod uhlom $180° - \gamma$. Nech teda uhol ACV má veľkosť γ. Trojuholník CB_0V je pravouhlý s pravým uhlom pri B_0, preto uhol B_0VC má veľkosť $90° - \gamma$. Pozrime sa teraz na trojuholník BC_0V. Uhol pri C_0 je pravý, pri V je uhol veľkosti $90° - \gamma$, preto uhol pri B je veľkosti γ. Uhol ABC_0 je priamy, preto uhol ABV je $180° - \gamma$. A toto sme chceli ukázať, lebo to nám už dokazuje, že kružnice opísané trojuholníkom ABV a ACV majú rovnaký polomer. A už predtým sme ukázali, že tento polomer má aj kružnica opísaná trojuholníku BCV.

Tým je príklad vyriešený. Je to koniec? Nie, ešte sa s ním dá hrať. Ukázali sme, že tieto tri kružnice majú rovnaký polomer. Akú má tento polomer veľkosť? Skúste ho porovnať s veľkosťami polomerov iných kružníc, ktoré sa zvyknú vyskytovať v súvislosti s trojuholníkom ABC – vpísanej, opísanej, pripísaných…

Úloha č. 6: *Nech A, B sú body v rôznych polrovinách určených priamkou m. Nájdite kružnicu k, ktorá prechádza bodmi A, B a na priamke m vytína úsek PQ minimálnej dĺžky (PQ je tetiva k).*

Riešenie: (opravoval Kubo)



Priesečník úsečky AB s priamkou M označme X. Uvažujme ľubovoľnú kružnicu prechádzajúcu bodmi A, B. Označme $|AX| = a$, $|BX| = b$, $|PX| = p$, $|QX| = q$, os úsečky $AB = o$, kolmicu na priamku m v bode X označme n. Uvažujme $A, B \notin m$, potom bod X je vnútorným bodom tetivy AB, teda je aj vnútorným bodom kružnice k. Preto čísla a, b, p, q sú kladné. Z mocnosti bodu X ku kružnici k vieme, že $ab = pq$. Hľadáme minimum súčtu $p+q$. Pritom vieme, že hodnota súčinu pq je konštantná. Predstavme si, že dĺžky našich úsečiek uvádzame v centimetroch; potom $p+q$ má rozmer (jednotku) cm, kým pq je vlastne vyjadrením nejakej plochy a má rozmer cm^2. Toto je ťažko dať dokopy, preto budeme radšej hľadať minimum výrazu $(p+q)^2$, ktorý má tiež rozmer cm^2 (uvážte si, že tým nič nestratíme). Zrejme $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$, teda hľadáme minimum výrazu p^2+q^2. Ako všetci vieme, štvorec je nezáporný, preto $(p-q)^2 \geq 0$. Umocníme, ekvivalentne upravíme a dostaneme $p^2+q^2 \geq 2pq$. Vieme, že $2pq$ je konštanta (nezávisí od voľby kružnice k). Zaujíma nás poloha kružnice, pre ktorú sa nadobúda minimum, teda chceme vedieť, kedy nastáva v použitej nerovnosti rovnosť. To je jednoduché, jedine pre $p=q$. Vtedy $p+q=2p=2\sqrt{ab}$.

Preto os PQ, na ktorej musí ležať bod S, prechádza bodom X, teda je to priamka n. Stred S kružnice k dostaneme ako prienik n a o. Už stačí iba dokázať, že vždy existuje stred S taký, že $p+q=2\sqrt{ab}$, teda že o a n majú neprázdny prienik. Spravíme to sporom. Ak priamky o a n sú rovnobežné, tak $AB \parallel m$, čo je spor s tým, že A, B neležia na m a že A, B ležia v rôznych polrovinách.

Komentár: Väčšina z vás zabudla dokázať existenciu bodu S takého, že $\frac{p+q}{2} = \sqrt{a \cdot b}$ (-1 bod). Nikoho z vás nenapadlo uvažovať s $A \in m$ alebo $B \in m$, pričom aj takéto body ležia v rôznych polrovinách (zároveň aj v rovnakých)!

Úloha č. 7: *Dokážte, že všetky tri strany ľubovoľného nerovnoramenného trojuholníka môžeme zväčšiť (zmenšiť) o rovnakú hodnotu tak, že dostaneme pravouhlý trojuholník.*

Riešenie: (opravovali Janka a Miki)

Trojuholník nie je rovnoramenný, preto bez ujmy na všeobecnosti $0<a<b<c$ a navyše musí platiť trojuholníková nerovnosť $a+b>c$ (ostatné platia z prvej podmienky).

Povedzme, že zmenený trojuholník bude mať strany $a+x$, $b+x$, $c+x$ (pre nejaké $x \in R$, ak bolo x kladné, tak sme strany zväčšili, ak záporné, tak zmenšili). Je jasné, že aj $a+x<b+x<c+x$. Aby sme dokázali tvrdenie zo zadania, potrebujeme, aby

(1) $a+x$, $b+x$, $c+x$ boli dĺžky strán (teda boli kladné)

(2) $a+x$, $b+x$, $c+x$ mohli tvoriť trojuholník (musí platiť trojuholníková nerovnosť)

(3) bol ten trojuholník pravouhlý (platila Pytagorova veta)

Keďže z (1) a (2) dostaneme iba nerovnosti, x vypočítame z Pytagorovej vety :

$$\begin{aligned} (a+x)^2+(b+x)^2 &= (c+x)^2 \\ a^2+2ax+x^2+b^2+2bx+x^2 &= c^2+2cx+x^2 \\ x^2+2(a+b-c)x+(a^2+b^2-c^2) &= 0 \end{aligned}$$

Vyšla nám kvadratická rovnica, dokážeme, že bude mať vždy riešenie (teda diskriminant bude nezáporný).

$$\begin{aligned} D &= [2(a+b-c)]^2-4(a^2+b^2-c^2) = \\ &= 4(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac-a^2-b^2+c^2) = \\ &= 4(2c^2-2bc+2ab-2ac) = 8(c-b)(c-a) \end{aligned}$$

To je vďaka našej prvej podmienke vždy kladné číslo a rovnica má 2 riešenia.

$$x_{1,2} = \frac{2c-2a-2b \pm \sqrt{8(c-a)(c-b)}}{2} = c-a-b \pm \sqrt{2(c-a)(c-b)}$$

Teraz ukážeme, že pre $x=c-a-b+\sqrt{2(c-a)(c-b)}$ platí (1). $c+x>b+x>a+x = a+c-a-b+\sqrt{2(c-a)(c-b)} = (c-b)+\sqrt{2(c-a)(c-b)}>0$, sedí. Platí aj podmienka (2):

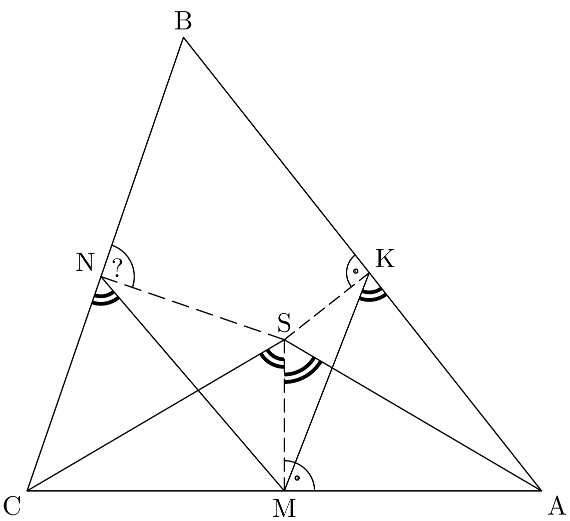
$c+x$ je najväčšia strana, teda trojuhoníková nerovnosť platí, ak $a+x+b+x>c+x$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(c-a)(c-b)} &> 0 \\
2\sqrt{2(c-a)(c-b)} &> \sqrt{2(c-a)(c-b)} \\
2(c-a-b)+2\sqrt{2(c-a)(c-b)} &> (c-a-b)+(c-a-b)+\sqrt{2(c-a)(c-b)} \\
x+x &> c-a-b+x \\
a+x+b+x &> c+x
\end{aligned}$$

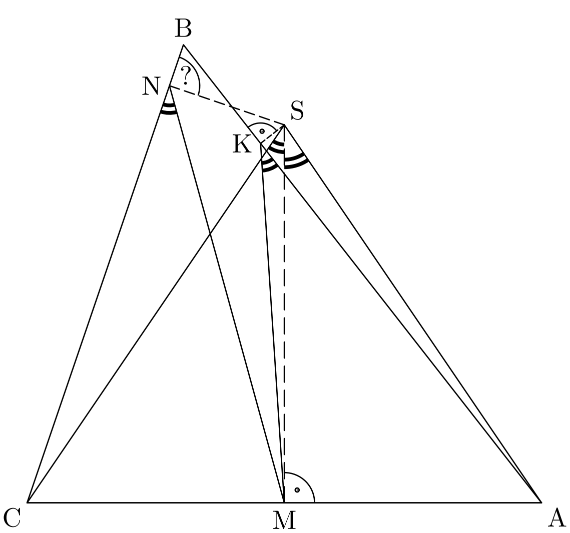
A to je to, čo sme chceli. Druhý koreň sme neoverovali, lebo na dôkaz tvrdenia nám stačí nájsť jednu hodnotu x. Aj tak nesedí. `:-)`

Úloha č. 8: *V trojuholníku ABC označme M stred strany AC. Na stranách AB a BC zvoľme postupne body K a N. Dokážte, že ak $|\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle MNB|$, tak kolmice na strany AB, BC a AC postupne v bodoch K, N a M sa pretnú v jednom bode. Zistite, či platí aj opačná implikácia.*

Riešenie: (opravovali Foto a Miťo)



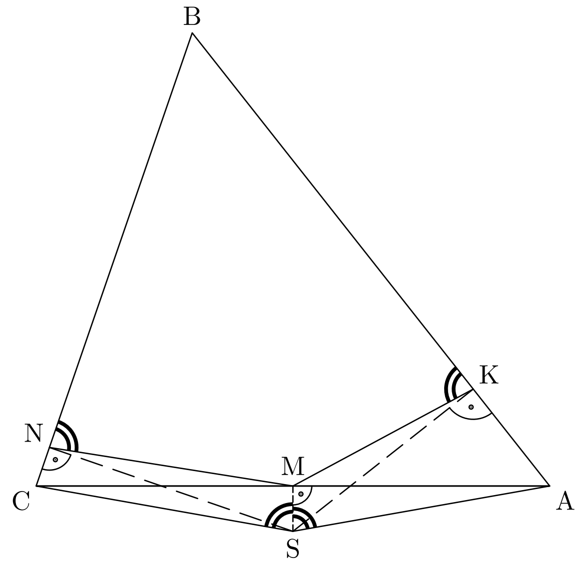
Prvú implikáciu najprv riešme pre prípad, že priesečník kolmíc z bodov M a K, ktorý označíme S, leží nad priamkou AC, teda v rovnakej polrovine ako bod B a bez ujmy na všeobecnosti $|BC| \geq |AC|$. Táto situácia zahŕňa prípady, keď S leží vnútri trojuholníka ABC (pozri obr. 8.1), na úsečke BC (bez obrázku) alebo mimo trojuholníka (obr. 8.2). Zaoberajme sa najprv prvým z nich. Pre dané body K, M, S dokážeme, že spojnica bodov N a S je kolmá na priamku BC, čiže bod S bude priesečníkom všetkých troch kolmíc. Označme $|\sphericalangle AKM| = \alpha$. Štvoruholník $AKSM$ je tetivový, pretože súčet protiľahlých uhlov je 180°. Pre obvodové uhly nad jeho tetivou AM potom platí, že $|\sphericalangle AKM| = |\sphericalangle ASM| = \alpha$. Trojuholníky ASM a CMS sú zhodné (rozmyslite si prečo) a teda platí $|\sphericalangle MSC| = \alpha$. Keď k tomu pridáme rovnosť zo zadania $|\sphericalangle MNC| = \alpha$, zistíme, že aj štvoruholník $MSNC$ je tetivový (opäť si rozmyslite prečo). V tetivových štvoruholníkoch platí, že súčet protiľahlých uhlov je 180° a keďže uhol CMS je pravý, je aj uhol SNC pravý. Tým sme s touto časťou hotoví.



V prípade, že bod S leží na strane AB a teda body K a S splynú, označme ich S, budeme postupovať podobne. Z predchádzajúceho vieme, že trojuholníky AMS a CMS sú zhodné a $|\sphericalangle SAM| = |\sphericalangle MCS| = 90° - \alpha$. Využitím obvodových uhlov nad tetivou BC získavame hľadané. (Samozrejme treba najprv ukázať, že štvoruholník $MSNC$ je skutočne tetivový.)

Porozmýšľajme teraz nad tým, ako sa postup zmení, ak bude bod S ležať za úsečkou BC, teda mimo trojuholníka. Prvý z tetivových štvoruholníkov zmení názvoslovie na $ASKM$ a dôvod, prečo tetivový naozaj je, je opäť ten, že AMS a AKS sú pravé uhly nad rovnakým priemerom. Ďalej argumentácia postupuje analogicky ako v prvom prípade. Teraz sa presuňme s našim bodom S na úsečku AC. (Bez obrázku.) Tento prípad si podrobne rozoberte sami.

A teraz sa konečne dostávame k poslednej časti prvej implikácie. Bod S leží mimo trojuholníka ABC a v opačnej polrovine určenej priamkou AC ako bod B (obr. 8.3). Bod S je opäť priesečník kolmíc z bodov M a K a ideme dokazovať, že spojnica bodov N a S je kolmá na BC. Overenie faktu, že štvoruholník A**KMS** je opäť tetivový, nechávame na teraz už skúseného čitateľa. Opäť ak $|\sphericalangle AKM| = \alpha$, tak $|\sphericalangle ASM| = 180° - \alpha = |\sphericalangle CSM|$. Zo zadania aj $|\sphericalangle CNM| = \alpha$ a preto je štvoruholník $MSCN$ tetivový. Keďže CNS a CMS sú obvodové uhly nad rovnakou tetivou, rovnajú sa, čím získavame hľadané.



Nakoniec si skúste premyslieť podmienky určujúce, či bude bod S ležať vnútri trojuholníka ABC alebo mimo neho. Na jednej strane to bude súvisieť s veľkosťou uhla MKB, na druhej s osou strany CA.

Poznámka: Všimnime si, že po celý čas sme mlčky predpokladali, že body K a N ležia vnútri strán trojuholníka. Zamyslite sa nad tým, ako bude situácia vyzerať, ak niektorý z týchto bodov (prípadne oba) bude ležať vo vrchole trojuholníka ABC.

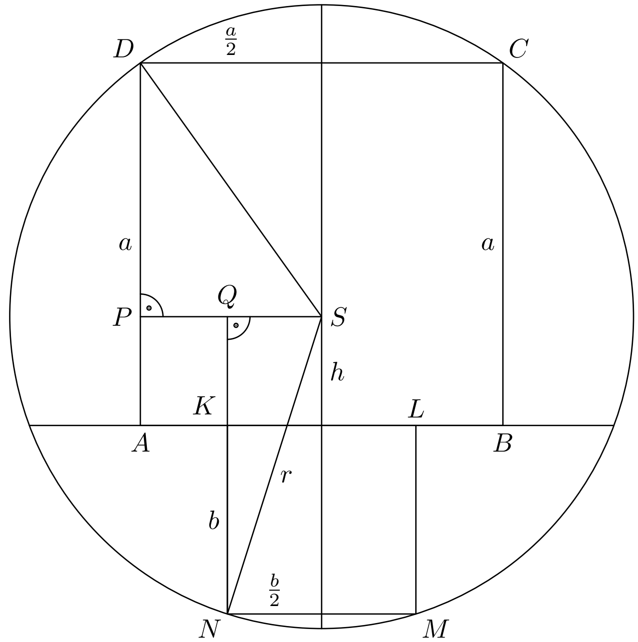
Poďme teraz zisťovať, či platí aj obrátená implikácia. (*Po chvíli.*) Teraz, keď už vieme, že platí, poďme to dokázať :) Dokážeme ju len pre prípad, keď bod S (tentokrát je to priesečník všetkých troch kolmíc) leží vo vnútri trojuholníka ABC. Ostatné prípady, i keď ich treba rozobrať samostatne, podobne ako v prvej implikácii, nechávame na čitateľa. Všimnime si staré známe tetivové štvoruholníky $AKSM$ a $SMCN$. (Čitateľovi vrelo odporúčame kresliť si vlastný obrázok.) Nech $|\sphericalangle AKM| = \alpha$. Všimnime si, že kružnice opísané spomenutým štvoruholníkom sú zhodné. (Rozmyslite si.) Priamo z poznatku, že AKM a CNM sú obvodové uhly nad tetivami rovnakej dĺžky zhodných kružníc, získavame hľadané.

Komentár: Pri riešení geometrických úloh je veľmi dôležité dbať na to, aby sme ju vyriešili všeobecne. Toto úspešne nespravil vôbec nikto, najbližšie bol *Maťo Adamčík*. Najväčšia chyba je to, že si nakreslíte iba jeden obrázok a z toho potom úlohu riešite. Vôbec sa nezamýšlate nad tým, či by situácia mohla vyzerať aj inak. No koho to mohlo napadnúť, že bod S môže ležať aj inde ako vnútri trojuholníka? Asi každého, kto si nakreslil aspoň tri rôzne obrázky. A to, že ak je bod S mimo trojuholníka, tak situácia vyzerá trochu inak, sa stáva často.
Tiež je nevhodné používať pre dve opačné implikácie jeden obrázok. Pravdupovediac je to hrozné. Totiž ťažko sa predstavuje, že treba dokázať to, čo už je nakreslené. Pletie to a vedie k tzv. dôkazu kruhom.

Úloha č. 9: *Stred tetivy t kružnice k má vzdialenosť h od stredu kružnice k. Do každého kruhového odseku určeného tetivou t je vpísaný štvorec, ktorého dva susedné vrcholy ležia na kružnici k a zvyšné dva vrcholy ležia na tetive t. Zistite veľkosť rozdielu strán týchto štvorcov.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Peťo G.)

Nakreslite si obrázok, ktorý vystihuje situáciu opísanú v zadaní. Po krátkej úvahe nám môže byť jasné (zamyslite sa nad tým prečo), že existuje len jeden spôsob umiestnenia vpísaných štvorcov – označíme si ich $ABCD$ a $KLMN$. Zo zadania vyplýva, že štvorce sa dajú zostrojiť a preto sa budeme zaoberať iba týmto prípadom. Štvorce sú teda jednoznačne určené veľkosťami r a h. Je zrejmé, že oba štvorce sú osovo súmerné podľa priemeru kružnice k kolmého na našu tetivu. Keďže chceme vypočítať rozdiel $a - b$ v závislosti od dĺžky h a polomeru r kružnice k, potrebujeme získať nejaké vzťahy medzi týmito veličinami. Po chvíľke hrania sa s obrázkom si môžeme všimnúť pravouhlé trojuholníky DPS a QNS (pozri obrázok 9.1). Body P, Q sme konštruovali ako päty príslušných kolmíc. Preto pre tieto trojuholníky platí Pytagorova veta.



$$\begin{aligned} \triangle DPS: \quad r^2 &= (a-h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \triangle QNS: \quad r^2 &= (b+h)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

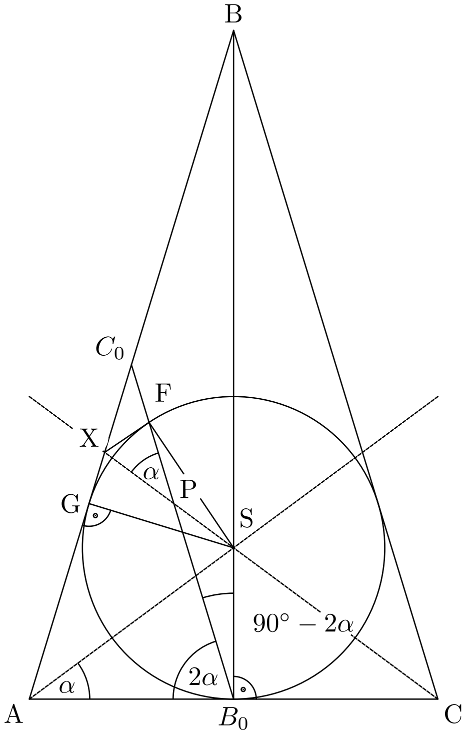
Keď dáme pravé strany do rovnosti, dostávame

$$\begin{aligned} (a-h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= (b+h)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ a^2 - 2ah + h^2 + \frac{a^2}{4} &= b^2 + 2bh + h^2 + \frac{b^2}{4} \\ \frac{5}{4}(a^2 - b^2) &= 2h(a+b) \\ a - b &= \frac{8}{5}h \end{aligned}$$

Komentár: Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, tento bol však jeden z najjednoduchších. Prípady, keď sa štvorce nedali zostrojiť, nebolo potrebné rozoberať, nakoľko zadanie predpokladalo, že sa zostrojiť dajú.

Úloha č. 10: *V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) stredná priečka rovnobežná so stranou BC pretne vpísanú kružnicu trojuholnika ABC v bode F, ktorý neleží na základni AC. Dokážte, že dotyčnica ku vpísanej kružnici v bode F pretne os uhla ACB na strane AB.*

Riešenie: (opravoval Čermo)



Zjavne existuje viacero rôznych spôsobov, ako dané tvrdenie dokázať.

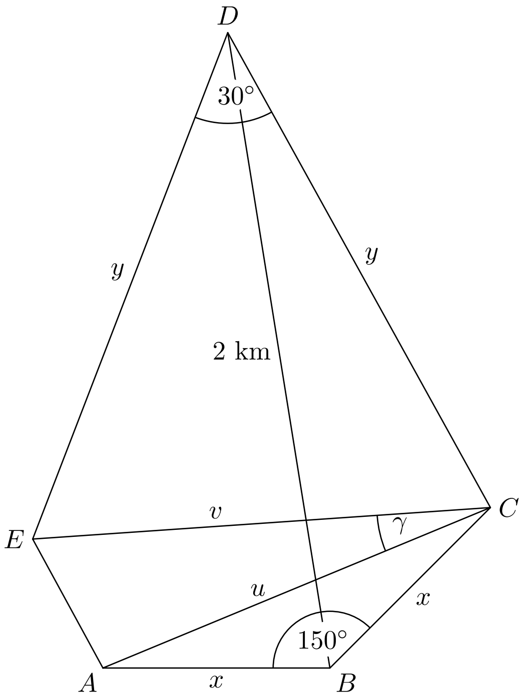
V našom prípade si úlohu pretransformujeme na zisťovanie, či je úsečka FX dotyčnicou ku kružnici k vpísanej trojuholníku ABC. Všimnime si na obrázku trojuholník SGX a trojuholník SFX, tie majú spoločnú jednu stranu SX a pretože SG aj SF sú polomery kružnice k, platí $|SG| = |SF|$. Pritom o strane GX vieme, že je dotyčnicou ku k. Ak sa nám podarí dokázať podobnosť (teda aj zhodnosť) týchto trojuholníkov, bude platiť: $|\sphericalangle SFX| = |\sphericalangle SGX| = 90°$, teda že $|SF|$ je skutočne dotyčnicou ku k. Pozrime sa na veľkosti uhlov GSX a FSX, ktoré si vieme pomerne jednoducho vyjadriť. Pre jednoduchosť si označme $\alpha = |\sphericalangle SAB_0|$.

Pretože B_0C_0 je strednou priečkou v trojuholníku ABC, je $|\sphericalangle AB_0C_0| = 2\alpha$. V rovnoramennom trojuholníku ABC je os uhla na základňu AC totožná s výškou, teda $|\sphericalangle SB_0C_0| = 90° - 2\alpha$. V trojuholníku FSB_0 sú obe ramená polomermi kružnice k, takže $|\sphericalangle FB_0S| = |\sphericalangle B_0FS|$. Uhol FPS je susedný k uhlu B_0PS a ten je vrcholový k uhlu SCB. Veľkosť uhla SCB je α, lebo CS je osou uhla ACB a ten má veľkosť 2α. Preto $|\sphericalangle FPS| = 180° - \alpha$. Konečne $|\sphericalangle FSX| = 180° - |\sphericalangle PFS| - |\sphericalangle FPS| = 180° - (90° - 2\alpha + 180° - \alpha) = 3\alpha - 90°$.

Zjavne trojuholníky AGS, AB_0S a CB_0S sú zhodné (platí pre rovnoramenný trojuholník), takže $|\sphericalangle GSA| = |\sphericalangle B_0SA| = |\sphericalangle B_0SC| = 90° - \alpha$. Následne $|\sphericalangle GSX|$ je doplnkom týchto troch do priameho uhla, preto $|\sphericalangle GSX| = 180° - 3(90° - \alpha) = 3\alpha - 90°$.

Platí, že $|\sphericalangle GSX| = |\sphericalangle FSX|$, teda X je skutočne priesečníkom všetkých troch spomínaných úsečiek. No a teraz by sme si už mohli vydýchnuť a hodiť riešenie do obálky, ale v skutočnosti musíme byť ostražití. Situácia nemusí vždy vyzerať ako na obrázku! Pri $\alpha < 30°$ je poradie bodov C_0 a X na strane AB opačné. Skúste si premyslieť, či aj v tomto prípade môžeme použiť úplne analogický postup. Vo všeobecnosti to nemusí platiť, preto je nutné sa o tom zmieniť.

Úloha č. 11: *V rovine je daný konvexný päťuholník $ABCDE$, pre ktorý platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|\sphericalangle ABC| = 150°$, $|\sphericalangle CDE| = 30°$ a $|BD| = 2$ km. Zistite obsah päťuholníka $ABCDE$.*



Riešenie: (opravovala Katka)
Označme $|AB| = x$, $|CD| = y$, $|AC| = u$, $|EC| = v$ a $\gamma = |\sphericalangle ACE|$. Obsah päťuholníka vypočítame ako súčet obsahov trojuholníkov ABC, ACE a ECD (to platí vďaka konvexnosti nášho päťuholníka). Keďže oba trojuholníky ABC aj ECD sú rovnoramenné, máme $|\sphericalangle BCD| = 90° + \gamma$. V trojuholníkoch ABC, ECD a BCD použitím kosínusovej vety (vďaka tomu, že $|\sphericalangle BCD| < 180°$) dostaneme:

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x^2(1-\cos 150°) = x^2(2+\sqrt{3}) \\ v^2 &= 2y^2(1-\cos 30°) = y^2(2-\sqrt{3}) \\ 4km^2 &= x^2+y^2-2xy\cos(90°+\gamma) = x^2+y^2+2xy\sin\gamma \end{aligned}$$

Z tretej rovnice si vyjadríme $\sin\gamma$ a tieto tri vzťahy využijeme pri počítaní obsahu päťuholníka $ABCDE$ nasledovne:

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle ECD} \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin 150° + \frac{1}{2}y^2\sin 30° + \frac{1}{2}uv\sin\gamma \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}(4-x^2-y^2)}{4xy} \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{(4-x^2-y^2)}{4} \\ &= 1km^2 \end{aligned}$$

Poznámka: Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, k pekným riešeniam patrilo aj preklápanie častí päťuholníka, čím ste dostali rovnoramenný trojuholník, pravouhlý lichobežník alebo deltoid, ktorého obsah sa dal spočítať priamočiaro.

Úloha č. 12: *Dokážte, že pre každé prvočíslo $p > 3$ platí*

$$p^3 \,\Big|\, \binom{2p-1}{p-1} - 1\,.$$

Riešenie: (opravoval Mazo)
(podľa *Jara Knebla* a *Tomáša Váňu*)
Zrejme

$$\binom{2p-1}{p-1} - 1 = \frac{(2p-1)!}{p!\,(p-1)!} - 1 = \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)-(p-1)!}{(p-1)!}\,.$$

Keďže čísla p^3 a $(p-1)!$ sú nesúdeliteľné, stačí ukázať, že

$$p^3 \,\Big|\, (2p-1)\cdots(p+1)-(p-1)!\,.$$

Ukázať deliteľnosť číslom p^3 nie je jednoduché, napríklad nevieme rozumne využiť, že vieme zvyšok po delení p, lebo o zvyšku po delení číslom p^3 to veľa nehovorí. Lepšie by sa ukazovalo, že čosi je deliteľné p. Skúsme teda najprv vyriešiť ľahší problém. Preskúmajme zvyšok čísla $V = (2p-1)\cdots(p+1)$ po delení nižšími mocninami p (než budete čítať ďalej, skúste si to sami). Zrejme

$$V = (2p-1)\cdots(p+1) = (p+p-1)(p+p-2)\cdots(p+1) \equiv (p-1)(p-2)\cdots 1 = (p-1)! \pmod p .$$

Čo s p^2? V predošlom prípade sme využili, že sa vieme zbaviť jedného p zo zátvoriek. Ale p^2 už takto priamo neobabreme. Skúsme si preto v zátvorkách nejaké p^2 vytvoriť.

$$\begin{aligned} V &= (2p-1)(2p-2)\cdots(p+2)(p+1) \\ &= (2p-1)(p+1)\cdot(2p-2)(p+2)\cdots\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right) \\ &= (2p^2+p-1)(2p^2+2p-4)(2p^2+3p-6)\cdots\left(2p^2+p\cdot\frac{p-1}{2}-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right) \\ &\equiv 1(p-1)\cdot 2(p-2)\cdots\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\right) = (p-1)! \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Šikovné manipulácie a vhodné roznásobovania teda pomáhajú. Navyše si môžeme všimnúť, že výraz V má podobnú štruktúru a rovnako veľa členov ako $(p-1)!$. Ak výraz $T = V - (p-1)!$ úplne poroznásobujeme a upravíme, skoro všetky členy budú obsahovať p s exponentom aspoň 3, preto nás nebudú zaujímať, podstatný je ten zvyšok. Označme

$$S_2 = \sum_{1\le i<j\le p-1} \frac{(p-1)!}{ij}, \quad S_1 = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i} .$$

$$\begin{aligned} T &= (p+p-1)(p+p-2)\cdots(p+2)(p+1) - (p-(p-1))\,(p-(p-2))\cdots(p-2)(p-1) = \\ &= \left(p^{p-1}+\cdots+S_2p^2+S_1p+(p-1)!\right) - \\ &\quad \left(p^{p-1}+\cdots+(-1)^{p-3}S_2p^2+(-1)^{p-2}S_1p+(-1)^{p-1}(p-1)!\right) \\ &\equiv 2S_1p \pmod{p^3} \end{aligned}$$

Z predpokladu $p > 3$ vyplýva, že p je nepárne a spomenuté členy existujú. Stačí nám ukázať, že $p^2 \mid 2S_1$, úspešne sme znížili exponent p o 1. Čo ďalej? Pomôže nám trik podobný ako v riešení pre p^2, popárujeme členy prvý s posledným, druhý s predposledným a tak ďalej:

$$2S_1 = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} = 2\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{(p-1)!}{i}+\frac{(p-1)!}{p-i}\right) = 2\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(p-1)!\frac{p}{i(p-i)} = p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i(p-i)}$$

Uvážte si, že každý člen sumy je celé číslo. Stačí nám teda ukázať, že posledná suma je deliteľná číslom p. Aké zvyšky môžu nadobúdať členy sumy? Bolo by dobré sa zbaviť tých čísel v menovateli. Nech $\frac{(p-1)!}{i(p-i)} \equiv a_i \pmod p$. Keďže $1 \le i \le p-1$, sú i a p nesúdeliteľné. Preto táto kongruencia je ekvivalentná s $(p-1)! \equiv i(p-i)a_i \pmod p$. Wilsonova veta hovorí, že pre prvočíslo p platí $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, takže po drobnej úprave dostaneme $i^2a_i \equiv 1 \pmod p$ $(*)$.

Toto je lineárna kongruencia, skúsme si niečo o takýchto kongruenciách zistiť. Kongruencia $ax \equiv 1 \pmod p$ má pre pevné $a \in \{1,2,\dots,p-1\}$ práve jedno riešenie, lebo čísla $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ dávajú rôzne zvyšky po delení p (ak by dávali nejaké dve z nich rovnaký zvyšok, tak ich rozdiel je deliteľný p a z toho už dostaneme spor). Týchto čísel je $p-1$ a každý zvyšok z $\{1,2,\dots,p-1\}$ nadobudne práve jedno z nich.

Preto existuje pre pevné i práve jedno také $b_i \in \{1, \dots, p-1\}$, že $ib_i \equiv 1 \pmod p$. Takisto existuje práve jedno a_i také, že $i^2 a_i \equiv 1 \pmod p$. Toto a_i musí byť rovné b_i^2, lebo $i^2 b_i^2 = (ib_i)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod p$ a teda b_i je riešením $(*)$. Pre $i = 1, 2, \dots, p-1$ nadobúda b_i každú z hodnôt $1, 2, \dots, p-1$ práve raz, teda $a_i \equiv b_i^2$ nadobúda hodnoty $1^2, 2^2, \dots, (p-1)^2$, opäť každú práve raz. Preto

$$U = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i(p-i)} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} a_i \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}\,.$$

Keďže $p \neq 3$, je U deliteľné číslom p a to sme chceli.

<u>**Úloha č. 13:**</u> *Nech $x \neq y$ sú reálne čísla také, že pre štyri po sebe idúce prirodzené čísla n je výraz $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ celé číslo. Ukážte, že potom je tento výraz celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Peťo N.)

(čiastočne podľa *Tomáša Váňu*)

Nech výraz zo zadania je celé číslo pre $n = m, m+1, m+2, m+3$, kde m je nejaké prirodzené číslo. Pre lepšiu manipuláciu si jednotlivé výrazy označme

$$A = \frac{x^m - y^m}{x - y}\,, \quad B = \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y}\,, \quad C = \frac{x^{m+2} - y^{m+2}}{x - y}\,, \quad D = \frac{x^{m+3} - y^{m+3}}{x - y}\,.$$

Skúšajme sa s celými číslami A, B, C, D hrať. Kombinujme ich, či nám nevyjde nejaký vhodný výraz. Pritom v menovateli každého výrazu je v exponentoch iné číslo. Aby sme mali šancu pri odčítaní nejaké členy zrušiť (chceme čo najjednoduchší výsledok), musia byť v odčitovaných výrazoch exponenty rovnaké. To dosiahneme napríklad pri odčítaní AC od B^2. Skutočne, po úprave dostaneme

$$B^2 - AC = (xy)^m\,.$$

Keďže A, B, C sú celé čísla, je celé aj $(xy)^m$. Podobne dostaneme

$$C^2 - BD = (xy)^{m+1}\,, \qquad BC - AD = (x+y)(xy)^m\,,$$

takže aj výrazy $(xy)^{m+1}$ a $(x+y)(xy)^m$ sú celé čísla. Označme $xy = p$. Keďže p^{m+1} aj p^m sú celé čísla, nutne ich podiel p je racionálne číslo. Pomerne jednoducho možno odvodiť tvrdenie, že ak je nejaká mocnina racionálneho čísla celým číslom, potom je toto racionálne číslo tiež celé – skúste si to (stačí nám na to vedieť, že ak sú dve čísla nesúdeliteľné, tak sú nesúdeliteľné aj ich mocniny). Na základe toho je p celé číslo.

Označme ešte $x + y = q$. Pri tomto označení sa dá všimnúť, že $C = qB - pA$ a $D = qC - pB$. Platí to aj všeobecnejšie. Ak označíme $V_n = (x^n - y^n)/(x - y)$, tak

$$V_{n+2} = qV_{n+1} - pV_n\,. \tag{1}$$

Naviac $V_1 = 1$ a $V_2 = q$. Na celočíselnosť všetkých V_n (to chceme dokázať) teda stačí celočíselnosť čísel p a q (stačí použiť indukciu a (1)). Zatiaľ máme iba celočíselnosť p. Číslo q je podielom celých čísel $(x+y)(xy)^m$ a $(xy)^m$, je teda racionálne. Potrebujeme už iba dokázať, že je celé. Pomôže nám vyjadrenie (1). Použijúc ho pre malé n máme

$$\begin{aligned}
V_3 &= q \cdot q - p \cdot 1 = q^2 - p\,,\\
V_4 &= q(q^2 - p) - p \cdot q = q^3 - 2pq\,,\\
V_5 &= q(q^3 - 2pq) - p(q^2 - p) = q^4 - 3pq^2 + p^2\,,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Ľahko si možno všimnúť a indukciou dokázať, že každé V_n sa dá vyjadriť ako polynóm v premennej q s celočíselnými koeficientami (p je celé číslo), pričom najvyššia mocnina q má koeficient 1. Z vyjadrenia $V_m = A$ tak máme rovnicu

$$q^{m-1} + (\dots)q^{m-2} + \dots + (\dots) - A = 0\,, \tag{2}$$

(v zátvorkách sú nejaké celé čísla) ktorej racionálnym koreňom je q. Podľa známeho kritéria, ak koreň polynomickej rovnice je racionálne číslo a/b (a, b sú nesúdeliteľné), potom a delí absolútny člen a b delí koeficient pri najvyššej mocnine, ktorý je v našom prípade 1. Každý racionálny koreň (2) je teda nutne celé číslo, preto aj q je celé číslo, čo sme chceli dokázať.

Poznámka: V riešení sme potichu zanedbali možnosť $xy = 0$ (delili sme výrazom xy). Jej osobitné prešetrenie vám však nebude robiť ťažkosti.

Úloha č. 14: *Sú dané kladné reálne čísla x, y, z, a, b, c, také že $x+y+z=1$ a $0<a<b<c$. Ukážte, že*

$$(ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right) \le \frac{(a+c)^2}{4ac}\,.$$

Riešenie: (opravoval Tomáš)

Najprv by sme si mali nerovnosť trochu ostrieľať. Napríklad zistiť, kedy nastáva rovnosť. Obyčajná fintu $a=b=c$ nám zakazuje priamo zadanie, ani $x=y=z=1/3$ nevedie k cieľu. Všimnime si, že pravá strana nezávisí od b (a vôbec nie od x, y, z !). To nám našepkáva k tomu, že víťazným ťahom by mohlo byť $y=0$. Skutočne. Rovnosť nastáva iba v prípade $x=z=1/2$ pre ľubovoľné a, b, c. Prizrime sa teraz na riešenie.

Označme si zátvorky na ľavej strane dokazovanej nerovnosti takto

$$A = ax+by+cz, \qquad B = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\,\cdot$$

Zadanie hovorí, že máme dokázať $AB \le (a+c)^2/(4ac)$. Pohrajme sa s výrazom $A+acB$. Doplníme si to na začiatku AG nerovnosťou a upravujeme

$$\begin{aligned}
2\sqrt{A\cdot acB} &\overset{AG}{\le} A+acB = (ax+by+cz)+\left(xc+\frac{ac}{b}y+za\right) = (a+c)(x+z)+y\left(b+\frac{ac}{b}\right) = \\
&= (a+c)(1-y)+y\left(b+\frac{ac}{b}\right) = (a+c)+y\left(b+\frac{ac}{b}-a-c\right) = \\
&= (a+c)+y\left(\frac{b^2+ac-ab-bc}{b}\right) = (a+c)+y\left(\frac{(b-a)(b-c)}{b}\right) \le \\
&\overset{*}{\le} (a+c).
\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť ($*$) platí, pretože zo zadania ($0<a<b<c$) vieme $b-a>0>b-c$, $0\le y$, $0<b$, takže

$$y\left(\frac{(b-a)(b-c)}{b}\right) \le 0.$$

Ak sa teraz pozrieme na začiatok a koniec našich úprav, po umocnení a jednoduchej úprave dostaneme, po čom nám srdce pišťalo.

Komentár: Ostáva mi len podotknúť, že *Víťa Kala* si zaslúžil 8 bodov za to, že ukázal veľmi pekné zovšeobecnenie:

Pre $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \ge 2$, $x_1+x_2+\dots+x_n = 1$ a $0<a_1<a_2<\dots<a_n$ platí

$$(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n)\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\dots+\frac{x_n}{a_n}\right) \le \frac{(a_1+a_n)^2}{4a_1a_n}\,\cdot$$