Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Každý bod kružnice je ofarbený červenou alebo modrou farbou. Zistite, či musí existovať*

a) pravouhlý trojuholník s vrcholmi rovnakej farby ležiacimi na kružnici,
b) rovnoramenný trojuholník s vrcholmi rovnakej farby ležiacimi na kružnici.

Riešenie: (opravoval Buggo)

a) Najprv sa zamyslime nad tým, ako môžu body tvoriť pravouhlý trojuholník. Je jasné, že vzniknutý trojuholník bude vpísaný do kružnice. Po chvíľke uvažovania si môžeme tiež uvedomiť, že prepona musí tvoriť priemer našej kružnice (skúste sa zamyslieť, prečo).

To znamená, že ak existujú dva body rovnakej farby, ktoré sú spojené úsečkou s dĺžkou priemeru (teda tvoria priemer kružnice), potom môžu tvoriť aj preponu nášho pravouhlého trojuholníka. Ak navyše existuje na kružnici ešte jeden ďalší bod tejto farby, tak už z Tálesovej kružnice vieme, že existuje pravouhlý trojuholník jednej farby. Ak neexistuje, potom sú všetky body okrem dvoch bodov priemeru rovnakej farby a nie je problém nájsť nejaký iný priemer a zostrojiť pravouhlý trojuholník. Otázka však je, či musia vždy existovať dva body rovnakej farby, ktoré sú koncovými bodmi nejakého priemeru danej kružnice. Teraz máme dve možnosti. Buď sa to pokúsime dokázať, alebo pohľadáme protipríklad. Skúste si najprv sami nájsť nejaký protipríklad... Keďže žiadne dva body rovnakej farby nemôžu mať vzdialenosť rovnú priemeru, nájdeme také rozloženie bodov, kedy sú všetky rovnakofarebné body k sebe bližšie. Označme koncové body nejakého priemeru A a B. Označme bod A červenou farbou a bod B modrou farbou. Teraz všetky body medzi A a B v smere hodinových ručičiek zafarbime červenou farbou. Zvyšné body modrou. Pri takomto ofarbení bodov neexistuje žiaden pravouhlý trojuholník s vrcholmi rovnakej farby (porozmýšľajte, prečo). Odpoveď na otázku zo zadania je teda nie, nemusí vždy existovať.

b) Vezmime si nejaké tri body, ktoré tvoria rovnoramenný trojuholník, ktorý nie je rovnostranný ani pravouhlý. Vieme, že aspoň dva vrcholy majú rovnakú, bez ujmy na všeobecnosti červenú farbu (keďže máme len dve farby). Označme ich A a B, zvyšný bod označme C. Úsečka AB je buď základňa, alebo rameno.

Rozoberieme teraz možnosť, že je to základňa (prvý prípad): Nájdime na kružnici taký bod D, aby bol trojuholník ABD rovnoramenný, s ramenami AB a BD (teda v tomto trojuholníku už AB nebude základňa, zamyslite sa, či taký trojuholník vždy existuje). Bod D má nejakú farbu. Ak má takú, ako body A a B, tak sme vyhrali. Ak nie, musíme pokračovať ďalej. Predpokladajme teda, že má inú (modrú) farbu. Teraz nájdime na kružnici taký bod E, aby bol trojuholník ABE rovnoramenný, s ramenami AB a AE (pri týchto hrách s trojuholníkmi využívame fakt, že prvý trojuholník ABC nebol rovnostranný, inak by body C, D, E splynuli v jeden). Ak je bod E červený, tak sme opäť vyhrali. Ak je modrý, tak tu máme tri modré body C, D, E. Tieto body však tvoria rovnoramenný trojuholník (prečo?).

Rozoberme druhý prípad. Ak je úsečka AB rameno, nájdeme k nej taký bod C', že v trojuholníku ABC' bude tvoriť základňu, čím sme úlohu previedli na prvý prípad. To znamená, že vždy existuje rovnoramenný trojuholník, ktorý má všetky vrcholy rovnakej farby. Hotovo.

Úloha č. 2: *Zistite, či je možné umiestniť cifry* $0, 1, \ldots, 9$ *do kruhu tak, že súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich cifier je najviac*

a) 13, *b)* 14, *c)* 15.

Riešenie: (opravovala Katka)

Najprv vylúčime prípad a). Keďže vieme, aké cifry sú uložené na kruhu, môžeme presne vypočítať súčet S všetkých trojíc susedných čísel. Každá cifra sa nachádza v práve troch trojiciach, preto

$$S = 3(0 + 1 + \cdots + 9) = 135.$$

Na druhej strane z a) vyplýva, že je tento súčet menší alebo rovný $10 \cdot 13 = 130$ (počet trojíc krát horné ohraničenie pre súčet trojice cifier). To však protirečí zisteniu $S = 135$, preto a) nie je možné.

Ďalej ukážeme, že ani umiestnenie cifier, ktoré spĺňa b), nie je možné. Zoberme si nejaké tri po sebe idúce cifry na kruhu a, b, c. Keďže sa cifry na kruhu neopakujú, tri po sebe idúce cifry b, c a d musia mať súčet iný ako je súčet $a + b + c$. Tento poznatok nám spolu s predpokladom $S \leq 140$ dáva, že sa súčty troch po sebe idúcich cifier na kružnici musia striedať takto: 13, 14, 13, 14, ... (skúste overiť!). S týmto poznatkom môžeme odvodiť, v akom poradí musia byť cifry v kruhu. Začnime ciframi a, b a c, kde $a + b + c = 13$. Postupnosť v kruhu bude vyzerať takto:

$$a \to b \to c \to a + 1 \to b - 1 \to c + 1 \to a \to b \to c\,.$$

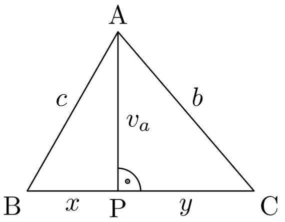
Vidíme, že na to, aby sa súčty striedali, musia sa číslice na kruhu opakovať. Takže ani podľa b) ich nevieme uložiť. Túto časť príkladu väčšina z vás riešila prehľadávaním všetkých možností, aby ste tak ukázali, že žiadna z nich nespĺňa zadané podmienky. Tu si však treba dať pozor, aby ste vylúčili naozaj *všetky* možnosti, nie iba zopár špeciálnych prípadov.

Napokon pre prípad c) jednoducho nájdeme uloženie, ktoré spĺňa predpoklady, vyhovuje

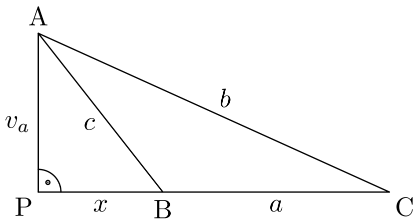
$$1 \to 9 \to 5 \to 0 \to 6 \to 7 \to 2 \to 3 \to 8 \to 4\,.$$

Úloha č. 3: *Trojuholník ABC o sebe nedávno zistil: „Keď vynásobím dĺžku strany a samú sebou a pripočítam dvojnásobok výšky na stranu a tiež vynásobenú samú sebou, platí, že je to číslo väčšie ako súčet druhých mocnín dĺžok strán b a c.“ ($a^2 + 2 \cdot v_a^2 > b^2 + c^2$) Pre aké trojuholníky to platí? Ako vyzerajú trojuholníky, pre ktoré platí: $a^2 + 2 \cdot v_a^2 = b^2 + c^2$?*

Riešenie: (opravovali Erika a Miško)



Majme ostrouhlý trojuholník ABC (pozri obrázok). Výška v_a s pätou P nám rozdelila trojuholník na dva pravouhlé trojuholníky. Podľa Pytagorovej vety vieme, že v týchto trojuholníkoch platí $x^2 + v_a^2 = c^2$ a tiež $y^2 + v_a^2 = b^2$. Po sčítaní týchto dvoch rovností dostaneme $x^2 + y^2 + 2v_a^2 = c^2 + b^2$. To sa už skoro podobá na našu nerovnosť, akurát, že namiesto a^2 tam máme $x^2 + y^2$ a namiesto nerovnosti je to rovnosť. Aby sme z toho dostali našu nerovnosť, stačí ukázať, že $a^2 > x^2 + y^2$. Vieme, že $a = x + y$, teda $a^2 = (x+y)^2$ a po úprave $a^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Keby bolo $2xy > 0$, platila by aj naša nerovnosť. Keby bolo $2xy = 0$, platila by rovnosť. Môže byť $2xy < 0$? Nie, pretože x, y sú dĺžky úsečiek a tie sú vždy kladné. Ako bude vyzerať trojuholník, v ktorom je $2xy = 0$ (teda by platila rovnosť $a^2 + 2v_a^2 = c^2 + b^2$)? $2xy = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$ alebo $y = 0$. A to je práve vtedy, keď bod P je totožný s bodom B alebo C. No a bod P je totožný s bodom B (C), práve vtedy, keď uhol pri vrchole B (C) je pravý. Čiže vidíme, že platnosť našej nerovnosti (resp. rovnosti) bude ovplyvňovať poloha bodu P. Ak bod P je totožný s bodmi B alebo C, platí rovnosť. Ak je medzi bodmi B, C (teda na úsečke BC), bude to ako na prvom obrázku a bude platiť nerovnosť $a^2 + 2v_a^2 > c^2 + b^2$. Čo ak bude bod P ležať mimo úsečky BC? Potom bude uhol pri jednom z vrcholov B alebo C väčší ako $90°$ a bude to vyzerať ako na druhom obrázku.



Vtedy podľa Pytagorovej vety platí $x^2 + v_a^2 = c^2$ a $y^2 + v_a^2 = b^2$. Teda $x^2 + y^2 + 2v_a^2 = c^2 + b^2$, no $y = a + x$, čiže $y^2 = a^2 + 2ax + x^2$. Ale $a^2 + 2ax + x^2 > a^2$, lebo $2ax > 0$ aj $x^2 > 0$. Z toho ale máme, že $a^2 + 2v_a^2 < x^2 + y^2 + 2v_a^2 = c^2 + b^2$, teda $a^2 + 2v_a^2 < c^2 + b^2$. Čiže ak bod P leží mimo úsečky BC, potom platí opačná nerovnosť. Nerovnosť $a^2 + 2v_a^2 < c^2 + b^2$ platí práve vtedy, keď sú obidva uhly pri vrcholoch B aj C menšie ako $90°$. Rovnosť $a^2 + 2v_a^2 = c^2 + b^2$ platí práve vtedy, keď je jeden z uhlov pri vrcholoch B alebo C pravý. No a keď je nejaký z uhlov pri vrcholoch B, C väčší ako $90°$, tak platí opačná nerovnosť ($a^2 + 2v_a^2 < c^2 + b^2$).

Úloha č. 4: *Nájdite všetky trojice a, b, c (na poradí nezáleží) po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel, pre ktoré je výraz*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

prirodzené číslo.

Poznámka: Dve prirodzené čísla nazývame nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je 1.

Riešenie: (opravoval Paľo N.)

Nech sa hľadaný výraz rovná prirodzenému číslu n, teda

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = n\,.$$

Rovnosť prenásobíme (kladným) číslom abc a roznásobíme zátvorky:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(bc+ac+ab) &= nabc \\ abc + a^2c + a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 + abc &= nabc \end{aligned}$$

Ďalej prevedieme členy abc na druhú stranu rovnice a príslušné výrazy upravíme, dostaneme

$$a(ac + ab + b^2 + c^2) + bc(b+c) = (n-3)abc\,.$$

Teraz si všimnime, že pravá strana rovnice je deliteľná číslom a, preto to musí platiť aj pre ľavú stranu. Keďže tu je prvý člen deliteľný a, musí byť číslom a deliteľný aj výraz $bc(b+c)$. Vzhľadom na to, že čísla a, b, c sú po dvojiciach nesúdeliteľné, musí a deliť výraz $(b+c)$ (premyslite si). Odtiaľ jednoduchou úvahou dostávame $a|(a+b+c)$. Analogicky odvodíme vlastnosti $b|(a+b+c)$, $c|(a+b+c)$. Opäť, využijúc fakt, že a, b, c sú nesúdeliteľné, dostávame $abc|(a+b+c)$. Teda existuje prirodzené číslo k, pre ktoré platí

$$a+b+c = kabc\,.$$

Bez ujmy na všeobecnosti si čísla usporiadajme, nech $a \geq b \geq c$. Potom platí $3a = a+a+a \geq a+b+c = kabc$. Po predelení číslom a odtiaľ máme $3 \geq kbc$. Zrejme $c=1$ (ak by c bolo aspoň 2, aj b by muselo byť aspoň 2, teda kbc by bolo aspoň 4). Teda $3 \geq kb$, odkiaľ máme len tri možnosti pre hodnotu čísla b (1, 2, alebo 3). Z rovnosti $a+b+c = kabc$ pre $c=1$ dostávame

$$a+b+1 = kab\,.$$

Vyšetrime túto rovnosť pre rôzne hodnoty b.

$b=1$ $a+2=ka$. Pravá strana rovnosti je deliteľná číslom a, to znamená, že to platí aj pre ľavú stranu rovnosti. Z toho vyplýva, že 2 je deliteľné číslom a, preto $a=1$ alebo $a=2$.

$b=2$ Podobne ako v predošlej úvahe dostaneme, že 3 musí byť deliteľné číslom a, teda $a=3$ (možnosť $a=1$ neuvažujeme, keďže $a \geq b$).

$b=3$ Analogicky dostaneme $a|4$, čiže $a=4$.

Rozborom všetkých možností sme získali štyroch kandidátov na riešenie úlohy – trojice $(1,1,1)$; $(1,1,2)$; $(1,2,3)$; $(1,3,4)$. Dosadením do pôvodného výrazu zistíme, že zadaniu úlohy vyhovujú prvé tri trojice. Tým je úloha vyriešená.

Úloha č. 5: *Pravidelný* 3-, 4-, 5- *a* 6-*uholník sa dá narysovať iba s pomocou pravítka a kružidla, zatiaľ čo pravidelný* 42-*uholník nie. (Môžete si to skúsiť overiť.) Zistite a zdôvodnite, ktoré z nasledujúcich pravidelných n-uholníkov sa dajú takto narysovať a ktoré nie: $n = 15,\ 35,\ 120$.*
Poznámka: Pravítkom sa dajú spojiť dva body priamkou. Kružidlom sa dajú prenášať vzdialenosti a rysovať kružnice.

Riešenie: (opravoval Kubo)

Zrejme pravidelný n-uholník sa dá zostrojiť práve vtedy, keď sa dá zostrojiť uhol $360°/n$, na toto ste prišli asi všetci. Teraz si ukážeme, že pravidelný 15- a 120-uholník sa dajú zostrojiť. Chceme zostrojiť uhly $24°$ a $3°$. Vieme $72°$ a $60°$ (z pravidelného 5- a 6-uholníka), takže vieme aj $72° - 60° = 12°$ (odčítať 2 uhly je jednoduché). Uhol vieme rozpoliť, teda vieme aj $12° : 2 : 2 = 3°$. A takisto vieme aj sčítať uhly, teda vieme zostrojiť uhol veľkosti $12° + 12° = 24°$. Tak a máme 15 a 120-uholník.

A čo 35-uholník? Predpokladajme, že by sa dal zostrojiť a pokúsime sa ukázať, že potom by sa dal zostrojiť aj 42-uholník, čo sa však podľa zadania nedá, takže to bude spor (a teda nebude platiť, že sa dá zostrojiť 35-uholník). Tak poďme na to. Ak by sa dal 35-uholník, tak sa dá aj 7-uholník, jednoducho zoberieme každý piaty bod z 35-uholníka a dostaneme 7-uholník. 6-uholník sa dá. Takže máme uhly $360°/6$ a $360°/7$, takže máme aj ich rozdiel, čo je $360°/42$, ale to je uhol v 42-uholníku, čo je už spomínaný spor. Takže sme dokázali, že 35-uholník sa nedá zostrojiť, ak sa nedá 42-uholník. (A obidva sa nedajú zostrojiť, lebo sa nedá zostrojiť 7-uholník, čo prvý vyslovil *Descartes*, ale dokázané to bolo až o skoro 200 rokov.)

Poznámka: n-uholníkmi v riešení sme samozrejme mysleli pravidelné n-uholníky.

Úloha č. 6: *Zistite, či môže existovať mnohočlen tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde čísla a_0, a_1, …, a_n sú celé, pre ktorý platí, že hodnota mnohočlenu pre $x=0$ je 0 a hodnota mnohočlenu v práve n rôznych celočíselných bodoch je n. Úlohu riešte pre $n = 4,\ 7$.*

Riešenie: (opravoval Miťo)

Ľahko sa presvedčíme, že ak má hľadaný mnohočlen existovať, musí nutne platiť $a_0 = 0$. Podľa podmienky zo zadania má potom platiť

$$x(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1) = n \qquad (1)$$

pre n celých čísel. Pretože ale koeficienty sú celé čísla, aj výraz v zátvorke je celé číslo, čo znamená, že pre všetky body x, v ktorých platí rovnosť (1), platí $x|n$. Avšak to, že týchto bodov má byť n a musia byť celočíselné a navzájom rôzne, znamená, že pre $n = 7$ mnohočlen nemôže existovať, pretože číslo 7 má iba štyroch celočíselných deliteľov. Tým sme vyriešili druhú časť úlohy. Dosaďme teraz do vzťahu (1) $n = 4$, získavame

$$x(a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1) = 4. \tag{2}$$

Ak by pre $n = 4$ hľadaný mnohočlen existoval, podľa predchádzajúcej úvahy by nutne všetky štyri body, v ktorých platí rovnosť (2), boli niektoré štyri zo šestice $x = \pm 1$, ± 2, ± 4, čo sú všetky delitele čísla 4. Keď všetky tieto čísla dosadíme do vzťahu (2), zistíme, že výraz v zátvorke sa má postupne rovnať 4, -4, 2, -2, 1, -1. Po dosadení čísla 4 ale zisťujeme, že zvyšok a_1 po delení číslom štyri je jednoznačne určený a rovná sa 1. (Rozmyslite si prečo.) Podobne pre $x = -4$ je tento zvyšok 3. Pre $x = \pm 2$ je a_1 párne a pre $x = \pm 1$ o ňom nevieme nič bližšie povedať. To ale znamená, že medzi bodmi, pre ktoré platí (2), nie sú čísla 4 ani -4, pretože obe sa vylučujú s tromi inými. Ostali nám teda $x = \pm 1$, ± 2. Takýto mnohočlen sa naozaj dá zostrojiť, napríklad tak, že koeficienty a_4, a_3, a_2 a a_1 nájdeme ako riešenie sústavy štyroch rovníc. (Rozmyslite si, ako tieto rovnice vytvoríme, skúste ich vyriešiť a tento mnohočlen nájsť. Skúšku správnosti iste spravíte ľahko aj sami.)

Iné riešenie:

Úloha sa dala riešiť aj inak. Predstavme si graf nášho mnohočlenu: prechádza bodom $[0, 0]$ a v práve n celočíselných bodoch má hodnotu n. Keď tento graf posunieme o n dole, získame mnohočlen, ktorý prechádza bodom $[0, -n]$ a má práve n celočíselných, navzájom rôznych koreňov. Ak vyberieme číslo a_n, ktoré je rôzne od nuly, (rozmyslite si prečo) pred zátvorku, tú vieme rozložiť na súčin. Mnohočlen má potom tvar

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0, \tag{3}$$

kde x_1, x_2, …, x_n sú jeho korene. Absolútny člen, to je ten bez x, má potom tvar

$$(-1)^n a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,.$$

My však vieme, že toto číslo sa rovná buď $+n$ alebo $-n$ (opäť si to treba rozmyslieť), podľa stupňa mnohočlenu. Rozdiel v znamienku však môžeme odstrániť zmenou znamienka členu a_n, preto znamienko na chvíľu nemusíme uvažovať. Číslo n sa teda musí dať napísať ako súčin n navzájom rôznych celých čísel a jedného ľubovoľného celého čísla (to je a_n). Toto však pre $n = 7$ zjavne nie je možné. Pre $n = 4$ to ide, avšak iba ak za x_i zvolíme 1, -1, 2, -1 a za $a_n \pm 1$. Keďže stupeň mnohočlenu je 4, znamienko pri n je mínus a teda $a_n = -1$. Keď tieto čísla dosadíme do vzťahu (3), získame mnohočlen $-x^4 + 5x^2 - 4$. Toto je však pôvodný mnohočlen posunutý o 4 dole, preto náš hľadaný má tvar $-x^4 + 5x^2$.

Komentár: Najčastejšie sa v riešeniach objavovali dve chyby. Prvou, menej podstatnou, bolo, že ste k nájdenému mnohočlenu zabudli pripočítať číslo štyri. Toto bola iba drobnosť a aj keď nie je pravda, že $-x^4 + 5x^2 - 4$ je hľadaný mnohočlen, za túto chybu sa body nestrhávali. Vážnejšou chybou bolo, keď ste mnohočlen upravili na súčin (3) a vynechali člen a_n. Potom ste úlohu riešili iba s menšou skupinou mnohočlenov a nenašli riešenie alebo ste *bezdôvodne* násobili číslom -1.

Úloha č. 7: *Desaťciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave) nazývame rozkokošené, keď má všetky cifry rôzne a je násobkom* 11111. *Koľko rôznych rozkokošených čísel existuje?*

Riešenie: (opravovali Baška a Janka)

Skúsme najprv zistiť niečo o rozkokošených číslach (RČ). Po chvíli hrania nájdeme napr. prvé tri: 1023489765, 1203487965, 1302486975 a vidno, že majú veľmi podobnú štruktúru: vždy je súčet cifier vzdialených 5 miest od seba 9. Platí to ale naozaj pre všetky RČ? A naopak, ak pre nejaké číslo pozorovaná vlastnosť platí a má rozličné cifry, je to RČ? Všimnime si, že každé desaťciferné číslo s rôznymi ciframi má rovnaký ciferný súčet, a to 45. Vieme, že číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je aj jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. To ale znamená, že RČ sú okrem 11111 deliteľné vždy aj deviatkou a keďže $NSD(9, 11111) = 1$, tak sú deliteľné aj 99999. Ak teda máme RČ R ($R = abcdefghij$, kde $a, b, \ldots, j$ sú jeho cifry), môžeme písať $R = 99999n$. Aké hodnoty môže n nadobúdať, určíme ľahko z podmienky, že R je desaťciferné. Zistíme, že až na dve výnimky (pre ktoré overíme, že $99999n$ nie je RČ) je n vždy päťciferné, dokonca $n > 10000$.

$$R = 99999n = 10^5 n - n = 10^5(n - 1) + (10^5 - n)$$

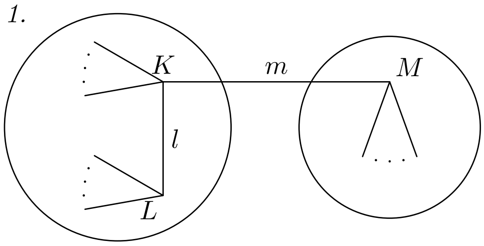
Z rovnosti vidíme, že $(n - 1)$ je prvé päťčíslie R a $10^5 - n$ zase druhé päťčíslie. Čiže súčet päťčíslí R je 99999. To je len a len vtedy, keď $a+f = b+g = c+h = d+i = f+j$ (Premyslite si, prečo nemôže prísť k prechodu cez desiatku!) Ale my vieme, že $a + b + \cdots + j = 0 + 1 + \cdots + 9 = 45$ a teda $a + f = b + g = \cdots = f + j = 9$. Odpoveď na prvú otázku sme našli. Treba ešte overiť, že aj na druhú otázku je odpoveď áno, čo každý zvládne určite sám. Ostáva už len zistiť, koľko je takých čísel. Prvá cifra RČ môže byť ľubovoľná okrem nuly, t.j. je 9 možností. Určením prvej cifry je ale jednoznačne určená šiesta, aby súčet bol 9. Druhá cifra môže byť jedna z 8 (nemôžeme už použiť tie na 1. a 6. mieste), podobne na 3. cifru ostáva 6 možností, na 4. len 4, na 5. 2. Spolu teda máme $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ možností. Rozkokošených čísel je teda 3456.

Úloha č. 8: *V štáte KaMsaS majú súvislú leteckú sieť. Štyri letištné spoločnosti Alfa, Beta, Gama a Omega spravujú KaMsaSké letiská, pričom každé letisko je spravované práve jednou spoločnosťou. Každý let v KaMsaSe je obojsmerný a spája letiská spravované rôznymi spoločnosťami. Navyše je každé letisko spojené letom s rovnakým počtom letísk ostatných troch spoločností (ak je letisko spravované spoločnosťou Alfa spojené s dvomi letiskami spravovanými spoločnosťou Beta, tak je spojené aj s dvomi letiskami spravovanými spoločnosťami Gama a Omega). Ukážte, že ak KaMsaSká vláda zruší dva obojsmerné lety, vedúce do toho istého letiska, letecká sieť ostane súvislá. Poznámka: Súvislá letecká sieť je taká, v ktorej je možné dostať sa letecky z každého letiska na ľubovoľné iné s prestupmi, alebo bez prestupov.*

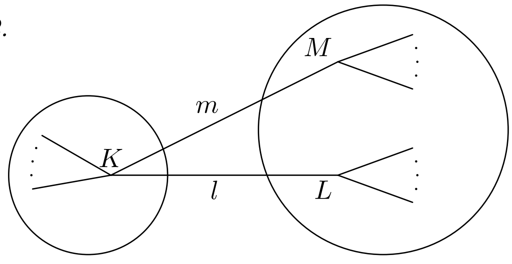
Riešenie: (opravovali Miki a Peťo G.)

Chceme dokázať, že ak v sieti popísanej v zadaní zrušíme ľubovoľné dve linky vychádzajúce z jedného mesta, tak sieť ostane súvislá. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že odobratím dvoch liniek sa naša sieť rozpadne. Nakreslime si všetky tri prípady, v ktorých môže táto situácia nastať. Kružnice v obrázku budú predstavovať množinu miest, ktoré sú navzájom pospájané, teda letecká sieť je v týchto oblastiach súvislá. Linky, ktoré vláda odstráni, si označíme l, m.

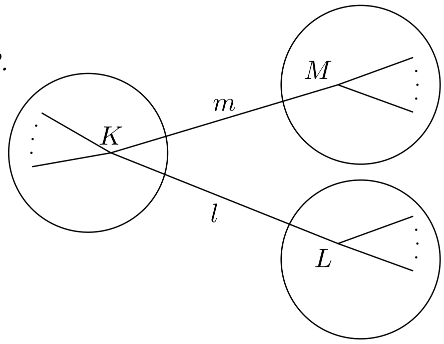
1.



2.



3.



Predpokladajme, že nastal prvý prípad a navyše BUNV nech letisko K spravuje spoločnosť α a letisko M spravuje spoločnosť β. Všimnime si, čo vieme o počtoch liniek, ktoré vychádzajú z miest v oblasti, kde leží M. Pre jednoduchosť bude $p(x, y)$ označovať počet liniek medzi všetkými mestami v oblasti spravovanými spoločnosťami x a y. Keďže všetky mestá okrem M spĺňajú podmienku zo zadania, tak $p(\omega, \gamma) = p(\omega, \beta) = p(\omega, \alpha)$ [1]. Ďalej aj $p(\gamma, \omega) = p(\gamma, \beta) = p(\gamma, \alpha)$ a $p(\alpha, \omega) = p(\alpha, \gamma) = p(\alpha, \beta) = k$. Z toho nám vyplýva, že do letísk spoločnosti α prichádza z tejto oblasti k liniek zo všetkých troch spoločností, teda spolu $3k$ liniek. Lenže pred zrušením linky m by muselo viesť do letísk spoločnosti α až $3k+1$ liniek, čo porušuje vlastnosť, že do každého letiska vedie na začiatku rovnaký počet liniek z ostatných spoločností. A to je hľadaný spor. K podobnému sporu sa dostaneme týmto postupom aj v druhom a treťom prípade.

Komentár: Úloha bola dosť prísne bodovaná, lebo sme od vás chceli korektný dôkaz (a nič iné :)). Mnohí z vás ostali len pri intuitívnych úvahách alebo pri vymenovávaní konkrétnych prípadov, ktoré vás iba mali priviesť na myšlienku dôkazu, no sami o sebe rozhodne nestačili.

Úloha č. 9: *Nech $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ a $Q(x) = x^2 + px + q$ sú dva polynómy. Je známe, že polynóm P je záporný práve vtedy, keď je polynóm Q záporný a množina všetkých čísel, pre ktoré sú hodnoty polynómu P záporné, je interval, ktorého dĺžka je väčšia ako 2. Ukážte, že existuje reálne číslo t také, že platí $P(t) < Q(t)$.*

Riešenie: (opravoval Pišta)

Polynóm $Q(x)$ je druhého stupňa a navyše koeficient pri najvyššej mocnine x je 1, teda jeho graf je parabola, ktorá je nahor otvorená, t.j. je tvaru „U“. Zo zadania vieme, že interval, na ktorom je $Q(x)$ záporný, má dĺžku väčšiu ako 2. To znamená, že $Q(x)$ má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2 (BUNV $x_1 < x_2$) a platí$x_2 - x_1 > 2$. Ale keďže je druhého stupňa, tak iné korene už nemá. Z predchádzajúceho textu vyplýva, že polynóm $Q(x)$ nadobúda záporné hodnoty na intervale (x_1, x_2) a nikde inde. Zo zadania vieme, že polynóm $P(x)$ je záporný iba na tomto intervale. To neznamená, že polynóm $P(x)$ nemôže mať nulové body mimo tohto intervalu, ako mnohí z vás nesprávne predpokladali. Platí iba toľko, že x_1 a x_2 sú tiež korene $P(x)$. Potom môžeme napísať polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ v tvare $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ a $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)[(x - m)^2 + n]$ pre vhodné reálne m, n. Ak si označíme $R(x) = (x - m)^2 + n$, tak $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$.

Polynóm $R(x)$ musí byť nezáporný na $\mathbb{R}$ a kladný na intervale (x_1, x_2), inak by sme dostali spor so zadaním. (Premyslite si, s čím je to v rozpore.) To znamená, že $n \geq 0$. Na intervale (x_1, x_2) bude platiť $P(t) < Q(t)$ práve vtedy, keď existuje také $t \in (x_1, x_2)$, že $R(t) > 1$.

Predpokladajme, že $R(x) \leq 1$ pre všetky $x \in (x_1, x_2)$. Teda $R(x) = (x - m)^2 + n \leq 1$, z tohto vyplýva, že

[1]z pohľadu spoločnosti ω

$(x-m)^2 \leq 1-n \leq 1$, lebo $n \geq 0$. Preto

$$\begin{aligned} |x-m| &\leq 1 \\ -1 \leq x-m &\leq 1 \\ -1+m \leq x &\leq 1+m \end{aligned}$$

Interval $\langle -1+m, 1+m \rangle$ má dĺžku 2. My sme ukázali, že aby platila nerovnosť $R(x) \leq 1$, x musí byť z tohto intervalu. To je spor s naším predpokladom, pretože interval (x_1, x_2) má dĺžku väčšiu ako 2. Teda existuje $t \in (x_1, x_2)$ také, že nie je splnená nerovnosť $R(t) \leq 1$, t.j. $R(t) > 1$. To znamená, že pre toto číslo t platí$P(t) = Q(t) \cdot R(t) < Q(t)$. Tým je úloha vyriešená.

Úloha č. 10: *Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z má binárna operácia $\diamond$ vlastnosť $(x \diamond y) \diamond z = x + y + z$. Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí*

$$a \diamond b = a + b.$$

Poznámka: Binárna operácia je predpis, ktorý dvojici reálnych čísel priraďuje reálne číslo.

Riešenie: (opravoval Peťo N.)

Skúšajme do zadanej rovnosti dosadzovať za x, y a z rôzne čísla (to si môžeme dovoliť, nakoľko rovnosť platí pre ľubovolné reálne čísla). Zamerajme sa najprv na výraz $0 \diamond 0$ a snažme sa určiť jeho hodnotu. Po chvíľke hrania sa dostaneme podla zadania pre $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0 \diamond 0$

$$(0 \diamond 0) \diamond (0 \diamond 0) = 0 + 0 + (0 \diamond 0) = 0 \diamond 0\,. \tag{4}$$

Pre $x = 0 \diamond 0$, $y = 0 \diamond 0$ a $z = 0$ zasa dostaneme

$$((0 \diamond 0) \diamond (0 \diamond 0)) \diamond 0 = (0 \diamond 0) + (0 \diamond 0) + 0 = 2 \cdot (0 \diamond 0)\,. \tag{5}$$

Na druhej strane, podľa (4) máme

$$((0 \diamond 0) \diamond (0 \diamond 0)) \diamond 0 = (0 \diamond 0) \diamond 0 = 0 + 0 + 0 = 0\,. \tag{6}$$

Porovnaním (5) a (6) dostávame $2 \cdot (0 \diamond 0) = 0$ a teda $0 \diamond 0 = 0$. Dokazované tvrdenie už teraz dostaneme pomerne priamočiaro. Dosadením $x = 0$, $y = 0$ a $z = a$ do zadanej rovnosti máme

$$a = 0 + 0 + a = (0 \diamond 0) \diamond a = 0 \diamond a \tag{7}$$

a dosadením $x = 0$, $y = a$ a $z = b$ konečne (s využitím (7) v záverečnej úprave)

$$a + b = 0 + a + b = (0 \diamond a) \diamond b = a \diamond b\,.$$

Komentár: Niektorí z vás ešte na konci riešenia urobili skúšku, či operácia $x \diamond y = x + y$ vyhovuje zadanej podmienke. To v tomto prípade nebolo potrebné, nakoľko úlohou nebolo nájsť binárnu operáciu spĺňajúcu zadanú rovnosť. Úlohou bolo iba dokázať nejaké tvrdenie, čo sa nám podarilo aj bez skúšky.

Poznámka: V zadaní sa vyskytla drobná tlačová chyba. Namiesto $(x \diamond y) \diamond z = x + y + z$ bolo vytlačené $(x \diamond y) \diamond z = x + y + x$. Tvrdenie tak zjavne neplatilo. Tu vás chceme upozorniť, že v takomto prípade nestačí, keď pošlete riešenie, v ktorom ukážete, že zadané tvrdenie neplatí. Vašou úlohou je buď správne zadanie samostatne odhaliť alebo sa naň spýtať vedúcich (mailom, cez debatu na stránke, …). Konkrétne v tomto prípade by sme predsa namiesto $x + y + x$ napísali $2x + y$, keby sme to tak mysleli.

Úloha č. 11: *Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$, kde $m \geq 3$. Označme $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ukážte, že platí nerovnosť*

$$\sum_{n=2}^{m} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 12 \sum_{n=1}^{m} {a_n}^2.$$

Poznámka: K tomuto príkladu nie je poznámka.

Riešenie: (opravoval Rúža)

Vzhľadom na to, že tento príklad nikto z vás nevyriešil, rozhodli sme sa neprezradiť vám úplné riešenie, ale len návod, ktorým smerom sa uberať. Dúfame, že týmto potešíme všetkých tých, ktorí nad touto nie najľahšou nerovnosťou presedeli veľa–veľa dní, pretože s touto našou pomocou je už dôkaz na dohľad. Použitím

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 = \left(a_n + \frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 \leq 2a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$$

dokážte, že platí

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{m}\frac{a_nA_n}{n}.$$

Odhadnite zhora člen

$$-2\sum_{n=1}^{m}\frac{a_nA_n}{n}.$$

S radosťou z vyriešenia tejto úlohy sa môžete podeliť s nami, vašimi obľúbenými vedúcimi vášho obľúbeného *KMS*.

Komentár: K tomuto príkladu nie je komentár.

Úloha č. 12: *Zostrojme postupnosť reťazcov* $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ *takú, že* $R_1 = 1$ *a číslo* R_{n+1} *vznikne z čísla* R_n *tak, že každé číslo* i *v* R_n *nahradíme skupinou čísel* $123\dots i$ *a na koniec pridáme číslo* $n+1$*. Ďalšie členy postupnosti potom vyzerajú nasledovne:* $R_2 = 12$, $R_3 = 1123$, $R_4 = 11121234$*. Ukážte, že ak si pre* $n \geq 2$ *napíšeme číslo* R_n *do riadku a pod neho to isté číslo* R_n *s obráteným poradím cifier, tak v každom stĺpci bude práve jedna jednotka.*

Riešenie: (opravoval Foto)

(podľa *Ferka Simančíka*) Zadefinujme si reláciu $\equiv$ medzi dvoma reťazcami čísel tak, že pre dva reťazce A, B platí $A \equiv B$ práve vtedy, keď majú oba rovnaký počet čísel a po napísaní jedného z nich pod druhý v opačnom poradí, bude v každom stĺpci práve jedna jednotka. Ďalej nech AB značí reťazec, ktorý vznikne napísaním reťazca B za A. Zrejme platí, že ak $A \equiv X$ a $B \equiv Y$, potom aj $AB \equiv YX$ (podobne aj pre viac reťazcov).
Definujme si reťazec S_i^k nasledovne:

1) S_1^k je reťazec pozostávajúci z jediného čísla k;

2) S_i^k (pre $i \geq 2$) vznikne z S_{i-1}^k tak, že každé číslo x v ňom nahradíme reťazcom čísel $12\dots x$.

Dokážeme, že $S_b^a \equiv S_a^b$ pre všetky prirodzené čísla a, b okrem prípadu $a = b = 1$.
Postupujeme matematickou indukciou cez súčet $a+b$:

1° Ak $a+b=3$ (najmenší prípad), potom S_2^1 je 1, S_1^2 je 2, teda platí $S_2^1 \equiv S_1^2$.

2° Predpokladajme, že pre n ($n \geq 3$) platí indukčný predpoklad, teda $S_b^a \equiv S_a^b$ pre všetky prirodzené čísla a, b, pre ktoré $a+b=n$. Zoberme si ľubovoľné priodzené čísla a, b, pre ktoré $a+b=n+1$. Ak je jedno z nich 1 (BÚNV nech je to a), tak $S_b^1 = 1$ a $S_1^b = b \geq 3$, teda $S_b^1 \equiv S_1^b$. Teraz ak $a > 1$ aj $b > 1$, skúsme si uvedomiť jednu vec. Keď si rozdelíme reťazec na dve časti a tie budeme postupne rozvíjať, tak po spojení týchto reťazcov dostaneme reťazec, ktorý by sme dostali rozvíjaním pôvodného reťazca. Takto uvedomelí si skúsme uvedomiť, že potom platí $S_x^a = S_x^{a-1}S_{x-1}^a$ pre všetky $x \geq 2$, čiže aj pre $x = b$. Potom $S_b^a = S_b^{a-1}S_{b-1}^a$ a podobne aj $S_a^b = S_a^{b-1}S_{a-1}^b$. Podľa indukčného predpokladu

$$S_a^{b-1} \equiv S_{b-1}^a, S_b^{a-1} \equiv S_{a-1}^b \implies S_b^{a-1}S_{b-1}^a \equiv S_a^{b-1}S_{a-1}^b \implies S_b^a \equiv S_a^b$$

Tvrdenie platí aj pre súčet $a+b=n+1$.

Tým sme dokázali, že $S_b^a \equiv S_a^b$ pre všetky dvojice prirodzených čísel (a, b) okrem $(1, 1)$.
Ďalej dokážeme, že $R_n = S_n^1 S_{n-1}^2 S_{n-2}^3 \dots S_1^n$. Opäť matematickou indukciou:

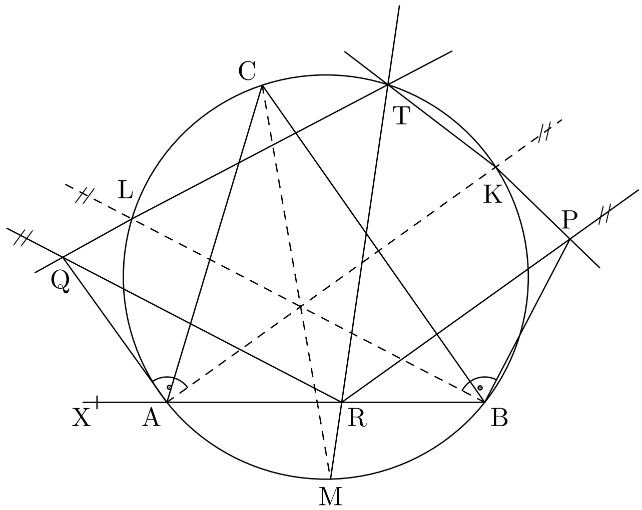
1° Overíme platnosť tvrdenia pre $n = 1, 2, \dots$ (zaleží na tom, koľko máme chuti a času :)).

2° Predpokladajme, že $R_n = S_n^1 S_{n-1}^2 S_{n-2}^3 \dots S_1^n$. Potom R_{n+1} je rozvinutý reťazec R_n s na konci pridaným číslom $n+1$. Alebo môže vzniknúť aj tak, že R_n nasekáme na časti, rozvinieme každú z nich, spojíme ich a na koniec pridáme číslo $n+1 = S_1^{n+1}$, čiže $R_{n+1} = S_{n+1}^1 S_n^2 S_{n-1}^3 \dots S_2^n S_1^{n+1}$.

Takže naozaj pre všetky prirodzené čísla n sa R_n dá pospájať z S-reťazcov tak, ako sme už spomenuli. My však už vieme, že $S_n^1 \equiv S_1^n, S_{n-1}^2 \equiv S_2^{n-1}, \dots$, preto $R_n \equiv R_n$.

Úloha č. 13: *Osi uhlov pri vrcholoch* A, B, C *trojuholníka* ABC *postupne pretínajú jemu opísanú kružnicu v bodoch* K, L, M*. Na úsečke* AB *zvoľme bod* R*. Pre body* P *a* Q *platí nasledovné:* $RP \parallel AK$, $BP \perp BL$, $RQ \parallel BL$, $AQ \perp AK$*. Ukážte, že priamky* KP, LQ *a* MR *prechádzajú jedným bodom.*

Riešenie: (opravoval Foto)



(podľa *Tomáša Váňu*) Po nakreslení dobrého obrázka dostaneme taký nevtieravý pocit, že spoločným priesečníkom týchto troch priamok bude priesečník priamky MR s kružnicou opísanou trojuholníku ABC rôzny od bodu M. Označme ho T. Dostaneme aj druhý nevtieravý pocit, že vzhľadom na komplikovanosť obrázku sa diskusii sotva vyhneme. Ako najrozumnejšie sa ukáže robiť ju vzhľadom na polohu bodu T. Predpokladajme najskôr, že T leží na oblúku LB neobsahujúcom bod A. Keďže bod M je priesečník osi uhla a opísanej kružnice, tak bude ležať v strede oblúka AB a preto aj priamka MT bude osou uhla ATB. Tento je zhodný s obvodovým uhlom ACB nad tou istou tetivou AB. Pri štandardnom označení uhlov trojuholníka ABC je teda $|\sphericalangle MTA| = \gamma/2$. Podľa zadania je priamka RQ rovnobežná s BL, takže súhlasné uhly ARQ a ABL sa rovnajú a platí $|\sphericalangle ARQ| = \beta/2$. Podľa zadania sú AQ a AK kolmé, takže $|\sphericalangle RAQ| = \pi/2+\alpha/2$. V trojuholníku ARQ je $|\sphericalangle AQR| = \pi - |\sphericalangle ARQ| - |\sphericalangle RAQ| = \gamma/2$. Keďže $|\sphericalangle MTA| = |\sphericalangle RTA| = \gamma/2 = |\sphericalangle RQA|$ a body T, Q zjavne ležia oba v tej istej polrovine vzhľadom na priamku AB (lebo $|\sphericalangle QAX| > |\sphericalangle QRX|$), tak štvoruholník $ARTQ$ je tetivový. Označme L_0 priesečník priamky QT s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. V štvoruholníku $ARTQ$ sa uhly nad tetivou RT zhodujú, platí $|\sphericalangle RQT| = |\sphericalangle RAT|$. Navyše nad tetivou BT v pôvodnej kružnici je $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle BL_0T|$. Máme teda $|\sphericalangle BL_0T| = |\sphericalangle RQT|$ a to v spojení s tým, že T, L_0 a Q sú kolineárne, implikuje rovnobežnosť priamok RQ a BL_0. Avšak priamka RQ je rovnobežná aj s BL, čiže body L a L_0 sú totožné. Dokázali sme, že aj priamka LQ prechádza bodom T.

Premyslite si, ako treba postup obmeniť, aby sa nám to isté podarilo dokázať v situácii, keď bod T leží na oblúku LA a prípadne ako je to, keď bod T leží na oblúku DA, kde D je priesečníkom polpriamky AQ s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Vtedy totiž bod Q leží na úsečke DA, čiže vnútri kružnice. Rovnako si treba uvedomiť, ako bude dôkaz vyzerať, ak sa bude T nachádzať v hraničných bodoch L, D, A.
Nakoľko je situácia symetrická, analogickým postupom dokážeme, že aj priamka PK prechádza bodom T. Priamky PK,LQ a RM teda naozaj prechádzajú tým istým bodom.

Úloha č. 14: *Nájdite všetky kladné celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ také, že platí*

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

pričom $a_0 = 1$ a $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$ pre $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Riešenie: (opravoval Tomáš)

(upravené podľa *T. Váňu*) Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spĺňajú podmienku rovnosti zo zadania. Našim cieľom je postupne vypočítavať hodnoty $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pretože $a_0 = 1$ a ľavá strana v zadaní je menšia ako 1, musí byť $a_i/a_{i+1} < 1$ pre $i = 0, 1, \ldots, n-1$, z čoho je $1 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, teda $a_i \geq 2$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.
Podmienku zo zadania $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$ si šikovne prepíšeme:

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{a_{k+1}-1} &\leq a_{k-1}\left(\frac{1}{a_k(a_k-1)}\right) \\ \frac{a_k}{a_{k+1}-1} &\leq a_{k-1}\left(\frac{1}{a_k-1} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{a_{k-1}}{a_k-1} - \frac{a_{k-1}}{a_k} \\ \frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k+1}-1} &\leq \frac{a_{k-1}}{a_k-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Ak sčítame nerovnosti (8) pre $k = i+1, i+2, \ldots, n-1$, veľa členov nám vypadne a dostaneme nerovnosť

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n - 1} \leq \frac{a_i}{a_{i+1} - 1},$$

z ktorej využitím $a_{n-1}/a_n < a_{n-1}/(a_n - 1)$ dostaneme ostrú nerovnosť

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_i}{a_{i+1} - 1}\,.$$

Túto nerovnosť je možné dokázať, ako to urobil Tomáš, matematickou indukciou.

Z tejto ostrej nerovnosti a použitím toho, že všetky zlomky na pravej strane zadanej nerovnosti sú kladné, dostaneme postupne hľadané celé čísla. Pre $i = 0$ máme

$$\begin{array}{rcccl} \frac{1}{a_1} & \leq & \frac{99}{100} & < & \frac{1}{a_1-1}, \\ 1 < \frac{100}{99} & \leq & a_1 & < & \frac{199}{99} < 3 \implies a_1 = 2 \end{array}$$

a podobne pre ďalšie hodnoty $i = 1, 2, 3, 4$ dostaneme jediné možnosti pre a_i:

$$\frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1}\right) < \frac{1}{a_2 - 1} \implies a_2 = 5,$$

$$\frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{a_2}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{1}{a_3 - 1} \implies a_3 = 56,$$

$$\frac{1}{a_4} \leq \frac{1}{a_3}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3}\right) < \frac{1}{a_4 - 1} \implies a_4 = 78400.$$

Ak by sme teraz rovnako chceli pokračovať, dostali by sme

$$\frac{1}{a_5} \leq \frac{1}{a_4}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{56} - \frac{56}{78400}\right) = 0,$$

čo je nemožné. Môžete sa presvedčiť, že pre $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 5, 56, 78400)$ nastáva rovnosť v zadaní a z postupu riešenia vyplýva, že žiadne iné riešenie neexistuje.