Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Kubko na trhu pozoroval babku, ktorá sa hrala s rovnoramennými váhami. Po chvíli sa jej na zvráskavenej tvári vyčaril úsmev. Zistila totiž, že 3 broskyne a slivka vážia toľko isto ako 3 desaťdekové závažia a 2 marhule. Po polhodine aproximovania dospela opäť k rovnovážnemu stavu, keď v jednej miske mala 9 broskýň, 5 sliviek a 2 desaťdekové závažia a v druhej mala dvojkilové závažie a marhuľu. Kubko to nevydržal a zjedol jednu marhuľu, broskyňu a slivku aj s kôstkami. Viete, o koľko stúpla jeho hmotnosť?*

Riešenie: (opravoval Kubo)

Najskôr chcem všetkých pochváliť za veľmi pekné riešenia. Uvediem jedno z najkratších.

Zo zadania vieme dve rovnosti (B — broskyňa, S — slivka, M — marhuľa):

$$3B + S = 300\,\mathrm{g} + 2M \iff 6B + 2S = 600\,\mathrm{g} + 4M$$
$$9B + 5S + 200\,\mathrm{g} = 2000\,\mathrm{g} + M \iff 6B + 2S + 3B + 3S = 1800\,\mathrm{g} + M$$

Za 6B + 2S v druhej rovnosti môžeme dosadiť $600\,\mathrm{g} + 4M$ z prvej rovnosti a dostaneme

$$600\,\mathrm{g} + 4M + 3B + 3S = 1800\,\mathrm{g} + M.$$

Odtiaľ po úprave dostávame $M + B + S = 400\,\mathrm{g}$, čo sme mali zistiť.

Úloha č. 2: *Babička kúpila Erike štvorcový obrus s rozmermi $n \times n$ štvorčekov. Tento obrus má niekoľko zaujímavých vlastností. Každý štvorček je zafarbený práve jednou farbou. Obrus vyzeral rovnako, keď ho Erika otočila či prevrátila, teda každý štvorček mal rovnakú farbu, ako všetky symetricky umiestnené štvorčeky, ale rôznu ako tie ostatné. Koľko farieb mal obrus?*

Riešenie: (opravovala Erika)

Označme $F(n)$ počet farieb, ktoré treba na zafarbenie obrusu $n \cdot n$. Pomocou jednoduchého nakreslenia zistíme, že $F(1) = 1$ a $F(2) = 1$. Ďalej príklad riešme osobitne pre párne a nepárne n.

1) n je párne:

   Ofarbime najskôr horný riadok štvorca. Na to nám treba $n/2$ farieb, lebo k-ty štvorček od kraja musí byť ofarbený takisto ako $(n+1-k)$-ty štvorček od kraja (kvôli otočeniu obrusu). Keď máme ofarbený horný rad, tak zvyšné okraje ofarbíme podľa horného okraja tak, aby ofarbenie spĺňalo podmienky zadania. Potom nám už len ostane ofarbiť vnútorný štvorec $(n-2) \times (n-2)$. Teda

$$F(n) = \frac{n}{2} + F(n-2) = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + F(n-4) = \cdots = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-4}{2} + \cdots + 2 + 1.$$

2) n je nepárne:

   Na ofarbenie horného radu potrebujeme $(n+1)/2$ farieb. Analogicky ako v predošlom prípade je

$$F(n) = \frac{n+1}{2} + F(n-2) = \cdots = \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{2} + \cdots + 2 + 1.$$

   Takže už máme nejaký predpis, ktorým dokážeme zistiť počet farieb na obruse $n \times n$. Otázka je, či sa dá napísať jednoduchšie. Prezradím vám len výsledok; pre n párne je to $(n^2+2n)/8$, pre n nepárne $(n^2+4n+3)/8$. Porozmýšľajte, ako sa na to dá prísť.

Úloha č. 3: *Jeden kuchár pracoval v hoteli, kde na meranie času mali len 2 presýpacie hodiny: jedny na 4 minúty, druhé na 7 minút. Jedného dňa prišiel hosť, ktorý si na raňajky prial vajíčko varené presne 9 minút. Koľko najmenej času potreboval kuchár na jeho prípravu?*

Riešenie: (opravoval Čermo)

Komentár: No neviem ako vy, ja už som dosť hladný, tak si teda poďme niečo dobré ukuchtiť. Recept na dnešný deň je vajíčko à la KMS. Po preštudovaní vašich návodov som sa dozvedel množstvo nových spôsobov, ako uvariť vajce a musím uznať, že veľa z vás sa v kuchyni vôbec nestratí :). Pozrime sa teraz na to, ako sa stať kuchárom-expertom.

Prvým krokom je uvedomiť si, že presýpacie hodiny nemusíme vždy nechať dosypať sa až do konca, ale môžeme ich otočiť v ľubovoľnom momente, pričom nám potom odmerajú práve rovnaký čas, ako boli otočené v pôvodnej polohe. Vyzbrojení týmto poznatkom sa už pomerne jednoducho dopracujeme k výslednému postupu. Nech $H4$ sú štvorminútové hodiny, $H7$ sedemminútové hodiny a min minúta.

0 min	spustíme obidvoje hodiny a dáme variť vajíčko
4 min	otáčame $H4$ (v $H7$ ostali 3 minúty)
7 min	otáčame $H7$ (v $H4$ ostala 1 minúta)
8 min	otáčame $H7$ (od 7 min sa mi odsypala práve 1 minúta, ktorá je v dolnej časti hodín a ktorá nám chýba do 9 minút)
9 min	$H7$ sa dosypali a vajíčko sa varilo presne 9 minút, bez prestávky.

A mne už neostáva nič iné, len vám popriať dobrú chuť!

Úloha č. 4: *29. marca 87 alebo 8. novembra 88 sú násobiace dátumy, lebo* $29 \cdot 3 = 87$*, resp.* $8 \cdot 11 = 88$*. Ktorý rok odhliadnuc od storočia je najplodnejší na takéto dátumy?*

Riešenie: (opravovali Mišo a Mišo)
Bez ujmy na všeobecnosti hľadajme rok s maximálnym počtom násobiacich dátumov (ND) medzi rokmi $0, 1, 2, \dots 99$ (29. 2. 0 je korektný dátum). Pri hľadaní násobiacich dátumov sa môžeme oprieť o niektoré pozorovania:
T_1: Hľadané roky nebudú rovné prvočíslu p, pretože potom by mali najviac 2 ND $1 \cdot p$ a $p \cdot 1$.
T_2: Hľadané roky nebudú rovné súčinu prvočísel $p \cdot q$, pretože potom by mali najviac 4 ND ($pq \cdot 1$, $p \cdot q$, $q \cdot p$ a $1 \cdot pq$).
T_3: Ak je rok rovný súčinu troch prvočísel $a \cdot b \cdot c$ ($a \leq b \leq c$) a ak je $a = 2$ a zároveň $b \cdot c > 15$ alebo $a > 2$ a zároveň $b \cdot c > 12$, môže mať taký rok maximálne 5 ND (nemôže totiž mať dátumy $1 \cdot abc$, $abc \cdot 1$, $a \cdot bc$, ale len $bc \cdot a$, $b \cdot ac$, $ac \cdot b$, $c \cdot ab$, $ab \cdot c$)
T_4: Roky v tvare 3. ,4. ,5. mocniny prvočísla majú maximálne 4,5,6 ND.

Vďaka T_1 sa zo skúmania vylúčia prvočíselné roky 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 (25 možností).
T_2 vylúči súčiny prvočísel, ktoré sú menšie ako 100 tj.
$2 \cdot p \dots$ vyradí roky 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94
$3 \cdot p \dots$ vyradí roky 9, 15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93
$5 \cdot p \dots$ vyradí roky 25, 35, 55, 65, 85, 95
$7 \cdot p \dots$ vyradí roky 49, 77, 91
No a T_3 vylúči pre $a = 2$, $b \cdot c > 15$ roky:
44, 52, 68, 76, 92 (tvar $2 \cdot 2 \cdot p$)
42, 66, 78 (tvar $2 \cdot 3 \cdot p$)
50, 70 (tvar $2 \cdot 5 \cdot p$)
98 (tvar $2 \cdot 7 \cdot p$)
a pre $a > 2$, $b \cdot c > 12$ roky:
45, 63, 99 (tvar $3 \cdot 3 \cdot p$)
75 (tvar $3 \cdot 5 \cdot p$)
T_4 odsunie nabok roky 8, 27, 16, 81, 32. Vyradíme aj roky 1 (1 ND) a 0. Na preskúmanie zostáva 19 čísel:
12: $12 \cdot 1$ $6 \cdot 2$ $4 \cdot 3$ $3 \cdot 4$ $2 \cdot 6$ $1 \cdot 12$ – **6**
18: $18 \cdot 1$ $9 \cdot 2$ $6 \cdot 3$ $3 \cdot 6$ $2 \cdot 9$ – **5**
20: $20 \cdot 1$ $10 \cdot 2$ $5 \cdot 4$ $4 \cdot 5$ $2 \cdot 10$ – **5**
24: $24 \cdot 1$ $12 \cdot 2$ $8 \cdot 3$ $6 \cdot 4$ $4 \cdot 6$ $3 \cdot 8$ $2 \cdot 12$ – **7**
28: $28 \cdot 1$ $14 \cdot 2$ $7 \cdot 4$ $4 \cdot 7$ – **4**
30: $30 \cdot 1$ $15 \cdot 2$ $10 \cdot 3$ $6 \cdot 5$ $5 \cdot 6$ $3 \cdot 10$ – **6**
36: $18 \cdot 2$ $12 \cdot 3$ $9 \cdot 4$ $6 \cdot 6$ $4 \cdot 9$ $3 \cdot 12$ – **6**
40: $20 \cdot 2$ $10 \cdot 4$ $8 \cdot 5$ $5 \cdot 8$ $4 \cdot 10$ – **5**
48: $24 \cdot 2$ $16 \cdot 3$ $12 \cdot 4$ $8 \cdot 6$ $6 \cdot 8$ $4 \cdot 12$ – **6**
54: $27 \cdot 2$ $18 \cdot 3$ $9 \cdot 6$ $6 \cdot 9$ – **4**
56: $28 \cdot 2$ $14 \cdot 4$ $7 \cdot 8$ $8 \cdot 7$ – **4**
60: $20 \cdot 3$ $15 \cdot 4$ $12 \cdot 5$ $10 \cdot 6$ $6 \cdot 10$ $5 \cdot 12$ – **6**
64: $16 \cdot 4$ $8 \cdot 8$ – **2**
72: $24 \cdot 3$ $18 \cdot 4$ $12 \cdot 6$ $9 \cdot 8$ $8 \cdot 9$ $6 \cdot 12$ – **6**
80: $20 \cdot 4$ $10 \cdot 8$ $8 \cdot 10$ $16 \cdot 5$ – **4**
84: $28 \cdot 3$ $21 \cdot 4$ $14 \cdot 6$ $12 \cdot 7$ $7 \cdot 12$ – **5**
88: $22 \cdot 4$ $11 \cdot 8$ $8 \cdot 11$ – **3**
90: $30 \cdot 3$ $18 \cdot 5$ $15 \cdot 6$ $10 \cdot 9$ $9 \cdot 10$ – **5**
96: $24 \cdot 4$ $16 \cdot 6$ $12 \cdot 8$ $8 \cdot 12$ – **4**
Vidíme že rok 24 má 7 ND a žiaden iný skúmaný rok ich nemá viac ani rovnako. Keďže sme vylučovali len roky s maximálne 6 ND, je 24 najplodnejším ND–rokom.

Úloha č. 5: *Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny 3 farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiaden nový nenarodí, ani žiaden neumrie.)*

Riešenie: (opravovali Janka a Miťo)

Pri stretávaní chameleónov na ostrove nezáleží na tom, ktorá farba je ktorá — keby sme farby vymenili, rozdiel by bol iba v tom, na akú farbu by sa nakoniec všetky chameleóny prefarbili. Keďže svoju farbu môžu meniť iba vzájomným stretávaním, sústredíme sa na to, ako budú tieto stretnutia prebiehať. Skúsme si všimnúť rozdiel počtov dvoch farieb, ktorý budeme chápať ako $a-b$ bez ohľadu na to, ktorých je viac. Teda tento rozdiel môže byť aj záporný. Pred stretnutím teda máme rozdiel dvoch farieb $a-b$ a uvažujeme tri alternatívy stretnutia:

	Zmena	Pôvodný stav:		Nový stav:
1.	$(A,B)\to(C,C)$	$((a-1)-(b-1))$	$=$	$(a-b)$
2.	$(A,C)\to(B,B)$	$((a-1)-(b+2))$	$=$	$(a-b-3)$
3.	$(B,C)\to(A,A)$	$((a+2)-(b-1))$	$=$	$(a-b+3)$

Vidíme, že rozdiely počtov chameleónov buď zostávajú rovnaké, alebo sa menia o ± 3, teda ich zvyšok po delení tromi sa nemení bez ohľadu na priebeh stretnutia a farby. Takáto vlastnosť sa nazýva *invariant*. Teraz sa iba stačí pozrieť do zadania, aké boli zvyšky na začiatku a aké by mali byť na konci. Ak sú rovnaké, úloha môže mať riešenie, ak sa nerovnajú, neexistuje taká kombinácia stretávania, aby na jej konci boli všetky chameleóny jednofarebné. To si ale môžete vyskúšať aj sami.

Komentár: Asi každý, kto tento príklad riešil, prišiel na to, že taký stav sa nedá dosiahnuť. Problém nastal, keď sa snažil prísť na to, prečo. Keď totiž zistím, že stav nenastane, treba to aj dokázať a dokázať, že niečo nejde, je (ako mnohí zistili) dosť ťažké. Mnohí si na základe rôznych pokusov všimli, ako sa rozdiely menia, ale to samotné dôkaz nie je. Dôkaz to bude až vtedy, ak naozaj ukážem, že rozdiely sa tak menia vždy a inak sa nemôžu — to znamená ukázať, ako sa zmenia z ľubovoľného stavu ľubovoľným stretnutím. Viacerí z vás vychádzali len z pôvodného stavu a ukázali, ako sa rozdiely menia prvým stretnutím. To nestačí. Treba vysvetliť, prečo sa rozdiely menia rovnako aj v hocakej inej situácii. Dosť v tomto príklade pomohlo všimnúť si, že na farbách vlastne nezáleží. Potom stačilo ukázať, čo sa stane pri jednom ľubovoľnom stretnutí (nebolo treba rozoberať samostatne stretnutia žltý-zelený, zelený-hnedý…). V riešení je dôležité myšlienky formulovať tak, aby aj človek, ktorý príklad neriešil, vedel pochopiť, ako si rozmýšľal a k čomu si dospel. Na záver pár konkrétnych pripomienok. Viacerí písali, čo sa deje s rozdielmi, ale ani raz nenapísali, čo pod rozdielom chápu. Niekedy to z riešenia bolo vidno, ale väčšinou nie. Potom sme mali problém, pretože rozdiel sa tu dá chápať viacerými spôsobmi a pre každý z týchto spôsobov riešenie vyzerá *trochu* inak. Ak naším rozdielom bude absolútna hodnota, teda rozdiel menšieho od väčšieho, nie je pravda, že rozdiel sa bude meniť iba o násobky trojky. Pravdou ale je, že z rozdielu nedeliteľného trojkou nikdy nedostanem deliteľný. Tento detail si mnohí nevšimli a prišli o pár bodov. A ešte niečo, čo sa týka väčšiny z vás. Zvyšky po delení záporných čísel trojkou sa nerovnajú zvyškom, ktoré dávajú ich absolútne hodnoty.

Úloha č. 6: *Dokážte, že v každom konvexnom deväťuholníku existujú aspoň dve uhlopriečky ležiace na priamkach, ktoré sú rovnobežné alebo spolu zvierajú uhol menší než 7 stupňov.*

Riešenie: (opravovali Tomáš L. a Paľo N.)

V prvom rade si spočítajme, koľko uhlopriečok je v deväťuholníku. Z každého vrcholu ich vychádza šesť, to máme $9\cdot 6=54$. Každú sme však zarátali dvakrát, preto po vydelení dvoma dostávame 27 uhlopriečok. Ďalej o uhlopriečkach uvažujme ako o celých priamkach, na ktorých uhlopriečky ležia (na vzájomných uhloch to nič nemení). Všimnime si, že ak ľubovoľnú priamku posunieme, všetky uhly medzi priamkami ostanú zachované (rozmyslite si!). A teraz prichádza na rad finta. Posuňme si naše priamky tak, aby všetky prechádzali jedným spoločným bodom. Dostaneme zväzok priamok. Ak boli niektoré priamky rovnobežné, potom ďalej nemáme čo dokazovať. Prepokladajme teda, že boli všetky rôznobežné. Potom týchto 27 priamok rozdeľuje rovinu na 54 uhlov (kto neverí, nech si nakreslí…). Ak by každý z týchto uhlov mal aspoň 7 stupňov, súčet ich veľkostí by bol aspoň $54\cdot 7^\circ = 378^\circ$. To je však viac než plný uhol, čiže to nie je možné. Preto musí aspoň jeden uhol mať menej ako 7 stupňov, čo sme chceli dokázať.

Poznámka: Uhol dvoch úsečiek je definovaný ako uhol priamok, na ktorých tie úsečky ležia; nezáleží na tom, či sa úsečky pretínajú. A pod uhlom dvoch priamok rozumieme menší z tých dvoch uhlov, ktoré môžete medzi tými priamkami namerať.

Úloha č. 7: *Algebrogram je pravdivé matematické tvrdenie, zapísané len pomocou čísel (v desiatkovej sústave), znamienok $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $=$ a zátvoriek. Všetky cifry čísel v tomto tvrdení sú však nahradené písmenami, pričom na mieste rovnakých číslic sú rovnaké písmená a na mieste rôznych sú rôzne. Pôvodné matematické tvrdenie sa nazýva riešenie algebrogramu. Algebrogram má toľko riešení, z koľkých rôznych tvrdení mohol vzniknúť.*

Vymyslite algebrogram, ktorého počet riešení je čo najväčšie prvočíslo.
Riešenie: (opravoval Foto)
Po chvíli tvorivého skúšania sa dá nájsť algebrogram

$$A \cdot B = A\,.$$

Sami sa môžete presvedčiť o tom, že počet jeho riešení je pekné dvojciferné prvočíslo. Zásadný prelom v riešení tejto úlohy nastane však až vtedy, keď si uvedomíme, že môžeme pomocou písmen vytvoriť výrazy, ktoré budú mať rovnakú hodnotu bez ohľadu na to, aké číslice za tieto písmená dosadíme. Napríklad výraz $A - A$ bude vždy 0 a výraz $\frac{A}{A}$ bude okrem $A = 0$ vždy 1. Dokonca výraz $\frac{A+B}{A+B}$ bude rovný 1 v každom prípade. Skúste si zostaviť takýto výraz pre ľubovoľné prirodzené číslo. Po tomto sa napríklad *Hanke Budáčovej* podarilo nájsť celkom elegantný algebrogram

$$AB + \frac{A}{A} = AC\,.$$

Opäť sa sami môžete presvedčiť, že počet jeho riešení je tentokrát už o dosť väčšie dvojciferné prvočíslo. Najväčším dobrodruhom bol bezpochyby *Martin Adamčík*, ktorý našiel algebrogram

$$\frac{AB}{AAA \cdot AAA - ABCBA} = \frac{AB}{AAA \cdot AAA - ABCBA}\,.$$

Tu ide už o veľmi slušné trojciferné prvočíslo. On sa však s týmto neuspokojil a na rovnakom princípe len so siedmimi písmenami zostavil algebrogram s počtom riešení 483 839. Našli sa aj takí, čo si zrátali, že desiatková sústava má len desať číslic a preto počet riešení ľubovoľného algebrogramu bude maximálne $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1$ (rozmyslite si!). Najväčšie prvočíslo menšie ako 10! je $10! - 11 = 3\,628\,789$. Predstavte si, že algebrogram s takýmto počtom riešení existuje. Rovnako ako pre každý iný počet riešení od 0 po 10!. Jedna z možností, ako si pomôcť pri jeho tvorbe, sú polynómy, preto sa skúste zamyslieť nad tým, ako môžu súvisieť korene polynómu s riešeniami algebrogramu zostaveného pomocou tohto polynómu. Prajem vám veľa novej zábavy s touto úlohou.

Úloha č. 8: *Dokážte, že pre všetky prirodzené n platí*

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} < 1\,.$$

Riešenie: (opravovali Janči a Rúža)
Zaveďme si označenie

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$$

Skúsme zistiť, čomu je rovné S_n. Spočítajme si S_n pre počiatočné hodnoty n:

$$\begin{aligned}
S_1 = \frac{1}{2!} \quad &= \quad \frac{1}{2} = \frac{2!-1}{2!}\\
S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} \quad &= \quad \frac{5}{6} = \frac{3!-1}{3!}\\
S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} \quad &= \quad \frac{23}{24} = \frac{4!-1}{4!}\\
S_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} \quad &= \quad \frac{119}{120} = \frac{5!-1}{5!}
\end{aligned}$$

Vyslovme hypotézu $S_n = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$. Dokážme ju matematickou indukciou.

1° Pre $n = 1$ sme platnosť tvrdenia dokázali vyššie.

2° Nech tvrdenie platí pre $n = k$, čiže indukčný predpoklad (IP) je $S_k = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$. Dokážme, že to platí aj pre $n = k + 1$, teda dokážme platnosť $S_{k+1} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} \quad &= \quad S_k + \frac{k+1}{(k+2)!} \overset{IP}{=} \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \\
&= \quad \frac{(k+2)((k+1)!-1)+k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-k-2+k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

Tým je hypotéza dokázaná, teda $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Keďže $\forall n \in \mathbb{N}$ je $(n+1)! > 0$, tak

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1.$$

<u>Iné riešenie:</u>
Použime označenie S_n z predošlého riešenia. Upravme k-ty člen z S_n následovne:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Rozpísaním všetkých členov S_n dostávame:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) + \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \\ &= \frac{1}{1!} + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\right) + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\right) - \frac{1}{(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1 \end{aligned}$$

<u>Úloha č. 9:</u> *Aký zvyšok dostaneme, keď číslo $n^{n+1} + (n+1)^n$ vydelíme číslom $n(n+1)$?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Pišta)
Pri riešení využijeme delenie dvoch polynómov. Vezmime si polynóm $x^{n+1} + (x+1)^n$ a vydeľme ho polynómom $x(x+1)$. Dostaneme podiel $P(x)$ a zvyšok, ktorým bude lineárny alebo konštantný polynóm, lebo sme delili polynómom druhého stupňa. Čiže platí $x^{n+1} + (x+1)^n = x(x+1) \cdot P(x) + ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Dosaďme najprv $x = 0$:

$$0 + 1 = 0 \cdot 1 \cdot P(x) + a \cdot 0 + b \Longleftrightarrow 1 = b$$

Teraz dosadíme $x = -1$:

$$(-1)^{n+1} + 0^n = (-1) \cdot 0 \cdot 0 + a \cdot (-1) + 1 \Longleftrightarrow a = 1 + (-1)^n$$

Už poznáme a, b, preto dosadíme $x = n$:

$$n^{n+1} + (n+1)^n = n \cdot (n+1) \cdot P(n) + n \cdot (1 + (-1)^n) + 1$$

Z toho vidíme, že zvyšok čísla $n^{n+1} + (n+1)^n$ po delení číslom $n \cdot (n+1)$ je $n \cdot (1 + (-1)^n) + 1$, teda ak n je nepárne, zvyšok je 1, ak n je párne, zvyšok je $2n + 1$. Tým je príklad vyriešený.

<u>Úloha č. 10:</u> *Okolo okrúhleho stola sedí 30 ľudí. Každý z nich je buď múdry, alebo hlúpy. Každého z nich sa spýtame (práve raz), či jeho sused sediaci vpravo od neho je múdry alebo hlúpy. Pritom vieme, že múdry nám odpovedá pravdivo a hlúpy odpovedá náhodne. Počet hlupákov je najviac n. Pri akom najväčšom n môžeme s istotou nájsť múdreho človeka?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Rado)
Ukážeme si, že najväčšie n, pri ktorom vieme nájsť múdreho človeka, je 8. Najprv si ukážeme príklad odpovedí pre $n = 9$, kde nebudeme vedieť s istotou nájsť múdreho človeka. Pre väčšie n nám stačí zobrať si prípad, keď hlupákov bude 9 (hlupákov je najviac n) a budú odpovedať ako v prípade uvedenom dole. Odpovede budeme značiť do riadku, pričom predpokladáme, že sused po pravici znamená sused vpravo v riadku a že posledný človek je ľavý sused prvého človeka. Ak by sme dostali pri $n = 9$ takéto odpovede:
`MMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMH` (tým myslím, že na prvého povedali, že je múdry, ...na šiesteho, že je hlúpy, ...na posledného, že je hlúpy), tak daní ľudia mohli sedieť napríklad takto:

```
HHHHHMMMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMH
MMMMMHHHHHHMMMMMMHMMMMMHMMMMMH
MMMMMHMMMMMHHHHHHMMMMMMHMMMMMH
MMMMMHMMMMMHMMMMMHHHHHHMMMMMMH
MMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMHHHHHHM
```

(presvedčte sa!). Avšak teraz pre každé miesto vieme nájsť aspoň jedno z týchto rozsadení, kde je niekto hlúpy a aspoň jedno, kde je niekto múdry. Teda nevieme s istotou povedať o nikom, či je múdry. Poďme sa teraz pozrieť na prípad, keď $n \leq 8$, to znamená, že počet hlupákov je najviac 8. Všimnime si teraz odpovede ľudí zľava doprava. Vyberme si skupinky také, ktoré odpovedali na svojho suseda $MM \ldots MH$, takéto skupinky nazvime múdre skupinky. Ak by bol ten, čo povedal H, hlúpy, tak musí byť hlúpy aj jeho sused po ľavici (múdry by nepovedal na hlupáka, že je múdry), takisto aj jeho sused po ľavici, atď. až na začiatok skupinky. Takže múdra skupinka pozostáva v skutočnosti buď zo samých hlúpych, alebo ten, čo povedal H, je určite múdry. Na druhej strane, ak si zoberieme k za sebou idúcich múdrych takých, že majú zľava aj sprava hlúpeho, tak títo budú tvoriť múdru skupinku takú veľkú, aký je ich počet. Ukážeme, že najdlhšia múdra skupinka (ak ich je viac, tak ľubovoľná z nich) nemôže pozostávať zo samých hlúpych, a tým pádom ukážeme, že jej najpravejší člen bude určite múdry. Predpokladajme teda, že najdlhšia múdra skupinka, označme jej dĺžku k, pozostáva zo samých hlúpych. Potom vo zvyšku kruhu ostalo nanajvýš $8-k$ hlúpych, ktorí rozdelia múdrych na nanajvýš $8-k+1 = 9-k$ častí. Teda podľa Dirichletovho princípu bude existovať skupinka múdrych o veľkosti aspoň $\frac{22}{9-k}$. Keďže táto skupinka je tvorená iba múdrymi, ich odpovede budú tvoriť múdru skupinku. Ukážeme teraz, že veľkosť tejto múdrej skupinky je viac ako k.

$$\begin{aligned} k &< \frac{22}{9-k} \\ k \cdot (9-k) &< 22 \\ k^2 - 9k + 22 &> 0 \end{aligned}$$

Keďže kvadratický trojčlen $k^2 - 9k + 22$ má záporný diskriminant, táto nerovnosť vždy platí; pretože úpravy boli ekvivalentné (za predpokladu $k < 9$), platí aj prvá nerovnosť. Teda sporom sme ukázali, že pre $n \leq 8$ sa najdlhšia múdra skupinka nemôže skladať iba z hlúpych, preto jej najpravejší člen je určite múdry.

Úloha č. 11: *Kráľovské Mesto Seminára (KMS) má presne n obyvateľov. Chcú tam vytvoriť čo najviac klubov tak, aby ľubovoľné dva kluby mali spoločného člena, ale ľubovoľné tri kluby už nemali spoločného člena. Koľko najviac klubov môžu takto vytvoriť?*

Riešenie: (opravovali Buggo a Miki)
Označme n počet ľudí a k počet klubov. Pozrime sa na náš problém trošku obrátene a zamyslime sa najprv nad tým, koľko najmenej ľudí potrebujeme, aby sme mohli vytvoriť k klubov.
Čo nám hovoria podmienky zo zadania? To, že žiadne tri kluby nemôžu mať spoločného člena, znamená, že žiaden človek nemôže byť v troch a viacerých kluboch, lebo vtedy by on porušil túto podmienku. Z toho vyplýva, že každý človek môže byť v nanajvýš dvoch kluboch (1).
Máme teda k klubov a zaujíma nás minimálny počet obyvateľov. Keďže každé dva kluby majú spoločného člena, tento človek je v oboch týchto kluboch a z toho a z (1) vyplýva, že nemôže byť v žiadnom ďalšom klube.
Teda každá dvojica klubov musí mať priradeného aspoň jedného človeka (ktorý, ako bolo spomenuté, je len v tejto dvojici klubov), ak by ho nemala, znamenalo by to, že tieto dva kluby nemajú spoločného člena. Dvojíc klubov je $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}k(k-1)$. Teda na vytvorenie k klubov určite potrebujeme aspoň toľko ľudí. Treba však ukázať, že tento daný počet obyvateľov KMS vieme požadovaným spôsobom rozdeliť. To urobíme tak, že každému prieniku priradíme človeka a on bude členom klubov, ktorých prienikom je on sám. (Každý klub bude mať potom $k-1$ členov).
Nás však ale zaujímalo, koľko utvoríme klubov, ak máme k dispozícii n obyvateľov. Vieme, že musí platiť nerovnosť

$$\frac{k \cdot (k-1)}{2} \leq n$$

kde k je hľadaný počet klubov (ak by platila opačná nerovnosť, znamelo by to, že pre dané k by sme určite nemali dostatok občanov). Pokúsime sa teraz vyjadriť k pomocou n:

$$\begin{aligned} \frac{k \cdot (k-1)}{2} &\leq n \\ k^2 - k &\leq 2n \\ k^2 - k - 2n &\leq 0 \\ k_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8n}}{2} \end{aligned}$$

Riešením je interval $\left\langle \frac{1-\sqrt{1+8n}}{2}; \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rangle$. Keďže nás zaujíma maximálne k, zameriame sa na väčší koreň. Ak je prirodzený, potom je riešením a mali sme minimálny počet občanov potrebný pre vytvorenie k klubov. Ak nie je celočíselný, potom je riešením $\left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ (dolná celá časť), lebo je to najväčšie prirodzené číslo zo spomínaného intervalu a počet klubov musí byť prirodzené číslo. Takýto počet klubov vieme vytvoriť tak, že vytvoríme kluby postupom uvedeným vyššie a ľudia, ktorí ostanú nezadaní, nebudú členmi žiadneho klubu. Títo členovia nám k ničomu nepomôžu, lebo keby sme chceli ďalší klub, nemali by sme na neho dosť ľudí, čo vyplýva z predchádzajúceho postupu. Teda maximálny počet klubov je

$$k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor.$$

Úloha č. 12: *Dokážte, že pre každé celé číslo $n > 1$ môžeme napísať číslo $n^{12} + 64$ ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako 1.*

Riešenie: (opravoval Peťo)
Kľúčom k zdolaniu úlohy je rozloženie polynómu $n^{12} + 64$ na súčin štyroch zátvoriek. Hneď vidíme, že

$$n^{12} + 64 = (n^4)^3 + 4^3 = (n^4 + 4)(n^8 - 4n^4 + 16).$$

Prvá zátvorka sa ešte dá upraviť ako

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

Zatiaľ teda máme

$$n^{12} + 64 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)(n^8 - 4n^4 + 16).$$

Na prvý pohľad nevidíme, či sa tretia zátvorka dá rozložiť. Avšak na začiatku sme mohli postupovať aj inak.

$$n^{12} + 64 = n^{12} + 16n^6 + 64 - 16n^6 = (n^6 + 8)^2 - (4n^3)^2 = (n^6 + 4n^3 + 8)(n^6 - 4n^3 + 8).$$

Spolu teda dostávame

$$(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)(n^8 - 4n^4 + 16) = (n^6 + 4n^3 + 8)(n^6 - 4n^3 + 8).$$

Polynóm $n^2 + 2n + 2$ delí ľavú stranu, musí teda deliť aj pravú. Mohol by teda deliť jeden z polynómov $n^6 + 4n^3 + 8$ a $n^6 - 4n^3 + 8$. Po vydelení skutočne zistíme, že $n^6 - 4n^3 + 8 = (n^2 + 2n + 2)(n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 4n + 4)$. Podobne aj $n^6 + 4n^3 + 8 = (n^2 - 2n + 2)(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n + 4)$. Konečne teda

$$n^{12} + 64 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)(n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 4n + 4)(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n + 4). \tag{1}$$

Je ľahké už si len uvedomiť, že pre každé celé $n > 1$ platia (sami si dokážte, prečo) nerovnosti

$$1 < n^2 - 2n + 2 < n^2 + 2n + 2 < n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 4n + 4 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n + 4.$$

V (1) teda máme číslo $n^{12} + 64$ napísané ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako 1, čo sme chceli.

Komentár: Objavili sa riešenia dokazujúce platnosť tvrdenia len pre párne n. Nakoľko tento poznatok je pomerne ľahko nahliadnuteľný, bol zaň udelený len jeden bod. Tiež bolo zopár pokusov o zovšeobecnenie tvrdenia a získanie viac ako sedem bodov. Tu by sme chceli podotknúť, že body naviac môžete získať len v prípade, ak na dôkaz vášho silnejšieho tvrdenia použijete náročnejšie úvahy, nie iba tie isté trocha zovšeobecnené úvahy.

Úloha č. 13: *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Na stranách AB a AC zvolíme po rade body M, N. Kružnice s priemermi BN a CM sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q a ortocentrum H trojholníka ABC ležia na priamke.*

Riešenie: (opravoval Mazo)
Označme kružnicu s priemerom BN ako k_{BN}, kružnicu s priemerom CM ako k_{CM} a päty výšok z bodov B, C po rade P_B, P_C. Zjavne P_B leží na k_{BN} a P_C leží na k_{CM}. Z tých istých príčin body P_B, P_C ležia na Tálesovej kružnici k nad priemerom BC, teda pre mocnosť ortocentra H ku k platí

$$|HC| \cdot |HP_C| = |HB| \cdot |HP_B|. \tag{2}$$

Mocnosť bodu H ku kružnici k_{BN} je $|HB| \cdot |HP_B|$ a ku kružnici k_{CM} je $|HC| \cdot |HP_C|$. Podľa (2) sú tieto mocnosti rovnaké a teda bod H leží na chordále týchto dvoch kružníc, teda na priamke PQ.

Poznámka: *Chordála* dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú k týmto kružniciam rovnakú mocnosť. Chordálou je vždy priamka kolmá na spojnicu stredov; ak sa tieto kružnice pretínajú, prechádza oboma priesečníkmi.

Úloha č. 14: *Dokážte, že ak všetky steny štvorstena majú rovnaký obsah, tak jeho dve ľubovoľné protiľahlé hrany majú rovnakú dĺžku.*

Riešenie: (opravoval Peťo)

Zaveďme v priestore štvorstena $ABCD$ takú pravouhlú súradnicovú sústavu, že bod A má v nej súradnice $(0,0,0)$, bod B $(1,0,0)$, bod C $(a,b,0)$ a bod D (x,y,z) (uvedomte si, že takto ju zaviesť bez ujmy na všeobecnosti skutočne môžeme). Pre obsah S trojuholníkov ABC a ABD, respektíve ACD a BCD potom z vektorového súčinu dostávame

$$2S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \qquad \text{resp.} \qquad 2S = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|.$$

Po vyjadrení vektorových súčinov pomocou súradníc a umocnení na druhú máme rovnosti

$$b^2 = y^2 + z^2 \tag{3}$$

a

$$b^2z^2 + a^2z^2 + (ay - bx)^2 = b^2z^2 + (1-a)^2z^2 + [(a-1)y - b(x-1)]^2. \tag{4}$$

Úpravou (4) dostávame

$$0 = z^2(1-2a) + (b-y)^2 + 2(ay-bx)(b-y). \tag{5}$$

Z (3) dosaďme do (5) $z^2 = b^2 - y^2$,

$$0 = (b^2 - y^2)(1-2a) + (b-y)^2 + 2(ay-bx)(b-y). \tag{6}$$

Keďže $z \neq 0$ (bod D neleží v rovine ABC), z (3) nutne $b \neq y$ a teda môžeme rovnosť (6) vydeliť nenulovým výrazom $b - y$. Úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= (b+y)(1-2a) + b - y + 2(ay - bx) \\ 0 &= 2b - 2ab - 2bx \\ 1 &= a + x. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme rovnosť vydelili výrazom $2b$. Ten je nenulový, nakoľko bod C neleží na priamke AB. Teraz už máme (využívajúc poslednú rovnosť a (3))

$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1-x)^2 + b^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = |BD|.$$

Zrejme podobne (napríklad zavedením úplne novej súradnicovej sústavy) dostaneme aj $|AB| = |CD|$ a $|BC| = |AD|$. Tým je úloha vyriešená.

<u>Komentár:</u> Medzi vašimi riešeniami sa našli dve správne, obe využívajúce kolmé premietnutie hrany CD do roviny, ktorá je rovnobežná s CD a leží v nej AB. Následne sa potom dokáže, že stred CD sa premietne do stredu AB a teda $|AD| = |BC|$. Uvádzame analytické riešenie, nakoľko je možno celkom prekvapujúce, že na túto úlohu pomerne elegantne zaberie. A to najmä vďaka tomu, že obsahy trojuholníkov sa dajú pomocou súradníc pekne zrátať (vektorovým súčinom). Horšie sa obsahy počítajú s dĺžkami strán (tam vystupuje nepekný Herónov vzorec).

<u>Poznámka:</u> Ak si všimneme, že každému štvorstenu je možné opísať rovnobežnosten, pracuje sa s tými priemetmi ľahšie.