Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série letného semestra

Úloha č. 1: *Majme dané kladné celé čísla p a q. Zistite, či je číslo $p+q$ nepárne, ak viete, že číslo $p^3 - q^3$ je nepárne. Platí opačné tvrdenie? Nezabudnite svoje zistenie zdôvodniť.*

Riešenie: (opravoval Vojto)

Vzorové riešenie tohto príkladu sa dozviete spolu s riešeniami druhej série, ďakujeme za trpezlivosť. V prípade extrémnej nedočkavosti kontaktujte Rúžu.

Úloha č. 2: *Po vydarenej kolonizácii sú už osídlené oba mesiace Marsu. Na Deimose platia iba bankovky s hodnotami 4, 8 a 12 Mk (Marťanských korún) a na Phobose sa používajú len bankovky s hodnotami 12, 16 a 20 Mk. V celej Slnečnej sústave platí Logické pravidlo trhu: Na každú planétu/mesiac sa môžu dovážať len tie výrobky, ktoré si môžu obyvatelia platnými domácimi platidlami zakúpiť (pričom pri kúpe sa môžu bankovky aj vydávať). Zistite, či možno na Deimos a Phobos dovážať tie isté výrobky. Ak áno, dokážte, ak nie, zistite, pre ktoré výrobky to neplatí.*

Riešenie: (opravoval Mišo)

Najprv je dobré uvedomiť si, čo sa od nás v úlohe žiada. To, že možno na Phobos a Deimos dovážať tie isté výrobky, znamená, že platidlá na oboch mesiacoch sú ekvivalentné. Inak povedané, ak vieme zaplatiť cenu nejakého výrobku na Phobose, tak ju vieme zaplatiť aj na Deimose. A musí to platiť aj naopak, teda ak vieme zaplatiť nejaký výrobok na Deimose, tak ho vieme zaplatiť aj na Phobose. Aby sme dokázali toto tvrdenie, stačí nám ukázať, že hodnotu každej bankovky na Phobose vieme zaplatiť na Deimose a naopak (rozmyslite si, prečo). Pozrime sa teraz na jednotlivé bankovky. Na Deimose používajú bankovky s hodnotami 4, 8 a 12 Mk. Na Phobose zase používajú 12, 16 a 20 Mk bankovky. Hodnotu 4 Mk vieme na Phobose zaplatiť tak, že dáme 16 Mk bankovku a vrátia nám 12 Mk bankovku. Podobne vieme zaplatiť aj 8 Mk. Dáme 20 Mk a vrátia nám 12 Mk. Pre hodnotu 12 Mk majú aj na Phobose aj na Deimose samostatnú bankovku. Tým sme ukázali, že každú hodnotu bankoviek z Deimosu vieme zaplatiť bankovkami z Phobosu. Ešte musíme ukázať opak. Čiže snažíme sa zaplatiť hodnoty bankoviek z Phobosu bankovkami z Deimosu. Hodnotu 12 Mk zaplatíme samostatnou bankovkou. Hodnotu 16 Mk zaplatíme dvoma 8 Mk bankovkami. Hodnotu 20 Mk môžeme zaplatiť napríklad piatimi 4 Mk bankovkami. Tým sme ukázali, že platidlá na Phobose a Deimose sú ekvivalentné a teda na obidva mesiace sa môžu dovážať tie isté výrobky.

Iné riešenie:

Veľa z vás riešilo úlohu iným spôsobom, možno trochu zložitejším. Snažili ste sa zistiť, aké hodnoty sa dajú zaplatiť na Phobose a aké na Deimose. Väčšina z vás došla k tomu, že tieto hodnoty sa rovnajú, z čoho vyplýva, že na obidva mesiace možno dovážať tie isté výrobky. Pozrime sa teda, aké sumy vieme zaplatiť na Deimose. Vidíme, že všetky hodnoty bankoviek na Deimose sú deliteľné štyrmi. Teda Deimosania určite nevedia zaplatiť sumu, ktorá nie je deliteľná štyrmi (pretože súčet aj rozdiel dvoch čísel deliteľných 4 je vždy číslo deliteľné 4, rozmyslite si, prečo). No keďže majú bankovku s hodnotou 4 Mk, vedia zaplatiť všetky hodnoty deliteľné 4. Teda sme zistili, že na Deimose vedia zaplatiť všetky hodnoty deliteľné 4 a nevedia zaplatiť žiadne iné. Pozrime sa teraz na Phobos. Na Phobose sú tiež všetky bankovky deliteľné 4, teda tiež nevedia zaplatiť hodnotu, ktorá nie je deliteľná 4. Pomocou 16 a 12 Mk bankoviek vieme zaplatiť ľubovoľnú hodnotu deliteľnú 4 (ak tá hodnota je $4n$, tak dáme n bankoviek s hodnotou 20 Mk a vydajú nám n bankoviek s hodnotou 12 Mk). Preto hodnoty, ktoré vedia zaplatiť na Phobose a Deimose, sú rovnaké a teda tam môžu dovážať tie isté výrobky.

Komentár: Najviac chýb, ktoré ste robili a ktoré nám opravovateľom veľmi sťažovali opravovanie, bolo spôsobených tým, že ste si po sebe napísané riešenie neprečítali. Potom sa vám do riešenia dostali vety, ktoré nemali zmysel a opravovatelia museli stráviť veľa času rozmýšľaním nad tým, čo ste vlastne chceli povedať.

Ďalším častým javom bolo, že ste síce ukázali, že na Phobose aj Deimose vedia zaplatiť hodnoty deliteľné 4, ale neukázali ste, že nevedia zaplatiť žiadne iné. Alebo naopak, ukázali ste, že vedia zaplatiť len hodnoty deliteľné 4, no neukázali ste, že naozaj vedia zaplatiť všetky hodnoty deliteľné 4.

Úloha č. 3: *Na ostrove S súostrovia KMS žijú iba poctivci, ktorí vždy hovoria pravdu a klamári, ktorí vždy klamú. Niektorí poctivci sa vypracovali medzi takzvaných elitných poctivcov, podobne existujú aj elitní klamári. Ostrovania sa združujú do rôznych klubov, pričom ostrovan môže byť členom aj viacerých klubov. Klubový život na ostrove S spĺňa nasledujúce 4 podmienky:*

1. *Elitní poctivci tvoria klub.*
2. *Elitní klamári tvoria klub.*

3. *Pre každý klub K platí, že tí ostrovania, ktorí nie sú v klube K, tvoria klub.*

4. *Ku každému klubu K existuje aspoň jeden človek, ktorý o sebe prehlasuje, že je členom klubu K. (Jeho tvrdenie nemusí byť pravdivé, môže to byť klamár.)*

Dokážte, že na ostrove S žije aspoň jeden neelitný poctivec a aspoň jeden neelitný klamár.
Zistite, či všetci poctivci tvoria jeden klub.

Riešenie: (opravoval Čermo)
Ako sme sa dočítali, klubový život na ostrove S je na prvý pohľad pomerne komplikovaná záležitosť. Skúsme si preto trošku posvietiť na jeho štruktúru a možno prídeme na niečo, čo nám pomôže zodpovedať naše otázky. Konkrétne sa budeme zaujímať o to, aké kluby na ostrove môžu alebo nemôžu existovať.
Vychádzajme z našich pravidiel. Podľa bodu č. 4 musí pre každý klub existovať niekto, kto sa k nemu prizná. Predstavme si klub zložený zo samých klamárov (či už elitných alebo neelitných), nikto z členov nemôže prehlásiť, že je jeho členom. Preto musí existovať osoba mimo klubu, ktorá to tvrdí. Je nám jasné, že poctivec by to byť nemohol, lebo by klamal. Ak má existovať klub „len klamári“, musí ostať ešte nejaký klamár mimo. Inak povedané, na ostrove *neexistuje* klub, ktorého členmi sú všetci klamári z ostrova a nikto iný.
To je vcelku užitočná informácia, dokonca nám postačí na dôkaz všetkých troch tvrdení.

(a) Predstavme si ostrov bez neelitných poctivcov. Potom by v klube, ktorý je doplnkom ku klubu elitných poctivcov (podľa bodu č. 3) boli všetci klamári z ostrova (a nikto iný). To je spor s našou užitočnou informáciou. Preto na ostrove žije aspoň jeden neelitný poctivec.

(b) Predstavme si ostrov bez neelitných klamárov, potom by v klube elitných klamárov boli všetci klamári z ostrova, čo nemôže nastať, ako sme sa už presvedčili. Preto na ostrove žije aspoň jeden neelitný klamár.

(c) Ak by existoval klub všetkých poctivcov, jeho doplnkom by bol klub všetkých klamárov, do tretice spor. Na ostrove teda neexistuje klub, v ktorom sú všetci poctivci a nikto iný.

Úloha č. 4: *Pekár Rúža napiekol* 32 *koláčov rôznej hmotnosti. Keď Rúža odišiel telefonovať Ani, pribehol Foto s rovnoramennými váhami a s úmyslom zjesť dva koláče. Chcel zjesť dva najťažšie, no mal čas iba na* 35 *vážení na váhach, ktoré si priniesol. Pomôžte Fotovi nájsť spôsob, ako odhaliť dva najťažšie koláče.*

Riešenie: (opravovala Dada)
Už samotný fakt, že Rúža napiekol práve 32 koláčov, nám môže byť podozrivý. Nie preto, že by Rúža nevedel piecť, božechráň. Ale prečo ich upiekol práve toľko? Možno majú plný dom hladných krkov... Avšak nás asi skôr bude zaujímať, že $32 = 2^5$. Na prvý pohľad vcelku nevyužiteľný fakt. Ale... Keď Foto zistil, že koláčov je práve 32, potešil sa, že to bude veľmi pekný pavúk. *Pavúk* sa v športe nazýva systém, pri ktorom sa všetci hráči na začiatku rozdelia do dvojíc, víťazi z týchto dvojíc sa opäť popárujú a súťažia spolu a víťazi z týchto dvojíc sa opäť popárujú atď., až kým z toho nevzíde jeden absolútny víťaz. Inšpirovaný týmto systémom rozdelil Foto koláče na 16 dvojíc a postupne porovnal hmotnosti v rámci jednej dvojice. Z každej dvojice potom vybral ten ťažší koláč, takže dostal 16 koláčov, t. j. 8 dvojíc. Analogicky postupoval ďalej, až kým nedostal jeden najťažší koláč (rozmyslite si, prečo je „víťaz“ najťažší). Potreboval na to práve $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ vážení. A samozrejme všetko si pekne zapisoval, lebo vedel, že to raz bude potrebovať. Ešte treba určiť koťuhu druhý najťažší koláč. Teraz by sa dal celý postup znovu zopakovať s 31 koláčmi (bez toho najťažšieho) a spomedzi nich nájsť ten najťažší. To by však trvalo pridlho (konkrétne 30 vážení) a Foto predsa nechce, aby ho Rúža pristihol (už stihne len 4 váženia). Tu si treba uvedomiť, že druhý najťažší koláč môže byť len ten, ktorý bol priamo porovnávaný s najťažším koláčom a samozrejme „prehral“, pretože o takomto jedincovi máme len informáciu, že je ľahší ako najťažší koláč, teda kľudne môže byť druhý najťažší. A ku každému inému koláču vieme nájsť okrem toho najťažšieho ešte aspoň jeden ťažší koláč, to znamená každý iný koláč je nanajvýš tretí najťažší. Nuž pozrime sa teda na to, koľko je takých koláčov, čo priamo „prehrali“ s tým najťažším. V každom kole bol práve jeden, kôl bolo 5 (lebo 2^5), teda takých koláčov je tiež 5. A keďže si poctivý Foto všetko pekne zapisoval, teraz vie aj to, ktorých 5 koláčov to je. Na to, aby zistil najťažší koláč spomedzi týchto piatich, mu 4 váženia stačia. A takto to Foto krásne stihne a Rúža ho nepristihne :).

Poznámka: Skúste si rozmyslieť, či tento postup funguje aj pre iný počet koláčov. Zaujímavým problémom je skúmať, či 35 vážení je minimálny potrebný počet. Šlo by to aj na menej? Ako súvisí tento minimálny počet vážení s počtom koláčov?

Komentár: Skoro všetci ste prišli na to, aký postup treba zvoliť, horšie to už bolo s odôvodňovaním, prečo musí Foto nakoniec vážiť ešte tých 5 koláčov. Prečo práve jeden z tých piatich mohol byť druhý najťažší? A prečo to nemohol byť žiaden iný koláč? Nuž pamätajte dobudúcna – všetko treba vysvetliť.

Úloha č. 5: *Aňa na narodeniny dostala od Kuba veľkú bielu kocku $n \times n \times n$. (Samozrejme, že n je prirodzené číslo.) Keďže sa jej zdala príliš jednotvárna, zafarbila niektoré jej steny na červeno. Po rozrezaní na n^3 malých jednotkových kocočiek zistila, že* 45 *kocočiek nemá žiadnu stenu červenú. Aňa potom na oslave zjedla zvyšných*

30 *Rúžových koláčov a zabudla, ako zafarbila svoju novú kocku. Pomôžte Ani zistiť, koľko stien pôvodnej kocky zafarbila na červeno.*

Riešenie: (opravoval Janči a Pišta)
Vychádzajme zo situácie, že ešte žiadna stena kocky nie je zafarbená. Útvar, ktorý tvoria čisté kocky, je kváder (kocka) $n \times n \times n$. Porozmýšľajme nad tým, čo sa vlastne stane, keď zafarbíme jednu stenu kocky. Prídeme na to, že rozmer kvádra tvoreného čistými kockami sa zmení, a nie hocijako. Práve jeden rozmer sa zmenší o jedna (odoberieme jednu vrstvu malých kociek). Po zafarbení prvej steny nám vznikne kváder s rozmermi $n \times\ n \times\ (n-1)$. Jednotlivé rozmery kvádra môžeme zmeniť maximálne dvakrát. Keď napríklad zafarbíme spodok a vrch našej pôvodnej kocky, tak už výšku kvádra z čistých kociek nezmeníme. To znamená, že kváder z čistých kociek po zafarbení niektorých stien pôvodnej kocky bude mať rozmery $k \times l \times m$, kde $n-2 \leq k, l, m \leq n$. Počet kociek v tomto kvádri je $k \cdot l \cdot m$.
Vieme, že Aňa má 45 takýchto malých čistých kociek, teda potrebujeme rozložiť číslo 45 na súčin troch prirodzených čísel tak, aby rozdiel medzi najmenším a najväčším bol najviac 2. Keďže $45 = 3^2 \cdot 5$, do úvahy prichádza jedine možnosť $3 \cdot 3 \cdot 5$, lebo ostatné súčiny musia obsahovať činiteľ 1 a jeden činiteľ bude určite aspoň 5, teda rozdiel medzi najmenším a najväčším bude aspoň 4 a to už nechceme.
Aňa mala kocku $5 \times 5 \times 5$ a zafarbila 4 steny tejto kocky tak, aby jedna dvojica protiľahlých stien ostala čistá.

Úloha č. 6: *Biológ Miki pozoruje chameleóna, ktorý chytá muchy. Chameleón má však prešpekulované pravidlá, ako bude pri chytaní múch oddychovať. Pred prvou chytenou muchou oddychuje 1 minútu. Pred každou $2m$-tou muchou oddychuje toľko minút, ako oddychoval pred m-tou muchou. Pred každou $2m+1$-ou muchou oddychuje o minútu viac, ako oddychoval pred m-tou muchou. Keď skončí niekoľko minútový oddych, chameleón okamžite chytí muchu a opäť začne oddychovať. Zistite:*

a) Po koľkých minútach „snaženia“ chytil chameleón svoju 33-tiu muchu v poradí? (Ráta sa aj prvá minúta oddychu.)

b) Koľkú muchu chytil chameleón po tom, čo prvý krát oddychoval 9 minút bez chytania?

c) Po akom dlhom oddychu chytil chameleón svoju 2005-tu muchu?

Nezabudnite svoje tvrdenia riadne zdôvodniť.

Riešenie: (opravovali Janka a Miki)
Úplne na začiatku nazvime chameleóna napríklad Miťo. Miťovu prestávku pred chytením i-tej muchy označme a_i. V prvej podúlohe potrebujeme zistiť hodnotu súčtu $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{32} + a_{33}$. A čože je to pre nás 66 čísel, vypíšeme ich teda a sčítame, aspoň získame predstavu o Miťových prestávkach.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_i	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	1	2
i	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
a_i	2	3	2	3	3	4	2	3	3	4	3	4	4	5	1	2	2

Vidíme, že 33. muchu chytí Miťo po 83 minútach snaženia.
Druhú časť vyriešime pozorovaním tabuľky. Vyzerá to tak, že prvá prestávka dĺžky k nastane pred muchou s číslom $2^k - 1$. Dokážeme si to matematickou indukciou.

1° Prvý krok máme hotový v tabuľke.

2° Predpokladajme, že to platí pre všetky čísla menšie alebo rovné n, teda n-minútová prestávka nastala prvýkrát pred $(2^n - 1)$-ou muchou. Zo zadania platí, že prvá $(n+1)$-minútová prestávka nastane pri muche s poradovým číslom $2m+1$, kde m je mucha, pred ktorou si prvýkrát oddýchol n minút. Teda $n+1$ minút si Miťo oddýchne po $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = (2^{n+1} - 1)$-vej muche.

Týmto sme vyriešili všeobecnejší problém (ale za to sú body navyše len v kategórii γ :)) a vieme, že po prvom 9-minútovom oddychu chytí Miťo 511-tu muchu.
Oddych pred 2005-tou muchou zistíme jednoducho, spätným aplikovaním predpisu zo zadania:
$a_{2005} = a_{1002} + 1 = a_{501} + 1 = a_{250} + 2 = a_{125} + 2 = a_{62} + 3 = a_{31} + 3 = 5 + 3 = 8$. Mohli by sme pokračovať aj ďalej, ale hodnotu a_{31} máme už vypočítanú v tabuľke. Pred 2005-tou muchou si teda Miťo oddýchne 8 minút.

Komentár: Na tejto úlohe sa nám páčilo, že sa dala vyriešiť rôznymi ďalšími jednoduchými úvahami. Ale nielen to, pre fajnšmekrov núkala netriviálne (skoro až trikové) riešenie založené na zápise čísel v dvojkovej sústave. Poučenie z tohto príkladu: oplatí sa pozrieť na vec aj z iného uhla, môže sa tým problém veľmi zjednodušiť.

Úloha č. 7: *Peťo má nekonečnú štvorčekovú sieť. Pomôžte mu zistiť, pre ktoré N z množiny $\{1, 2, \ldots, 8\}$ je splnená nasledujúca podmienka: Existuje ofarbenie políčok tejto siete na čierne a biele také, že každé čierne políčko susedí* *práve s N čiernymi políčkami a každé biele políčko susedí práve s N bielymi políčkami (políčka spolu susedia, ak majú spoločnú stranu alebo vrchol).*

Riešenie: (opravovali Baška a Rúža)
Vzorové riešenie tohto príkladu sa dozviete spolu s riešeniami druhej série, ďakujeme za trpezlivosť. V prípade extrémnej nedočkavosti kontaktujte Rúžu.

Úloha č. 8: *Nájdite všetky nezáporné celé čísla n, pre ktoré existujú celé čísla a, b spĺňajúce*

$$n^2 = a + b, \qquad n^3 = a^2 + b^2.$$

Riešenie: (opravovali Lucy a Miťo)
Najprv si pripomeňme, že nezáporné celé číslo je číslo z množiny $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Poďme riešiť danú sústavu rovníc s neznámymi a, b a celočíselným parametrom n. Vyjadrime si z prvej rovnice $b = n^2 - a$. Dosadením do druhej rovnice dostávame $n^3 = a^2 + (n^2 - a)^2$. Po drobnej úprave získavame

$$a^2 - n^2 a + \frac{n^4 - n^3}{2} = 0.$$

To je kvadratická rovnica s parametrom n a s neznámou a. A ako vieme rátať kvadratické rovnice? No samozrejme, že s pomocou vzorca pre diskriminant. V našej rovnici máme $D = 2n^3 - n^4$. Aby rovnica mala reálne (alebo dokonca celočíselné) riešenia, musí platiť $0 \leq D = 2n^3 - n^4 = n^3(2 - n)$. Táto nerovnosť je splnená pre reálne čísla z intervalu $\langle 0, 2\rangle$, ale keďže n je (nezáporné) celé číslo, tak $n \in \{0, 1, 2\}$. To je výborné, pretože nám ostali iba tri možné hodnoty čísla n. Pre tieto hodnoty treba ešte overiť, či naozaj existujú celé čísla a, b vyhovujúce zadaniu. Prezradíme, že také čísla naozaj existujú, ale ich nájdenie nechávame na ochotného čitateľa. Na tomto mieste však treba poznamenať, že bez nájdenia týchto čísel (a overenia, že naozaj vyhovujú daným rovniciam), úloha *nie je* úplne vyriešená.

Poznámka: Umocnime obe rovnice na tretiu. Dostaneme číslo n^6 zapísané dvomi rôznymi spôsobmi. Porovnaním dostaneme, že čísla a, b, ktoré sú riešením sústavy, musia spĺňať vzťah $(a+b)^3 = (a^2+b^2)^2$. Odhliadnuc od nejakých triviálnych prípadov môžeme prehlásiť, že $a, b \geq 1$. A zo spomínaného vzťahu vidno, že takýchto čísel a, b veľa nie je, pretože pravá strana rovnosti je skoro vždy väčšia než ľavá. (Skúste si to rozmyslieť a tento spôsob dotiahnuť do konca.) Tento prístup často pomáha pri riešení rovníc v obore celých (aj reálnych) čísel: upravíme rovnicu do tvaru, v ktorom jasne vidno, že jedna zo strán je skoro vždy väčšia ako druhá a riešenia potom hľadáme len medzi triviálnymi prípadmi. Skúste si to na rovnici $a^6 - b^2 = a^4 - b^4 + 48$.

Úloha č. 9: *Je možné rozdeliť množinu racionálnych čísel väčších ako 1 na dve neprázdne disjunktné množiny A a B tak, aby*
a) súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny A patril do A a súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny B patril do B?
b) súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny A patril do A a súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny B patril do B?

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Označme si $\mathbb{Q}'$ množinu všetkých racionálnych čísel väčších ako 1, teda množinu, ktorú máme za úlohu rozdeliť.

a) Predpokladajme, že požadované rozdelenie existuje, teda existujú množiny A a B spĺňajúce podmienky zadania. Množina A je preto neprázdna a obsahuje nejaké racionálne číslo, označme si ho a. Podľa zadania A musí obsahovať súčet ľubovoľných dvoch čísel ktoré do nej patria, teda aj číslo $a + a = 2a$. Z rovnakého dôvodu bude do množiny A patriť aj číslo $2a + a = 3a$ a jednoduchou matematickou indukciou sa dá dokázať, že do A patria čísla tvaru ka pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Rovnako množina B musí byť podľa zadania neprázdna, označme si nejaký jej prvok b. Potom z rovnakých dôvodov ako v predošlom prípade musia do množiny B patriť aj všetky čísla tvaru kb pre $k \in \mathbb{N}$.

   Keďže čísla a aj b sú racionálne, môžeme ich napísať v tvare zlomku. Nech $a = p/q$ a $b = r/s$, potom z predošlých úvah vyplýva, že množina A musí obsahovať aj rq-násobok čísla a, čo je číslo $(rq)\,p/q = pr$. Podobne množina B musí obsahovať aj ps-násobok čísla b, t. j. číslo $(ps)\,r/s = pr$. Tu ale dostávame, že číslo pr by muselo patriť do oboch množín, čo je spor s tým, že množiny mali byť disjunktné. Naše úvahy platia pre ľubovoľné rozdelenie, to znamená, že množinu $\mathbb{Q}'$ nie je možné rozdeliť požadovaným spôsobom.

b) Tu je situácia odlišná. Racionálne čísla ideme násobiť a vlastnosť zachovávajúca sa pri násobení, ktorá nám ako prvá napadne, je parita. Skúsme teda množinu $\mathbb{Q}'$ rozdeliť nasledovne: do množiny A zaradíme tie racionálne čísla, ktorých čitateľ v základnom tvare je nepárne číslo a do množiny B zaradíme tie racionálne čísla, ktorých čitateľ v základnom tvare je párny. Toto rozdelenie je jednoznačné, pretože každé racionálne číslo má jednoznačne daný základný tvar a teda aj paritu čitateľa v tomto tvare. Túto paritu vieme pre každé číslo z $\mathbb{Q}'$ určiť (upravením na základný tvar), teda každý prvok z $\mathbb{Q}'$ patrí do práve jednej z množín A, B.

Zostáva ukázať, že je splnená vlastnosť požadovaná zadaním. Overme ju najprv pre množinu A. Nech $p/q, r/s \in A$ sú dva zlomky v základnom tvare patriace do A. Čísla p, r sú nepárne. Potom súčin daných zlomkov z A je pr/qs. Číslo pr je súčinom dvoch nepárnych čísel a je teda nepárne, navyše pri úprave zlomku pr/qs na základný tvar čitateľ určite nepárny zostane. Táto úprava je totiž len krátením rovnakých prvočísel z čitateľa aj z menovateľa zlomku. Čitateľ na začiatku žiadne dvojky neobsahoval, nebude ich obsahovať ani po krátení. Preto aj $pr/qs \in A$. Preverme ešte množinu B. Ak $p/q, r/s \in B$ sú zlomky v základnom tvare z množiny B, potom p aj r sú párne čísla a navyše q aj s sú nepárne, inak by nešlo o základný tvar. Číslo pr je zjavne párne a čitateľ zlomku pr/qs zostane párnym aj po úprave na základný tvar, pretože q aj s sú nepárne. To znamená, že súčin oboch čísel bude patriť do množiny B a teda naša konštrukcia bola správna.

Komentár: Niektorí z vás sa pokúsili úlohu a) riešiť tak, že do množiny A umiestnili len jediné racionálne číslo a menšie alebo rovné 2 a všetky ostatné prvky $\mathbb{Q}^+$ umiestnili do B s tým, že takto definovaná množina A spĺňa podmienky zadania. Nie sú v nej dve čísla a teda nemáme čo sčitovať. Toto je nesprávne pochopenie zadania. Ak totiž množina A obsahuje a, musí obsahovať napríklad aj súčet $a + a = 2a$, pretože je to súčet dvoch čísel, ktoré obe patria do A (zadanie nevyžaduje, aby boli rôzne).

Úloha č. 10: *Marťanská kocka modrej neznámej hmoty so stranou 10 sa skladá z $10 \times 10 \times 10$ kocočiek. Každá kocočka má svoje súradnice (postupne od vrcholovej kocočky $(1,1,1)$ po vrcholovú kocočku $(10,10,10)$) a je na začiatku zafarbená striebornou farbou. Mačiatka Pa a Pi sa hrajú nasledujúcu hru. Začína Pa a potom sa striedajú v ťahoch. Mačiatko, ktoré je na ťahu, si vyberie striebornú kocočku, ktorá má najväčší súčet súradníc (v prípade, že je takých kocočiek viac, môže si vybrať ľubovoľnú z nich) a prefarbí ju zo striebornej na zlatú. Navyše môže ľubovoľne prefarbiť (na zlatú či na striebornú) každú kocočku okrem vybranej, ktorú pretína alebo ktorej sa dotýka úsečka spájajúca stred vybranej kocočky so stredom kocočky $(1,1,1)$. Prehrá mačiatko, ktoré nebude môcť urobiť svoj ťah. Pre ktoré z mačiatok existuje víťazná stratégia?*

Riešenie: (opravoval Buggo)
Pozrime sa na pravidlá hry, ktorú hrajú naše mačiatka a zistime, aké má táto hra zákonitosti.
Pre väčšiu názornosť predpokladajme, že mačičky nemajú kocku, ale štvorec. Pokúsime sa nájsť víťaznú stretégiu takejto hry. Potom sa posnažíme zistiť, či neexistuje podobné riešenie pre kocku.
Máme teda štvorcovú sieť, ktorá má rozmery 10×10. Všetky políčka sú na začiatku strieborné. Hráč, ktorý je na ťahu, si zvolí nejaké políčko striebornej farby s najväčším súčtom súradníc. Prefarbí ho na zlato. Okrem toho môže prefarbiť (na zlato, alebo na strieborno) aj niektoré ďalšie políčka (okrem vybratého). Sú to tie, cez ktoré prechádza alebo sa ich dotýka úsečka spájajúca stred vybraného políčka a políčka so súradnicou $(1,1)$. Prehráva hráč, ktorý nemôže potiahnuť.
Všimnime si teraz, ktoré políčka majú rovnaký súčet súradníc (nakreslite si obrázok a zistite, ktoré to sú). Vidíme, že tieto políčka ležia na úsečke rovnobežnej s jednou uhlopriečkou. Nazvyme políčka, ktoré majú súčet súradníc rovný n, ako n-tá vrstva. Dôležité je uvedomiť si, že ak si hráč vyberie z n-tej vrstvy ktorékoľvek políčko, nemôže zmeniť farbu žiadnemu inému políčku v n-tej vrstve (porozmýšľajte prečo).
Pokúsme sa teraz zistiť, pri akej situácii nemá hráč, ktorý je na ťahu, šancu vyhrať. Ak ťahajúci hráč musí vyberať políčko z tretej vrstvy, kde všetky políčka $((1,2),(2,1))$ sú strieborné, tak prehrá. Predstavme si, že sme hráč, ktorý prehrá. Čím to je, že prehráme? Je to tým, že keď sme na ťahu, tak môžu nastať dve možnosti. Buď existuje aspoň jedno také strieborné políčko, ktoré nemôžeme prefarbiť (preto v tomto ťahu nevyhráme), alebo sú už všetky štvorčeky zlaté a teda nemôžeme potiahnuť (čo znamená, že sme prehrali). Nezabúdajme, že vo vrstve, z ktorej vyberáme políčko, nedokážeme prefarbiť ani viac, ani menej ako jedno políčko. Čo to ale znamená? Jednoducho to, že ak máme pred naším ťahom vždy na výber z párneho počtu políčok, tak sme v kýbli:).
Môžeme preto hrdinsky vyhlásiť nasledujúce tvrdenie. Hráč prehráva, ak pred každým jeho ťahom je počet políčok, z ktorých si vyberá svoj ťah, párny.
Už nám treba len nájsť výhernú stratégiu. Prevteľme sa teraz do mačičky, ktorá vyhrá. Jedna možnosť, ako sa dá vyhrať táto hra, je taká, že nášho súpera budeme stále udržiavať v prehrávajúcej pozícii. Inak povedané, budeme hrať tak, aby si pri každom ťahu vyberal z párneho počtu políčok. Ktoré z mačiatok má vhodné podmienky na túto hru? Môže to byť Pa? Vyskúšajme, uvidíme.
Čo môžeme robiť ako Pa? Na začiatku prefarbíme na zlato len jedno políčko $(10,10)$. Pi bude tam, kde ho chceme mať. Po ťahu Pi budeme mať na výber nepárny počet políčok. My na svojom ťahu prefarbíme políčka nasledovne.

1. Prefarbíme políčko ktoré sme si vybrali (ako nám kážu pravidlá).
2. Zmeníme farbu každého políčka, ktorého vrstva obsahuje nepárny počet strieborných políčok.

Vieme, že v každej vrstve môžeme prefarbiť aspoň jedno políčko. To nám zároveň stačí na to, aby sme zaručili párny počet strieborných políčok v každej vrstve. Vidíme, že po našom ťahu bude Pi opäť v prehrávajúcej situácii. Tento postup opakujeme, až kým nevyhráme. Hurá!
Rovnakým spôsobom môžeme postupovať, ak sa mačiatka hrajú s kockou, ako je uvedené v zadaní. Bude stačiť, ak bude Pa udržiavať Pi v prehrávajúcom stave. To tiež dokáže, pretože aj v trojrozmernej verzii hry môže z každej vrstvy prefarbiť aspoň jedno políčko.

Komentár: Väčšina z vás, čo ste poslali riešenia, ste úlohu pochopili správne a viac-menej aj správne vyriešili. Niekedy chýbalo poriadne zdôvodnenie niektorých tvrdení. Tiež sa stalo, že ste zabudli, že mačičky môžu prefarbiť aj viac ako dve kocky, presnejšie každú, ktorá spĺňa dané kritériá. Nabudúce si dajte pozor na takéto chyby, ktoré vás môžu obrať o bodíky, aj keď by ste úlohu dokázali vyriešiť pri originálnom zadaní.

Úloha č. 11: *Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n sa dajú čísla $1, 2, \dots, n$ napísať v takom poradí, že pre každé dve čísla sa ich aritmetický priemer nebude rovnať žiadnemu z čísel napísaných medzi nimi.*

Riešenie: (opravovala Hanka)
Úlohu si prečítame, možno na prvýkrát nepochopíme, ale nevzdávame sa a prečítame znovu. Zistíme, že aj napriek tomu, že to je 11-tka, nevyzerá až tak zle. Tak skúsime, či sa s ňou nedá predsa len niečo spraviť. Najlepšie je začať čosi skúšať s malými n (veď kto by to riešil hneď všeobecne, no nie?).
Keďže $n = 1$ a $n = 2$ sú triviálne prípady, začnime s $n = 3$. Určite nemôžeme zvoliť poradie $1, 2, 3$, ale napr. $1, 3, 2$ alebo $3, 1, 2$ a ešte iné vyhovujú. Pre $n = 4$ to môže byť napr. poradie $1, 3, 2, 4$, pre $n = 5$ vyhovuje $1, 5, 3, 2, 4$, pre $n = 6$... Takto pokračujeme a s narastajúcim n je to čím ďalej, tým zložitejšie len tak vypísať postupnosť, ktorá by vyhovovala. Teraz je načase sa trochu zamyslieť a skúsiť prísť na to, ako by to celé vlastne mohlo fungovať. Všimnime si napríklad, čo sa stane, keď rozdelíme čísla na párne a nepárne a preusporiadame ich tak, že párne budú v prvej polovici vytváranej postupnosti a nepárne v druhej. Keďže súčet párneho a nepárneho čísla je číslo nepárne, ich priemer nebude prirodzené číslo. Stačí sa nám teda zaoberať len vzťahmi medzi číslami v rámci týchto dvoch skupín. Toto už zaváňa dobrým nápadom (a tak trochu aj indukciou), už to len nejako dotiahnuť do konca. Tak to s tou indukciou teda poďme skúsiť. Budeme ju robiť vzhľadom na n, pričom chceme dokázať, že pre ľubovoľné 2^n vieme nájsť vyhovujúcu postupnosť.

1° Pre $n = 0, 1$ platí, že vieme čísla od 1 po 2^n správne usporiadať (viď začiatok riešenia).

2° Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $n = k$. Ukážeme teraz platnosť pre $n = k + 1$. Nech $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}$ je dobré usporiadanie čísel $1, 2, \dots, 2^k$ a teda pre všetky $p < q < r \leq n$ platí $(a_p + a_r)/2 \neq a_q$. Zostrojme teraz postupnosti $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k}$ a $(2a_1 - 1), (2a_2 - 1), \dots, (2a_{2^k} - 1)$ a zaoberajme sa postupnosťou $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k}, (2a_1 - 1), (2a_2 - 1), \dots, (2a_{2^k} - 1)$. Je zrejmé, že obsahuje všetky čísla $1, 2, \dots, 2^{k+1}$. Keďže postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}$ je dobre usporiadaná, budú aj postupnosti $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k}$ a $(2a_1 - 1), (2a_2 - 1), \dots, (2a_{2^k} - 1)$ dobre usporiadané (ľahko si môžete dokázať sami). Navyše na ľavej strane máme samé párne čísla a na pravej samé nepárne. O nich z predošlej úvahy už vieme svoje, takže môžeme povedať, že takto zostrojená postupnosť čísel $1, 2, \dots, 2^{(k+1)}$ je dobre usporiadaná.

Podarilo sa nám ukázať platnosť tvrdenia pre ľubovoľné $n = 2^k$. Postupnosť dĺžky n menšej ako je 2^k dostaneme tak, že vezmeme usporiadanú postupnosť dĺžky 2^k a odstránime z nej prvky, ktoré sú väčšie ako n. Takto vzniknutá postupnosť určite spĺňa podmienky zadania. Z toho vyplýva, že zadaniu úlohy vyhovujú všetky prirodzené čísla n.

Úloha č. 12: *Nech a, b, c, $a + b - c$, $b + c - a$, $a + c - b$, $a + b + c$ je sedem rôznych prvočísel. Súčet nejakých dvoch z čísel a, b, c je 1000. Označme najväčšie, resp. najmenšie zo spomínaných siedmich čísel ako M, resp. m. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla $M - m$.*

Riešenie: (opravoval Mazo)
Predpokladajme, že čísla a, b, c spĺňajúce všetky podmienky zo zadania existujú; inak vôbec nemá zmysel hľadať maximum výrazu $M - m$. Súčet nejakých dvoch z čísel a, b, c je 1000. Ktoré dve čísla to sú? Záleží na tom? Keď si pozrieme ostatné podmienky kladené na čísla a, b, c, všimneme si, že sú symetrické vzhľadom na čísla a, b, c – keď vymeníme ľubovoľné z týchto dvoch čísel, nezmení sa nič, inak povedané, je to iba vecou označenia. Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti (BUNV) predpokladať, že $a + b = 1000$. Medzi tými siedmimi prvočíslami je veľa rôznych lineárnych kombinácií čísel a, b, c. Keď budeme skúmať zvyšky týchto čísel po delení nejakým malým prvočíslom, tak v takom veľkom množstve kombinácií sa ľahko stane, že zvyšok 0 sa vyskytne viackrát a to už je spor s podmienkami zo zadania (všetkým sedem uvažovaných prvočísel je rôznych). Takto vieme vylúčiť výskyt párneho prvočísla (t.j. čísla 2) medzi spomínanými siedmimi prvočíslami. Ľahko preskúmame zvyšky týchto čísel po delení tromi (preskúmajte); netreba zabudnúť využiť, že $a + b = 1000 \equiv 1 \pmod 3$. Zistíme, že čísla a, b, c dávajú po delení tromi zvyšky 2, 2, 1 (v tomto poradí). Preto prvočíslo $a + b - c$ je deliteľné tromi, teda je rovné 3. Preto $c = a + b - 3 = 997$. Keďže dvojka sa medzi našimi prvočíslami nenachádza, je minimum $m = 3$. Zrejme (overte si) najväčším spomedzi našich čísel je číslo $M = a + b + c = 1000 + 997 = 1997$. Preto rozdiel $M - m = 1997 - 3 = 1994$ pre všetky trojice čísel a, b, c, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania. Takže aj maximálna hodnota tohto rozdielu je 1994.
Ešte treba dokázať, že existujú čísla a, b, c, ktoré spĺňajú všetky podmienky. Vyhovuje napríklad trojica 23, 977, 997 (vyskúšajte si; existujú aj iné trojice).

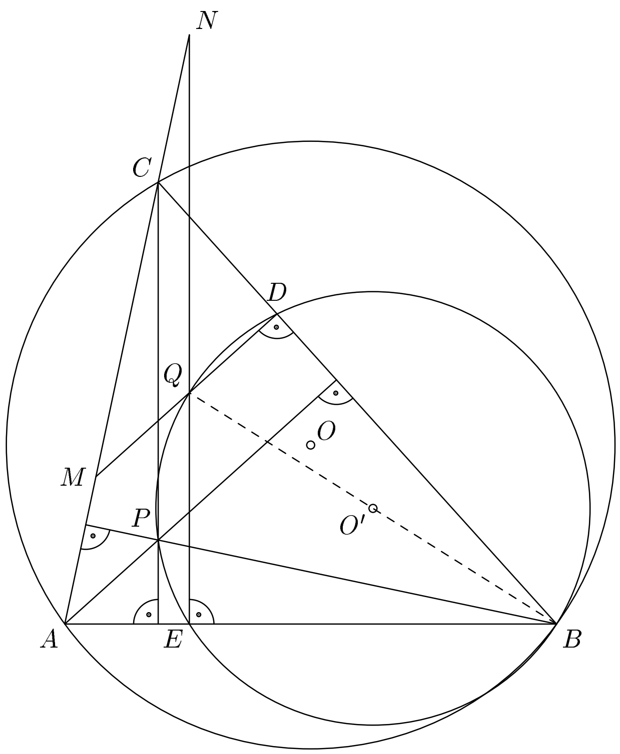
Iné riešenie:
Máme nájsť maximum M a minimum m siedmich čísel. Mnohé z týchto čísel vieme porovnať aj bez toho, aby sme vedeli konkrétne hodnoty a, b, c. Keďže všetky podmienky kladené na čísla a, b, c sú symetrické a tieto čísla sú rôzne, môžeme si BUNV povedať, že $a > b > c$. Zrejme

$$\begin{array}{ccccccccc} b+c-a & < & a+c-b & < & a+b-c & < & a+b+c & & \text{a} \\ b+c-a & < & c & < & b & < & a & < & a+b+c\,, \end{array}$$

preto minimum $m = b + c - a$, maximum $M = a + b + c$ a výraz $M - m = 2a$. Takže maximalizujeme najväčšie prvočíslo, ktoré sa nachádza medzi číslami a, b, c. Všetky tieto prvočísla sú menšie ako 1000: dve z nich preto, lebo ich súčet je 1000 a tretie preto, lebo keď ho odčítame od súčtu zvyšných dvoch (teda od čísla 1000), dostaneme kladné číslo. Najväčšie prvočíslo menšie ako 1000 je 997, teda sme ukázali, že $M - m \leq 2 \cdot 997 = 1994$. Čísla a, b, c, ktoré spĺňajú všetky podmienky a dosahuje sa pre ne rovnosť, nájdeme tak, ako v prvom riešení (napr. použitím počítača).

Úloha č. 13: *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník vpísaný do kružnice so stredom O. Nech M, N sú body na priamke AC také, že $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$. Nech D je päta kolmice z bodu M na priamku BC, E päta kolmice z bodu N na priamku AB. Nech O' je stred kružnice opísanej trojuholníku BED. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka ABC leží na kružnici opísanej trojuholníku BED. Dokážte, že stred úsečky AN a bod B sú súmerne združené podľa stredu úsečky OO'.*

Riešenie: (opravoval Foto)



(*Podľa Františky Jasnej.*) Tak ako pri každej geometrickej úlohe, najdôležitejší je pekný veľký obrázok. Označme ortocentrum trojuholníka ABC ako P, priesečník priamok MD a NE ako Q (treba si uvedomiť, či a prečo vždy existuje). Vidíme, že uhly QDB a QEB sú pravé a teda body D a E ležia na *Tálesovej kružnici* nad priemerom QB, čiže jej stred O' je v polovici úsečky QB. Máme ukázať, že P leží na kružnici opísanej trojuholníku BED. Inak povedané ukázať, že uhol QPB je pravý, lebo zrejme P je rôzne od B (ak je P totožné s Q, tak niet čo dokazovať, tvrdenie platí triviálne). Vieme, že AC je kolmá na PB, teda stačí ukázať, že priamky PQ a AM sú rovnobežné. Toto už ponechávam ako cvičenie pre šikovného čitateľa. Na záver si treba uvedomiť, že celý dôkaz sa dá urobiť pre akúkoľvek polohu úsečky MN, okrem prípadu, keď je táto zhodná s úsečkou AC. Vtedy je však dôkaz tvrdenia triviálny.

Hor' sa na druhú časť. Zo zadania je zrejmé, že stred AN je aj stredom CM. Označme ho S. Bod O' je stred úsečky QB a bod O ako stred opísanej kružnice je tiež stredom priemeru prechádzajúceho bodom B, nech je to BF. Tvrdenie v zadaní platí práve vtedy, keď S je stred FQ. Hľadajme teda, kde je stred FQ. Z opísanej kružnice je zrejme FA kolmé na AB a FC kolmé na CB.

Keďže O je na osi úsečky AB a O' na osi EB, tak stred OO' bude ležať na osi týchto osí. Tiež vidíme, že stred FQ leží na osi priamok FA a NE, čiže na kolmici na AB prechádzajúcej stredom úsečky AE, čo nie je nič iné, než stredná priečka v trojuholníku AEN. Podobne vďaka tomu, že O leží na osi BC a O' leží na osi BD, tak stred FQ leží na osi priamok FC a MD, čiže na strednej priečke trojuholníka CDM. Vidíme, že stred FQ musí byť stredom AN aj stredom CM, čiže je to bod S. Hotovo! Hurá!!!

Úloha č. 14: *Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ označme s_n počet permutácií $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prvých n prirodzených čísel takých, že*

$$1 \leq |a_k - k| \leq 2 \qquad \text{pre všetky } k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n > 6$ platí

$$7s_{n-1} < 4s_n < 8s_{n-1}\,.$$

Riešenie: (opravoval Foto)

Manuálne určme niekoľko prvých členov: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$, $s_4 = 4$, $s_5 = 6$. Teraz skúsme rekurentne vyjadriť s_n za predpokladu $n \geq 6$. Takéto permutácie sa dajú jednoznačne rozdeliť na 4 disjunktné typy:

1) $a_n = n - 1$, zároveň $a_{n-1} = n$

2) $a_n = n - 1$, zároveň $a_{n-2} = n$

3) $a_n = n - 2$, zároveň $a_{n-2} = n$

4) $a_n = n - 2$, zároveň $a_{n-1} = n$

Počet permutácii prvého typu je zrejme s_{n-2}, lebo každá takáto permutácia vznikne z permutácie prvých $n-2$ čísel pridaním posledných dvoch členov n, $n-1$.
Pre permutácie tretieho typu musí okrem už uvedeného jednoznačne platiť aj

$$a_{n-1} = n - 3 \quad a_{n-3} = n - 1$$

Čiže týchto bude s_{n-4}.
Šikovný čitateľ isto poľahky nahliadne, že permutácií druhého typu bude rovnako veľa ako všetkých vyhovujúcich permutácií veľkosti $n-1$, pre ktoré platí $a_{n-2} = n - 1$.
Analogicky permutácií štvrtého typu bude rovnako veľa ako všetkých vyhovujúcich permutácií veľkosti $n-1$, pre ktoré platí $a_{n-1} = n - 2$.
Porovnajme súčet S takto prepísaných permutácií druhého a tretieho typu s s_{n-1}. Každá permutácia dĺžky $n-1$ prvého typu je v S zarátaná dvakrát. Podľa toho, čo sme už spomenuli vyššie, je týchto s_{n-3}. Každá permutácia dĺžky $n-1$ tretieho typu nie je v S zarátaná ani raz. Týchto je s_{n-5}. A nakoniec všetky permutácie dĺžky $n-1$ druhého a štvrtého typu sú v S zarátané práve raz. Preto

$$S = s_{n-1} + s_{n-3} - s_{n-5}$$

Pre s_n potom dostaneme úplný rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-2} + s_{n-4} + S \\ s_n &= s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5} \end{aligned}$$

Zručný čitateľ isto poľahky dokáže, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}$ je rastúca. Vďaka tejto vlastnosti pre ľubovoľné $n > 6$ platí

$$\begin{aligned} 2s_{n-5} &> s_{n-6} \\ s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} + s_{n-5} - s_{n-6} &> s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5} \\ s_{n-1} + s_{n-1} &> s_n \\ 8s_{n-1} &> 4s_n \end{aligned}$$

Teraz nám už treba dokázať iba $4s_{n-1} > 7s_{n-1}$ pre $n > 6$. Vyrátame s_7 a s_8 pomocou rekurentného vzťahu a overíme platnosť tohto tvrdenia pre $n = 7, 8$. Pre $n \geq 9$ postupujeme nasledovne. Z rastúcosti máme

$$\begin{aligned} s_{n-4} - s_{n-5} &> 0 \\ s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5} &> s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} \\ s_n &> s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} > s_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot s_{n-1} + \frac{1}{4} \cdot s_{n-1} = \frac{7}{4} \cdot s_{n-1} \\ 4s_n &> 7s_{n-1}\,, \end{aligned}$$

pričom sme využili platnosť už dokázaného $s_{n-3} > 1/2 \cdot s_{n-2}$. Dokázali sme teda obe nerovnosti v zadaní.