Korešpondenčný Matematický Seminár

Stratené príklady z 1. série

Úloha č. 1: *Majme dané kladné celé čísla p a q. Zistite, či je číslo $p+q$ nepárne, ak viete, že číslo p^3-q^3 je nepárne. Platí opačné tvrdenie? Nezabudnite svoje zistenie zdôvodniť.*

Riešenie: (opravoval Vojto)

Číslo je párne práve vtedy, keď ho vieme zapísať ako $2\cdot(\textit{niečo})$ a nepárne práve vtedy, keď ho vieme zapísať ako $2\cdot(\textit{dačo})-1$ prípadne ako $2\cdot(\textit{voľačo})+1$, kde *niečo, dačo* a *voľačo* sú celé čísla. Vieme, že p^3-q^3 je nepárne. Aby sme zistili, či $p+q$ je nepárne, vyšetrime, akej parity môžu byť čísla p a q. Vyskúšajme teda všetky kombinácie parít čísel p, q a všímajme si, u ktorých je p^3-q^3 nepárne (pričom k a l budú kladné celé čísla):

- ak je p aj q párne: $p^3-q^3=(2k)^3-(2l)^3=8k^3-8l^3=2(4k^3-4l^3)$
- ak je p párne a q nepárne: $p^3-q^3=(2k)^3-(2l+1)^3=8k^3-8l^3-12l^2-6l-1=2(4k^3-4l^3-6l^2-3l)-1$
- ak je p nepárne a q párne: $p^3-q^3=(2k+1)^3-(2l)^3=8k^3+12k^2+6k+1-8l^3=2(4k^3+6k^2+3k-4l^3)+1$
- ak je p aj q nepárne: $p^3-q^3=(2k+1)^3-(2l+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1-8l^3-12l^2-6l-1=$ $=2(4k^3+6k^2+3k-4l^3-6l^2-3l)$

Vidíme, že p^3-q^3 je nepárne práve vtedy, ak práve jedno z čísel p, q je nepárne. Bez ujmy na všeobecnosti, nech p je párne a q nepárne, potom

$$p+q=2k+(2l+1)=2(k+l)+1,$$

čo je nepárne číslo (rovnaký výsledok dostaneme, aj keď by bolo p nepárne a q párne). Čiže ak p^3-q^3 je nepárne, tak aj $p+q$ je nepárne.

Opačné tvrdenie: zistite, či číslo p^3-q^3 je nepárne, ak viete, že $p+q$ je nepárne. Opäť sa pozrime na všetky kombinácie parity čísel p, q a všímajme si, u ktorých je $p+q$ nepárne (kde k a l sú stále kladné celé čísla):

- ak je p aj q párne: $p+q=2k+2l=2(k+l)$
- ak je p párne a q nepárne: $p+q=2k+(2l+1)=2(k+l)+1$
- ak je p nepárne a q párne: $p+q=(2k+1)+2l=2(k+l)+1$
- ak je p aj q nepárne: $p+q=(2k+1)+(2l+1)=2(k+l+1)$

Vidíme, že $p+q$ je nepárne práve vtedy, ak práve jedno z čísel p, q je nepárne. Ako potom dopadne p^3-q^3 sme už rozobrali v prvej časti; p^3-q^3 bude tiež nepárne. Čiže platí aj obrátené tvrdenie.

Komentár: Niektorí písali „vieme, že $n^3=n$, $p^3=p\ \ldots$ ďalej vieme, že $n-n=p$, $n-p=n$, $\ldots$ a ešte vieme, že $n+n=p$, $n+p=n$, $\ldots$“. Nevieme! Bolo to treba dokázať (napríklad tak, ako sme to urobili vyššie). Lebo dôkazy týchto tvrdení boli podstatnou časťou riešenia tohto príkladu.

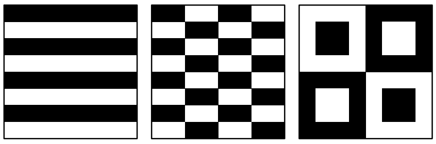
Úloha č. 7: *Peťo má nekonečnú štvorčekovú sieť. Pomôžte mu zistiť, pre ktoré N z množiny $\{1, 2, \ldots, 8\}$ je splnená nasledujúca podmienka: Existuje ofarbenie políčok tejto siete na čierne a biele také, že každé čierne políčko susedí práve s N čiernymi políčkami a každé biele políčko susedí práve s N bielymi políčkami (políčka spolu susedia, ak majú spoločnú stranu alebo vrchol).*

Riešenie: (opravovali Baška a Rúža)

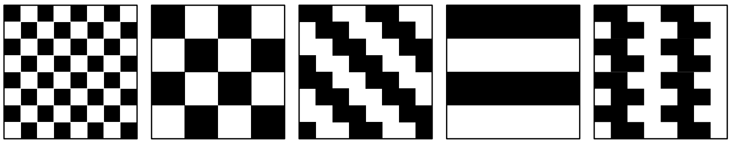
Postupne rozoberieme všetky N od 1 po 8.

Ak by malo existovať ofarbenie políčok Peťovej nekonečnej siete spĺňajúce podmienku pre $N=1$, musí sa tam nachádzať jedno políčko čiernej farby (rozmyslite si, čo by sa stalo, ak by sa tam žiadne čierne políčko nenachádzalo). Nazvime si ho základné a 8 susedov ľubovoľného políčka nazvime okolím daného políčka. Z platnosti podmienky musí byť v okolí tohto základného čierneho políčka práve jedno čierne a teda zvyšných 7 bielych. No nech by toto jedno čierne políčko susedilo so základným stranou alebo vrcholom, vždy by naproti nemu ležiace biele políčko (v zmysle stredovej súmernosti so stredom v strede základného políčka) malo minimálne dvoch bielych susedov (lebo v oboch prípadoch susedí s aspoň dvoma bielymi políčkami z okolia základného políčka), čo je spor s platnosťou podmienky a preto sieť pre $N=1$ neexistuje.

Pre $N=2,3,4,5$ ofarbenie existuje. Vzhľadom na nekonečnosť Peťovej siete uvádzame len konečné výrezy (všetky, ktoré sme spolu s vami objavili):



$N = 2$ $N = 3$ $N = 3$



$N = 4$ $N = 4$ $N = 4$ $N = 5$ $N = 5$

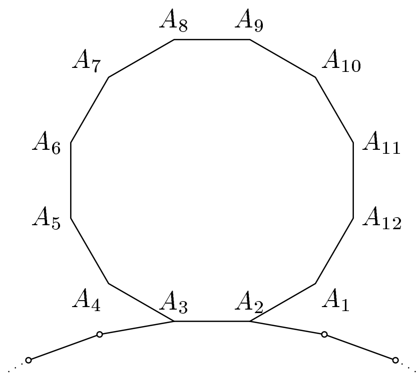
Nech pre $N = 6$ ofarbenie siete existuje. Z podobných dôvodov ako v prípade $N = 1$ sa tam musí nachádzať jedno čierne políčko. Nazvime si ho základné a štvorec, ktorý vytvára spolu so svojim okolím nazvime základný štvorec. V okolí základného políčka musí byť práve 6 čiernych a teda zvyšné dve sú biele. Ak by niektoré z týchto bielych políčok susedilo so základným stranou, malo by vo svojom okolí 5 políčok zo základného štvorca, no nanajvýš jedno z týchto piatich by bolo biele (druhé biele políčko z okolia základného), takže to naše biele políčko by malo aspoň štyroch čiernych susedov, čím by nemohlo mať vo svojom okolí 6 bielych políčok. Čiže obe biele políčka z okolia základného susedia so základným vrcholom. Potom však obe majú vo svojich okoliach tri políčka zo základného štvorca a všetky sú čierne, teda obe môžu mať maximálne 5 susedných políčok bielych, čo je spor s platnosťou podmienky, a preto sieť pre $N = 6$ neexistuje.
Pre $N = 7$ ofarbenie vyhovujúce podmienke neexistuje. Dokážeme to sporom. Nech existuje ofarbenie vyhovujúce podmienke, zrejme sa v ňom nachádza jedno čierne políčko (dôvody sú podobné, ako v prípade $N = 1$), nazvime si ho základné. V jeho okolí musí byť práve 7 čiernych a teda zvyšné jedno je biele. Nech by toto biele políčko susedilo so základným stranou alebo vrcholom, vždy by malo vo svojom okolí aspoň 3 čierne políčka (lebo v oboch prípadoch susedí s čiernym základným políčkom a s aspoň dvoma čiernymi z okolia základného políčka), takže by malo najviac 5 bielych susedov, čo je spor s platnosťou podmienky a preto sieť pre $N = 7$ neexistuje.
Po jednoduchej úvahe zistíme, že ak by malo existovať ofarbenie pre $N = 8$, muselo by byť jednofarebné (všetky políčka siete sú biele, respektíve čierne). Po dôkladnom zamyslení sa nad platnosťou podmienky pri takomto ofarbení (odporúčame previesť, prípadne si pozrieť komentár) zistíme, že takéto ofarbenie podmienke vyhovuje, teda pre $N = 8$ ofarbenie existuje.

<u>Komentár:</u> Už samotný fakt, že si Peťo zohnal nekonečnú štvorčekovú sieť, napovedal, že by mohol mať s ňou veľký problém. No stalo sa, že nielen on mal problém, ale aj veľa jeho pomocníkov :). V čom bol pes zakopaný? Viacerí z vás nesprávne pochopili podmienku zo zadania. Jednak v tom, že si mysleli, že sieť nemôže byť jednofarebná, keďže sa v zadaní hovorí o ofarbení políčok na čierne a biele. Dvak v tom, že tvrdili, že jednofarebná sieť nespĺňa podmienku $N = 8$ pre tú farbu, ktorá sa v sieti nenachádza. Prečo to tak nie je? Prvá časť podmienky sa pýta, či existuje ofarbenie políčok tejto siete na čierne a biele, teda či vieme políčka siete rozdeliť na dve množiny – – na množinu čiernych a množinu bielych políčok (pričom každé políčko sa nachádza práve v jednej z nich). Keďže nikde v zadaní nie je obmedzenie, že by jedna z týchto množín nemohla byť prázdna, prázdna byť môže. Spojka „a“ má medzi slovíčkami „čierne“ a „biele“ len oddeľovací charakter a v žiadnom prípade neskrýva v sebe význam, že z každej farby tam musí byť aspoň jedno políčko. Druhá časť podmienky hovorí, že každé políčko musí susediť práve s N políčkami rovnakej farby, čo (v kontexte s prvou časťou) znamená, že každé políčko, ktoré v sieti existuje (a teda má buď bielu alebo čiernu farbu) musí susediť práve s N políčkami rovnakej farby. A jednofarebná sieť spĺňa túto podmienku pre $N = 8$, lebo každé políčko, ktoré v sieti existuje má okolo seba 8 susedov rovnakej farby a políčka druhej farby v sieti neexistujú, takže do sporu s podmienkou neprichádzajú (keďže o nich podmienka nič nehovorí).
Prísnejšie sme hodnotili dokazovanie neexistencie ofarbení, keďže toto bola podstatná časť príkladu, čo sa týka formulácie myšlienok a argumentácie.

<u>Vzorové riešenia 2. série letného semestra</u>

<u>Úloha č. 1:</u> *Pomalý pavúk Jozef sa pohybuje po stole rovnomernou rýchlosťou* 10 *centimetrov za minútu. Na začiatku každej minúty sa otočí o* $30°$ *doprava. Jozef takto cestuje už* 73 *minút. V polovici sedemdesiatej štvrtej minúty si povedal, že od začiatku ďalšej minúty sa začne otáčať pre zmenu o* $10°$ *doľava. Vráti sa niekedy po sedemdesiatej štvrtej minúte Jozef na miesto, na ktorom už bol? Ak áno, kedy najskôr?*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)



Skúsme si najprv premyslieť, po akej dráhe sa bude Jozef pohybovať. Každú minútu sa pohne o 10 cm vpred a potom sa otočí o 30° doprava. Keďže uhol, o ktorý sa otáča, je v každom kroku rovnaký a navyše 360° je jeho celočíselným násobkom ($360 = 12 \cdot 30$), opíše po 12 takýchto otočeniach Jožko plný uhol a bude otočený rovnako ako na začiatku. Okrem toho sa v každom kroku pohne aj o rovnakú dĺžku, po takýchto 12 krokoch teda nakreslí na stole pravidelný 12-uholník a ocitne sa späť v bode, v ktorom začal. Jeden takýto výlet mu bude trvať 12 minút, čiže vždy po uplynutí nejakého násobku tohto času bude znova v bode, z ktorého vyšiel. To platí aj pre čas 72 minút od začiatku, keďže $6 \cdot 12 = 72$. Preto po 74. minúte – keď Jozef podľahne spontánnemu rozhodnutiu a zmení svoj spôsob cestovania – sa bude nachádzať v bode A_3 (vrcholy 12-uholníka sme si označili postupne A_1 až A_{12} v poradí, v akom nimi Jožko prechádza, pričom začínal v A_1). Od tohto momentu sa bude Jozef otáčať vždy o 10° doľava a z predošlých úvah vyplýva, že tentoraz nakreslí pravidelný 36-uholník v opačnej polrovine určenej priamkou A_2A_3 ($360 : 10 = 36$). Strany tohto 36-uholníka sú rovnako dlhé, ako strany 12-uholníka, pretože Jozef chodí stále rovnako rýchlo. Do bodu A_3 sa Jozef vráti otočený rovnako ako minule, preto tam musí prísť po úsečke A_2A_3. Naše dva mnohouholníky budú mať teda spoločnú stranu A_2A_3, Jozef preto prvý raz po 74. minúte príde do známych miest práve v bode A_2, čiže 35 minút od zmeny svojho správania.

Poznámka: Skúste sa zamyslieť, ako by vyzerala Jozefova dráha, ak sa otáča o 144°. Bude to opäť mnohouholník? A čo ak sa otáča o $(\sqrt{2})°$?

Úloha č. 2: *V obdĺžniku $ABCD$ máme lomenú čiaru z vrcholu A do vrcholu C takú, že ľubovoľná z rovnobežiek so stranami obdĺžnika ju pretína najviac v jednom bode. Dokážte, že dĺžka tejto lomenej čiary nie je väčšia ako polovica obvodu obdĺžnika.*

Riešenie: (opravoval Miťo)

Pozrime sa najprv na to, ako môžu vyzerať lomené čiary, ktoré spĺňajú podmienku zo zadania. Začnime čiarou, ktorá nemá žiadny zlomový bod. (Kreslite si obrázok, najlepšie veľký a prehľadný.) Keďže táto čiara spája body A a C, musí byť zhodná s uhlopriečkou obdĺžnika. Dobre, ale ako dokázať, že je kratšia ako polovica obvodu? Asi ste si všimli, že úsečka AC je preponou pravouhlého trojuholníka ABC. Potrebujeme teda dokázať, že prepona pravouhlého trojuholníka je kratšia ako súčet odvesien.

Čo vieme o pravouhlom trojuholníku? Asi najznámejší poznatok nám poskytuje Pytagorova veta, ktorá v našom prípade hovorí $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. My ale chceme dokázať nerovnosť $|AC| < |AB| + |BC|$. Ako na ňu? Nie je to ťažké – stačí odmocniť vyjadrenie z Pytagorovej vety a dosadiť ho do nerovnosti. (Nezabúdajme, kedy možno odmocňovať rovnosti.) Dostávame nerovnosť

$$\sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} < |AB| + |BC|,$$

ktorej platnosť by sme chceli overiť. Avšak po umocnení a jednoduchej úprave máme $0 < 2|AB| \cdot |BC|$, čo zjavne platí, keďže AB a BC sú úsečky. Výborne, to by bolo.

Skúsme teraz prejsť k čiare, ktorá má práve jeden zlomový bod. Označme ho X (nový obrázok). Zamyslime sa, či vieme nejakým užitočným spôsobom využiť poznatok z predchádzajúcich úvah. (Na tomto mieste *naozaj* treba na chvíľu prestať čítať a samostatne porozmýšľať.) Áno, to využitie je skutočne priamočiare. Tentokrát si všímame dva pravouhlé trojuholníky AXA_1 a XB_1B. (Isto láskavému čitateľovi nerobí problémy domyslieť si, odkiaľ a prečo sa vzali body A_1 a B_1.) Dĺžka lomenej čiary je tentokrát rovná $|AX| + |XC|$ a už vieme, že táto dĺžka je menšia ako súčet dĺžok $|AA_1| + |A_1B| + |BB_1| + |B_1C|$, ktorý sa ale rovná $a + b$. Vyzerá to sľubne, zdá sa, že sme naozaj na niečo prišli.

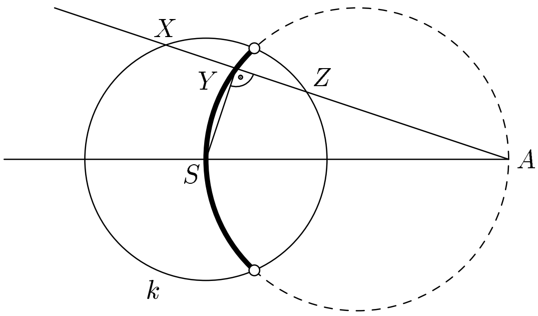
Skúsme teraz už uvažovať všeobecne. Označme si všetky zlomové body čiary a im prislúchajúce body na stranách obdĺžnika. (Asi je zbytočné pripomínať, že vlastný obrázok opäť môže byť užitočný.) Všimnime si, že spojnice bodov na stranách a im prislúchajúcich zlomových bodov sú naozaj rovnobežné so stranami obĺžnika. (Presnejšie: s dvoma sú rovnobežné a na dve sú kolmé.) Je to spôsobené tým, že body na stranách sme konštruovali pomocou rovnobežiek so stranami obĺžnika. Vďaka tomu každej odvesne prislúcha rovnako dlhý úsek na strane obdĺžnika. Z predchádzajúcich úvah vieme, že prepony malých pravouhlých trojuholníkov sú kratšie ako súčty odvesien. Zároveň vieme, že ak sčítame všetky prepony, tak dostaneme dĺžku lomenej čiary.

Teda posledný krok spočíva v tom, že porovnáme súčet dĺžok úsekov na stranách a dĺžky samotných strán. Inými slovami, potrebujeme dokázať, že jednotlivé úseky sa neprekrývajú. To nám stačí, pretože žiadny úsek nepresahuje mimo niektorej zo strán – vyplýva to z toho, že zo zadania je lomená čiara vnútri obdĺžnika. Pouvažujme, čo by znamenalo, že niektoré dva úseky sa prekrývajú. Keďže nad každým úsekom je odvesna a nad každou odvesnou je prepona, tak by to znamenalo, že na nejakom mieste sú nad sebou dve prepony. Avšak každá prepona je časťou čiary a teda keby sme v tomto mieste zobrali rovnobežku so stranou obdĺžnika, pretla by lomenú čiaru aspoň v dvoch bodoch, čo odporuje zadaniu. Teda úseky sa neprekrývajú, čo znamená, že súčet ich dĺžok je kratší ako polovica obvodu, čo sme mali dokázať.

<u>Komentár:</u> Pri tomto príklade má zmysel poukázať na niekoľko zaujímavých vecí. Napríklad ste si asi všimli, že sme dokázali ostrú nerovnosť medzi dĺžkou čiary a polovicou obvodu, aj keď v zadaní je neostrá. Nie je ťažké uvedomiť si (a ani dokázať), že rovnosť zo zadania platí práve vtedy, keď celá lomená čiara leží na obvode. Ďalšou zaujímavosťou je, že tvrdenie platí pre ľubovoľný rovnobežník, nielen pre obdĺžnik. Totiž všade, kde sme využívali Pytagorovu vetu, možno použiť *trojuholníkovú nerovnosť*, je to dokonca ešte jednoduchšie. Veď si to skúste. Úplne na záver si predstavme mesto, kde sú všetky ulice na seba buď kolmé, alebo sú rovnobežné. Teda ak sa v takomto meste chceme prepraviť medzi dvoma bodmi, môžeme ísť len vodorovne, alebo zvislo. Skúste porozmýšľať, aké dlhé sú najkratšie cesty medzi dvoma ľubovoľnými bodmi v porovnaní s cestami v obyčajnom meste.

<u>Úloha č. 3:</u> *Majme danú kružnicu k a ľubovoľný bod A. Bodom A veďme ľubovoľné priamky, ktoré môžu vytnúť tetivu na kružnici k. Nájdite množinu stredov týchto tetív.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Janka)
Hľadáme množinu stredov všetkých tetív, ktoré vytína priamka prechádzajúca bodom A na kružnici k. Preto by sme mali nájsť nejakú vlastnosť, ktorú maju stredy tetív spoločnú a pomocou ktorej budeme vedieť hľadanú množinu popísať. O tetive vieme, že jej os prechádza stredom kružnice, v ktorej leží. (Ak nevieme, daná vlastnosť vyplýva z toho, že trojuholník vytvorený priesečníkmi tetivy s kružnicou a stredom kružnice je rovnoramenný, a teda päta výšky na tetivu leží v jej polovici.)



Nakreslime si situáciu v zadaní. Označme Y stred tetivy XZ. Už vieme, že uhol SYA je pravý. Teraz si už len stačí uvedomiť, že to platí pre každú tetivu (okrem tej, ktorá prechádza bodom S, vtedy je bod Y totožný práve s bodom S). Z toho vyplýva, že stred každej tetivy leží na Tálesovej kružnici nad priemerom SA. Navyše stred tetivy vždy leží vo vnútri kružnice k, a teda hľadanou množinou môže byť len tá časť Tálesovej kružnice nad priemerom SA, ktorá leží vo vnútri k. Ešte sa musíme presvedčiť, že naozaj každý bod Y popísanej množiny je stredom nejakej tetivy, ktorú vytína priamka prechádzajúca bodom A na kružnici k. Ak je Y rôzny od S, tak uhol SYA je pravý a teda Y je stredom tetivy, ktorú AY vytína na k. Ak $Y = S$, tetiva, ktorú vytína AY, je vlastne priemerom kružnice a teda Y je jej stredom.
Ostáva už len diskusia. Ak je bod A totožný s bodom S, každá tetiva bude vlastne priemerom, a teda jej stred bude bod S. V tomto prípade je hľadanou množinou bod S. Ak leží A vo vnútri k (avšak mimo S), hľadanou množinou je celá Tálesova kružnica nad priemerom SA (lebo leží celá vo vnútri kružnice k). Ak bod A patrí kružnici, riešením je Tálesova kružnica nad priemerom SA bez bodu A. A nakoniec, ak bod A leží mimo kružnice k, riešením je oblúk Tálesovej kružnice, ktorý leží vo vnútri k.

<u>Úloha č. 4:</u> *Uhol pri vrchole trojuholníka je rozdelený dvoma priamkami na tri rovnaké uhly. Tieto dve priamky rozdeľujú protiľahlú stranu trojuholníka na tri úseky. Môže sa stať, že najdlhší úsek na strane bude ten stredný?*

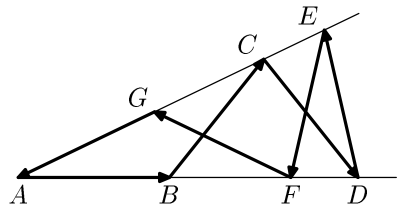
<u>Riešenie:</u> (opravoval Pišta)
Nečítajte, pokiaľ nemáte poruke ceruzku a papier. Nenechajte sa odradiť dĺžkou dôkazu. Postup je jednoduchý, stačí poznať základný vzorec pre obsah trojuholníka, súčet vnútorných uhlov trojuholníka a podobné maličkosti. Proste čítajte všetci, lebo tento príklad vyriešil iba jeden riešiteľ (*Vlado Ujházi*) a ešte ďalší dvaja-traja s menšími nepresnosťami či neúplne a tieto riešenia už využívali tvrdenia, ktoré nemusia poznať všetci prváci.
Nech náš trojuholník je ABC a nech tie dve priamky rozdeľujú uhol pri vrchole A na tri rovnaké časti. Priesečníky týchto dvoch priamok zo stranou BC si označme X a Y tak, aby B, X, Y a C ležali na strane BC v tomto poradí. Zo zadania potom máme, že $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle YAC| = \delta$. Ďalej si označme v trojuholníku ABC uhly pri jednotlivých vrcholoch štandardným spôsobom α, β a γ. Všimnime si, že trojuholníky BAX, XAY a YAC majú jednu spoločnú výšku v, ktorá patrí k vrcholu A. Potom zo známeho vzorca pre obsah trojuholníka dostaneme, že najdlhší z úsekov BX, XY, YC bude ten, ktorý je stranou trojuholníka s najväčším obsahom. Takže poďme porovnávať obsahy trojuholníkov BAX, XAY a YAC.
Označme si E bod na polpriamke AX, pre ktorý $|AE| = |AC|$. Potom podľa vety *sus* sú trojuholníky CAY a EAY zhodné, lebo majú spoločnú stranu AY, $|\sphericalangle EAY| = |\sphericalangle CAY|$ a $|EA| = |CA|$. Teda trojuholníky CAY a EAY majú rovnaký obsah! Všimnime si polohu bodu E. Ak je tento bod vzdialenejší od bodu A ako bod X, tak v trojuholníku EAY je obsiahnutý trojuholník AXY. To znamená, že obsah trojuholníka EAY je väčší ako obsah trojuholníka AXY. My však chceme dosiahnuť, aby nebol obsah trojuholníka EAY väčší, lebo potom by bol úsek CY dlhší ako XY. Teda by sme potrebovali, aby nebol bod E „za“ bodom X. Zo zhodnosti trojuholníkov CAY a EAY vieme, že $|\sphericalangle CYA| = |\sphericalangle EYA| = \varphi$. Aby bod E nebol za bodom X, musí platiť $|\sphericalangle EYA| \leq |\sphericalangle XYA|$. Lenže $|\sphericalangle AYX| = 180° - \varphi$ a tak potrebujeme, aby bol $\varphi \leq 180° - \varphi$, teda $\varphi \leq 90°$. Toto však znamená, že v trojuholníku AYC má platiť $\delta + \gamma \geq 90°$, lebo súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$.
A už sme vo finále... Keď tieto úvahy zopakujeme z druhej strany, t. j. pre trojuholníky ABX a AXY, tak dostaneme, že má platiť $|\sphericalangle BXA| = \omega \leq 90°$, teda aj $\beta + \delta \geq 90°$.

No a teraz spočítajte súčet vnútorných uhlov v trojuholníku ABC.

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\delta + \beta + \gamma = (\delta + \beta) + (\delta + \gamma) + \delta \geq 90^\circ + 90^\circ + \delta > 180^\circ.$$

A toto nemôže nastať. Teda nevieme dosiahnuť v žiadnom trojuholníku, aby ten stredný úsek XY bol najdlhší.

<u>Komentár:</u> Keď si nakreslíte obrázok a na základe toho vyhlásite niečo, tak to potom treba nejako dokázať, lebo ten obrázok môže byť zvádzajúci. Môže sa stať, že uvidíme niečo, čo v skutočnosti neplatí, alebo platí iba pre nejaké špeciálne prípady. Preto je nutné naše pozorovania poriadne matematicky zdôvodniť. Napríklad veľa z vás uvidelo, že v rovnostrannom trojuholníku je stredný úsek rovnako dlhý ako tie krajné. Keď sa raz naučíte sínusovú vetu, tak si zrátajte tie dĺžky a vyjde vám, že tie krajné sú viac ako o $13,7\%$ dlhšie ako stredný. Ale ak sa o tom chcete presvedčiť hneď teraz, tak si vezmite čo najväčší papier a nakreslite si naň čo najväčší takýto trojuholník a možno uvidíte ten rozdiel. Som zvedavý, ako skonštruujete presnú tretinu uhla. Kto to urobí dobre, má u mňa čokoládu, resp. nejaké ovocie, ak nechcete v mladom veku prísť o zuby.



<u>Úloha č. 5:</u> *Blška Baška skáče po dvoch ramenách uhla ako na obrázku. Všetky jej skoky sú rovnakej dĺžky. Začína z vrcholu uhla a po siedmych skokoch sa vráti naspäť do tohto vrcholu. Aká je veľkosť uhla?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Jakub a Zuzka C.)

(Podľa *Petry Polányiovej*.) Veľkosť uhla GAB, ktorú potrebujeme vypočítať, označme α. Je zrejmé, že trojuholník ABC je zhodný s trojuholníkom AGF (Ssu) a tiež, že trojuholník BCD je zhodný s trojuholníkom GFE (Ssu). Z toho vyplýva, že aj trojuholníky ACD a AFE sú zhodné podľa vety *sus*. Teda $|AD| = |AE|$, preto trojuholník DEA je rovnoramenný so základňou DE. Takže $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AED| = (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ - \alpha/2$.

Teraz tento uhol vyjadrime aj inak a z toho získame rovnicu pre uhol α. Zo zadania vyplýva, že trojuholníky AFG, ACB, BDC, EGF, FDE a CED sú rovnoramenné. Preto:

$$\begin{array}{lc} (\triangle AFG) & |\sphericalangle AGF| = 180^\circ - 2\alpha \implies |\sphericalangle CGF| = 2\alpha \\ (\triangle GEF) & |\sphericalangle GEF| = |\sphericalangle CGF| = 2\alpha \implies |\sphericalangle GFE| = 180^\circ - 4\alpha \implies \\ & \implies |\sphericalangle EFD| = 180^\circ - |\sphericalangle GFE| - |\sphericalangle AFG| = 3\alpha \end{array}$$

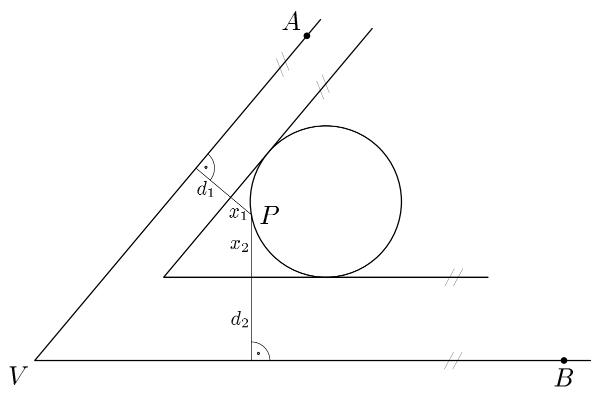
A keďže trojuholník FDE je rovnoramenný, tak dostávame $|\sphericalangle EFD| = |\sphericalangle FDE| = 3\alpha$. Tak a máme iné vyjadrenie pre veľkosť uhla ADE. Dajme to do rovnosti:

$$|\sphericalangle ADE| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 3\alpha\,,$$

preto $\alpha = 180^\circ/7$. <u>Komentár:</u> Keďže skoro všetci z vás vyriešili tento príklad úplne správne (správnych postupov je samozrejme viacero, vo vzorovom riešení je uvedený iba jeden z nich), tak je zbytočné písať tu nejaký komentár... :) Ale skúste sa zamyslieť nad tým, aký veľký by bol uhol, ak by blška spravila iba päť skokov namiesto siedmich. A čo ak by bolo skokov 25?

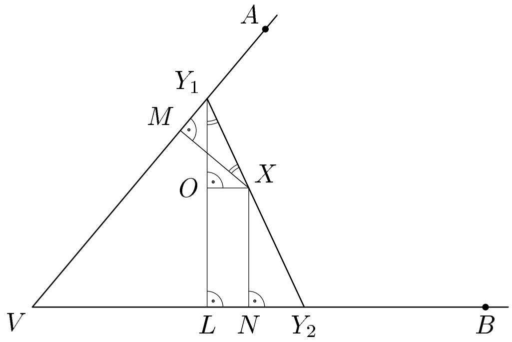
<u>Úloha č. 6:</u> *Daný je uhol AVB a v ňom ležiaca kružnica k, ktorá sa nemusí dotýkať ramien uhla. Nájdite na nej bod P, pre ktorý je súčet vzdialeností bodu P od ramien AV a BV minimálny.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Erika a Lucia)

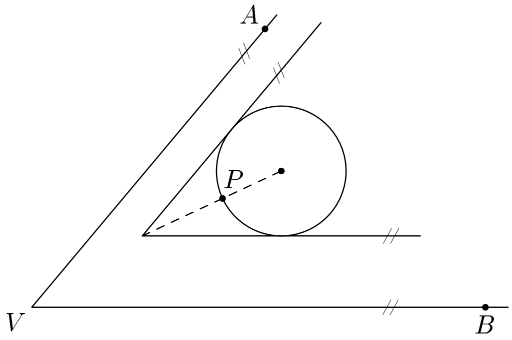


Ako prvý krok nášho riešenia zredukujme všeobecný problém na problém trochu konkrétnejší. Podľa zadania úlohy sa kružnica môže nachádzať na ľubovoľnom mieste vnútri uhla AVB. Posuňme ramená tohto uhla tak, aby sa dotýkali kružnice (ako na prvom obrázku). Všimnime si, že ľubovoľný bod P danej kružnice má súčet vzdialeností od ramien uhla AVB rovný súčtu vzdialeností od posunutých ramien a veľkostí posunutia jednotlivých ramien (teda celková vzdialenosť bodu P od ramien uhla je $x_1 + x_2 + d_1 + d_2$). Keď si uvedomíme, že vzdialenosti d_1 a d_2 sú pre danú kružnicu konštantné (premyslite si), zredukuje sa nám všeobecný problém na úlohu nájsť bod P s najmenším súčtom vzdialeností za predpokladu, že sa kružnica dotýka ramien uhla.

Teraz, keď sme si úlohu značne zjednodušili, prichádza zložitejšia časť nášho riešenia (daná kružnica sa už dotýka ramien uhla). Tipnime si polohu bodu P a potom sa pokúsme dokázať našu hypotézu. Náš tip je, že bod P bude ležať na spojnici vrchola V a stredu danej kružnice S. O tomto bode sa pokúsime ukázať, že spĺňa požadovanú vlastnosť. Dôkaz tohto tvrdenia si vyžaduje siahnuť hlbšie do našich znalostí z geometrie alebo vymyslieť niečo nové. Skúsme nájsť množinu bodov vnútri uhla AVB, ktoré majú od ramien uhla rovnakú vzdialenosť (pod rovnakou vzdialenosťou sa už myslí súčet vzdialeností od jednotlivých ramien).



Všimnime si, že body Y_1 a Y_2 také, že $|VY_1| = |VY_2|$, sú rovnako vzdialené. Teraz skúsme ukázať, že aj body na úsečke Y_1Y_2 sú rovnako vzdialené. Zvoľme si teda ľubovoľný bod X na úsečke Y_1Y_2; ukážeme, že preň platí $|Y_1L| = |MX| + |NX|$ (body M, N, L sú volené tak, ako na druhom obrázku). Spustime kolmicu z bodu X na spojnicu LY_1. Takto dostaneme bod O. Keďže útvar $LNXO$ je obdĺžnik, tak $|XN| = |LO|$. Takisto sa dá ľahko ukázať, že uhly MXY_1 a OY_1X sú rovnako veľké (rozmyslite si to). Keďže sú oba trojuholníky MXY_1 a OY_1X pravouhlé, majú zhodné uhly MXY_1 a OY_1X a rovnakú preponu, sú podľa vety *usu* zhodné. Čiže $|OY_1| = |MX|$. Z toho máme $|Y_1L| = |OY_1| + |OL| = |MX| + |NX|$. Jednoduchou úvahou sa dá overiť, že iba tieto body majú takú istú vzdialenosť ako bod Y_1; bodom neležiacim na úsečke Y_1Y_2 vedieme rovnobežku s touto úsečkou a o nej vieme čosi povedať zopakovaním rovnakej úvahy ako pre úsečku Y_1Y_2. Rozmyslite si to a zapamätajte, táto úvaha sa často používa na dôkaz obrátenej implikácie (využijeme implikáciu už dokázanú).

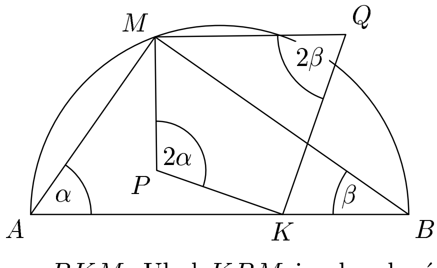


Takže teraz sme už k cieľu veľmi blízko. Zistili sme, že množina bodov s rovnakou (vopred danou) vzdialenosťou je základňa rovnoramenného trojuholníka s vrcholom V a ramenami, ktoré ležia na ramenách uhla AVB (a žiadne iné body, rozmyslite si, prečo je toto dôležité). Teda bod P nájdeme tak, že zostrojíme dotyčnicu k danej kružnici rovnobežnú so základňou rovnorammenného trojuholníka popísaného vyššie. Vieme, že také existujú dve, ale my vezmeme ten bližší bod k vrcholu uhla V (prečo?). Dotykový bod tejto dotyčnice s kružnicou je hľadaný bod P. Tým sme úlohu vyriešili, a vám zostáva na domácu úlohu ukázať, že takto zvolený bod leží na osi uhla. Na treťom obrázku je naznačená konštrukcia bodu P.

Komentár: Aj keď úloha nebola zložitá, k správnemu výsledku so správnym dôkazom sa dostalo len málo z vás. Odrazilo sa to samozrejme na bodovaní. Ak ste si pozorne čítali vzorové riešenie tohto príkladu, všimli ste si, že aj pri takýchto úlohách sa dá nájsť korektný dôkaz. Tvrdenia typu „keď toto bude bližšie, tamto bude ďalej“ nie sú v matematike veľmi vítané, pretože ich úplný dôkaz je často ťažší, než pôvodná úloha. Preto by sme vám odporučili sa im vyhnúť a radšej sa pokúsiť o iné dôkazy. Spomeňte si na to, keď budete v budúcich sériách riešiť podobné úlohy. Môžete si to vyskúšať na tejto: V rovine máme daný trojuholník a priamku p. Nájdite bod tohto trojuholníka, ktorý má od priamky p najväčšiu vzdialenosť. Koľko takýchto bodov existuje? Môže ich byť viac ako jeden? Môžu byť dva alebo tri? Keď úspešne vyriešite aj túto úlohu, skúste ďalšiu vymyslieť sami. Čo tak kváder a priamka, či rovina v priestore?

Úloha č. 7: *Na polkružnici nad priemerom AB leží bod M. Na úsečke AB leží bod K. Stred kružnice prechádzajúcej bodmi A, M, K označme P a stred kružnice prechádzajúcej bodmi M, K, B označme Q. Dokážte, že body M, K, P a Q ležia na jednej kružnici.*

Riešenie: (opravovali Dada a Miško)



Chceme ukázať, že body P, K, Q a M ležia na jednej kružnici, t. j. že štvoruholník $PKQM$ je tetivový (dá sa mu opísať kružnica). Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet nejakých jeho protiľahlých uhlov je 180°. Všimnime si teraz obrázok. Bod M leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, teda uhol AMB je pravý. Označme $|\sphericalangle BAM| = \alpha$ a $|\sphericalangle ABM| = \beta$. Keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, platí $\alpha + \beta = 90°$. Všimnime si trojuholník AMK a bod P. Uhol KAM prislúcha tomu istému oblúku ako uhol KPM. Teda uhol KAM je obvodový k stredovému uhlu KPM a teda $|\sphericalangle KPM| = 2|\sphericalangle KAM| = 2\alpha$. Podobne je to aj s trojuholníkom BKM. Uhol KBM je obvodový k stredovému uhlu KQM, čiže $|\sphericalangle KQM| = 2|\sphericalangle KBM| = 2\beta$. Keďže platí $\alpha + \beta = 90°$, tak platí $2\alpha + 2\beta = 180°$. To znamená, že súčet protiľahlých uhlov ($|\sphericalangle KPM| + |\sphericalangle KQM|$) v štvoruholníku $PKQM$ je 180°, čiže štvoruholník $PKQM$ je tetivový, čo sme chceli dokázať.
Otázkou však je, či pre ľubovoľnú polohu bodov M a K bude situácia vyzerať tak, ako na našom obrázku. Naše riešenie by nefungovalo, keby uhly KAM a KPM (resp. uhly KBM a KQM) neprislúchali tomu istému oblúku. Čiže bod P (Q) by ležal v opačnej polrovine určenej priamkou KM ako bod A (B). Môže také niečo nastať? Uhol KAM (KBM) je určite ostrý. Keby bol bod P (Q) v opačnej polrovine ako bod A (B), tak by bol uhol KPM (KQM) prislúchajúci tomu istému oblúku ako uhol KAM (KBM) zjavne väčší ako 180°. No my vieme, že pre obvodové a stredové uhly platí $|\sphericalangle KPM| = 2|\sphericalangle KAM|$. Keďže je uhol KAM (KBM) ostrý, jeho dvojnásobok nedá nikdy uhol väčší ako 180°, čo je spor. Teda bod P (Q) musí ležať v tej istej polrovine ako bod A (B).

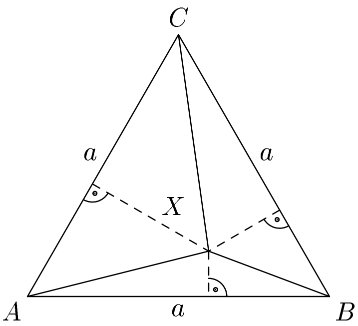
Komentár: Veľa z vás úlohu v podstate zvládlo. Veľmi často ste však zabudli uvažovať nad tým, že to nie vždy musí vyzerať tak, ako na vašom obrázku.

Úloha č. 8: *V rovine je daný rovnostranný trojuholník ABC. Dokážte, že existuje kladná konštanta k taká, že pre každý bod X danej roviny môžeme vhodne zvoliť znamienka $+$ a $-$ tak, že platí*

$$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = k,$$

kde v_1, v_2, v_3 sú postupne vzdialenosti bodu X od priamok AB, BC, CA.

Riešenie: (opravoval Miki)

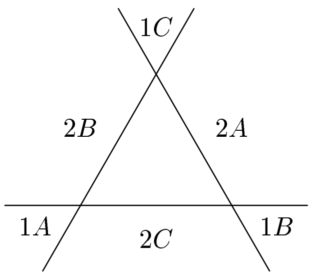


obr. 1

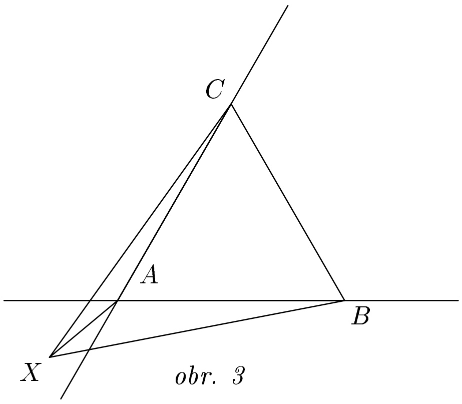
Najprv si skúsme zvoliť niekoľko rôznych polôh bodu X. Ak ho trafíme do vrchola nášho trojuholníka (napr. A), zistíme, že $k = \sqrt{3}a/2 = v$, čo je jediný kladný výsledok výrazu $\pm v_1 \pm 0 \pm 0$.

Teraz si všímajme body X vnútri trojuholníka. Keďže vzdialenosti bodu X od AB, BC, AC sú všetky menšie ako výška trojuholníka, potrebujeme dokázať, že $v_1 + {}$ $+v_2 + v_3 = \sqrt{3}a/2$. Dobrá pomôcka bude vyjadrenie obsahu trojuholníka ABC ako súčet obsahov trojuholníkov XAB, XBC a XCA.

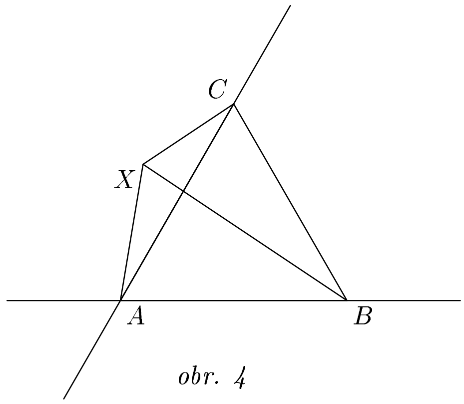
$$\begin{aligned} S_{ABC} = \frac{av}{2} &= \frac{av_1}{2} + \frac{av_2}{2} + \frac{av_3}{2}\,, \\ v &= v_1 + v_2 + v_3\,. \end{aligned}$$



obr. 2



obr. 3



obr. 4

Ak X bude ležať mimo trojuholníka, môže nastať viacero rôznych situácií (ako vidno na *obr. 2*). Pozrime sa na prípad, keď bod X leží vo výseku $1A$ (*obr. 3*) a zase si pospájajme X s vrcholmi trojuholníka ABC. Inšpirovaní predchádzajúcim postupom vyjadríme obsah trojuholníka ABC pomocou obsahov trojuholníkov XAB, XBC a XCA:

$$\begin{aligned} S_{ABC} = \frac{av}{2} &= -\frac{av_1}{2} + \frac{av_2}{2} - \frac{av_3}{2}\,, \\ v &= -v_1 + v_2 - v_3\,. \end{aligned}$$

V prípade $1B$ bude $v = v_1 - v_2 - v_3$ a v $1C$ zase $v = -v_1 - v_2 + v_3$.

Nakoniec si nakreslíme prípad $2B$ a skúsime nejako vyjadriť $S_{\triangle ABC}$. Z obrázka vidno, že to bude

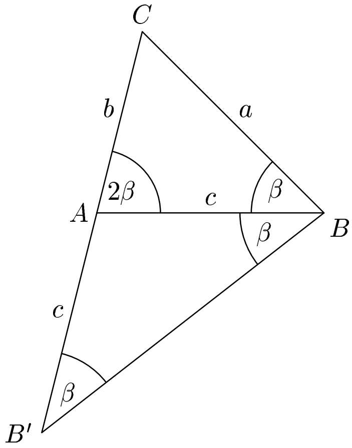
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{XAB} + S_{XBC} - S_{XAC}\,, \\ \frac{av}{2} &= \frac{av_1}{2} + \frac{av_2}{2} - \frac{av_3}{2}\,, \\ v &= v_1 + v_2 - v_3\,. \end{aligned}$$

A v prípadoch $2A$ a $2C$ to vyjde $v = v_1 - v_2 + v_3$ a $v = -v_1 + v_2 + v_3$.

Ak X leží na niektorej z priamok AB, BC alebo AC, môžeme použiť rovnaký postup ako v ľubovoľnej priľahlej oblasti. Pre každý bod roviny sme našli také rozdelenie znamienok, že výraz $\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3$ je konštantný a tým sme tvrdenie dokázali.

Úloha č. 9: *V trojuholníku ABC je všetko označené ako obvykle. Ak je uhol α dvakrát taký veľký ako uhol β, tak $a^2 = b(b + c)$. Dokážte. Platí aj obrátená implikácia?*

Riešenie: (opravoval Rasťo)



Začnime prvou implikáciou. Máme dokázať, že v trojuholníku ABC, kde $\alpha = 2\beta$, platí $a^2 = b(b+c)$. V geometrických úlohách nám väčšinou súčin nejakých dĺžok veľa nenapovie, no keď si ho upravíme na pomer dĺžok, tak v ňom môžeme uvidieť podobnosť nejakých trojuholníkov. Tak teda upravme. Z $a^2 = b(b+c)$ dostávame

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}. \tag{1}$$

Už len niekde na obrázku nájsť dva trojuholníky s takýmito dĺžkami strán, zistiť, že sú podobné a vyhrali sme! Dĺžka $b+c$ sa v základnom obrázku nenachádza, tak si ju vytvorme. Na polpriamke CA vyznačme bod B' tak, aby $|B'A| = c$ a zároveň aby bod B' neležal na úsečke AC (obrázok). Veľkosť uhla BAB' je $180° - 2\beta$ a keďže trojuholník $AB'B$ je rovnoramenný, veľkosti uhlov $AB'B$ a $B'BA$ sú β. Všimnime si trojuholník ABC a trojuholník $BB'C$. Majú rovnaké vnútorné uhly, čiže sú podobné a platí v nich, že pomery zodpovedajúcich si strán sú rovnaké, teda platí aj (1), čiže platí dokazované $a^2 = b(b+c)$.

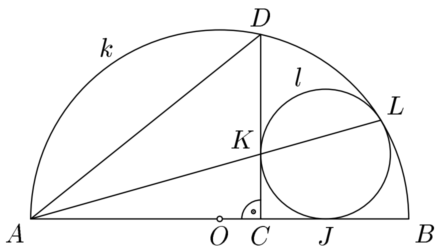
Poďme teraz na opačnú implikáciu. Nech platí $a^2 = b(b+c)$ (teda platí aj (1)), máme zistiť, či platí $\alpha = 2\beta$. Podobne ako predtým si označíme bod B' (nakreslite si vlastný obrázok). Trojuholníky ABC a $BB'C$ majú spoločný uhol pri vrchole C a strany (ramená tohto uhla) v rovnakom pomere (1), preto sú tieto dva trojuholníky podobné. Majú preto zhodné veľkosti vnútorných uhlov $CB'B$ a CBA, z čoho dostávame $\alpha = 2\beta$. Preto platí aj opačná implikácia.

Úloha č. 10: *Nech AB je priemer kružnice k a O je jej stred. Vnútri úsečky AB zvoľme bod C. Uvažujme iba jeden z oblúkov AB, kolmica na AB cez bod C pretína tento oblúk v bode D. Kružnica vpísaná do útvaru CBD (t. j. dotýkajúca sa kratšieho oblúka BD a úsečiek CB a CD) sa dotýka úsečky AB v bode J.*

a) Dokážte, že $|AD| = |AJ|$.

b) Dokážte, že DJ je osou uhla CDB.

Riešenie: (opravovala Hanka)



a) (Podľa *Jakuba Závodného*.) Označme l kružnicu vpísanú do útvaru CBD a K, L po poradí jej dotykové body s úsečkou CD a kružnicou k. Body L, K a A ležia na jednej priamke, lebo kružnice k a l sú rovnoľahlé v rovnoľahlosti so stredom L (bod K sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí do bodu ležiaceho na kružnici k, pričom dotyčnica v tomto bode bude rovnobežná s dotyčnicou CD kružnice l, preto tento bod na k je A).

Z Tálesovej vety vyplýva, že $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle KLB| = 90°$. Keďže aj uhol KCB je pravý, štvoruholník $KCBL$ je tetivový. Z mocnosti bodu A ku kružnici jemu opísanej vieme, že $|AC| \cdot |AB| = |AK| \cdot |AL|$. Z mocnosti bodu A ku l vyplýva, že $|AK| \cdot |AL| = |AJ|^2$. Čiže $|AJ|^2 = |AC| \cdot |AB|$. Trojuholník ABD je pravouhlý, preto preň platí Euklidova veta o odvesne, ktorá hovorí, že $|AD|^2 = |AC| \cdot |AB|$. Takže $|AJ|^2 = |AD|^2$, a keďže $|AJ|$ a $|AD|$ sú kladné čísla, práve sme dokázali rovnosť $|AD| = |AJ|$.

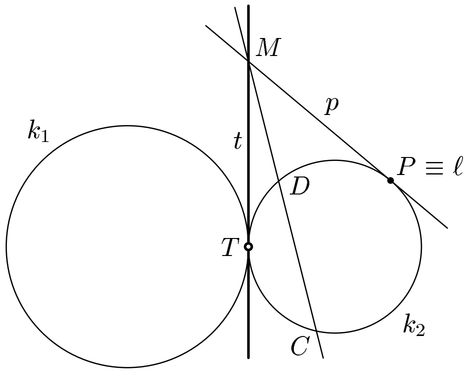
b) Táto časť už bola jednoduchšia (hlavne pre tých, ktorí pri tom využili časť a)). Označme $|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$. Už sme dokázali $|AJ| = |AD|$, teda $|\sphericalangle AJD| = |\sphericalangle ADJ| = 90° - \alpha$. Trojuholník CDJ je pravouhlý, preto $|\sphericalangle CDJ| = \alpha$. Uhol $|\sphericalangle ADB|$ je pravý, teda $|\sphericalangle JDB| = 90° - |\sphericalangle ADJ| = 90° - (90° - \alpha) = \alpha = |\sphericalangle CDJ|$. Priamka DJ je osou uhla CDB.

Komentár: Samozrejme, prvá časť išla aj bez mocnosti. Stačilo použiť dostatočne veľa Pytagorových viet na správne trojuholníky a niekedy elegantne, inokedy drevorubačsky sa príklad dal dopočítať. Vtedy však bolo treba dať pozor na diskusiu, pretože poradie bodov C, O, J môže byť rôzne. Išlo to analogicky, ale tí z vás, ktorí si na to ani nespomenuli, majú menej bodov (a nabudúce si dajte pozor!).

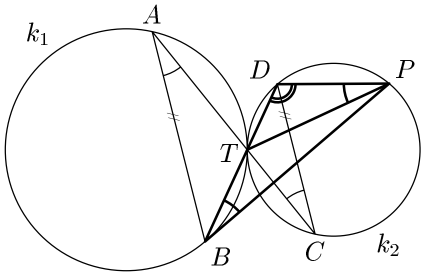
Úloha č. 11: *Kružnica k_1 sa v bode T zvonka dotýka kružnice k_2. Na k_2 uvažujme ľubovoľný bod P neležiaci na spojnici stredov oboch kružníc. Bodom P vedieme dotyčnice ku k_1, ktoré sa jej dotknú v bodoch A a B. Priamky AT, BT pretnú k_2 znovu postupne v bodoch C, D. Priamka CD pretne dotyčnicu ku k_2 vedenú bodom P v bode M. Určte množinu všetkých možných polôh bodu M, keď meníme polohu bodu P.*

Riešenie: (opravoval Peťo)

Keď nakreslíme viacero obrázkov, nadobudneme pevné presvedčenie, že hľadané body M ležia na spoločnej dotyčnici kružníc k_1 a k_2 vedenej bodom T (označme ju t). Zamyslime sa preto, ako by sa to dalo dokázať.



Označme p dotyčnicu ku k_2 vedenú bodom P. Chceme vlastne dokázať, že priamky t, CD a p sa pretínajú v jednom bode (potom totiž nutne priesečník CD a p leží na t). Dobre vieme, že t je chordálou kružníc k_1 a k_2. Ak nájdeme tretiu kružnicu ℓ takú, že CD je chordálou kružníc k_1 a ℓ a p je chordálou kružníc k_2 a ℓ, budeme hotoví. Vieme totiž, že tri chordály troch kružníc (ku každej dvojici kružníc jedna chordála) sa pretínajú v jednom bode. (Dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý. Stačí si uvedomiť, že chordála dvoch kružníc je množina bodov majúcich k nim rovnakú mocnosť.)
Ukážeme, že vhodnou „kružnicou“ ℓ je bod P (chápaný ako kružnica zdegenerovaná do jedného bodu). I keď to nie je klasická kružnica, všetky veci s mocnosťou fungujú. Mocnosť bodu X ku tejto „kružnici“ bude jednoducho číslo $|XP|^2$. Sami sa presvedčte, že „chordálou“ takejto zdegenerovanej kružnice a inej klasickej kružnice je tiež priamka.
Zrejme p *je* chordálou kružnice k_2 a „kružnice“ P (stačí si spomenúť, že mocnosť sa počíta ako druhá mocnina vzdialenosti od dotykového bodu).



Zostáva teda overiť, že CD je chordálou kružnice k_1 a „kružnice“ P. Na to treba ukázať, že C aj D má ku kružnici k_1 rovnakú mocnosť ako ku „kružnici“ P. T. j. stačí odvodiť rovnosti

$$|CT| \cdot |CA| = |CP|^2 \qquad \text{a} \qquad |DT| \cdot |DB| = |PD|^2. \tag{1}$$

Začnime konečne úlohu riešiť. Uhly DPT a DCT sú obvodové k tetive DT kružnice k_2, sú preto rovnako veľké. Kružnice k_1 a k_2 sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti T. V tejto rovnoľahlosti sa trojuholník BAT zobrazí na trojuholník DCT, uhly DCT a BAT sú teda rovnako veľké. Uhol BAT je obvodový a uhol DBP je úsekový k tetive TB kružnice k_1, a tak aj tieto dva uhly sú rovnako veľké. Spojením predchádzajúcich troch úvah dostávame, že uhly DPT a DBP sú rovnako veľké. Trojuholníky DPT a DBP majú okrem týchto dvoch rovnako veľkých uhlov ešte spoločný uhol pri vrchole D, sú teda podobné. Preto platí

$$\frac{|PD|}{|DB|} = \frac{|DT|}{|PD|},$$

odkiaľ prenásobením dostaneme druhú rovnosť z (1). Zrejme prvú rovnosť z (1) dostaneme zopakovaním podobného postupu pre trojuholníky CPT a CAP.
Tým sme dokázali, že M leží na priamke t pre ľubovoľnú dovolenú polohu bodu P. Určite $M \neq T$, lebo cez T prechádza p len pre $P = T$ a taká poloha bodu P je v zadaní zakázaná. Každým iným bodom M' priamky t vieme viesť dotyčnicu p ku kružnici k_2 (rôznu od t), ktorá sa jej dotkne v bode P neležiacom na spojnici stredov kružníc. K tomuto bodu prislúcha nejaký bod M na priamke p a už sme dokázali, že musí ležať na t. Nutne teda $M' = M$ a preto M' do hľadanej množiny bodov patrí.
Záver: Hľadanou množinou bodov je spoločná vnútorná dotyčnica kružníc k_1 a k_2 bez bodu T.

Úloha č. 12: *Nájdite všetky prosté funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre každé prirodzené číslo n platí*

$$f(f(n)) \le \frac{n + f(n)}{2}.$$

Poznámka: Prostá funkcia je taká, že pre všetky x, y platí $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

Riešenie: (opravoval Buggo)
V úvode si ujasnime niektoré základné veci. Pod množinou prirodzených čísel $\mathbb{N}$ budeme rozumieť všetky nezáporné celé čísla (teda aj nulu). Ďalej $\underbrace{f(f(\cdots f}_{k}(n)\cdots))$ budeme značiť ako $f^k(n)$.

Hľadanou funkciou je $f(n) = n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
Najprv si dokážeme pomocné tvrdeníčko $f(n) < n \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^k(n) < n$.
Dôkaz matematickou indukciou:

1° $k = 1 : f(n) < n$ platí triviálne z predpokladu tvrdenia.

2° $(\forall l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; l < k : f^l(n) < n) \Rightarrow f^k(n) < n$: Z nerovnosti zo zadania máme

$$f(f(f^{k-2}(n))) \le \frac{f^{k-2}(n) + f^{k-1}(n)}{2}.$$

Ďalej podla indukčného predpokladu platí

$$\frac{f^{k-2}(n)+f^{k-1}(n)}{2}<\frac{n+n}{2}.$$

A preto aj

$$f^k(n)<n.$$

Teraz ideme dokázať samotné tvrdenie. Dokážeme dve nerovnosti, z ktorých nutne vyplynie požadovaná rovnosť.
1. $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \geq n$
Sporom. Nech $\exists n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) < n$. Podľa nášho pomocného tvrdenia vieme, že všetky hodnoty, ktoré môžeme z n získať opakovaným použitím f, budú menšie ako n. Tiež vieme, že čísel menších ako n je konečne veľa (konkrétne presne n). To ale znamená (podľa Dirichletovho princípu), že existujú také čísla k, l ($k < l$), že $f^k(n) = f^l(n)$. Do $f^k(n)$ sme sa dostali z čísla n. Z neho sme sa potom dostali do $f^l(n)$ tak, že žiadna z medzihodnôt nebola n (vyplýva z našej vetičky z úvodu). To je ale spor s injektívnosťou funkcie f. Preto $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \geq n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq n$
Sporom. Nech $\exists n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) > n$. Potom z podmienky zo zadania dostávame

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n)+n}{2} < \frac{f(n)+f(n)}{2} = f(n).$$

Ďalej využitím už dokázanej nerovnosti dostávame

$$f(f(n)) \geq f(n).$$

Má nám teda zároveň platiť $f(f(n)) < f(n)$ aj $f(f(n)) \geq f(n)$, čo je zjavne spor. Preto $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \geq n$.
Aby boli splnené obe nerovnosti, musí platiť $f(n) = n$. Takto definovaná funkcia je určite prostá a tiež pre ňu platí aj nerovnosť zo zadania.

Komentár: Úlohu ste riešili pekne a viacerými spôsobmi, našlo sa aj všeobecnejšie tvrdenie.

Úloha č. 13: *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a X je množina s n prvkami. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ sú podmnožiny množiny X také, že zjednotenie ľubovoľných 50 z nich má viac ako $50n/51$ prvkov. Dokážte, že z týchto podmnožín sa dajú vybrať tri také, že každé dve z nich majú aspoň jeden spoločný prvok.*

Riešenie: (opravoval Miťo)
(Podľa *Ondra Budáča.*) Najprv sa dohodnime, že slovo *podmnožina* bude označovať niektorých päťdesiatich množín A_i zo zadania. Samotné tvrdenie dokážeme nepriamo. Nech je daná n-prvková množina X s podmnožinami $A_1, \ldots, A_{101}$, z ktorých žiadne tri nemajú spoločný prvok. Každý prvok množiny X sa buď nenachádza v žiadnej, alebo sa nachádza v práve jednej, alebo v práve dvoch podmnožinách A_i. Označme počty takýchto prvkov postupne a, b, c. Žiadny prvok sa nemôže nachádzať v troch alebo viacerých podmnožiných A_i, bol by to spor s predpokladom. Máme teda $n = a + b + c$; spočítajme teraz súčet počtov prvkov všetkých *podmnožín.* Tento súčet rozdelíme na príspevky, ktorými prispievajú prvky „typov" a, b a c. Zrejme prvky typu a neprispievajú ničím. Každý prvok typu b je v práve jednej množine A_i, musíme ho teda započítať toľkokrát, koľko existuje *podmnožín,* ktoré obsahujú danú množinu, pretože toľko je aj zjednotení. Prvky typu c sa nachádzajú v práve dvoch množinách, rozdeľme teda *podmnožiny* obsahujúce niektorý z prvkov typu c na dve skupiny: tie, ktoré obsahujú obe množiny, v ktorých sa daný prvok nachádza, a tie, ktoré obsahujú práve jednu z týchto množín. Získali sme súčet počtov prvkov všetkých *podmnožín,* avšak tento súčet nie je menší než súčet počtov prvkov všetkých zjednotení päťdesiatich množín A_i. Keď tento výraz predelíme počtom zjednotení, dostaneme horný dohad priemerného počtu prvkov v takomto zjednotení. Teda

$$\frac{\binom{100}{49}b+\left[\binom{99}{48}+2\binom{99}{49}\right]c}{\binom{101}{50}} = \frac{50\cdot b}{101}+\frac{151\cdot c}{202} < \frac{50}{51}(a+b+c) = \frac{50}{51}n.$$

Z toho sa dá ľahko ukázať, že aspoň jedno zjednotenie obsahuje menej ako $50n/51$ prvkov, čo zakončuje dôkaz.

Poznámka: Všimnime si, že sme dokázali máličko silnejšie tvrdenie, pretože sme využili slabší predpoklad „…obsahuje aspoň $50n/51$ prvkov." Mimochodom, na tomto riešení sa tiež ukazuje, aké výrazné nedostatky má prirodzený jazyk pri popisovaní matematických javov a zákonitostí.

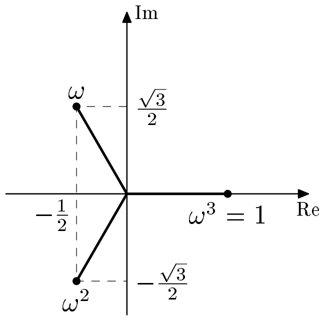
Úloha č. 14: *Nech m a n sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak m je nepárne, tak číslo*

$$\frac{1}{3^m n}\sum_{k=0}^{m}\binom{3m}{3k}(3n-1)^k$$

je celé.

Riešenie: (opravoval Peťo)

Porozmýšľajme, ako by sa výraz zo zadania dal vyjadriť bez použitia sumy. Označme $\sqrt[3]{3n-1} = q$. Všetky sčítance danej sumy sa vyskytujú aj v binomickom rozvoji výrazu $(1+q)^{3m}$. Problém je, že v tomto rozvoji sa vyskytujú aj iné (dokonca iracionálne) sčítance. Radi by sme sa ich zbavili, t. j. chceme z binomického rozvoja ponechať len každý tretí sčítanec. Keby sme chceli ponechať len každý druhý, stačilo by namiesto výrazu $(1+q)^{3m}$ použiť dlhší výraz $(1+q)^{3m} + (1-q)^{3m}$. Podobne si pomôžeme aj v našej situácii. Potrebujeme však na to komplexné čísla. Medzi nimi existuje číslo ω také, že



$$\omega^3 = 1 \qquad \text{a} \qquad 1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

konkrétne je takým $\omega = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ (dobre to vidieť na obrázku). Vďaka nemu môžeme sumu zo zadania (presnejšie jej trojnásobok) prepísať nasledovne (overte si, že naozaj):

$$3\sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k = (1+q)^{3m} + (1+\omega q)^{3m} + (1+\omega^2 q)^{3m}. \tag{1}$$

Na prvý pohľad to vyzerá, že sme si veľmi nepomohli, lebo o deliteľoch pravej strany v (1) nevieme priamo niečo povedať. Uvedomme si najprv dôležitú vec. Pravá strana v (1) je súčtom $3m$-tých mocnín koreňov polynómu

$$p(x) = (x-1)^3 - q^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3n-1) = \underline{x^3 - 3x^2 + 3x - 3n}.$$

Označme pre ďalšie úvahy uvedené korene x_1, x_2, x_3 a položme $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. Podľa (1) vidíme, že našou úlohou je dokázať, že s_{3m} je pre nepárne m deliteľné číslom $3^{m+1}n$. Ľahko možno vypočítať hodnotu s_k pre malé k. Dostávame

$$s_0 = 3, \qquad s_1 = 3, \qquad s_2 = 3, \qquad s_3 = 9n, \qquad \dots \tag{2}$$

Skúsme pre jednoduchšie vyjadrenie ďalších hodnôt s_k nájsť nejaký rekurentný vzťah. Po chvíľke hrania sa dostaneme

$$\begin{aligned} &s_{k+3} = x_1^{k+3} + x_2^{k+3} + x_3^{k+3} = \\ &= (x_1^{k+2} + x_2^{k+2} + x_3^{k+2})(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_3^{k+1})(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + (x_1^k + x_2^k + x_3^k)x_1x_2x_3 = \\ &= \underline{3s_{k+2} - 3s_{k+1} + 3ns_k}. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme využili otrepané Vietove vzťahy. (Všimnime si peknú vec – koeficienty v rekurentnom vzťahu sú rovnaké ako koeficienty polynómu p, len s opačnými znamienkami. Podobne by nám to vyšlo aj pri polynóme vyššieho stupňa s väčším počtom koreňov. Je dobré do budúcnosti si to zapamätať.)
Tvrdenie už teraz veľmi jednoducho dokážeme indukciou. Z rekurentného vzťahu vidíme, že ak sú s_k, s_{k+1} a s_{k+2} deliteľné číslom 3^r, je s_{k+3} deliteľné číslom 3^{r+1}. Odtiaľ je už iba krôčik k tomu, že s_{3m} je deliteľné číslom 3^{m+1} (zvládnete ho sami, stačí použiť (2)). Všeobecne platí (ani to vám nebude robiť problém)

$$3^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1} \mid s_k. \tag{3}$$

Dokázať, že pre nepárne m dokonca $3^{m+1}n$ delí s_{3m}, je len o málo náročnejšie. Pomocou odvodeného rekurentného vzťahu možno totiž poľahky dostať nový rekurentný vzťah

$$s_{k+7} = 63ns_{k+2} + 9(n^2 - 3n - 3)s_{k+1} + 27n(2n+1)s_k,$$

z ktorého vidieť (využijúc (3)), že ak je s_{3m} deliteľné číslom $3^{m+1}n$, tak s_{3m+6} je deliteľné číslom $3^{m+3}n$. Môžeme teda rozbehnúť indukciu, ktorej prvý krok máme v (2).
Tým je úloha vyriešená.