Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série letného semestra 2004/2005

Úloha č. 1: *Dajú sa v čísle* 54 806 372 *navzájom vymeniť dve číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné ôsmimi? Ak áno, nájdite všetky možnosti.*

Riešenie: (opravovala Erika)

Predpokladajme, že sme vymenili dve cifry a dostali sme číslo deliteľné ôsmimi. Keďže číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď je jeho posledné trojčíslie deliteľné ôsmimi, budeme hľadať také výmeny, ktoré toto kritérium budú spĺňať. Keďže posledné trojčíslie nie je deliteľné ôsmimi, musíme vymieňať cifru z tohto trojčíslia. Úlohu si rozdelíme prirodzene na tri podúlohy, podľa toho, ktorú cifru z posledného trojčíslia vymieňame.

a) Vymieňame cifru na mieste jednotiek, teda v našom prípade číslicu 2. Keďže číslo deliteľné ôsmimi musí byť párne, tak sú kandidátmi na výmenu šestka a nula (osmička a štvorka nevyhovujú, lebo potom by naše číslo nebolo deliteľné štyrmi). Ľahko overíme, že číslo 54 802 376 je deliteľné ôsmimi.

b) Vymieňame číslo na mieste desiatok, teda sedmičku. Tu overíme všetkých šesť možností (číslo 2 už nevymieňame). Po overení kritéria deliteľnosti ôsmimi nám vyhovuje len výmena sedmičky s päťkou, teda dostávame číslo 74 806 352.

c) Vymieňame číslo na mieste stoviek, teda trojku. Keďže číslo 72 je deliteľné ôsmimi, bude číslo $\overline{a72}$ deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď bude $\overline{a00}$ deliteľné ôsmimi. Ľahko overíme, že to je vtedy, keď je číslo a párne. Teda s trojkou môžeme vymeniť všetky párne čísla (dvojku už nevymieňame). Takto dostaneme štyri nové čísla.

Naša úloha má šesť riešení: 54 802 376, 74 806 352, 54 803 672, 54 836 072, 54 306 872 a 53 806 472.

Úloha č. 2: *Kde bolo, tam bolo, na lúke je päť trpaslíkov, Erika, Feri, Kika, Lucia a Mazo. Každý z nich má na hlave buď červenú, alebo modrú čiapku. Aj keď žiadny trpaslík nevidí svoju čiapku, ten, ktorý má červenú čiapku, vždy hovorí pravdu. Trpaslík, ktorý má modrú čiapku, vždy klame. Jednotliví trpaslíci povedali nasledujúce výroky:*

Erika: „Vidím tri modré a jednu červenú čiapku."
Feri: „Vidím štyri červené čiapky."
Kika: „Vidím jednu modrú a tri červené čiapky."
Lucia: „Vidím štyri modré čiapky."

Zistite, aké čiapky môžu mať jednotliví trpaslíci. Nájdite všetky možnosti.

Komentár: Na začiatok pár slov k zadaniu. „Jednotlivý trpaslíci" majú byť samozrejme s mäkkým „i" po „v" a každý trpaslík vidí všetkých štyroch ostatných. Našťastie tá prvá chyba vás nepoplietla a nad prípadom, že nejaký trpaslík nemusí vidieť všetkých ostatných, špekuloval iba *V. Ujházi*, ale on poslal aj dve riešenia pre správne zadanie (áno, spolu tri).

Riešenie: (opravoval Miki)

A teraz sa venujme riešeniu našej úlohy. Ako bolo spomenuté v zadaní (posledná veta), musíme prebrať všetky možnosti rozdelenia čiapok medzi trpaslíkov, inak si nemôžeme byť istí, že máme naozaj všetky možnosti. To môžeme urobiť viacerými spôsobmi.

1. Rozoberieme všetkých 32 možností a vyškrtáme tie, v ktorých si jednotlivé tvrdenia odporujú. Áno, je to dobrý spôsob, ale chceme vám ukázať aj iné, a preto to sem všetko vypisovať nebudeme. Hlavná slabina takéhoto prístupu je v tom, že je prácny a nedá sa použiť pre väčšie čísla (ak by bolo trpaslíkov 15, koľko je možností?).

2. Veľa vašich riešení bolo založených na rozobratí týchto dvoch prípadov:

   a) Všetci štyria trpaslíci, ktorí niečo povedali, sú klamári a teda majú modrú čiapku. Tu máme ešte dve možnosti pre Maza. Ak má Mazo tiež modrú čiapku, tak Lucia má predsa len pravdu (a to nesedí, lebo s modrou čiapkou má klamať). A ak má Mazo červenú čiapku, tak hovorí pravdu zase Erika, čo tiež nesedí. Výborne, táto možnosť sa nám uzavrela. Ak má mať táto úloha riešenie, tak jeden zo štyroch, ktorí prehovorili, hovorí pravdu.

b) Aspoň jeden z tých, ktorí niečo povedali, hovorí pravdu. Teraz skúmajme, kto by to mohol byť.

Ak Erika hovorí pravdu, na hlave má červenú čiapku. Feri vidí aspoň dve modré čiapky z tých troch, ktoré videla Erika, teda klame a na hlave má modrú. Lucia vidí Erikinu červenú čiapku a hovorí, že vidí iba modré, takže tiež klame. Kika vidí modré čiapky na Feriho a Luciinej hlave a vraví, že vidí iba jednu modrú – klame a na hlave má aj ona modrú čiapku. Ostáva Mazo. Predpokladali sme, že Erika má pravdu a vidí tri modré a jednu červenú čiapku. Mazo preto musí mať na hlave tú jednu červenú čiapku, ktorú vidí Erika. Máme jedno riešenie.

Teraz nech je Feri ten, čo hovorí pravdu. Potom majú na hlavách všetci červené čiapky. No to by museli všetci hovoriť pravdu. Zo zadania vidíme, že traja z nich určite klamú. Takže Feri nemá pravdu.

Ak hovorí pravdu Kika, potom je medzi piatimi trpaslíkmi len jediná modrá čiapka. Kika má na hlave taktiež červenú. Lenže trpaslíčky Erika a Lucia hovoria, že modrých čapíc vidia viac (Erika tri a Lucia až štyri). To znamená, že Erika aj Lucia určite klamú. No keďže je na lúke len jedna modrá čiapka, jedna z trpaslíc má na hlave červenú čiapku aj napriek tomu, že klame. A to nesmie, preto Kika nehovorí pravdu.

Posledná možnosť je, že vraví pravdu Lucia. To znamená, že všetci ostatní klamú a na hlavách majú modré čiapky. Napriek tomu hovorí Erika pravdu, lebo vidí Luciinu červenú čiapku a všetky ostatné modré. No Erika s modrou čiapkou na hlave predsa nemôže mať pravdu.

Našli sme jedno riešenie a prebrali sme všetky možnosti. Hotovo.

3. Toto tretie riešenie je podobné druhému, ale jeho cieľom je analyzovať výroky trpaslíkov v takom poradí, aby sa nám riešenie „nevetvilo“ a mali sme čo najmenej možností.

   Najprv uvažujme nad Ferim. Ak by hovoril pravdu, všetci majú červené čiapky. Ale napríklad Erika klame, keď tvrdí, že vidí tri modré čiapky a jednu červenú. Ona totiž vidí samé červené čiapky. Takže Feri musí mať modrú čiapku.

   Teraz Lucia, ak má červenú, tak ostatní (aj Erika) majú modré. No Erika vraví, že vidí tri modré a jednu červenú čiapku, čo je pravda. No ako by Erika mohla hovoriť pravdu, keď má na hlave čiapku modrej farby? Preto aj Lucia má modrú čiapku.

   Potom ale vidíme, že Kika nemôže vravieť pravdu (lebo vidí aspoň dve modré čiapky), a teda má tiež modrú.

   Pri Erike sa rozoberaniu nevyhneme. Povedzme, že mala pravdu a okolo nej sú tri modré a jedna červená čiapka. Potom jediná červená čiapka, ktorú vidí, patrí Mazovi (Feri, Lucia aj Kika majú modré). Máme prvé riešenie. A teraz predpokladajme, že Erika tiež klame. Z predchádzajúceho nám vyplýva, že už vidí tri modré čiapky. Ak má klamať, musí byť aj tá posledná (Mazova) modrá. Potom by ale Lucia mala pravdu, no už sme zistili, že nemôže. Naše prvé riešenie teda ostalo jediné a tiež sme uvažovali nad všetkými možnosťami.

4. Štvrté riešenie nám poslal *V. Ujházi* a rozoberaniu prípadov sa vyhol ešte lepšie. Začnime netradične Mazom. Ak má totiž Mazo červenú čiapku, Lucia nemôže vidieť štyri modré čiapky a musí mať na hlave modrú (lebo klame). Potom ale aj Feri musí mať modrú, pretože určite vidí aspoň po jednej čiapke z každej farby. Z toho vyplýva, že aj Kika má modrú, lebo vidí dve modré čiapky (Lucia, Feri) a jednu červenú (Mazo). Erika hovorí pravdu a na hlave má červenú čiapku. Okolo vidí Luciu, Kiku a Feriho s modrými čiapkami a Maza s červenou. To je naše riešenie.

   A ak má Mazo modrú čiapku, Feri má modrú tiež (určite vidí aspoň jednu modrú čiapku, no vraví, že vidí iba červené). Z toho vyplýva, že aj Kika má modrú, pretože tá už má na obzore modré čiapky aspoň dve (Mazovu a Feriho), ale hovorí, že vidí len jednu. Teraz ak má Erika červenú, vidí červenú čiapku na Luciinej hlave (všetci zvyšní majú čiapky modré), ale Lucia s červenou čiapkou by musela vidieť štyri modré, no Erika má na hlave červenú. Ak by mala Erika modrú, tak aj Lucia musí mať modrú (aby Erika nehovorila pravdivú vetu), ale to tiež nemôže, lebo by v skutočnosti videla štyri modré čiapky a hovorila pravdu. Mazo teda modrú čiapku na hlave mať nemôže a ostalo nám jediné riešenie.

Vidíme, že pri takýchto „rozoberacích“ úlohách sa oplatí hľadať rôzne postupy, lebo to môže ušetriť veľa písania a sprehľadniť častokrát komplikované riešenie.

Úloha č. 3: *Zistite, koľkými spôsobmi môžeme z množiny* $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ *vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je deliteľný štyrmi.*

Riešenie: (opravoval Miško)

Zamyslime sa, ako môžeme vybrať tri čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 20\}$ tak, aby ich súčin bol deliteľný 4. Ak vyberieme všetky tri čísla párne, tak ich súčin bude určite deliteľný 4 (dokonca aj 8). Ak vyberieme dve párne čísla a jedno nepárne, tak stále ich súčin bude deliteľný 4. Ak vyberieme dve nepárne čísla, potom tretie číslo musí byť deliteľné 4. Ak by sme totiž vybrali dve nepárne čísla a jedno párne, ale nedeliteľné 4, potom súčin týchto troch čísel by nebol deliteľný 4. Podobne by nebol deliteľný 4 ani súčin troch nepárnych čísel. Čiže máme tri možnosti, ako vyberať.

Čo je podstatné, tieto tri možnosti sa navzájom vylučujú, teda buď platí jedna, alebo druhá, alebo tretia. Nemôžu nastať žiadne dve z nich naraz. Z toho vyplýva, že celkový počet možných výberov sa bude rovnať súčtu počtov možných výberov pre jednotlivé možnosti. Našou ďalšou úlohou je zistiť tieto počty.

- Vyberáme tri párne čísla. Párnych čísel v množine $\{1, 2, ..., 20\}$ je 10. Keďže nezáleží na poradí čísel (vyberáme trojprvkové podmnožiny), tak počet rôznych výberov troch párnych čísel bude $\binom{10}{3} = 120$ (kombinácie bez opakovania).
- Vyberáme dve párne čísla a jedno nepárne. Párnych čísel je 10, rovnako ako nepárnych. Počet rôznych dvojíc párnych čísel je $\binom{10}{2} = 45$. Ku každej z týchto dvojíc môžeme priradiť hocijaké nepárne číslo a vždy dostaneme iný výber. Teda počet rôznych výberov v tomto prípade bude $45 \cdot 10 = 450$.
- Vyberáme dve nepárne čísla a jedno deliteľné 4. Počet dvojíc nepárnych čísel (podobne ako to bolo s párnymi číslami v predchádzajúcom prípade) je $\binom{10}{2} = 45$. Ku každej z týchto dvojíc môžeme priradiť hocijaké číslo deliteľné 4 (a vždy dostaneme iný výber). Počet čísel deliteľných 4 v množine $\{1, 2, ..., 20\}$ je 5. Teda počet výberov v tomto prípade bude $45 \cdot 5 = 225$.

Keďže poznáme počty výberov pre jednotlivé možnosti, vieme zrátať aj celkový počet možných výberov. Ten bude $120 + 450 + 225 = 795$.

Komentár: Úloha nebola ťažká a v podstate ste ju zvládli. Veľmi dôležitý bol výber možností, ako vyberať trojice tak, aby ich súčin bol deliteľný 4. Zlým výberom ste si úlohu trochu sťažili. Často ste tiež zabúdali na to, že pri výbere trojíc nezáleží na poradí.

Úloha č. 4: *Rúža a Dada striedavo umiestňujú kvetinky na políčka šachovnice rozmerov 7×3. Každé z dievčat v každom ťahu položí práve jeden kvietok na niektoré z prázdnych políčok. Rúžine kvetinky sú slnečnice a Dadine sú ruže. Víťazkou je tá, ktorá prvá položí svoju kvetinku na všetky štyri rohové políčka nejakého obdĺžnika, tvoreného políčkami šachovnice. Dokážte, že táto ich hra je veľmi zábavná, to znamená, že nikdy nemôže skončiť remízou.*

Riešenie: (opravoval Rasťo)

Začnime pozorovaním, že remíza nastane vtedy, ak dievčatá zaplnia celú šachovnicu kvetinkami a zároveň nebudú existovať štyri kvetinky, ktoré sú vrcholmi obdĺžnika. Pokúsime sa nájsť také rozloženie, aby nastala remíza. Budeme si všímať, ako môžu vyzerať stĺpce šachovnice. Spolu existuje osem rôznych usporiadaní kvetiniek v stĺpci:

R	R	R	R	S	S	S	S
R	R	S	S	R	R	S	S
R	S	R	S	R	S	R	S

Z nich si musíme vybrať sedem rôznych. Ak by sa totiž medzi týmito siedmymi stĺpcami vyskytli dva rovnaké, tak kvetinky v nich nám vytvoria obdĺžnik (rozmyslite si prečo). Ak si vyberieme aj stĺpec zo samých ruží, tak potom si už môžeme vyberať len stĺpce, ktoré obsahujú menej ako dve ruže (inak by vznikol obdĺžnik). Tie sú však iba štyri a my potrebujeme zaplniť ešte šesť miest, čiže nejaký stĺpec sa nám určite zopakuje. Podobne to dopadne, aj keď si vyberieme miesto stĺpca so samými ružami stĺpec so samými slnečnicami. Preto tieto dva stĺpce nemôžeme vybrať (remíza nenastane). Ostáva nám teda už len šesť rôznych stĺpcov na sedem rôznych miest, preto sa jeden z nich musí zopakovať. Keďže sa však jeden stĺpec vyskytne viackrát, tak vznikne obdĺžnik a teda nenastane remíza. To nás vedie k záveru, že Rúža a Dada nemôžu usporiadať kvetinky na šachovnicu tak, aby hra skončila remízou. Hra je preto veľmi zábavná. :) Skúste si rozmyslieť, pre aké plány $n \times 3$ je hra zábavná. A čo, keby sme sa pozreli na plán tvaru $n \times 4$ alebo dokonca $n \times m$?

Úloha č. 5: *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel $(p,\ q)$, pre ktoré platí $p + q = 2005$ a zároveň má rovnica $x^2 + px + q = 0$ dve celočíselné riešenia.*

Riešenie: (opravovali Katka a Mazo)

Nech skúmaná rovnica $x^2 + px + q = 0$ má dva celočíselné korene x_1, x_2. Potom sa táto rovnica dá napísať v tvare $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, po úprave $x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2 = 0$. Porovnaním koeficientov (máme jednu rovnicu zapísanú dvoma rôznymi spôsobmi) dostávame pre čísla p, q vzťahy

$$\begin{aligned} p &= -x_1 - x_2, \\ q &= \quad x_1x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Vieme, že $p + q = 2005$ a keďže čísla p, q sú určené vzťahmi (1), hľadáme celé čísla x_1, x_2, pre ktoré platí

$$x_1x_2 - x_1 - x_2 = 2005. \tag{2}$$

Toto nespĺňajú ľubovoľné celé čísla, napríklad k $x_2 = 4$ dostaneme jedinú možnosť pre x_1, ale nebude to celé číslo. Skúsme sa teda na (2) dívať ako na lineárnu rovnicu pre x_1 s parametrom x_2 a zistime, pre ktoré x_2 má celočíselné riešenie. Úpravou rovnice (2) dostaneme

$$x_1 = \frac{x_2 + 2005}{x_2 - 1} = \frac{x_2 - 1 + 2006}{x_2 - 1} = 1 + \frac{2006}{x_2 - 1}$$

a keďže toto je celé číslo, musí byť $x_2 - 1$ deliteľom čísla 2006. (Túto úvahu si dobre rozmyslite. Aj úpravy, ktoré sme spravili. Používajú sa často.)
Delitele čísla 2006 najrýchlejšie zistíme pomocou rozkladu na prvočísla. Veríme, že to už zvládnete ľavou zadnou sami. K nájdeným x_1 a x_2 dorátame zo vzťahov (1) čísla p, q. Dostaneme 8 dvojíc $(-2009, 4014)$, $(-1007, 3012)$, $(-137, 2142)$, $(-95, 2100)$, $(2005, 0)$, $(1003, 1002)$, $(133, 1872)$, $(91, 1914)$, pre ktoré ešte musíme overiť, či rovnica $x^2 + px + q = 0$ má celočíselné riešenia. Aj keď sa vám tento krok zdá nepodstatný, rozmyslite si, prečo je dôležitý.

Poznámka: Rovnica (2) sa dá riešiť aj elegantnejšie, úpravou ľavej strany na súčin dvoch činiteľov dostaneme $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2006$. K riešeniu sa dostaneme takisto pomocou rozkladu čísla 2006 na prvočísla.

Iné riešenie:
Rovnica $x^2 + px + q = 0$ má dve riešenia $x_{1,2} = (-p \pm \sqrt{D})/2$, ak je jej diskriminant $D = p^2 - 4q$ kladný. Ak sú tieto riešenia celočíselné, tak ich dvojnásobky sú párne celé čísla. Predstavme si číselnú os. Medzi číslami $2x_1$ a $2x_2$ sa v strede nachádza číslo $-p$, od oboch týchto čísel je pritom vzdialené $\sqrt{D}$. Z toho je jasné, že čísla $-p$, p, $\sqrt{D}$ sú celé.
Preto diskriminant D je štvorcom nejakého celého čísla a. Keďže $D > 0$ a $(-a)^2 = a^2$, môžeme predpokladať, že a je prirodzené. Vieme, že $p+q = 2005$, teda $q = 2005-p$, preto platí $D = p^2-4q = p^2-4(2005-p) = p^2+4p-8020 = a^2$.
Ako budeme riešiť takúto rovnicu v celých číslach? Na pravej strane je štvorec, na ľavej je tiež nejaký štvorec, ku ktorému čosi pripočítame. To čosi nemôže byť hocijaké: rozdiely medzi štvorcami postupne narastajú, ako tieto štvorce zväčšujeme, preto ak vieme, že rozdiel dvoch štvorcov je konštanta, tak tieto štvorce nemôžu byť príliš veľké a prinajhoršom preskúmaním niekoľkých možností ich nájdeme. (Pozrite si ilustračný príklad v poznámke za riešením.)
V našom prípade si ešte musíme pomôcť úpravou ľavej strany, aby sme dostali rozdiel dvoch štvorcov ako konštantu a nie čosi závisiace od p. Poďme na to:

$$\begin{aligned} p^2 + 4p - 8020 &= a^2 \\ p^2 + 4p + 4 - 4 - 8020 &= a^2 \\ (p+2)^2 - 8024 &= a^2 \\ (p+2)^2 - a^2 &= 8024 \end{aligned}$$

Máme, čo sme chceli, rozdiel dvoch štvorcov je konštanta. Číslo 8024 je však priveľké, aby sme rozoberali možnosti pre $p + 2$ a a ako v ilustračnom príklade. Preto skúsime niečo iné. Ľavá strana našej rovnosti sa dá podľa známeho vzorca $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ rozložiť na súčin. Bude to na niečo dobré? Áno: číslo 8024 sa dá na súčin dvoch činiteľov rozložiť len niekoľkými spôsobmi a teda stačí rozobrať niekoľko možností, v každej z nich dostaneme sústavu rovníc s dvoma rovnicami a dvoma neznámymi. Jednu možnosť tu rozoberieme, ostatné nechávame na čitateľa. Nech

$$(p + 2 + a)(p + 2 - a) = 68 \cdot 118.$$

Keďže $a > 0$, je $p + 2 + a > p + 2 - a$, preto

$$\begin{aligned} p + 2 + a &= 118, \\ p + 2 - a &= 68. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy rovníc je dvojica $p = 91$, $a = 25$. Dorátame $q = 2005 - p = 1914$ a overíme, či dvojica $(91, 1914)$ skutočne vyhovuje všetkým podmienkam úlohy.
Skúste si použitú metódu precvičiť na niekoľkých úlohách, napríklad: Nájdite všetky celé čísla x, y, pre ktoré platí $x^2 = 3xy + 10$.

Poznámka: Nájdime prirodzené čísla c, d také, že $c^2 - d^2 = 7$. Zrejme $c = 1, 2$ je primálo, vtedy je ľavá strana menšia ako 7. Pre $c = 3$ máme $d^2 = 2$, také celé číslo d neexistuje. Pre $c = 4$, $d = 3$ sme našli jednu vyhovujúcu dvojicu. Inak $c \geq 5$. Zrejme $d < c$, inak povedané, $d \leq c - 1$. Preto $-7 = d^2 - c^2 \leq (c-1)^2 - c^2 = -2c + 1 \leq -2 \cdot 5 + 1 = -9$ a to je spor, nerovnosť $-7 \leq -9$ zjavne neplatí. V tomto prípade už žiadne vyhovujúce c nenájdeme.

Úloha č. 6: *Uvažujme nasledujúce výroky o rovnici $x|x| + px + q = 0$.*
a) Má najviac tri reálne riešenia.
b) Má najmenej jedno reálne riešenie.
c) Má reálne riešenie, iba ak $p^2 - 4q \geq 0$.
d) Má tri reálne riešenia, ak $p < 0$ a $q > 0$.
Koľko z nich je pravdivých? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie: (opravovali Hruška a Miťo)
Pozrime sa najprv na to, ako môžu vyzerať všetky potenciálne riešenia danej rovnice. Rozdeľme si najprv reálne čísla na dva intervaly, $(-\infty, 0)$ a $\langle 0, +\infty)$, a podľa definície absolútnej hodnoty prepíšme danú rovnicu na rovnice

$$x^2 - px - q = 0, \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Diskriminant prvej rovnice bude $D_1 = p^2 + 4q$ a druhej $D_2 = p^2 - 4q$. Pre možné korene týchto rovníc potom máme vzťahy $x_{1,2} = (p \pm \sqrt{D_1})/2$ a $x_{3,4} = (-p \pm \sqrt{D_2})/2$. Aby tieto čísla naozaj boli koreňmi, musia ležať v danom intervale, teda $x_{1,2} < 0$ a $x_{3,4} \geq 0$. Z týchto podmienok po drobných úpravách dostávame, že všetky výrazy

$$-p + \sqrt{p^2 + 4q}, \qquad -p - \sqrt{p^2 + 4q}, \qquad -p + \sqrt{p^2 - 4q}, \qquad -p - \sqrt{p^2 - 4q}$$

musia byť väčšie ako nula. (Rozmyslite si tieto úpravy.) Teraz ukážeme, že tieto nerovnosti nemôžu všetky platiť súčasne. Na to nám stačí ukázať, že druhá a štvrtá nerovnosť nemôžu platiť súčasne. Opäť po drobnej úprave zisťujeme, že $\sqrt{D_1}$ aj $\sqrt{D_2}$ musia byť menšie ako $-p$. Hneď si všimneme, že ak $p > 0$, tak tieto rovnosti nemôžu platiť, pretože odmocniny sú nezáporné. Teda p musí byť záporné, rovnako ako obe strany nerovností a môžeme ich umocniť. Snaživý čitateľ iste po krátkej úprave zistí, že to vedie k podmienkam $q < 0$ a $q > 0$, ktoré zrejme nemôžu platiť obe súčasne. Tým sme dokázali, že časť a) platí. Poznamenávame ešte, že sme predpokladali, že oba diskriminanty sú nezáporné, čo sme mohli, pretože sme sa snažili maximalizovať počet riešení. Ako drobné cvičenie na doma ponechávame rozmyslieť si, prečo sme niektoré neostré nerovnosti nahradili ostrými, a prečo sme to mohli urobiť.

Najprv prezradíme, že časť b) naozaj platí. Dokázať sa to dá mnohými spôsobmi; najčastejšie ste využívali takýto postup: Pozrieme sa, za akých podmienok dochádza k neexistencii jednotlivých riešení a ukážeme, že tieto podmienky nemôžu byť splnené všetky súčasne. Tento postup je síce správny, ale zároveň veľmi pracný a vyžaduje si rozobranie veľkého množstva prípadov. Zároveň ste si väčšinou neuvedomili, že pre neexistenciu riešenia *nie je* nutné, aby bol diskriminant záporný, čo sa odrazilo na nesprávnosti riešenia. Omnoho ľahšia cesta je všimúť si, aké znamienko má q. Nastávajú teda prípady $q > 0$, $q = 0$ a $q < 0$ a pre každý z nich treba ukázať, že existuje aspoň jedno riešenie. Uvažujme najprv $q < 0$. Potom máme $D_2 > p^2$ a $x_3 = (-p + \sqrt{D_2})/2$ je vždy kladné a teda skutočne je riešením. Zvyšné dva prípady sa spravia veľmi podobne a prenechávame ich teraz už nedočkavému čitateľovi :).

Dvoma spôsobmi dokážeme, že časť c) zo zadania je nepravdivá. Prvý spôsob je, že nájdeme protipríklad, teda také parametre p a q, že $p^2 - 4q < 0$ a zároveň bude mať rovnica reálne riešenie. Z predchádzajúceho postupu si možno všimnúť, že ak pre tieto parametre bude platiť $p^2 + 4q \geq 0$, riešenie môže existovať. Po chvíľke hľadania nachádzame kombináciu $p = 2$, $q = 3$, o ktorej si ľahko overíte, že má všetky požadované vlastnosti. Druhé riešenie časti c) je jednoduchšie – jednoducho to vyplýva z časti b). Totiž ak má naša rovnica riešenie vždy, tak ho má, aj keď neplatí $p^2 - 4q \geq 0$.

Podobne aj pre časť d) existuje protipríklad, je ním kombinácia koeficientov $p = -3$, $q = 4$, pri ktorej má rovnica iba jedno riešenie, ako ste už určite stihli overiť.

Celkovo teda máme, že pravdivé sú výroky a) a b), zvyšné dva sú nepravdivé.

Poznámka: Najdôležitejšou časťou riešenia bolo uvedomiť si, že aby rovnica mala riešenie, nestačí, ak je jej diskriminant kladný, nájdený koreň musí tiež padnúť do daného intervalu. Presne rovnako nestačí, aby koreň padol do daného intervalu; pokiaľ diskriminant nie je nezáporný, nie je to riešenie. Tiež nie je zbytočné kontrolovať, či možno danú nerovnosť umocniť, pretože inak takýto postup vedie k nekorektným výsledkom.

Úloha č. 7: *Osem spevákov sa zúčastnilo hudobného festivalu, kde vystúpili s m piesňami ($m > 0$). Každú pieseň spievali štyria z nich a každá dvojica spievala v rovnakom počte piesní ako ľubovoľná iná dvojica. Aké je najmenšie m, pre ktoré je to možné? Svoje tvrdenie zdôvodnite.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Pišta)

Najprv vyrátajme, koľko je rôznych dvojíc. Je ich $\binom{8}{2} = 28$. Keď sú štyria speváci na pódiu, tak je tam vlastne 6 rôznych dvojíc. Napríklad keď sú na pódiu speváci A, B, C, D, tak je tam týchto šesť dvojíc: AB, AC, AD, BC, BD a CD. To znamená, že ak na festivale odznelo m pesničiek, tak dokopy spievalo $6m$ dvojíc. Ak každá dvojica spievala spolu k-krát, dokopy spievalo $28k$ dvojíc. Teda platí $6m = 28k$. Hľadáme najmenšie m, pre ktoré táto rovnosť nastane. Rovnicu zjednodušme, prejde do tvaru $3m = 14k$. Čísla 3 a 14 sú nesúdeliteľné, preto m musí byť deliteľné 14-mi. Potom najmenšie m, ktoré prichádza do úvahy, je $m = 14$. To ešte neznamená, že číslo 14 naozaj vyhovuje. Potrebujeme ukázať, že existuje taký festival, na ktorom sa dá odspievať 14 pesničiek s potrebnými podmienkami. Číslo 14 nie je až také veľké, preto najjednoduchšie je vypísať tie pesničky podľa spevákov: (Spevákov si označíme A, B, C, D, E, F, G a H.)

1: $ABCD$	2: $AFGH$	3: $AEBF$	4: $ACEH$	5: $ADGB$	6: $ACFG$	7: $ADEH$
8: $BHDF$	9: $BCEG$	10: $BHCF$	11: $BHEG$	12: $CDGH$	13: $CDEF$	14: $DEFG$

Tým je úloha vyriešená.

Úloha č. 8: *Najviac koľko veží je možné umiestniť na šachovnicu rozmerov $m \times n$ tak, aby každá veža ohrozovala práve dve ďalšie? Svoje tvrdenie dokážte.*

Poznámka: Dve veže sa ohrozujú, ak sú umiestnené v rovnakom riadku alebo stĺpci a medzi nimi sa nenachádza iná veža.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Jakub)
Najskôr si rozoberme prípad, keď aspoň jeden z rozmerov šachovnice je rovný 1. Vtedy šachovnica vyzerá ako pásik. Ak by boli na nej umiestené nejaké veže, existovala by aspoň jedna krajná, a tá by ohrozovala iba jednu vežu. Takže v tomto prípade ($m = 1$ alebo $n = 1$) platí, že hľadaný maximálny počet veží je 0.
A čo ostatné šachovnice? V podstate každý z vás prišiel na to, že aspoň $m + n$ veží sa tam vždy dá naukladať (napríklad tak, že uložíme veže do celého najľavejšieho stĺpca, aj do celého najhornejšieho riadku a ešte jednu vežu do pravého spodného rohu – to, že to sedí, si môžete aj sami ľahko overiť). Aby bola úloha úplne vyriešená, potrebujeme ešte ukázať, že viac ako $m+n$ sa nedá. Existuje kopa rôznych dôkazov. Uvedieme tu iba jeden, ktorý sa zdá byť najjednoduchší.
Všimnime si, že každá veža ohrozuje okolo seba štyri smery (aj keď je v rohu alebo na okraji šachovnice!). Predstavme si, že máme nejaké riešenie (rozloženie veží). Potom z ľubovoľnej veže musia byť v práve dvoch smeroch dve veže a práve dva smery musia byť voľné. V týchto dvoch voľných smeroch si predstavme polpriamky vedúce zo stredu veže a nazvime ich „voľné polpriamky“. Každá z týchto dvoch voľných polpriamok pretne jednu okrajovú stranu okrajového štvorčeka šachovnice (túto stranu nazvime „okrajová úsečka“). Ešte je dôležité si všimnúť, že jedna takáto okrajová úsečka nemôže byť preťatá viac ako jednou voľnou polpriamkou (to je zrejmé). Tak, a to je všetko. Keďže okrajových úsečiek je na šachovnici $2 \cdot (m + n)$ (je to obvod šachovnice) a každej veži prislúchajú práve dve okrajové úsečky, je zrejmé, že veží nemôže byť na šachovnici viac ako $2 \cdot (m + n)/2 = m + n$.

<u>Komentár:</u> Vymyslieť nejaký správny dôkaz (a dotiahnuť ho dokonca) zjavne nebolo veľmi ľahké, keďže veľkej časti z vás sa to nepodarilo. Ale potešilo nás, aké rôzne nápady ste pri dokazovaní mali. Väčšina z nich naozaj viedla k správnemu riešeniu. Nakoniec ešte uvádzame hodnotenie úlohy: 1 bod za špeciálny prípad, keď $m = 1$ alebo $n = 1$, 3 body za nájdenie postavenia pre $m+n$ veží a 5 bodov za dôkaz, že viac ako $m+n$ veží sa nedá rozostaviť.

<u>Úloha č. 9:</u> *K daným číslam 7 a 2 utvoríme postupnosť $7, 2, 1, 4, 2, 4, 8, 8, 3, 2, \ldots$ tak, že postupne násobíme dvojice susedných členov a výsledok pripojíme ako ďalší jeden alebo dva členy v závislosti od toho, či je súčin jednomiestne alebo dvojmiestne číslo. Dokážte, že číslica 6 sa v postupnosti objaví nekonečne veľakrát.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Rúža)
(Podľa *Miša Takácsa.*) Vypíšme si túto postupnosť aj ďalej:

$$7, 2, 1, 4, 2, 4, 8, 8, 3, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 8, 2, 4, 6, 2, 4, 8, 3, 2,$$
$$6, 4, 1, 6, 8, 2, 4, 1, 2, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 1, 2, 2, 4, \underline{4, 6, 4}, 8, 1, 6, \ldots$$

Vidíme, že v postupnosti sa vyskytuje trojica za sebou idúcich číslic $4, 6, 4$, ktorá obsahuje sledovanú číslicu 6. Ukážeme, že táto trojica sa v postupnosti vyskytne nekonečne veľakrát a ukážeme to sporom. Predpokladajme, že trojica číslic $4, 6, 4$ sa v postupnosti nachádza konečne veľakrát. Vezmime si poslednú trojicu $4, 6, 4$ (určite taká existuje, keďže aspoň jedna sa tam nachádza). Dvojice susedných číslic každej trojice (štvorice, alebo dlhšej sekvencie) sa vynásobené nachádzajú niekde ďalej v postupnosti. Preto číslice $2, 4, 2, 4$, ktoré dostaneme vynásobením poslednej trojice $4, 6, 4$ sa vyskytujú niekde ďalej v postupnosti. Niekde ďalej sa potom musia nachádzať aj vynásobené číslice $2, 4, 2, 4$. Takto postujeme ďalej a dostávame

$$7, 2, \ldots 4, 6, 4, \ldots 2, 4, 2, 4, \ldots 8, 8, 8, \ldots 6, \underline{4, 6, 4}, \ldots$$

Vidíme, že niekde ďalej v postupnosti sa trojica $4, 6, 4$ musí znova vyskytnúť, čo je spor s predpokladom, že sa už vyskytla posledný raz.
To znamená, že trojica za sebou idúcich číslic $4, 6, 4$ sa v postupnosti objaví nekonečne veľakrát. Keďže táto trojica obsahuje číslicu 6, tak aj číslica 6 sa v postupnosti objaví nekonečne veľakrát, čo bolo treba dokázať.

<u>Úloha č. 10:</u> *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú rovnosť*

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z)$$

pre každú trojicu reálnych čísel x, y, z.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Hanka)
(Podľa *Fera Simančíka.*) Ako sa rieši funkcionálna rovnica? Keďže rovnosť zo zadania má platiť pre všetky možné hodnoty x, y, z, na začiatok vyskúšame niekoľko špeciálnych kombinácií x, y, z. Už len treba prísť na to, čo nám pomôže najviac.
Dosaďme za (x, y, z) hodnoty $(1, 0, 0)$:

$$f(0) = f(0) + f(0) \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = 0.$$

Funkcia $f(x) = 0$ (pre všetky reálne čísla x) je zjavne riešením našej funkcionálnej rovnice.
Nech ďalej existuje také k, že $f(k) \neq 0$. Dosaďme $(x, 0, k)$:

$$f(kf(x)) = xf(k). \tag{3}$$

Môžeme si všimnúť, že ak pre nejaké a, b platí $f(a) = f(b)$, potom $f(kf(a)) = f(kf(b))$, a teda podľa rovnosti (3) $af(k) = bf(k)$. To je ekvivalentné s rovnosťou $a = b$, teda hľadaná funkcia je prostá.
Do (3) dosaďme $x = 1$ a dostávame $f(kf(1)) = 1 \cdot f(k)$. Odtiaľ $kf(1) = k$, čo platí len vtedy, keď $f(1) = 1$. (Rozmyslite si, prečo je k nenulové.)
Do rovnice zo zadania dosaďme $(x, 0, 1)$:

$$f(f(x)) = f(0) + xf(1) = x. \tag{4}$$

Nech $y = 0$, $x = f(z)$, potom $f(zf(f(z))) = f(z^2) = f(z)^2$, čiže $f(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. Dosadením $x = 1$ do rovnice zo zadania získame

$$f(y+z) = f(y) + f(z). \tag{5}$$

Nech teraz $z = -y$:

$$\begin{aligned} f(y-y) &= f(y) + f(-y) \\ -f(y) &= f(-y). \end{aligned}$$

Vidíme, že naša funkcia je nepárna. Už vieme, že $f(x) > 0$ pre $x > 0$, teda bude platiť, že $f(x) < 0$ pre $x < 0$. Tak, a už sa blížime k záveru. Čím ďalej, tým viac sa nám naša funkcia začína podobať na funkciu $f(x) = x$. Už to len trochu celé dotiahnuť.
Predpokladajme, že existuje také k, že

$$f(k) = k + l, \tag{6}$$

$l \neq 0$. Potom

$$k \overset{(4)}{=} f(f(k)) \overset{(6)}{=} f(k+l) \overset{(5)}{=} f(k) + f(l) \overset{(6)}{=} k + l + f(l).$$

Teda existuje l také, že $f(l)$ má opačné znamienko ako l a to je v spore s tým, čo vieme o funkcii f. Tým sme ukázali, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Táto funkcia je naozaj riešením našej funkcionálnej rovnice a spolu s $f(x) = 0$ sú to jediné riešenia.

Komentár: Mnohí z vás sa dostali až k rovnosti (5) a potom ukázali, že pre racionálne čísla je jediným riešením okrem $f(x) = 0$ jedine $f(x) = x$. To nám však ešte nestačí na to, aby sme ju len tak mohli rozšíriť na reálne čísla. Ďalšia vec je, že nestačí, ak preveríte konštantné, potom lineárne funkcie a napríklad aj dokážete, že ani polynómy vyššieho stupňa nevyhovujú. Riešením funkcionálnej rovnice totiž môže byť aj napríklad $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = 2^x$ a mnohé iné.

Úloha č. 11: *Nájdite všetky dvojice celočíselných parametrov $(p,\, q)$, pre ktoré má rovnica*

$$x^3 - y^3 = pxy + q$$

s neznámymi x, y nekonečne veľa riešení v obore celých čísel.

Riešenie: (opravoval Peťo)
Obe neznáme v rovnici sú umocnené na tretiu. Pokúsme sa znížiť exponent aspoň pri jednej neznámej – uvidíme, či nám to nejako pomôže. Dosiahneme to substitúciou $x = y + z$. Dostaneme tak novú rovnicu s neznámymi y a z. Tá bude mať nekonečne veľa riešení v celých číslach práve vtedy, keď ich bude mať aj pôvodná rovnica (premyslite si, prečo). Úpravami novej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} (y+z)^3 - y^3 &= p(y+z)y + q, \\ 3y^2z + 3yz^2 + z^3 &= py^2 + pyz + q, \\ (3z-p)y^2 + (3z^2 - pz)y + (z^3 - q) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Máme tak vzhľadom na neznámu y nanajvýš kvadratickú rovnicu (7). Snažme sa zistiť, pre ktoré hodnoty neznámej z bude mať rovnica (7) riešenie vzhľadom na neznámu y. Pre hodnotu $z = p/3$ nadobudne rovnica tvar

$$0 \cdot y^2 + 0 \cdot y + (p/3)^3 - q = 0,$$

t. j. bude mať nekonečne veľa riešení v prípade, že $(p/3)^3 = q$ a žiadne riešenie inak.
Zaoberajme sa ďalej len hodnotou $z \neq p/3$. Vtedy je v rovnici (7) koeficient pri y^2 nenulový, takže riešenie bude môcť existovať len v prípade, že diskriminant bude nezáporný (samozrejme, celočíselné riešenie nemusí existovať ani pri nezápornom diskriminante, je to však nutná podmienka). Pre diskriminant D rovnice (7) máme

$$D = (3z^2 - pz)^2 - 4(3z-p)(z^3 - q) = -3z^4 - 2pz^3 + p^2z^2 + 12qz - 4pq.$$

Teda D je vzhľadom na neznámu z polynóm štvrtého stupňa, pričom pri člene z^4 je záporný koeficient. Z toho priamo vyplýva, že D je nezáporný len pre konečne veľa celočíselných hodnôt z. (Stačí si spomenúť na to, ako vyzerá graf polynomickej funkcie. Samozrejme, presný dôkaz by bolo treba urobiť detailnejšie.)

Tým sme už úlohu vyriešili. Zhrňme si na záver, čo sme odvodili. V prípade, že $(p/3)^3 \neq q$, pre $z = p/3$ (bez ohľadu na to, či $p/3$ je celé číslo alebo nie) nemá rovnica (7) žiadne riešenie a pre $z \neq p/3$ je len konečne veľa celočíselných hodnôt z, pre ktoré môže mať rovnica (7) riešenie. Zároveň pre každé $z \neq p/3$ môže mať rovnica (7) s neznámou y najviac dve riešenia (je to kvadratická rovnica). Takže ak $(p/3)^3 \neq q$, existuje len konečne veľa celočíselných riešení substituovanej (a aj pôvodnej) rovnice.
V prípade, že $(p/3)^3 = q$, má rovnica (7) nekonečne veľa riešení (y, z), pričom y je ľubovoľné celé číslo a $z = p/3$ (keďže p, q sú celé a $(p/3)^3 = q$, tak aj $p/3$ je celé a teda aj z je celé). Netvrdíme, že toto sú všetky riešenia danej rovnice, stačí, že ich je nekonečne veľa. Pre pôvodnú rovnicu to znamená, že má nekonečne veľa riešení tvaru $x = y + p/3$, kde y je ľubovoľné celé číslo (presvedčte sa skúškou, že je to tak).
Hľadanými dvojicami parametrov sú preto také celočíselné dvojice (p, q), ktoré spĺňajú $(p/3)^3 = q$, t. j. dvojice $(3k, k^3)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Komentár: Viacerí ste sa dopracovali k rovnici (7), o ktorej ste prehlásili, že ak $z \neq p/3$, tak je to kvadratická rovnica, a teda má len konečne veľa riešení. Zabudli ste na to, že ten konečný počet riešení by mohol existovať pre nekonečne veľa rôznych hodnôt z, teda riešení by bolo nekonečne veľa. Bolo treba ešte urobiť úvahu s diskriminantom. Ak by nám diskriminant vyšiel s kladným koeficientom pri z^4, kľudne by mohlo existovať nekonečne veľa riešení.

Úloha č. 12: *Nech O je vnútorný bod trojuholníka ABC. Priamky OA, OB, OC pretínajú strany trojuholníka po rade v bodoch A_1, B_1, C_1 (po rade rôznych od bodov A, B, C). Nech R_1, R_2, R_3, R sú polomery kružníc opísaných postupne trojuholníkom OBC, OCA, OAB, ABC. Dokážte, že*

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}R_1 + \frac{|OB_1|}{|BB_1|}R_2 + \frac{|OC_1|}{|CC_1|}R_3 \geq R\,.$$

Riešenie: (opravoval Foto)
Túto úlohu vyriešil a poslal len *Ondro Budáč*. Buď mu za to večná sláva. :) Riešenie sa dozviete na sústredení.

Úloha č. 13: *Nech a, b, c sú také reálne čísla, že polynóm $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ má tri reálne korene (nie nutne rôzne). Dokážte, že platí*

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}\,.$$

Kedy nastáva rovnosť?

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Dokazovanú nerovnosť môžeme prepísať do tvaru

$$-6a(a^2 - 2b) \leq -27c + 10(a^2 - 2b)^{3/2}. \tag{8}$$

Označme si korene polynómu $P(x)$ ako d, e, f. Potom pomocou Vietových vzťahov

$$\begin{aligned} a &= -(d + e + f) \\ b &= de + ef + df \\ c &= -def \end{aligned}$$

získa nerovnosť podobu

$$6(d + e + f)(d^2 + e^2 + f^2) \leq 27def + 10(d^2 + e^2 + f^2)^{3/2}. \tag{9}$$

Ak $d^2 + e^2 + f^2 = 0$, tak (9) zjavne platí, a navyše v nej nastáva rovnosť. Inak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $|d| \leq |e| \leq |f|$ a keďže v nerovnosti sa nevyskytuje žiaden absolútny člen a všetky členy sú stupňa 3, nezáleží na veľkosti hodnôt d, e, f, ale iba na ich vzájomých pomeroch, teda si ich môžeme znormovať prijatím predpokladu $d^2 + e^2 + f^2 = 9$. Tým sa nerovnosť (9) zmení na

$$2(d + e + f) - def \leq 10. \tag{10}$$

Z našich predpokladov potom dostávame

$$\begin{aligned} (2(d + e + f) - def)^2 &= (2(d + e) + f(2 - de))^2 \leq \\ &\leq ((d + e)^2 + f^2)(4 + (2 - de)^2) = \qquad (11) \\ &= (9 - 2de)(8 - 4de + (de)^2) = \\ &= 2(de)^3 + (de)^2 - 20de + 72 = \\ &= (de + 2)^2(2de - 7) + 100. \qquad (12) \end{aligned}$$

Z uvedených predpokladov ale vyplýva, že $f^2 \geq 3$. Preto $2de \leq d^2 + e^2 = 9 - f^2 \leq 6$, teda $(2de - 7) < 0$ a $(de + 2)^2 \geq 0$, čiže dostávame $(2(d + e + f) - def)^2 \leq 100$, čím je dokázané (10) a tým aj celá nerovnosť.

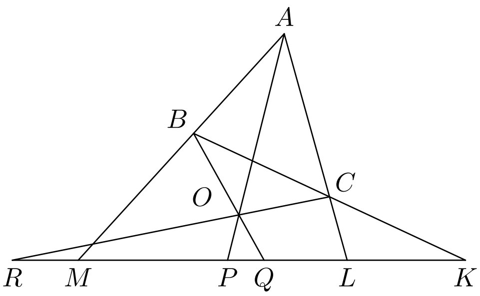
Pozrime sa teraz na to, kedy nastávajú rovnosti. V (11) nastane práve vtedy, keď $(d+e)(2-de)=2f$ (overte si to!) a (12) sa rovná 100 práve vtedy, keď $de+2=0$. Aby platila rovnosť v (10), musí navyše platiť $2(d+e+f)-def \geq 0$. Tieto podmienky spolu s našimi pôvodnými predpokladmi nám určujú $d=-1$ a $e=f=2$. Takže keď upustíme od predpokladov $d^2+e^2+f^2=9$ a $|d| \leq |e| \leq |f|$, dostaneme, že v (9) nastáva rovnosť práve vtedy, keď (d,e,f) je permutáciou $(-t, 2t, 2t)$ pre nejaké $t \in \mathbb{R}_0^+$ a v (8) teda nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a=-3t$, $b=0$ a $c=4t^3$, opäť pre nejaké $t \in \mathbb{R}_0^+$.

__Úloha č. 14:__ *V rovine trojuholníka ABC je daný bod O a kružnica k prechádzajúca bodom O tak, že priamky OA, OB a OC pretínajú kružnicu k po rade v bodoch P, Q, R, rôznych od O. Body K, L, M (v tomto poradí) sú druhé priesečníky kružnice k s kružnicami opísanými trojuholníkom BOC, AOC, AOB, rôzne od bodu O Dokážte, že priamky PK, QL, RM prechádzajú jedným bodom.*

<u>Poznámka:</u> 1. Zápis (XYZ) znamená kružnicu opísanú trojuholníku XYZ.
2. Pre objekt X (bod, priamku, kružnicu) nech je X' jeho obraz v kružnicovej inverzii (popísanej v ďalšom texte). (To neznamená, že obraz nebudeme značiť aj inak, ako uvidíte ďalej. :))
3. Zápis $\overline{AB}$ je orientovaná veľkosť úsečky AB.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mazo)

Prečítame si zadanie a skúsime si nakresliť obrázok. Na prvý pokus to akosi nejde a nakoniec usúdime, že sa s takouto úlohou skoro nič užitočné robiť nedá. Máme štyri kružnice a tri priamky prechádzajúce bodom O. Skúsme úlohu pretransformovať použitím kružnicovej inverzie so stredom v bode O. Tento bod sa síce zobrazí do nevlastného bodu roviny, ale ponechajme označenie O tomu pôvodnému (ostatné body $A, B, C, \ldots, R$ sú obrazy). Priamky AO, BO, CO sú samodružné. Obrazom kružnice k je priamka k', na ktorej ležia body K, L, M, P, Q, R, ktoré navyše po rade ležia na priamkach $(BOC)'$, $(AOC)'$, $(AOB)'$, AO, BO, CO. (Pozrite si ilustračný obrázok.)



Podstatné je, ako sa zmení tvrdenie úlohy. Máme dokázať, že kružnice (OPK), (OQL), (ORM) majú spoločný bod rôzny od bodu O. Toto platí práve vtedy, keď majú tieto tri kružnice spoločnú chordálu. A toto dokážeme napríklad tak, že vezmeme chordálu t kružníc (OQL), (ORM) a nájdeme na nej bod, ktorý má rovnakú mocnosť ku kružniciam (OPK) a (OQL). Tento bod môžeme zvoliť ľubovoľne, ale chceme taký, o ktorom sa nám to bude ľahko dokazovať. Preto vezmeme priesečník priamky t s priamkou k' (označme ho X). Jeho mocnosť ku kružniciam (OPK) a (OQL) vieme dobre vyjadriť. Ak bod X neexistuje, zvolíme inak priamku t. Premyslite si to. Stačí dokázať, že platí $\overline{XP} \cdot \overline{XK} = \overline{XQ} \cdot \overline{XL}$, pričom z voľby bodu X vieme, že

$$\overline{XQ} \cdot \overline{XL} = \overline{XR} \cdot \overline{XM}. \tag{13}$$

Vezmime si súradnicovú sústavu na priamke k' s počiatkom X (zaujímajú nás iba vzdialenosti medzi bodmi na tejto priamke). Nech k, l, m, p, q, r sú súradnice bodov K, L, M, P, Q, R. Rovnosť (13) teda hovorí $ql = rm$. Chceme dokázať, že $pk = ql$. To zo samotného vzťahu (13) nevyplýva, potrebujeme zachytiť štruktúru mimo priamky k' a previesť ju na vzťahy medzi súradnicami skúmaných bodov.
Z Menelaovej vety pre trojuholníky OPQ, OQR, ORP a priamky AB, BC, CA dostávame

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{OB}} = 1, \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{QK}}{\overline{RK}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{OC}} = 1, \qquad \frac{\overline{OC}}{\overline{RC}} \cdot \frac{\overline{RL}}{\overline{PL}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = 1,$$

po vynásobení $\overline{PM} \cdot \overline{QK} \cdot \overline{RL} = \overline{QM} \cdot \overline{RK} \cdot \overline{PL}$, prepísané do súradníc

$$(m-p)(k-q)(l-r) = (m-q)(k-r)(l-p). \tag{14}$$

Z rovnosti $ql = rm$ a (14) vyplýva $(pk-ql)(r+m-q-l)=0$. V prípade $r+m=q+l$ dostávame $\{M,R\}=\{Q,L\}$ a záver je zrejmý; inak $pk=ql$ a dokázali sme, že $\overline{XP} \cdot \overline{XK} = \overline{XQ} \cdot \overline{XL}$. Hotovo.