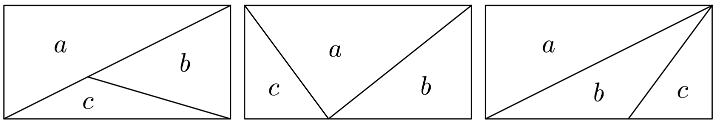
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti 2004/2005

Úloha č. 1: *Obdĺžnikový plátok mamutieho mäsa vážil* 6 *kg. Rozdelili si ho traja praľudia. Najprv obdĺžnik rozrezali na dva kusy. Krátko na to jeden z nich znovu rozrezali na dva kusy. Oba tieto rezy boli rovné. Vznikli takto tri trojuholníky a každý pračlovek si zobral jeden. Jeden z nich mal kus ťažký ako aritmetický priemer zvyšných dvoch. Koľko vážili kusy mäsa?*

Riešenie: (opravovala Erika)

Najskôr si skúsme predstaviť, ako mohli praľudia obdĺžnikový kus mäsa rodzeliť dvoma rovnými rezmi na tri trojuholníky. Po chvíľke kreslenia zistíme, že sú tri rôzne možnosti, ktoré treba uvážiť (pozri obrázok). Označme si hmotnosti mäsa postupne a, b, c, pričom $a \geq b \geq c$.



Zo zadania vieme, že hmotnosť jedného z kusov mäsa je rovná aritmetickému priemeru hmotností zvyšných dvoch kusov. Keďže aritmetický priemer dvoch čísel je číslo medzi nimi, tak musí byť priemer čísel a a c rovný číslu b. Čiže $(a+c)/2 = b$. Z rovnosti $a+b+c = 6\,\mathrm{kg}$ dostávame $a + (a+c)/2 + c = 6\,\mathrm{kg}$, a teda $a + c = 4\,\mathrm{kg}$. Dosadením do vyššie spomenutej rovnosti dostávame $b = 2$ kg.

A čo ďalej? Keď si všimneme obrázky, zistíme, že trojuholník označený a na každom obrázku má plochu rovnú presne polovici obdĺžnika, čiže aj jeho hmotnosť je rovná polovici hmotnosti trojuholníka, preto $a = 3\,\mathrm{kg}$. Hmotnosť posledného kusu mäsa je $c = 6\,\mathrm{kg} - a - b = 6\,\mathrm{kg} - 3\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{kg}$. Jednotlivé kusy mäsa vážili $3\,\mathrm{kg}$, $2\,\mathrm{kg}$ a $1\,\mathrm{kg}$.

Úloha č. 2: *Na lúke našli lúčne koníky plánik spoločenskej hry. Plánik bol podobný ako pri hre človeče. Na plániku bola uzavretá cestička s políčkami. Dalo sa teda hopkať dookola. Štyri koníky sa postavili na štyri za sebou idúce políčka. Koníky vedeli skakáť práve o štyri políčka. Koníky sa chvíľu hrali a skákali v smere hodinových ručičiek. Keď skončili, boli opäť na tých istých štyroch políčkach, z ktorých začali. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci zoradené, ak viete, že na plániku bolo* 14 *políčok.*

Potom sa hrali ich šiesti kamaráti, ktorí vedia skákať o 4, 5, 6, 7, 8 *a* 9 *políčok. Začínali zo* 4., 5., 6., 7., 8. *a* 9. *políčka (bolo to šesť za sebou idúcich políčok). Každý začínal z políčka s takým číslom, o koľko políčok vedel skákať. Plánik mal* 2004 *políčok. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci usporiadné, ak skončili hru na tej istej šestici políčok, na ktorej začínali.*

Poznámka: *Pri tejto hre nezáleží na poradí, v akom koníky skáču. V priebehu hry, nie však na konci, môže stáť na jednom políčku aj viacero koníkov.*

Riešenie: (opravoval Miško)

Najprv rozoberme prvý prípad, keď máme štyroch koníkov a 14 políčok. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že koníky stoja na začiatku na prvých štyroch políčkach. Uvažujme teraz, kam všade môže doskákať prvý koník (teda koník stojací na prvom políčku). Kedže začína na prvom políčku (čo je nepárne číslo), skáče o 4 políčka (čo je párne číslo) a plánik má 14 políčok (čo je tiež párne číslo), určite nedoskočí na políčka s párnym číslom (rozmyslite si prečo). Teda na konci určite nebude stáť na políčkach 2 a 4. Na prvom políčku začína, teda na ňom môže skončiť (napr. tak, že nebude skákať vôbec). Môže skončiť na treťom políčku? Zjavne áno – dostane sa tam po štyroch skokoch (1. $\to$ 5. $\to$ 9. $\to$ 13. $\to$ 3.). Druhý koník začína na párnom políčku. Teda určite nedoskočí na nepárne políčko. Z toho vyplýva, že určite neskončí ani na políčku 1 ani na políčku 3. Na druhom políčku ostať môže a na štvrté sa ľahko dostane opäť po štyroch skokoch (2. $\to$ 6. $\to$ 10. $\to$ 14. $\to$ 4.). Podobne to bude aj s tretím a štvrtým koníkom. Tretí koník doskáče len na nepárne políčka, určite nedoskočí na druhé ani na štvrté políčko. Na treťom políčku ostať môže a na prvé políčko sa dostane po troch skokoch (3. $\to$ 7. $\to$ 11. $\to$ 1.). Štvrtý koník doskáče len na párne, na štvrtom políčku ostať môže a na druhé políčko doskáče po 3 skokoch (4. $\to$ 8. $\to$ 12. $\to$ 2.).

Zopakujme si teraz, kde môže ktorý koník skončiť:

1. koník na 1. a 3. políčku.
2. koník na 2. a 4. políčku.
3. koník na 1. a 3. políčku.
4. koník na 2. a 4. políčku.

Aké sú teda všetky možnosti konečného usporiadania? Máme dve možnosti ako uložiť prvého a tretieho koníka (buď bude prvý koník na prvom políčku a potom tretí koník na treťom, alebo prvý koník na treťom a tretí na prvom). K týmto dvom možnostiam máme 2 možnosti ako môžu skončiť druhý a štvrtý koník. Teda celkovo budeme mať 4 možnosti a to tieto:

1. koník, 2. koník, 3. koník, 4. koník;
1. koník, 4. koník, 3. koník, 2. koník;
3. koník, 2. koník, 1. koník, 4. koník;
3. koník, 4. koník, 1. koník, 2. koník.

A teraz druhý prípad. Ako v predchádzajúcom prípade si rozoberieme, kde môže ktorý koník skončiť. Čiže nás bude zaujímať, na ktoré z políčok 4 až 9 môže doskočiť. Ešte predtým, ako začneme rozoberať jednotlivých koníkov, uvedomme si, že akonáhle koník po niekoľkých skokoch doskočí na políčko, na ktorom už bol, ďalej už bude skákať len na tie políčka, na ktorých už bol.

Koník na 4. políčku: Skáče o 4 políčka. Začína na štvrtom políčku. Po prvom skoku doskočí na ôsme políčko. Po ďalšom skoku skočí na políčko, ktoré nás už nezaujíma. No po ďalších 499 skokoch doskočí opäť na štvrté políčko (keďže 2004 je deliteľné 4, bude koník po každom kole skákať na tie isté políčka).

Koník na 5. políčku: Skáče o 5 políčok. Začína na piatom. Postupne doskáče na všetky políčka 4 až 9 a to takto: **5**. $\to$ 10. $\to \cdots \to$ 2000. $\to$ 1. $\to$ **6**. $\to$ 11. $\to \cdots \to$ 2001. $\to$ 2. $\to$ **7**. $\to$ 12. $\to \cdots \to$ 2002. $\to$ 3. $\to$ **8**. $\to \cdots \to$ 2003. $\to$ **4**. $\to$ **9**.

Koník na 6. políčku: Skáče o 6 políčok. Začína na šiestom. Keďže 2004 je deliteľné 6, po každom kole doskáče na tie isté políčka. Teda nebude môcť skončiť na inom políčku ako 6.

Koník na 7. políčku: podobne ako koník na piatom políčku môže skončiť na ľubovoľnom z políčok 4 až 9. Bude totiž skákať takto: **7**. $\to$ 14. $\to \cdots \to$ 2002. $\to$ **5**. $\to \cdots \to$ 2000. $\to$ 3. $\to$ 10. $\to \cdots \to$ 1998. $\to$ 1. $\to$ **8**. $\to \cdots \to$ 2003. $\to$ **6**. $\to \cdots \to$ 2001. $\to$ **4**. $\to \cdots \to$ 1999. $\to$ 2. $\to$ **9**.

Koník na 8. políčku: Skáče o 8 políčok. Bude skákať takto: **8**. $\to$ 16. $\to$ 2000. $\to$ **4**. $\to \cdots \to$ 2004. $\to$ **8**. Keďže už doskočil na ôsme políčko, na ktorom aj začínal, ďalej by skákal už len na tie isté políčka. Teda môže skončiť len na štvrtom alebo na ôsmom políčku.

Koník na 9. políčku: Skáče o 9. políčok. Bude skákať takto: **9**. $\to$ 18. $\to \cdots \to$ 1998. $\to$ 3. $\to$ 12. $\to \cdots \to$ 2001. $\to$ **6**. $\to$ 15. $\to$ 2004. $\to$ **9**. Opäť doskočil na to políčko, na ktorom začínal a teda všetky jeho ďalšie skoky sa už budú iba opakovať.

Čiže kde všade môžu koníky skončiť?
4. koník na 4. a 8. políčku.
5. koník na 4. až 9. políčku.
6. koník na 6. políčku.
7. koník na 4. až 9. políčku.
8. koník na 4. a 8. políčku.
9. koník na 6. a 9. políčku.

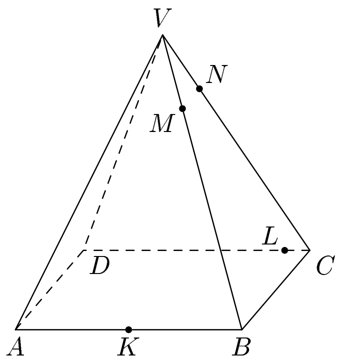
Keďže šiesty koník môže skončiť len na šiestom políčku, musí deviaty koník skončiť na deviatom políčku (nemôžu skončiť na tom istom). Ak by piaty alebo siedmy koník skončili na štvrtom alebo ôsmom políčku, potom by jeden z koníkov 4 a 8 nemal kde skončiť. Preto koníky 5 a 7 môžu skončiť len na piatom alebo siedmom políčku a teda koníky 4 a 8 budú na štvrtom alebo na ôsmom. Máme teda 4 možnosti (dve možnosti ako môžu skončiť koníky 5 a 7 a dve možnosti ako môžu skončiť koníky 4 a 8) a to sú tieto:
4. koník, 5. koník, 6. koník, 7. koník, 8. koník, 9. koník;
8. koník, 5. koník, 6. koník, 7. koník, 4. koník, 9. koník;
4. koník, 7. koník, 6. koník, 5. koník, 8. koník, 9. koník;
8. koník, 7. koník, 6. koník, 5. koník, 4. koník, 9. koník.

Úloha č. 3: *Majme pravidelný štvorboký ihlan so štvorcovou podstavou $ABCD$ a vrcholom V. Označme K stred hrany AB. Bod L je v $1/9$ hrany CD, bližšie k bodu C. Bod M je v $1/4$ hrany BV, bližšie k bodu V. Bod N je v $1/4$ hrany CV, bližšie k bodu V. Porovnajte dĺžku dvoch ciest z K do N:*

a) $|KL| + |LN|$

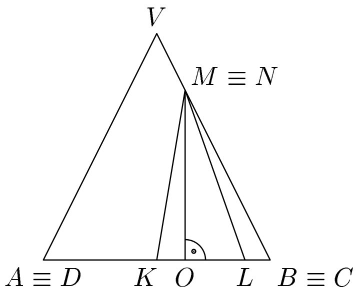
b) $|KM| + |MN|$.

Riešenie: (opravoval Kubo)



Najskôr by som rád upozornil na to, že veľká časť z vás počítala tento príklad príliš zložito, teda zbytočne vyčísľovali dĺžku jednotlivých strán, a pritom ich stačilo iba porovnať.

Ľahko (napr. aj z obrázku) sa dá všimnúť, že bude asi platiť $|KM| + |MN| < |KL| + |LN|$. Aby sme to dokázali, stačí ukázať, že $|KM| < |LN|$ a $|MN| < |KL|$. MN je štvrtinová priečka trojuholníka BCV, preto $|MN| = |BC|/4 < |BC|$. $|BC|$ je najkratšia spojnica úsečiek AB a CD, teda iná spojnica – KL – týchto úsečiek, určite nie je kratšia, takže $|KL| \geq |BC|$. Takže máme $|MN| < |BC| \leq |KL|$.



Teraz dokážeme, že $|KM| < |LN|$. Zrejme trojuholníky ABV a DCV sú zhodné, a tak si ich môžeme obidva nakresliť do jedného obrázku (pozri obrázok) tak, že splynú body B a C, A a D, M a N. V tomto novom (označenia bodov, ktoré sa používajú ďalej vo výpočte sa už týkajú práve tohto trojuholníka a nie pôvodného ihlana) trojuholníku ABV si dokreslíme na strane AB ešte jeden bod O tak, aby platilo, že $AB \perp NO$. Ľahko zistíme dĺžky $|KO|$ a $|LO|$. Z podobných trojuholníkov VKB a MOB máme

$$|KO| = \frac{1}{4}|KB| = \frac{1}{8}|AB|,$$

$$\text{takže} \quad |LO| = |KB| - |KO| - |LB| = \frac{19}{72}|AB|.$$

Odtiaľ vidíme, že $|KO| < |LO|$, teda aj $|KM| < |LN|$, čo vidno z pravouhlých trojuholníkov KOM a LON. A to je celý dôkaz. Nebolo nutné robiť žiadne zložité výpočty a zbytočne sa v nich zamotať...

Úloha č. 4: *Na ostrove piadimužíkov zaviedli novú menu. V novej mene platia takéto mince:* 1 *LI* = 10 *LILI,* 1 *LILI* = 10 *LILILI a* 1 *LILILI* = 10 *LILILILI. Zistite, koľko je spôsobov, ako v LI, LILI, LILILI a LILILILI zaplatiť sumu* 2004 *LILILILI.*

Riešenie: (opravoval Šesťo)

Aby sa nám lepšie rozprávalo, nazvime si LI tisíckou, $LILI$ stovkou, $LILILI$ desiatkou a $LILILILI$ jednokorunou. Máme zaplatiť sumu 2004 korún. Najprv si uvedomme, že tie posledné štyri koruny nemôžeme zaplatiť inak ako jednokorunami. Preto nám stačí zistiť, koľkými spôsobmi sa dá zaplatiť 2000 korún.

Najväčšia bankovka je tisícka. Na zaplatenie 2000 korún môžeme použiť 0, 1 alebo 2 tisícky. Viac už nemôžeme. Poďme sa bližšie pozrieť na jednotlivé možnosti. Prvá možnosť je jednoduchá. Ak použijeme dve tisícky, máme celú sumu a už sa nič iné nedá robiť. Teda máme prvú možnosť (2 LI a 4 $LILILILI$).

Teraz si predstavme, že použijeme iba jednu tisícku. Ostávajú nám už len stovky, desiatky a jednotky na zaplatenie 1000 korún. Na to môžeme použiť postupne $10, 9, 8, \ldots, 1, 0$ stoviek. Ak použijeme 10 stoviek, máme celú sumu, to je 1 možnosť. Ak použijeme iba 9 stoviek, ostáva nám zaplatiť 100 korún desiatkami a jednotkami. Môžeme použiť 10 desiatok a 0 jednotiek, alebo 9 desiatok a 10 jednotiek, ..., až nakoniec 0 desiatok a 100 jednotiek. Teda ak použijeme 9 stoviek, máme 11 možností. Ak by sme použili iba 8 stoviek, musíme zaplatiť 200 korún desiatkami a jednotkami. Môžeme na to použiť 20 až 0 desiatok a zvyšok zaplatiť jednotkami. Teda máme 21 možností. Takto pokračujeme ďalej. Pri 7 stovkách budeme mať 31 možností, pri 6 stovkách 41 možností, ..., až pri 0 stovkách bude 101 možností. Teda zatiaľ máme $1 + (1 + 11 + 21 + \cdots + 101) = 562$ možností.

Na záver sa dostaneme k možnosti, že budeme mať 0 tisícok. Teraz musíme zaplatiť celých 2000 korún len pomocou stoviek, desiatok a jednotiek. Podobne ako v predchádzajúcom prípade môžeme použiť 20 až 0 stoviek. Ak použijeme 20 stoviek, máme celú sumu. Ak použijeme 19 stoviek, ostáva zaplatiť 100 desiatkami a jednotkami, čo je 11 možností (pozri vyššie). Ak použijeme 18 stoviek, ostáva 200 korún na desiatky a jednotky, čo je 21 možností. Nakoniec, ak použijeme 0 stoviek, musíme zaplatiť 2000 korún len jednotkami a desiatkami. Môžeme použiť 200, 199, až 0 desiatok, zvyšok zaplatíme jednotkami. To je spolu 201 možností. Teda ak použijeme 0 tisíciek, máme $1 + 11 + 21 + 31 + \cdots + 201 = 2121$ možností.

Preto je spolu $2121 + 562 = 2683$ možností, ako môžeme zaplatiť 2004 $LILILILI$ pomocou LI, $LILI$, $LILILI$ a $LILILILI$.

Úloha č. 5: *Skupinka troch turistov idúcich rýchlosťou* 6 *km/h a jeden cyklista idúci rýchlosťou* 30 *km/h sa vybrali na cestu z dediny A do dediny B, ktoré sú vzdialené* 45 *km. Neznie to dobre, ale je to tak. Cyklista môže odviezť jedného cestujúceho. Nájdite najkratší čas, za aký celá partia môže doraziť do dediny B a spôsob, ako tento čas dosiahnuť.*

Riešenie: (opravovali Pišta a Jozef)

Najrýchlejší spôsob dosiahneme vtedy, keď všetci prídu naraz do cieľa. Prečo? Keby tam niekto prišiel skôr, znamenalo by to, že sa viezol príliš dlho na bicykli – mohol zoskočiť z bicykla trošku skôr, dôjsť do cieľa pešo a nechať cyklistu ísť po ďalšieho turistu. Turista sa zásadne nevracia; ani po vlastných, ani na bicykli. Turisti majú rovnakú rýchlosť, ktorá sa počas celej cesty nemení. Cyklista má tiež konštantnú rýchlosť, preto do cieľa prídu naraz iba vtedy, keď všetci turisti idú rovnako dlho po svojich. Už vieme o ceste dosť na to, aby sme mohli niečo zrátať. Zaveďme si vhodné označenie. Nech T, resp. t, je čas, ktorý každý z turistov strávil chôdzou, resp. vozením sa na bicykli. Potom musí platiť rovnosť $6T + 30t = 45\,\mathrm{km}$ a celkový čas, za ktorý skupina dorazí do B, je $T + t$. Cyklista za tento celkový čas prejde $30(T + t)$ kilometrov. Cyklista je optimálne využitý, ak sa s turistom pohybuje smerom z mesta A do B a ak ide naprázdno, vracia sa po ďalšieho turistu. Podľa našej teórie prvý turista sedel na bicykli po dobu t. Povedzme, že si ho cyklista zobral hneď v meste A a vyložil ho, keď mu vypršal čas. Toto síce ide na úkor všeobecnosti, ale ak s týmto predpokladom nájdeme taký spôsob, že všetci budú v cieli po čase $T + t$, tak máme jeden z optimálnych spôsobov, keďže sme videli, že za kratší čas sa to stihnúť nedá. Od štartu už uplynul čas t, prvý turista kráča po svojich a cyklista sa vracia po ďalšieho. Po istom čase τ_1 ho aj stretne, ten nastúpi a spoločne cestujú po dobu t smerom do cieľa. My by sme však potrebovali vedieť čas τ_1. Druhý turista prešiel za dobu $t+\tau_1$ dráhu $6(t+\tau_1)$ a cyklista bude vo vzdialenosti od štartu $30(t-\tau_1)$. Ich stretnutie znamená, že tieto dráhy sa rovnajú, t.j. $6(t+\tau_1)=30(t-\tau_1)$, teda $t+\tau_1=5t-5\tau_1$ a tak $2t=3\tau_1$. Podobne zrátame aj to, kedy stretne cyklista tretieho turistu. Dostaneme rovnicu $30(t-\tau_1+t-\tau_2)=6(t+\tau_1+t+\tau_2)$ (τ_2 sme označili čas medzi vyložením druhého turistu a stretnutím tretieho). Po úpravách dostaneme $4t=3\tau_1+3\tau_2$, nakoniec využitím $2t=3\tau_1$ dostávame $2t=3\tau_2$ z čoho je jasné, že $\tau_1=\tau_2$. Ostáva už len prepraviť tretieho turistu po dobu t. Ak takto postupujeme, tak naozaj všetci turisti prešli rovnakú dobu po vlastných a rovnako dlho sa viezli, teda je jasné, že keď cyklista vyloží tretieho turistu, tak sa nachádzajú všetci štyria na jednom mieste. My chceme, aby toto miesto bolo v cieli. Takže dostaneme niekoľko jednoduchých rovníc. Pre celkový čas platí $T+t=t+\tau_1+t+\tau_1+t$, z toho $T=2t+2\tau_1=3\tau_1+2\tau_1=5\tau_1$. Už máme všetko vyjadrené pomocou τ_1, preto dosadzovaním do rovnice vyjde $45=6T+30t=30\tau_1+45\tau_1=75\tau_1$, teda $\tau_1=3/5$. Potom pre celkový čas platí $T+t=5\tau_1+3\tau_1/2=3+9/10$, čo pre nás znamená, že turisti a cykloturista prišli do cieľa 3 hodiny a 54 minút po štarte. Podľa toho, čo sme popísali vyššie, si môžete overiť, že horeuvedený spôsob funguje a je jedným(!) z optimálnych.

Úloha č. 6: *V hoteli je* 10 *izieb umiestnených na jednej chodbe očíslovaných od* 1 *po* 10 *v tomto poradí. Hosť si môže buď objednať jednu izbu na dva po sebe idúce dni, alebo dve susedné izby na jeden deň. Nájomné je* 1 *dukát na izbu a deň. Turistická sezóna trvá* 50 *dní. Je známe, že izba číslo* 1 *nebola obsadená prvý a izba číslo* 10 *posledný deň sezóny. Dokážte, že majitelia na nájomnom nezískali viac ako* 496 *dukátov.*

Poznámka: Nečítaj, kým nemáš po ruke pero a papier (najlepšie štvorčekový)!

Komentár: Prvé, čo treba urobiť pri riešení úlohy, je „ohmatať“ si zadanie a podmienky v ňom. V tomto príklade „ohmatať“ znamená vyskúšať si obsadiť hotel viacerými konkrétnymi spôsobmi. Dosť ťažko by sa nám „ohmatávali“ dni akejsi fiktívnej turistickej sezóny v izbách akéhosi fiktívneho hotela. Núka sa nám ale grafické znázornenie situácie do tabuľky 10×50, kde by sme do štvorčeka v i-tom riadku a j-tom stĺpci napísali meno hosťa, ktorý zaplatil za i-tu izbu v j-ty deň sezóny. Takáto tabuľka sa už „ohmatáva“ oveľa ľahšie. Podmienky v zadaní hovoria, že obsadzovanie hotela znamená pokrývanie tejto tabuľky obdĺžničkami 1×2 alebo 2×1. Niekomu sa môže zdať aj takáto tabuľka na „ohmatávanie“ stále nevhodná, lebo je priveľká, vyžaduje si priveľa fyzickej aktivity a matematik je predsa len cicavec z čeľade lenivých. Vtedy treba skúsiť tabuľku s menšími rozmermi. Skúsiť napríklad 4 izby a 5 nocí, 5 izieb a 5 nocí, potom 4 izby a 6 nocí, potom 5 izieb a 6 nocí, potom 6 izieb a 6 nocí, … Samozrejme aj pri týchto menších modeloch zachováme podmienku, že prvá izba je voľná v prvý deň a posledná izba v posledný deň. Skúšaním zistíme a vyslovíme hypotézu (alebo náš tip) o maximálnych zárobkoch pri každom z týchto zmenšených modelov hotela. Naša hypotéza pre m izieb a n dní bude, že ak sú obe nepárne, maximálny zárobok bude $m\cdot n-3$, ak je jedno párne a druhé nepárne, bude to $m\cdot n-2$ a ak sú obe nepárne, bude to $m\cdot n-4$. Ak veríme našej hypotéze čo i len o kúsok viac ako výrobkom z teleshoppingu, môžeme sa už sústrediť len na modely, kde je počet izieb aj dní párny, ostatné môžeme kľudne zahodiť za hlavu, ale predtým sa obzrieme, či tam niekto nestojí. Naša hypotéza sa vlastne zhoduje s tou v zadaní, lebo $10\cdot 10-4=496$. Už ju len dokázať. Treba si uvedomiť, že toto doteraz boli len úvahy, ktoré nám pomôžu pri hľadaní dôkazu, ale ako dôkaz zďaleka nestačia. Zoberme si teda model s párnym počtom izieb aj dní. Každý taký veľký, na aký si trúfa. Ale pozor! Ak bude príliš malý, môže sa stať, že dôkaz v ňom bude oveľa jednoduchší ako v prípade $10\cdot 50$ a nebude sa tam dať použiť.

Riešenie: (opravovali Foto a Hanka)

Použijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že sa dá zarobiť viac ako 496. Keďže to musí byť párne číslo, lebo izby sa dajú objednávať len po dvoch a keďže musí byť menšie ako 500, lebo vieme, že nemali celý čas plno, môže byť tento zárobok len a len 498. To by ale znamenalo, že okrem prvej izby v prvom dni a poslednej izby v poslednom dni, by museli mať vždy plno. Chceme teda pokryť celú tabuľku 10×50 okrem dvoch protiľahlých rohových políčok obdĺžnikmi 2×1, ktoré môžeme umiestniť vodorovne aj zvislo. V prvom riadku máme nepárny počet políčok, preto v ňom musí začínať nepárny počet zvislých obdĺžnikov (zamyslite sa prečo). Po zakreslení týchto zvislĺžnikov (zvislých obdĺžnikov) z prvého riadku nám aj v druhom riadku zostane nepárny počet políčok. Teda aj tu musí začínať nepárny počet zvislĺžnikov. Aplikovaním tejto úvahy postupne na všetky riadky zistíme, že každé dva susedné riadky spája nepárny počet zvislĺžnikov. Toto zatiaľ nestačí. Treba si ešte všimnúť, v akých stĺpcoch ležia. Vezmime si prvý riadok. V ňom môže prvý zvislĺžnik ležať len v párnom stĺpci (nakreslite a premyslite si prečo). Druhý môže z toho istého dôvodu ležať len v nepárnom stĺpci, tretí len v párnom, atď. Je ich nepárny počet, takže pre zvislĺžniky spájajúce prvý a druhý riadok platí, že v párnych stĺpcoch je ich o jeden viac ako v nepárnych a striedajú sa – jeden v párnom, jeden v nepárnom. Po tom, čo toto vieme a pozrieme sa do druhého riadku, zistíme (samozrejme, až po veľmi intenzívnom kreslení a rozmýšľaní!), že pre zvislĺžniky spájajúce druhý a tretí riadok platí prezmenu, že v nepárnych stĺpcoch je ich o jeden viac ako v párnych a tiež sa striedajú. Aplikovaním tejto úvahy postupne na všetky riadky zistíme, že sa to pekne strieda z riadku na riadok a že pre zvislĺžniky spájajúce 49. a 50. riadok platí, že v párnych stĺpcoch je ich o jeden viac ako v nepárnych a striedajú sa. To znamená, že prvý zvislĺžnik v poslednom riadku je v párnom stĺpci a na tom nepárnom počte políčok pred ním boli samé vodĺžniky (vodorovné obdĺžniky), ktoré ale môžu zaberať iba párny počet políčok, čo je spor. Nedá sa teda zarobiť 498 ani viac, čiže sa nedá zarobiť ani viac ako 496 dukátov.

Iné riešenie:

Opäť budeme pokrývať tabuľku 10×50 našimi dobre známymi zvislĺžnikmi a vodĺžnikmi. Použijeme malý trik.

Zafarbíme si túto tabuľku ako šachovnicu. Ak do nej teraz umiestnime, či už zvisĺžnik alebo vodĺžnik, na ľubovoľné miesto, vždy nám zaberie jedno čierne a jedno biele políčko. V každom pokrytí musí ostať voľné políčko v ľavom hornom a v pravom dolnom rohu. Obidve sú biele, takže pokryť môžeme najviac 248 bielych políčok, teda aj najviac 248 čiernych, čiže nedá sa pokryť (zarobiť) viac ako 496 políčok (dukátov).

Komentár k tomuto riešeniu:

Ako vidno, keď niekto príde na tento trik, úloha sa už v podstate vyrieši sama. Ako sa ale ten trik dá vymyslieť? Sú 4 možnosti: Po prvé, napadne ťa to len tak z ničoho nič v záblesku geniality. Po druhé, už si videl/riešil príklad, kde sa podobný trik využíval (odteraz už do tejto skupiny patrí každý z vás). Po tretie, nevymyslíš ho a vyriešiš príklad prvým spôsobom, poťažmo vôbec. Skúšaním všeličoho, ako napríklad *Michal Petrucha*, ktorý si do každého políčka v tabuľke vpísal súčet jeho súradníc a všimol si, že z každých dvoch susedných políčok je jedno párne a druhé nepárne. On vlastne dostal tiež šachovnicové ofarbenie, len namiesto čiernej a bielej farby použil párne a nepárne čísla.

Úloha č. 7: *Existuje v rovine* 100 *priamok takých, že žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode a spolu sa pretínajú práve v* 2004 *bodoch?*

Riešenie: (opravovali Rasťo a Rúža)

Nuž, majme v rovine ľubovoľných 100 priamok takých, že žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode. Rozdeľme ich do n skupiniek tak, že v rámci každej skupinky sú všetky priamky rovnobežné a ľubovoľné 2 priamky z rôznych skupiniek sú rôznobežné. Označme si počty priamok v týchto skupinkách $a_1, a_2, \dots, a_n$. Potom platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 100. \tag{1}$$

Každá priamka sa pretne so všetkými priamkami, s ktorými nie je v skupinke (lebo je s nimi rôznobežná) a zároveň sú to jej všetky priesečníky (keďže s priamkami zo svojej skupinky je rovnobežná). Preto počet priesečníkov priamok z jednej skupinky s ostatnými priamkami je $a_i(100 - a_i)$. Celkový počet priesečníkov je potom

$$\frac{1}{2}\left(a_1(100 - a_1) + a_2(100 - a_2) + \cdots + a_n(100 - a_n)\right),$$

lebo každý priesečník bol započítaný dvakrát. Ak by malo mať týchto 100 priamok 2004 priesečníkov, muselo by platiť

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a_1(100 - a_1) + a_2(100 - a_2) + \cdots + a_n(100 - a_n)) &= 2004,\\ 100(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) &= 4008.\end{aligned}$$

Dosadením (1) dostávame

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 5992. \tag{2}$$

Už len stačí zistiť, či existujú také počty skupiniek, ktoré spĺňajú (1) a (2). Všimnime si, že v skupinke môže byť maximálne 77 priamok (rozmyslite si, prečo) a v najpočetnejšej ich musí byť aspoň 73. Ak by ich bolo menej než 73, tak súčet (2) môže byť najviac $72^2 + 28^2$ (rozmyslite si, prečo), čo je menšie než 5992. Nech teda $a_1 = 77$. Potom pre ostatné skupinky musí z (1) a (2) platiť

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 23 \qquad \text{a} \qquad a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 63.$$

Obdobným spôsobom môžeme nájsť počty ďalších skupiniek. Jedným z možných riešení je

$$a_1 = 77, \qquad a_2 = 6, \qquad a_3 = 3, \qquad a_4 = a_5 = 2, \qquad a_6 = a_7 = \cdots = a_{14} = a_{15} = 1$$

(preverte si, či je to tak). Na to, aby takýto systém priamok bol riešením, musíme ukázať, že ho vieme do roviny rozmiestniť tak, aby sa žiadne tri priamky nepretínali v jednom bode (premyslite si, prečo je to nutné a ako to dokázať).

Úloha č. 8: *Nech* $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ *a pre* $n > 2$ *nech číslo* $a_n = \overline{a_{n-1}a_{n-2}}$ *vznikne spojením čísel* a_{n-1} *a* a_{n-2} *sprava doľava. Postupnosť ďalej pokračuje takto:* $a_3 = \overline{a_2a_1} = 10$, $a_4 = \overline{a_3a_2} = 101$, $a_5 = \overline{a_4a_3} = 10110$. *Nájdite všetky* n, *pre ktoré je* a_n *deliteľné číslom* 11.

Riešenie: (opravovali Buggo a Dada)

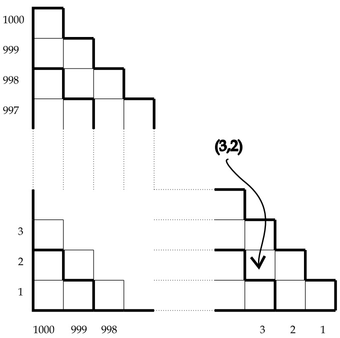
Predstavme si, čo urobí taký obyčajný smrteľník ako prvé, keď dostane takúto postupnosť do ruky. Nuž, asi si vypíše pár prvých členov. Potom sa na to uprene zadíva, poškrabe sa za uchom a napadne ho úžasná myšlienka. Začne postupne deliť členy jedenástkou a pozorovať zvyšky. No takáto drevorubačská práca ho po chvíľke prejde, keď zistí, ako rýchlo narastá počet cifier. A preto radšej začne rozmýšľať o lepších spôsoboch riešenia. Všimnime si kritérium deliteľnosti 11: Číslo a_n je deliteľné 11 práve vtedy, keď je rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach tiež deliteľný 11. Označme si tento rozdiel R_n a poďme ho skúmať. Číslo a_n získame z a_{n-1} a a_{n-2} tak, že ich zapíšeme za seba. To znamená, že cifry z týchto čísel použijeme pri rátaní R_n. Ak má a_{n-1} párnu dĺžku, potom cifry na párnych miestach v a_{n-2} budú aj v a_n na párnych miestach. To znamená, že $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$. Ak má a_{n-1} nepárnu dĺžku, tak budú tieto cifry na miestach nepárnych, čo v podstate znamená, že cifry z a_{n-2}, ktoré sme prirátavali, budeme odrátavať a naopak. Teda $R_n = R_{n-1} - R_{n-2}$. Na to, aby sme zistili, či $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$ alebo $R_n = R_{n-1} - R_{n-2}$, potrebujeme zistiť paritu dĺžky a_{n-1}. Všimnime si, že počet cifier a_n je rovný súčtu počtu cifier a_{n-1} a a_{n-2}. Vieme, že počet cifier a_1 aj a_2 je 1, teda nepárny. To znamená, že dĺžka a_3 je párna. Z toho sa dá ľahko ukázať (zamyslite sa, ako), že párnu dĺžku bude mať práve každý tretí člen postupnosti a_n. Z toho vyplýva, že $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$ ak $3 \mid n-1$, inak $R_n = R_{n-1} - R_{n-2}$. Takto vyzbrojení si už môžeme posvietiť na zúbky našej postupnosti. Vypíšme zopár prvých členov R_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
R_n	0	1	1	2	1	-1	0	1	1	...
parita a_n	N	N	P	N	N	P	N	N	P	...

Vieme, že R_n závisí len od predchádzajúcich dvoch členov a od ich parity. Vidíme, že R_9 má rovnakú hodnotu ako R_3, dva predchádzajúce členy sú v oboch prípadoch rovnaké a im prislúchajúce členy a_n majú rovnakú paritu. To znamená, že hodnoty R_n budú periodické s periódou 6. Keďže $11 \mid 0$ a $R_1 = 0$, bude $R_{6k+1} = 0$. To znamená, že jedenástkou budú deliteľné práve členy a_{6k+1}.

<u>Úloha č. 9:</u> *Máme* 1001 *obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán nepresahujúcimi* 1000*. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri (nazvime ich A, B a C) tak, že A sa zmestí do B a B sa zmestí do C.*
<u>Poznámka:</u> *Ak sú dva obdĺžniky rovnaké, zmestia sa jeden do druhého.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Čermo)
Skúsme zistiť, či vôbec existujú dva také obdĺžniky A a B, že A sa zmestí do B. Máme 1001 obdĺžnikov a 1000 rôznych možností pre dĺžku strany a každého obdĺžnika. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že existujú aspoň dva obdĺžniky, ktorých strana a bude rovnako dlhá. Označme A ten z nich, ktorého strana b je kratšia, ten druhý nech je B. A sa určite zmestí do B.



Pomôže nám nejako riešenie tohto zjednodušeného problému pri vyriešení zadanej úlohy? Použitá metóda (Dirichletov princíp) vyzerá sľubne, no rozdelenie obdĺžnikov do 1000 skupín zaručuje len existenciu dvoch obdĺžnikov v jednej. Nám by pomohlo rozdelenie do 500 skupín, potom sú v nejakej tri obdĺžniky. Pritom je dôležité, aby sa každé tri obdĺžniky z jednej skupiny dali označiť tak, aby spĺňali podmienku zo zadania.
Popíšeme jeden zo spôsobov, ako rozdeliť obdĺžniky do vhodných skupín. Do prvej skupiny dáme obdĺžniky $1\times 1, 2\times 1, 2\times 2, 3\times 2, 3\times 3, 4\times 3, \dots$; do druhej 3×1, $4\times 1, 4\times 2, 5\times 2, 5\times 3, \dots$; do tretej $5\times 1, 6\times 1, 6\times 2, 7\times 2, 7\times 3, \dots$ a tak ďalej; dobre to vidno na obrázku, skupiny vytvoria pásy „schodov" so šírkou 2.
Ešte stručná rekapitulácia na záver. Máme 1001 obdĺžnikov rozdelených do 500 skupín tak, aby sa vrámci každej skupiny dali všetky do seba vložiť. Potom musí existovať aspoň jedna taká, v ktorej sú aspoň 3 obdĺžniky, tie si vhodne označme A, B a C a sme hotoví.

<u>Komentár:</u> Veľmi častým postupom bolo, že ste zvolili množinu 500 obdĺžnikov $(1\times 1000, 2\times 999, \dots, 500\times 501)$. Je zrejmé, že medzi nimi sa nenachádzajú žiadne dva, ktoré sa dajú do seba vložiť. Čo už ale nie je triviálne, je to, že množina 1000 obdĺžnikov, kde sa dajú maximálne dva vložiť do seba, sa dá vytvoriť len z dvoch spomenutých 500 prvkových množín. Neplatí totiž, že ak A sa zmestí do B a C sa zmestí do B, tak aj A sa zmestí do C alebo naopak.

<u>Úloha č. 10:</u> *V piesku na Dunajskej pláži sú napísané čísla* 19 *a* 82*. Každý deň prejde okolo nich kajakár Rúža a s číslami urobí jednu z troch možných zmien: obe čísla zvýši o jedna, obe čísla umocní na druhú, alebo jedno z čísel zvýši o jedna a druhé umocní na druhú. Môže sa stať, že jedného dňa budú obe čísla rovnaké?*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Aňa)
Predstavme si, že stojíme na pláži práve v deň, keď sú obe čísla po prvý raz rovnaké. Aká bola posledná operácia, ktorú Rúža urobil? Do úvahy prichádza jediná, a to, že jedno z čísel zvýšil o jedna a druhé umocnil na druhú. Ak by urobil inú povolenú operáciu, čísla na pláži by boli rovnaké už včera. To ale neboli.
Včera boli na brehu čísla x a x^2-1. Dnes, po vykonaní operácie plus jedna s jedným a umocnenie na druhú s druhým číslom, zmenil ich Rúža obe na x^2 (x je prirodzené číslo). Pozrime sa teraz bližšie na to, ako mohlo vzniknúť číslo x^2-1. To sme dostali z 19 alebo z 82 tým, že sme ho postupne umocňovali na druhú a zväčšovali o jedna. Najbližšia druhá mocnina menšia ako x^2-1 je $(x-1)^2$. Teda po dosiahnutí čísla $(x-1)^2$ sme už určite pridávali len jednotky (neumocňovali sme viac), kým sme nedosiahli číslo x^2-1. Koľko dní sme to robili? Toľko, koľko sme pridali jednotiek, čiže $x^2-1-(x-1)^2 = 2x-2$. Druhé číslo malo včera hodnotu x a vieme, že každým

dňom sa zväčšilo aspoň o jedna, čiže pred $2x - 2$ dňami muselo byť určite menšie ako 19 (mohlo by byť záporné alebo jedna – mohli by sme stále umocňovať jednotku na jednotku).
Čo z toho vyplýva? Že číslo $x^2 - 1$ bolo doteraz vždy iba zväčšované o jedna a nikdy nedosiahlo hodnotu najbližšieho menšieho štvorca. Teraz potrebujeme zistiť, ktoré z čísel 19 a 82 to bolo.
Predpokladajme, že je to číslo 19. Uvedomme si, že ak by sa k číslu 19 stále prirátavala jednotka a k číslu 82 by sa pridala jednotka alebo by sa umocnilo na druhú, ich rozdiel by sa nikdy nezmenšoval. Teda nikdy nebudú rovnaké.
Čo ak by 82 bolo to číslo, čo sa stále zväčšuje o jedna? Potom nech po k dňoch prvýkrát umocníme číslo upravované postupne z 19. Máme číslo $(19 + k)^2 = 361 + 38k + k^2$ a číslo $82 + k + 1$, čo je číslo určite menšie a nikdy to druhé nedobehne postupným pridávaním jednotiek.
Týmto sme došli k záveru, že čísla na pláži nebudú nikdy rovnaké.

Komentár: Úloha bola náročná tým, že sa na ňu bolo treba pozrieť netradične – odzadu. Pokusy cez rôzne parity a iné zvyšky po delení či skúmanie rozdielov a iné invarianty boli „cestou do pekla“. Verím, že po viacnásobnej snahe a s trochu iným pohľadom na riešenie úlohy ste mali šancu ju vyriešit. Myslím, že problémom sa ukázalo byť nechávanie si riešenia na poslednú chvílu.

Úloha č. 11: *Daný je konečný počet štvorcov, pričom súčet ich obsahov je $1/2$. Ukážte, že ich je možné umiestniť do štvorca so stranou 1 tak, aby sa neprekrývali.*

Riešenie: (opravoval Miki)
Ako niektorí z vás uhádli a máloktorí dokázali, dobrý systém ukladania štvorcov je nasledovný:
Ukladajme štvorce v poradí od najväčšieho po najmenší. Najväčší štvorec položíme do ľavého dolného rohu (jeho výšku označme h_1). Potom ukladáme štvorce do riadku vpravo od neho, až kým nejaký štvorec netrčí von. Tento prečnievajúci štvorec (jeho výšku si označíme h_2) uložíme na nový riadok, teda na predĺženú hornú stranu najväčšieho štvorca minulého riadku. A na tento riadok ukladáme aj ďalšie štvorce, kým sa dá. Potom pokračujeme v ďalšom riadku, atď. Výšku vedúceho (t.j. najväčšieho) štvorca posledného riadku si označíme h_k.
Úloha sa nám teda redukuje na dôkaz, že $h_1 + h_2 + \cdots + h_k = h \leq 1$. S týmto označením vieme plochu S, ktorú zaberajú naše štvorce, ohraničiť zdola

$$S \geq h_1^2 + (1 - h_1)h_2 + (1 - h_1)h_3 + \cdots + (1 - h_1)h_k,$$

pričom prvé dva sčítance sú za prvý riadok a každý ďalší sčítanec reprezentuje jeden riadok. (Môže sa zdať, že sme do pokrytej plochy zarátali aj konce riadkov, ktoré nemusia byť vždy pokryté, ale my tam rátame vedúci štvorec nasledujúceho riadku, ktorý inde v súčte zarátaný nie je.) Z k-teho riadku rátame len prvý štvorec. Teda máme

$$h_1^2 + (1 - h_1)(h - h_1) \leq S = \frac{1}{2}.$$

Keďže $1 - h_1$ nie je nula, predošlá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$h \leq \frac{\frac{1}{2} - h_1^2}{1 - h_1} + h_1.$$

Po čiastočnom vydelení dostávame

$$h \leq h_1 + 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - h_1} + h_1$$

a poslednou sériou úprav dostávame konečný tvar

$$h \leq 3 - \left(2 - 2h_1 + \frac{1}{2 - 2h_1}\right),$$

z ktorého vidíme (keďže $t + 1/t \geq 2$ pre všetky kladné t), že súčet výšok uložených štvorcov je menší ako jedna, takže sa zmestia do jednotkového štvorca.

Komentár: Uznávam, že toto vzorové riešenie sa nedá pochopiť len tak v trolejbuse cestou do školy, ale ak chcete vedieť riešenie úlohy číslo 11, musíte si nad to sadnúť, nakresliť si to a porozmýšľať ;-). Veľa zdaru, stojí to za to.

Úloha č. 12: *Daná je postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, pričom a_1 nie je deliteľné piatimi a pre každé prirodzené číslo $n \geq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslica na mieste jednotiek čísla a_n. Dokážte, že postupnosť a_n obsahuje nekonečne veľa mocnín dvojky.*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Zo zadania vyplýva, že $b_1 \neq 0$, $b_1 \neq 5$. Keďže $b_n \equiv (b_{n-1} + b_{n-1}) \pmod{10}$, ľahko si možno všimnúť, že už člen b_2 musí byť párny a rovnako celá postupnosť $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ bude obsahovať len párne čísla a navyše bude periodická s periódou $\{2, 4, 8, 6\}$ dĺžky 4. Preto pre $n \geq 2$ bude platiť $a_{n+4} = a_n + 2 + 4 + 8 + 6 = a_n + 20$ a teda $a_{n+4s} = a_n + 20s$. Tiež vieme, že v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ určite existuje a_n také, že $a_n = 10r + 2$ a teda $a_{n+1} = 10r + 4$. Ale z týchto dvoch zasebou idúcich členov postupnosti musí byť práve jeden deliteľný číslom 4 (rozmyslite si prečo), označme

tento člen a_m. Teda $a_m = 4\ell$, pričom $5 \nmid \ell$ a podľa už dokázaného tvrdenia $a_{m+4s} = a_m + 20s = 4(\ell + 5s)$. Teda ℓ máme pevne dané, ale nech zvolíme akékoľvek $s \in \mathbb{N}$, číslo $4(\ell + 5s)$ sa bude určite vyskytovať v našej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stačí nám teda ukázať, že medzi číslami tvaru $(\ell + 5s)$ (a teda aj medzi číslami tvaru $4(\ell + 5s)$) je nekonečne veľa mocnín dvojky.
To ale nie je až taký problém. Pozrime sa bližšie na to, aké zvyšky po delení piatimi dávajú postupne jednotlivé mocniny dvojky. Po vypísaní prvých pár členov vidíme, že tvoria periodickú postupnosť $\{1, 2, 4, 3, \ldots\}$ s periódou 4, čo možno dokázať jednoduchou matematickou indukciou. To znamená, že nech dáva číslo ℓ akýkoľvek zvyšok po delení piatimi z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ (vieme, že $5 \nmid \ell$), existuje nekonečne veľa mocnín dvojky, ktoré dávajú rovnaký zvyšok. No a keďže ℓ je nejaké konečné číslo, existuje určite aj nekonečne veľa mocnín dvojky ktoré dávajú po delení piatimi rovnaký zvyšok ako ℓ a navyše sú väčšie ako ℓ. Tieto všetky vieme zapísať v tvare $(\ell + 5s)$ a teda ich štvornásobok sa podľa predošlých úvah nachádza v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tým je naše tvrdenie dokázané.

<u>Úloha č. 13:</u> *Nájdite prirodzené čísla a, b tak, aby výraz*

$$\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

bol čo najväčším prvočíslom.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Janka)
Aby bol vôbec výraz v zadaní prvočíslo, musí byť v prvom rade prirodzené číslo. A teda $\sqrt{(2a-b)/(2a+b)}$ musí byť kladné racionálne číslo. Čiže $\sqrt{(2a-b)/(2a+b)} = x/y$, kde x a y sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Umocnením dostávame $(2a-b)/(2a+b) = x^2/y^2$. Z toho máme

$$2a - b = kx^2,$$

$$2a + b = ky^2$$

pre nejaké prirodzené číslo k. A úpravou

$$a = \frac{k}{4}(x^2 + y^2),$$

$$b = \frac{k}{2}(y^2 - x^2).$$

Keď si teraz prepíšeme pôvodný výraz zo zadania, vidíme, že sa značne zjednodušil. Máme zistiť, aké najväčšie prvočíslo môže byť výraz $k(y^2 - x^2)x/(8y)$. Z podmienok stanovených na x a y vyplýva, že $k = dy$ pre nejaké prirodzené d. Skúmajme teda, kedy sa výraz $d(y^2 - x^2)x/8$ bude rovnať prvočíslu p. Môžu nastať 2 možnosti; keďže x a y sú nesúdeliteľné, buď sú obe nepárne, alebo je jedno z nich párne a druhé nepárne.

1. Keď x aj y sú nepárne, tak $y^2 - x^2$ je deliteliteľné ôsmimi (premyslite si prečo). A teda nám ostáva zistiť, kedy je $d(y^2 - x^2)x/8$ prvočíslo. Stačí preskúmať tri možnosti: $d = 1$, $x = 1$, $(y^2 - x^2)/8 = p$; $d = 1$, $(y^2 - x^2)/8 = 1$, $x = p$; $d = p$, $(y^2 - x^2)/8 = 1$, $x = 1$. Prvá ani druhá možnosť nemá také riešenie, aby výsledné a a b boli prirodzené, tretej vyhovuje jedine $x = 1$, $y = 3$, $d = 2$, $p = 2$ (d musí byť párne, aby sme dostali a prirodzené). Tomu zodpovedajú $k = 6$, $a = 15$, $b = 24$.

2. Ak x a y majú rôznu paritu, musí platiť $k(y^2 - x^2)x = 8p$. Avšak $y^2 - x^2$ je nepárne a väčšie ako 1, teda $y^2 - x^2 = p$. Preskúšaním možností, aby $kx = 8$ a výsledné a aj b boli prirodzené, dostávame dve riešenia: $x = 1$, $y = 2$, $d = 8$, $p = 3$, čomu zodpovedajú $k = 16$, $a = 20$, $b = 24$; a $x = 2$, $y = 3$, $d = 4$, $p = 5$, čomu zodpovedajú $k = 12$, $a = 39$, $b = 30$.

Porovnaním riešení oboch prípadov vidíme, že výraz zo zadania je najväčšie prvočíslo pre $a = 39$ a $b = 30$, konkrétne

$$\frac{30}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot 39 - 30}{2 \cdot 39 + 30}} = 5\,.$$

<u>Úloha č. 14:</u> *Kružnice k_1 a k_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode A a súčasne sa obe dotýkajú zvnútra kružnice k v bodoch A_1 a A_2. Bod P je jeden z priesečníkov spoločnej vnútornej dotyčnice k_1 a k_2 s kružnicou k. Nakoniec, body B_i sú druhé priesečníky priamok PA_i s kružnicou k_i ($i = 1, 2$). Dokážte, že priamka B_1B_2 sa dotýka oboch kružníc k_1, k_2.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Miťo)
Nech S_1, S_2 sú po rade stredy kružníc k_1, k_2. Najprv si uvedomme, že dokazované tvrdenie je ekvivalentné s rovnosťou $|\sphericalangle S_1B_1B_2| = 90° = |\sphericalangle B_1B_2S_2|$. Dokážeme iba prvú z uvedených rovností (druhá sa dokazuje analogicky) a to pomocou vzťahu

$$|\sphericalangle S_1B_1B_2| = 180° - |\sphericalangle A_1B_1S_1| - |\sphericalangle PB_1B_2|. \tag{Υ}$$

Teraz ukážeme, že trojuholník PA_1A_2 je podobný s trojuholníkom PB_2B_1. To ide pomerne ľahko: z mocnosti bodu P ku kružniciam k_1, k_2 máme $|PA_1| \cdot |PB_1| = |PA|^2 = |PA_2| \cdot |PB_2|$, teda $|PA_1|/|PA_2| = |PB_2|/|PB_1|$ a uhol pri vrchole P je spoločný, čo podľa vety *sus* stačí. Označme $|\sphericalangle A_1A_2P| = \alpha$, z podobnosti máme $|\sphericalangle PB_1B_2| = \alpha$. Využime teraz, že kružnice k a k_1 sú rovnoľahlé so stredom v bode A_1. Vďaka tomu $|\sphericalangle A_1S_1B_1| = |\sphericalangle A_1SP| = 2 \cdot \alpha$, kde S je stred kružnice k. (Obe rovnosti si rozmyslite.) A už to skoro máme: trojuholník $A_1S_1B_1$ je rovnoramenný, teda $|\sphericalangle A_1B_1S_1| = 90° - \alpha$. Teraz zostáva už len dosadiť do (Υ) a tešiť sa. ;-)

Poznámka: Príklad sa dá pomerne jednoducho vyriešiť aj použitím *kružnicovej inverzie*; môžete si to vyskúšať.