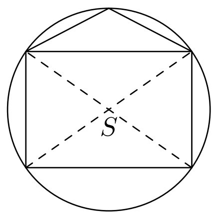
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

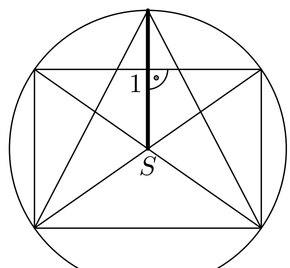
Úloha č. 1: *Do kružnice s polomerom 1 vpíšeme obdĺžnik so šírkou b a výškou h a rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky b, ktorá je súčasne stranou obdĺžnika. Pre aké hodnoty h majú obdĺžnik a trojuholník rovnaký obsah?*

Riešenie: (opravovala Janka)



Bolo si treba uvedomiť, že môžu nastať dve situácie. K obdĺžniku vpísanému do kružnice vieme totiž podľa podmienok v zadaní nakresliť rovnoramenný trojuholník dvoma spôsobmi (pozri obrázok).

1. Trojuholník má s obvodom obdĺžnika okrem základne spoločné dva body,
2. trojuholník nemá okrem základne s obdĺžnikom spoločný bod.



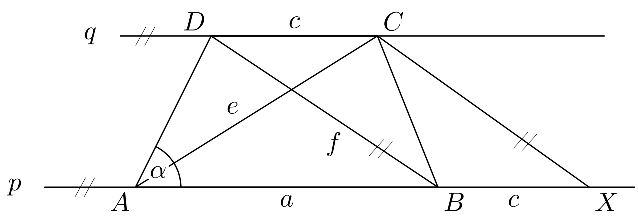
Označme si (ako na obrázku) výšku v trojuholníku v a vzdialenosť stredu kružnice od základne trojuholníka d. Keďže je obdĺžnik do kružnice vpísaný, stred kružnice je priesečníkom jeho uhlopriečok, a teda $h = 2d$. Aby sa obsahy trojuholníka a obdĺžnika rovnali, musí platiť $b \cdot v/2 = b \cdot h$. Využitím oboch rovníc dostávame $v = 2h = 4d$. Keďže trojuholník je rovnoramenný, vieme v oboch prípadoch polomer kružnice (ktorý je 1) pekne vyjadriť pomocou d a v.

1. V prvom prípade $1 = v - d = 4d - d = 3d$, z čoho máme $h = 2d = 2 \cdot 1/3 = 2/3$,
2. v druhom podobne $1 = v + d = 4d + d = 5d$, čiže $h = 2d = 2 \cdot 1/5 = 2/5$.

Overením zistíme, že vypočítané hodnoty naozaj vyhovujú zadaniu, a teda hľadané hodnoty h sú $2/3$ a $2/5$.

Úloha č. 2: *Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte dĺžky jeho uhlopriečok, dĺžku priečky spájajúcej stredy nerovnobežných protiľahlých strán a jeden z uhlov pri základni.*

Riešenie: (opravovali Peťo G. a Lucy)



Keď sa pozrieme na príklad, zistíme, že zo zadaných údajov nevieme ani lichobežník, ani žiaden trojuholník priamo skonštruovať. Problémom je teda, kde začať. Istým vodítkom by nám mohlo byť, že v úlohe je zadaná dĺžka strednej priečky lichobežníka s, pričom vieme, že platí $s = (a+c)/2$ (premyslite si, prečo). To znamená, že dĺžku $a + c$ vieme zostrojiť ako $2s$. Ak si do nášho náčrtu (pozri obrázok) k základni a pridáme dĺžku základne c, dostaneme bod X. Skúsme sa teraz pozrieť na štvoruholník $BXCD$, ktorý nám takto vznikol. Úsečky BX a CD sú rovnako dlhé a ležia na rovnobežných priamkach, preto musí byť štvoruholník $BXCD$ rovnobežníkom. To ale znamená, že $|XC| = |BD| = f$, teda trojuholník AXC už dokážeme zostrojiť (vieme, že jeho strany sú dlhé $2s$, f a e, kde e a f sú zadané dĺžky uhlopriečok). Teraz stačí nájsť body D a B, čo už nie je problém. Ak bodom C povedieme rovnobežku s priamkou AX (označme si ju q) a v bode A zotrojíme rameno zadaného uhla α, potom priesečník tohto ramena s priamkou q bude práve bod D. No a bod B dostaneme ako priesečník priamky AX s priamkou rovnobežnou s priamkou CX vedenou bodom D. Tým sme zostrojili hľadaný lichobežník.

Z popísanej konštrukcie dobre vidieť, že takto zostrojený lichobežník spĺňa všetky podmienky zadania. Nezabudnime nakoniec na diskusiu o počte riešení. Viac ako jedno riešenie určite nedostaneme (vyplýva to z rozboru a konštrukcie), ale môže sa stať, že pre niektoré hodnoty zadaných dĺžok a uhla nedostaneme žiadne riešenie. V prvom rade, riešenie neexistuje, ak sa nám nepodarí zostrojiť trojuholník so stranami dĺžok $2s$, f a e (t. j. ak $2s$, f a e nespĺňajú trojuholníkové nerovnosti). Ďalej sa môže stať, že bod B padne pri konštrukcii mimo vnútra úsečky AX, v takom prípade riešenie tiež neexistuje (skúste určiť podmienky pre s, f, e a α, kedy také niečo nastane, nie je to vôbec jednoduché!). No a nakoniec sa môže stať, že zostrojený štvoruholník nebude lichobežník, ale rovnobežník (rovnobežníky sa medzi lichobežníky zväčša nezaraďujú – aj v zadaní bolo, že poznáme dĺžku priečky spájajúcej stredy *nerovnobežných* protiľahlých strán). V takom prípade tiež riešenie neexistuje.

Treba ešte pripomenúť, že v zadaní síce nebolo priamo napísané, že zadaným uhlom je uhol α, ale ak by sme dostali zadaný iný uhol, riešenie by bolo podobné – premyslite si, ako by sa zmenilo.

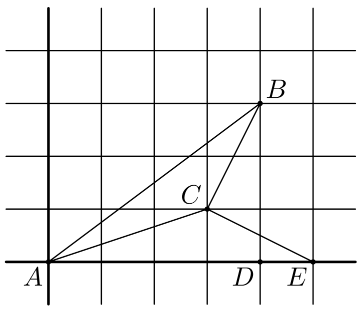
Úloha č. 3: *Máme danú kružnicu k, priamku p a číslo r. Nájdite všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky p a kružnice k a majú polomer veľkosti r. Dotyk kružníc uvažujte vnútorný aj vonkajší. Preveďte diskusiu o počte riešení.*

Riešenie: (opravovali Čermo a Janči)
Najskôr si rozmyslime, kde ležia stredy hľadaných kružníc. Polomer kružnice k označme R a vzdialenosť priamky p od stredu kružnice k označme u. Množinu všetkých stredov kružníc s polomerom r, ktoré sa dotýkajú priamky p, tvoria dve rovnobežky vzdialené od p o r. Pre jednoduchšie vyjadrovanie ich označme p_{u+r} a p_{u-r} (p_{u+r} je tá rovnobežka, ktorá leží v opačnej polrovine určenej priamoku p ako stred kružnice k, p_{u-r} je tá druhá). Podobne množinu všetkých stredov kružníc s polomerom r, ktoré sa dotýkajú kružnice k, tvoria dve s ňou sústredné kružnice polomerov $R+r$ a $|R-r|$, označme ich k_{R+r} a $k_{|R-r|}$. Pretože sa hľadané kružnice dotýkajú zároveň p aj k, ich stredy budú ležať na prieniku týchto dvoch množín.
Keďže princíp hľadania kružníc je rovnaký pre všetky usporiadania, dopodrobna odvodíme iba jeden prípad ($R < u$) a pre ostatné uvedieme len počty možných riešení (t. j. počty rôznych kružníc pre dané r). Majme pevne danú kružnicu k a priamku p, ktorá je jej nesečnicou. Pozrime sa najskôr, aké priesečníky sa tu môžu vyskytovať. Zjavne priamka p_{u+r} sa nikdy nepretne ani s jednou z kružníc k_{R+r} a $k_{|R-r|}$. Kružnice teda môže preťať len priamka p_{u-r}, pričom do úvahy prichádza počet priesečníkov 0 až 4. Ak $r + (R + r) < u$, t. j. $r < (u - R)/2$, tak ich ešte ani raz nepretne. Ak nastane rovnosť, dôjde ku dotyku priamky p_{u-r} s kružnicou k_{R+r}. Pre väčšie r sa bude p_{u-r} najskôr približovať ku stredu kružnice k a potom vzďaľovať a polomer kružnice k_{R+r} bude stále rásť, takže pre všetky r spĺňajúce $(u - R)/2 < r$ bude mať priamka p_{u-r} s kružnicou k_{R+r} práve dva priesečníky. Ostáva nám ešte vyšetriť prienik p_{u-r} s $k_{|R-r|}$. Dotyk nastane, ak bude splnená podmienka $r + |R - r| = u$, čo v prípade $R < u$ platí len pre $r = (u + R)/2$. Pre väčšie r budú potom vždy existovať 2 priesečníky priamky p_{u-r} a kružnice $k_{|R-r|}$. Zhrnutie možno nájsť v tabuľke (čísla udávajú počet rôznych riešení).
Teraz už stačí rozobrať všetky ostatné usporiadania p a k vzhľadom na rôzne r. Pre lepšiu názornosť odporúčame kresliť si obrázky (nám sa nezmestili).

1. $u = 0$
   - ⋆ $0 < r < R/2$ 8
   - ⋆ $r = R/2$ 6
   - ⋆ $r > R/2$ 4
2. $0 < u < R$
   - ⋆ $0 < r < (R - u)/2$ 8
   - ⋆ $r = (R - u)/2$ 7
   - ⋆ $(R - u)/2 < r < (R + u)/2$ 6
   - ⋆ $r = (R + u)/2$ 5
   - ⋆ $r > (R + u)/2$ 4
3. $u = R$
   - ⋆ $0 < r$ 4 (tu sa musíme dohodnúť, že zhodné kružnice tiež pokladáme za dotýkajúce sa, inak by pre $r = R$ boli iba 3 riešenia)
4. $R < u$
   - ⋆ $0 < r < (u - R)/2$ 0
   - ⋆ $r = (u - R)/2$ 1
   - ⋆ $(u - R)/2 < r < (R + u)/2$ 2
   - ⋆ $r = (R + u)/2$ 3
   - ⋆ $r > (R + u)/2$ 4

Úloha č. 4: *Máme pravouhlú suradnicovú sústavu (karteziánsku). Body A, B, C, D majú porade súradnice* [0, 0], [4, 3], [3, 1], [4, 0]. *Dokážte, že veľkosť uhla BAC je rovná veľkosti uhla CAD.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Tina)
Čo urobíme ako prvé? Nakreslíme si obrázok a doň všetky informácie zo zadania. V úlohách ako táto sa často oplatí obrázok si čímsi vylepšiť (napríklad dokresliť nejaké nové body, úsečky) a nájsť tam čosi, čo by nám pri dokazovaní pomohlo (napríklad zhodné trojuholníky). Iste tušíte, čo bude nasledovať ;-). Zostrojme si nový bod E so súradnicami $[5, 0]$ (ako na obrázku). Bod E leží na ramene AD uhla CAD, takže určite platí rovnosť $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAE|$. Preto stačí, keď ukážeme, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAE|$. Pozrime sa teraz na zúbky trojuholníkom BAC a EAC.



- Zjavne $|AE| = 5$; pravouhlý trojuholník ADB má odvesny dĺžok 3 a 4, preto prepone AB neostáva nič iné ako byť dlhou 5 jednotiek.

- Úsečka BC je rovnako dlhá ako CE, obe sú uhlopriečkami obdĺžnikov so stranami 2 a 1.
- Stranu AC majú trojuholníky spoločnú.

V tomto momente vidíme, že trojuholníky BAC a EAC sú zhodné (podľa vety sss) a teda veľkosti zodpovedajúcich si uhlov sú rovnaké. Preto $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle CAD|$, čo sme chceli ukázať.

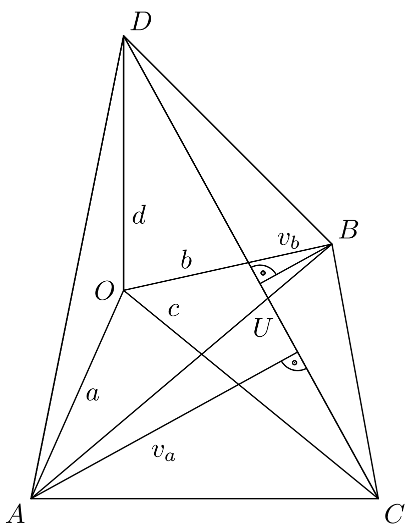
Iné riešenie:
Pozrime sa na príklad trošku inak. Do obrázka si zakreslime všetky zadané body, pospájajme ich všetky navzájom čiarami, chvíľku sa na ne dívajme a rozmýšľajme. Vidíte niečo zaujímavé? Je tam pravouhlý trojuholník BAD a v jeho vnútri nejaké tri úsečky, všetky končiace v bode C vnútri trojuholníka a začínajúce v jeho vrcholoch. Chceme dokázať zhodnosť uhlov BAC a CAD, to by mohlo nejak súvisieť s úsečkou AC, však? Ak by boli zadané uhly zhodné, AC by rozdeľovala uhol BAD na dve rovnaké časti, bola by jeho osou. To, že DC je osou uhla ADB, vidíme z obrázka. Ak by sa nám podarilo ukázať to isté aj o BC, vyhrali by sme, pretože ak sa nám v jednom bode pretnú dve osi vnútorných uhlov v trojuholníku, tá tretia (v tomto prípade AC) si už nemá z čoho vyberať. Ako zistíme, že BC je osou uhla ABD? Os uhla je množina bodov rovnako vzdialených od ramien tohto uhla. Preto stačí dokázať, že vzdialenosť bodu C od priamky AB je 1.
Krátko spomenieme ešte jeden, často sa vyskujúci spôsob riešenia, využitím niektorého z goniometrických vzorčekov a jeho úpravou. Častokrát nasledovalo vyvodenie záveru, že ak napríklad $\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \operatorname{tg} \sphericalangle CAD$, potom musí platiť rovnosť $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD|$, čo by bolo úplne v poriadku, ak by potvora tg nebola periodickou. Na vyhnutie sa akýmkoľvek problémom si stačí uvedomiť (a spomenúť), že sú oba uhly z prvého kvadrantu.

Komentár: Niektorí z vás riešili úlohu takým spôsobom, že vyrátali pomocou funkcie arctg hodnotu uhlov BAD a CAD. Tieto hodnoty vám však prezradila kalkulačka a v prípade tejto funkcie nemáme záruku, že to, čo vraví kalkulačka, je naozaj absolútne presné číslo. Ak by veľkosť aspoň jedného z týchto uhlov bola iracionálne číslo (s nekonečne dlhým neperiodickým desatinným zápisom), potom by nám kalkulačka určite nedala presnú odpoveď.
Ďalší podobný spôsob riešenia úlohy bol taký, ktorý využíval rysovanie. Presnejšie povedané, dôkaz sa zakladal na tom, že ste niečo narysovali (napr. stred vpísanej kružnice) a z toho, že sa na obrázku preťali nejaké priamky v tom správnom bode (pri vpísanej kružnici v bode C), ste usúdili, tvrdenie platí.
Oba tieto typy riešenia majú jednú spoločnú chybu. Je ňou nepresnosť. Ani v jednom prípade nevieme totiž zaručiť, že náš postup je úplne presný a že sme sa nedopustili nejakej maličkej chybičky. Môžete si povedať, že maličká chyba nám určite nemôže vadiť a že tvrdenie vlastne viac-menej platí aj tak. Problémom ale je, keď už chyba nie je maličká, ale veľká a obrovská (čo ak by sme všetko zväčšili 1000 krát?). Naviac zadaním úlohy bolo dokázať, že sa tie uhly rovnajú presne. Bez najmenšej malilinkatej chyby. Takže riešenie, ktoré ukáže (alebo dokáže?), že sa naše uhly rovnajú približne, nie je správne, lebo nedokázalo úplnú zhodu. Tak pozor na rozdiel medzi slovíčkami približne a presne `;-)`.

Úloha č. 5: *V rovine leží päť bodov O, A, B, C, D, pričom A, B, C, D sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Pre ich vzdialenosti platí $|OA| \le |OB| \le |OC| \le |OD|$. Dokážte, že pre obsah P štvoruholníka $ACBD$ vždy platí*

$$P \le \frac{1}{2}(|OA| + |OD|)(|OB| + |OC|)\,.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.
Poznámka: Štvoruholník je konvexný práve vtedy, keď každý jeho vnutorný uhol je menší ako 180°.



Riešenie: (opravovali Dada a Paľo)
Zaveďme si označenie $a = |AO|$, $b = |BO|$, $c = |CO|$, $d = |DO|$, $e = |AB|$, $f = |CD|$. Ďalej nech U je priesečník uhlopriečok AB, CD a v_a, v_b sú po rade výšky v trojuholníkoch ACD, BCD na stranu CD. Zrejme obsah P štvoruholníka $ACBD$ môžeme vyjadriť ako súčet obsahov spomínaných trojuholníkov. Máme tak

$$P = \frac{fv_a}{2} + \frac{fv_b}{2} = \frac{f\cdot(v_a+v_b)}{2}\,. \tag{1}$$

Zrejme $v_a \le |AU|$, $v_b \le |UB|$, preto s využitím (1) platí

$$P \le \frac{f\cdot(|AU|+|UB|)}{2} = \frac{f\,|AB|}{2} = \frac{|CD|\cdot|AB|}{2}\,. \tag{2}$$

Z trojuholníkových nerovností máme $|AB| \le |AO| + |OB| = a + b$ a tiež $|CD| \le |CO| + |OD| = c + d$. Ďalej preto dostávame nerovnosť

$$\frac{|AB|\cdot|CD|}{2} \le \frac{(a+b)(c+d)}{2} = \frac{1}{2}(ac+ad+bc+bd)\,. \tag{3}$$

Spojením nerovností (2), (3) získame vzťah

$$P \le \frac{1}{2}(ac+ad+bc+bd)\,, \tag{4}$$

ktorý už pripomína nerovnosť, ktorú sa snažíme dokázať. Tá má v našom označení tvar

$$P \le \frac{1}{2}(a+d)(b+c) \ = \frac{1}{2}(ab+ac+bd+cd)\ . \tag{5}$$

Teraz by nás potešilo, keby sme vedeli dokázať, že pravá strana nerovnosti (5) je vždy väčšia ako pravá strana nerovnosti (4). Skúsme ich teda od seba odčítať a upravovať. Dostávame

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(ab+ac+bd+cd) - \frac{1}{2}(ac+ad+bc+bd) = \frac{1}{2}(ab+cd-ad-bc) = \\ &= \frac{1}{2}\left[c(d-b) - a(d-b)\right] = \frac{1}{2}(c-a)(d-b)\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Zo zadania vieme, že $a \le b \le c \le d$, preto $(c-a) \ge 0$, $(d-b) \ge 0$ a teda $(c-a)(d-b) \ge 0$. Ako vidíme, výraz (6) je vždy nezáporný, preto platí

$$\frac{1}{2}(ac+ad+bc+bd) \le \frac{1}{2}(ab+ac+bd+cd)\ . \tag{7}$$

Teraz už vieme všetko potrebné. Stačí nám spojiť nerovnosti (4), (7) a máme

$$P \le \frac{1}{2}(ab+ac+bd+cd) = \frac{1}{2}(a+d)(b+c)\ , \tag{8}$$

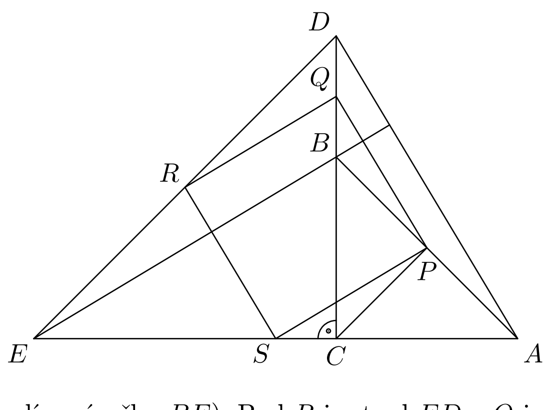
čo je presne to, čo sme potrebovali. Výborne. A to je všetko? Nie, nie. Ešte sme predsa boli zvedaví, kedy nastáva rovnosť. Keď si ešte raz pozorne prezrieme náš postup, zistíme, že rovnosť v (8) nastáva práve vtedy, keď nastáva rovnosť vo vzťahoch (2), (3) a (7), pretože výsledná nerovnosť

$$P \le \frac{|CD| \cdot |AB|}{2} \le \frac{1}{2}(ac+ad+bc+bd) \le \frac{1}{2}(a+d)(b+c) \tag{9}$$

vznikla ich spojením. V prvom vzťahu nastáva rovnosť práve vtedy, keď sú uhlopriečky na seba kolmé. Aby bola rovnosť v druhom vzťahu, musí bod O ležať zároveň na uhlopriečke AB i na uhlopriečke CD, čiže musí splývať s priesečníkom uhlopriečok U. A nakoniec, posledná rovnosť platí vtedy, keď $(c-a) = 0$ alebo $(d-b) = 0$, teda keď $a = b = c$ alebo $b = c = d$ (tu sme nenápadne využili aj podmienku zo zadania $a \le b \le c \le d$). Preto rovnosť platí pre štvorec alebo deltoid, v ktorom sú tri spojnice U s vrcholmi štvoruholníka zhodné, pričom O leží v priesečníku uhlopriečok U. A to je už naozaj všetko.

Komentár: Zadanie bolo mierne zákerné – štvoruholník bol označený neštandardne $ACBD$ (nie $ABCD$). Mnohí ste sa nechali nachytať a riešili ste tak inú úlohu. Našťastie aj toto alternatívne tvrdenie bolo pravdivé a jeho dôkaz bol podobnej náročnosti ako dôkaz pôvodného tvrdenia (skúste si to za domácu úlohu). Preto sme vám uznávali aj takéto riešenia, ale na výstrahu sme vám strhli jeden bod. Nabudúce si čítajte zadania pozorne `;-)`.

Úloha č. 6: *Máme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. K nemu je priložený pravouhlý rovnoramenný trojuholník CDE s pravým uhlom pri vrchole C tak, že polpriamka CD je totožná s polpriamkou CB. Označme P, Q, R, S porade stredy úsečiek AB, BD, DE a EA. Dokážte, že štvoruholník $PQRS$ je štvorec.*



Riešenie: (opravovali Hanka a Mazo)
Najprv si ako v každej geometrickej úlohe nakreslíme veľký prehľadný obrázok. Poriadne sa naň pozrieme a keďže riešenie na nás len tak samé nezažmurká, prečítame si poriadne zadanie a pomedzi riadky sa pokúsime zistiť, ako by to naše riešenie vlastne mohlo vyzerať. V zadaní sa spomínajú stredy úsečiek. Čo by nás malo pritom napadnúť? Možností je hneď niekoľko (ťažnice, stredné priečky, stredová súmernosť, ...) a aj keď všetky asi k cieľu nepovedú, niekedy je užitočné sa nad nimi zamyslieť. S ťažnicami sa pri dokazovaní, že nejaký štvoruholník je štvorec, asi ďaleko nedostaneme, takže skúsme radšej tie stredné priečky. Bod P je stred AB a bod S je stred AE. Čo teda vieme o úsečke PS? Je to predsa stredná priečka v trojuholníku ABE (prezieravo si do obrázka dokreslíme úsečku BE). Bod R je stred ED a Q je stred BD, teda RQ je strednou priečkou trojuholníka BED. Ale z toho potom dostaneme $|PS| = |EB|/2 = |RQ|$ a navyše RQ a PS sú rovnobežné s BE. Podobne RS je stredná priečka trojuholníka ADE a PQ je stredná priečka trojuholníka ADB, teda $|RS| = |AD|/2 = |PQ|$ a RS a PQ sú rovnobežné s AD. Týmto sa naša úloha značne zjednodušila: stačí nám dokázať, že $|AD| = |BE|$ a že AD je kolmé na BE (zamyslite sa, prečo). Všimnime si trojuholníky CAD a CBE. Platí $|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle DCA| = 90°$, $|CD| = |CE|$ (lebo trojuholník ECD je rovnoramenný pravouhlý) a $|BC| = |AC|$ (lebo trojuholník ABC je tiež rovnoramenný pravouhlý). Teda podľa vety *sus*, ktorú

všetci dobre poznáme, sú trojuholníky CAD a CBE zhodné a navyše jeden z nich dostaneme otočením druhého o $90°$ proti smeru hodinových ručičiek (presvedčte sa sami). Už len si myšlienky utriediť v hlave a dostaneme, že $|AD| = |BE|$ a navyše AD a BE sú na seba kolmé. A to sme predsa chceli, no nie?

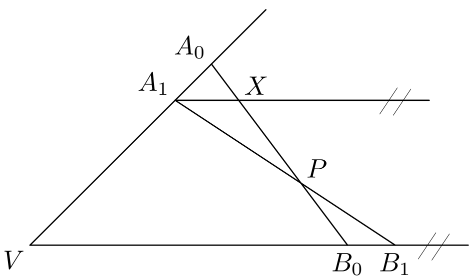
Poznámka: Kolmosť $AD \perp BE$ sa dá dokázať ešte jedným zaujímavým spôsobom. Stačí si všimnúť, že bod B je priesečníkom výšok v trojuholníku ADE (prečo?).

Iné riešenie:
Celá situácia je určená veľkosťou trojuholníkov ABC a CDE. Označme teda veľkosti strán týchto trojuholníkov a a b. Môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a < b$ (rozmyslite si; prípad $a = b$ je triviálny). Poďme zistiť čosi o bodoch P, Q, R, S. Zrejme $|ES| = |SA| = (a+b)/2$, preto $|SC| = |SA| - |CA| = (a+b)/2 - a = (b-a)/2$. Podobne $|BQ| = |DQ| = |DB|/2 = (|DC| - |BC|)/2 = (b-a)/2$. V pravouhlom trojuholníku ABC je bod P stredom prepony, teda je aj stredom Tálesovej kružnice nad priemerom AB; tejto kružnici patrí bod C, takže $|PA| = |PB| = |PC|$. Preto trojuholníky PCA a PBC sú rovnoramenné a platí $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCA| = 45°$, z toho vyplýva, že $|\sphericalangle PBQ| = |\sphericalangle PCS| = 135°$. Zhrnutím poznatkov dostaneme, že trojuholníky PBQ a PCS sú zhodné podľa vety *sus*, teda $|PQ| = |PS|$ a $PQ \perp PS$ (rozmyslite si, vyplýva to z toho, že $CP \perp AB$). Analogicky (cez trojuholníky RSC a RQD) sa ukáže, že $|RQ| = |RS|$ a $RS \perp RQ$. K dokončeniu dôkazu stačí dokázať, že štvoruholník $PQRS$ s takýmito vlastnosťami musí byť štvorec, čo nechávame vám ako ľahké cvičenie.

Komentár: Ďalší možný prístup k riešeniu je započítať si. Napríklad najprv dokázať pomocou kosínusovej vety pre vhodné trojuholníky, že štvoruholník $PQRS$ má všetky strany rovnakej dĺžky, teda je to kosoštvorec, a potom ukázať, že má uhlopriečky rovnakej dĺžky (z Pytagorovej vety). Na dôkaz kolmosti $RS \perp SP$ pomôže i sínusová veta. A pobaviť sa mohli aj tí, čo obľubujú vektory či súradnicové sústavy.
Našlo sa pár riešiteľov, ktorí si do zadania doplnili predpoklad o rovnosti strán trojuholníkov ABC a CDE a riešili veľmi jednoduchú úlohu. Jej správne riešenie sme ocenili 1 bodom.

Úloha č. 7: *Vnútri daného uhla s vrcholom V je daný bod P. Veďte bodom P priamku p tak, aby mal trojuholník AVB minimálny obsah, pričom A, B sú priesečníky priamky p s ramenami uhla.*

Riešenie: (opravovali Miško a Miťo)



Najprv sa len tak hrajme. Majme nejakú priamku p_0, ktorá pretína ramená uhlu v bodoch A_0, B_0. Nech $|A_0P| > |B_0P|$ (pre opačný prípad je postup analogický). Ďalej majme nejakú inú priamku p_1, ktorá prechádza bodom P a pretína ramená uhlu v bodoch A_1 a B_1, pričom B_1 je „napravo“ od B_0. Opäť predpokladajme, že $|A_1P| > |B_1P|$. Rozmyslite si, prečo taká priamka musí existovať. Porovnajme teraz, o koľko sa zmenil obsah trojuholníka A_1B_1V v porovnaní s trojuholníkom A_0B_0V. Bodom A_1 veďme rovnobežku s ramenom VB_0. Tam, kde sa pretne s priamkou p_1, majme bod X (pozri obrázok). Trojuholník A_1XP je podobný s trojuholníkom B_0B_1P podľa vety *uuu*. Keďže $|A_1P| > |B_1P|$, tak $S_{A_1XP} > S_{B_1B_0P}$. Zjavne platí $S_{A_0B_0V} = S_{A_1B_1V} - S_{B_1B_0P} + S_{A_0A_1P}$ a $S_{A_0A_1P} = S_{A_1XP} + S_{A_0A_1X}$. Keďže však $S_{A_1XP} > S_{B_1B_0P}$, tak $S_{A_0B_0V} > S_{A_1B_1V}$. (Rozmyslite si to.) Teda vidíme, že obsah trojuholníka sa zmenšil, keď sme bod B_0 posunuli do bodu B_1.
Uvažujme teraz, ako musia byť postavené body A_0, B_0, aby sa obsah trojuholníka A_0B_0V už nemohol zmenšiť. Kým je $|A_0P| > |B_0P|$, vieme vždy viesť takú priamku p_1, aby bol obsah nového trojuholníka A_1B_1V menší od obsahu trojuholníka A_0B_0V. Ak by bolo $|A_0P| < |B_0P|$, stačí iba zmeniť označenie bodov A_0, B_0 a môžeme postupovať rovnako. Čiže ak je $|A_0P| > |B_0P|$, tak vieme nájsť trojuholník A_1B_1P s menším obsahom, podobne, ak je $|A_0P| < |B_0P|$, vieme nájsť trojuholník s menším obsahom. Skúsme teraz prípad, keď $|A_0P| = |B_0P|$. Ak zopakujeme postup z prvej časti riešenia, ľahko dokážeme, že vtedy je obsah naozaj minimálny. Určite si to skúste.
Konštrukcia: Rameno VB_0 zobrazíme v stredovej súmernosti podľa bodu P. Tam, kde sa jeho obraz pretne s ramenom VA_0, dostaneme bod A. Bod B potom dostaneme ako priesečník priamok AP a VB_0.
Diskusia: Úlohu nemá zmysel riešiť, keď je $|\sphericalangle AVB| \geq 180°$. Ak je uhol menší ako $180°$, tak existuje práve jedno riešenie.

Úloha č. 8: *Na strane BC lichobežníka $ABCD$ ($BC \parallel AD$) je zostrojený bod P tak, že $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle DPM|$, kde M je priesečník uhlopriečok AC a BD. Dokážte, že bod B je rovnako vzdialený od priamky DP ako bod C od priamky AP.*

Riešenie: (opravoval Foto)
Pri riešení geometrických úloh si musíme v prvom rade nakresliť dobrý obrázok. Nakreslime si nejaký všeobecne vyzerajúci lichobežník a v ňom body M a P tak, ako je to v zadaní. Pri kreslení lichobežníka si dáme pozor na to, aby nevyzeral moc konkrétne (napríklad rovnoramenne), to by nás mohlo viesť k mylným úvahám. Aby bol tento obrázok naozaj dobrý, treba do neho ešte dokresliť pár detailov, ktoré sa nám pri dokazovaní tvrdenia môžu zísť. V prvom rade si nakreslíme vzdialenosti, ktorých rovnosť chceme dokázať, čiže do obrázku dokreslíme úsečky CC_A a BB_D, kde C_A je päta kolmice z bodu C priamku AP a B_D je päta kolmice z bodu B na priamku DP. Ďalej si všimneme, že každá z uhlopriečok lichobežníka nám „vyrába“ nejaké striedavé uhly a do obrázka vyznačíme, že

uhly DAC a ACB sú rovnako veľké, podobne aj uhly ADB a DBC. Teraz je hneď vidno, že trojuholníky DAM a BCM sú podobné. Priamka PM je podľa zadania osou uhla APD a vzdialenosť každého jej bodu od priamky AP je rovnaká ako od priamky DP. Toto platí aj pre bod M. Dokreslíme si do obrázku úsečky MM_A a MM_D, kde body M_A a M_D sú päty kolmíc z bodu M na priamky AP a DP. Teraz už je obrázok dobrý a môžeme sa vrhnúť na samotný dôkaz.
Všimnime si, že úsečky MM_A a CC_A sa podobajú ako vajce vajcu. Čím to asi môže byť spôsobené? Predsa podobnosťou trojuholníkov MAM_A a CAC_A! Z tejto podobnosti okrem iného vieme, že

$$\frac{|MM_A|}{|CC_A|} = \frac{|MA|}{|CA|}\,.$$

Analogicky aj

$$\frac{|MM_D|}{|BB_D|} = \frac{|MD|}{|BD|}\,.$$

Skúsme teraz upravovať rovnosť, ktorú už poznáme.

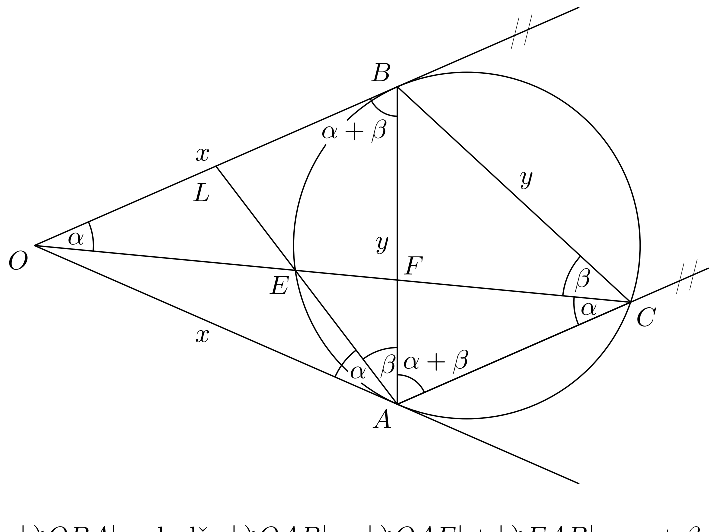
$$\begin{aligned}
|MM_A| &= |MM_D| \\
\frac{|MA|}{|CA|}\cdot|CC_A| &= \frac{|MD|}{|BD|}\cdot|BB_D| \\
\frac{|MA|}{|CM|+|MA|}\cdot|CC_A| &= \frac{|MD|}{|BM|+|MD|}\cdot|BB_D| \\
\frac{1}{\frac{|CM|}{|MA|}+1}\cdot|CC_A| &= \frac{1}{\frac{|BM|}{|MD|}+1}\cdot|BB_D| \\
\frac{1}{\frac{|CB|}{|AD|}+1}\cdot|CC_A| &= \frac{1}{\frac{|BC|}{|DA|}+1}\cdot|BB_D| \\
|CC_A| &= |BB_D|\,.
\end{aligned}$$

V predposlednom kroku sme využili podobnosť trojuholníkov DAM a BCM. Tým sme dokázali, čo bolo treba dokázať. Keďže však ide o geometrickú úlohu, ešte sme neskončili! Na záver treba napísať *diskusiu*! Tá bude tentokrát síce stručná, ale to nijako neuberá na jej dôležitosti. Bod P bude ležať vždy vnútri strany BC (zamyslite sa prečo nemôže byť totožný s bodom B alebo C), preto pre každý lichobežník bude situácia na obrázku vyzerať prudko podobne. Až teraz sme skončili.

Úloha č. 9: *Je daný uhol s vrcholom O a kružnica k, ktorá sa dotýka jeho strán v bodoch A a B. Polpriamka p prechádza bodom A, je rovnobežná s OB a pretína kružnicu k v bode C. Úsečka OC pretína kružnicu k v bode E. Priamky AE a OB sa pretínajú v bode L. Ukážte, že platí $|OL| = |LB|$.*

Komentár: Táto úloha sa ukázala ako mimoriadne pestrá a podarilo sa vám ju vyriešiť veľmi veľa rôznymi spôsobmi. Niektorí stavili na podobnosť trojuholníkov, iní nadšenci použili mocnosť bodu ku kružnici, sínusovú alebo kosínusovú vetu a našli sa aj odvážlivci, ktorí tento príklad spočítali pomocou analytickej geometrie.

Riešenie: (opravovali Miki a Rasťo)
My si ukážeme jedno riešenie využívajúce najmä vetu o obvodových, stredových a úsekových uhloch a tiež sínusovú vetu. Tá hovorí, že pomer strán a sínusov protiľahlých uhlov v trojuholníku je rovnaký ($a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$).
Najskôr si priesečník priamok OC a BA označíme F a ešte nech $|\sphericalangle OCA| = \alpha$. Vzdialenosti bodu O od dotykových bodov A a B sú rovnaké, označme ich x. Uhly BOC a OCA sú striedavé, lebo $OB||AC$, preto $|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle OCA| = \alpha$. Úsekový uhol OAE prislúchajúci tetive AE má rovnakú veľkosť ako obvodový uhol ACE prislúchajuci tej istej tetive AE, preto $|\sphericalangle OAE| = |\sphericalangle ECA| = \alpha$. Uhly BCE a BAE sú obvodové nad tetivou BE, preto majú rovnakú veľkosť. Nech $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BAE| = \beta$.



Trojuholník ABO je rovnoramenný, preto $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OBA|$, a keďže $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OAE| + |\sphericalangle EAB| = \alpha + \beta$, tak aj $|\sphericalangle OBA| = \alpha + \beta$. Uhly OBA a CAB sú striedavé, preto tiež $|\sphericalangle CAF| = \alpha + \beta$.

Trojuholník ABC má dva vnútorné uhly rovnakej veľkosti, a preto je rovnoramenný. Dĺžku jeho ramien si označme $|BA| = |BC| = y$.
Zo sínusovej vety v trojuholníku OCB platí

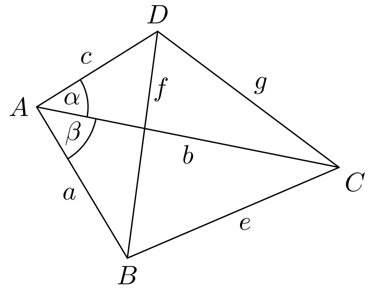
$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin\alpha}\,.$$

Upravíme si to na tvar

$$x\sin\alpha = y\sin\beta\,.$$

Obsah trojuholníka OAL je rovný $\frac{1}{2}|AL|x\sin\alpha$ a obsah trojuholníka BAL zasa $\frac{1}{2}|AL|y\sin\beta$. Po dosadení napríklad za $x\sin\alpha$ dostávame, že obsahy týchto trojuholníkov sú rovnaké. A to je to, čo sme chceli, lebo tieto dva trojuholníky majú spoločnú výšku (kolmica z bodu A na priamku OB) a teda musia mať rovnako dlhé aj základne, čo sú úsečky OL a BL. Hotovo.

Úloha č. 10: *Ukážte, že v euklidovskej rovine neexistujú* 4 *body také, že vzdialenosť medzi každými dvoma bodmi je nepárne prirodzené číslo.*



Riešenie: (opravovali Erika a Jozef)
(Podľa *Ondra Budáča.*) Budeme dokazovať sporom. Nech teda máme v rovine 4 body a medzi nimi nepárne celočíselné vzdialenosti. Pozrime sa na to, ako to bude vyzerať. Najprv si uvedomíme, na čo veľa z vás prišlo, že žiadne 3 z týchto bodov nemôžu ležať na jednej priamke. Ak by sa totiž také 3 našli (nech sa volajú X, Y, Z v tomto poradí na priamke), potom $|XY| + |YZ| = |XZ|$, teda súčet dvoch nepárnych čísel by bol nepárne číslo, čo je spor. Takisto žiadne 2 body zo štvorice nesplývajú (inak by bolo $|XY| = 0$, čo je párne číslo). Takže body tvoria štvoruholník (nie nutne konvexný). Určite v tomto štvoruholníku existuje vrchol, pri ktorom má uhol veľkosť menšiu než 180°, označme ho A a ostatné vrcholy označme klasicky B, C a D. Ďalej poznačujme $a = |AB|$, $b = |AC|$, $c = |AD|$, $e = |BC|$, $f = |BD|$, $g = |CD|$, $|\sphericalangle CAD| = \alpha$ a $|\sphericalangle BAC| = \beta$. A teraz si skúsime napísať kosínusové vety pre trojuholníky ACD, ABC a ABD a vyjadriť si z nich kosínusy uhlov α, β a $\alpha+\beta$. Po usilovnom počítaní zistíme, že

$$\cos\alpha = \frac{c^2+b^2-g^2}{2bc}, \qquad \cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2+c^2-f^2}{2ac}\,.$$

Kosínus súčtu uhlov vieme prepísať podľa súčtového vzorca ako

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Tento si trošku upravíme, aby sme v ňom nemali sínusy (lebo tie nepoznáme `;-)`). Osamostatnením výrazu so sínusmi a umocnením na druhú dostaneme tvar

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)\,.$$

(Využili sme známy vzťah $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$.) V ňom už poznáme všetko, takže len s úsmevom dosadíme a čakáme, čo vyjde. A vyjde (po príslušnej úprave) vzťah

$$4a^2b^2c^2 - a^2(c^2+b^2-g^2)^2 - c^2(a^2+b^2-e^2)^2 = b^2(a^2+c^2-f^2)^2 - (c^2+b^2-g^2)(a^2+b^2-e^2)(a^2+c^2-f^2)\,.$$

No a teraz prichádza chvíľa, keď využijeme, že čísla a, b, c, e, f, g su nepárne prirodzené. Vo vzťahu, ktorý sme dostali, máme iba štvorce týchto čísel. No a my vieme, že štvorce nepárnych čísel dávajú po delení štyrmi zvyšok 1. Skúsme to použiť a zistiť, aký zvyšok dáva pravá a ľavá strana našej rovnosti. Zistíme, že ľavá dáva zvyšok 2 a pravá dáva zvyšok 0. No a to je hľadaný spor, takže sme hotoví `;-)`.

Úloha č. 11: *V trojrozmernom priestore je daných n bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že každé tri z nich tvoria trojuholník s jedným uhlom väčším ako* 120°. *Dokážte, že je možné pospájať všetky tieto body do lomenej čiary $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ tak, aby každé dve susedné hrany lomenej čiary tvorili uhol väčší ako* 120°.

Riešenie: (opravoval Poko)
(Podľa *Kataríny Škrovinovej.*) Na úvod si dokážeme dve pomocné tvrdenia.
Tvrdenie 1 (*„trojuhlová“ nerovnosť*). Nech A, B, C, D sú 4 rôzne body v trojrozmernom priestore. Potom platí

$$|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| \geq |\sphericalangle ADC|, \tag{1}$$

pričom uvažujeme konvexné uhly.
Dôkaz: Označme polpriamky DA, DB, DC postupne a, b, c. Keď ležia všetky 4 body v jednej rovine, buď a, b, c patria do jednej polroviny, alebo nepatria. Oba tieto prípady si môžeme ľahko nakresliť a tiež ľahko pre ne zdôvodníme nerovnosť (1). Zaujímavejšia (a nie až tak zrejmá) je situácia, keď A, B, C, D neležia v jednej rovine. Ak

uhol ADC nie je najväčší spomedzi tých troch uhlov, potom (1) zrejme platí. Nech je najväčší z nich. Na polpriamke AC zvoľme bod X tak, aby $|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CDB|$. Ďalej sme predpokladali, že $|\sphericalangle ADC| > |\sphericalangle CDB|$, preto bod X bude zároveň vnútorným bodom úsečky AC. Na polpriamke DB zvolíme bod Y tak, aby $|DX| = |DY|$. Vidíme, že trojuholníky YDC a XDC sú zhodné podľa vety *sus*, preto aj $|YC| = |XC|$. Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku AYC dostaneme

$$|AX| + |XC| = |AC| < |AY| + |YC|.$$

Teda $|AX| < |AY|$ a (keďže trojuholníky ADX a ADY majú zhodné dve a dve strany) tiež $|\sphericalangle ADX| < |\sphericalangle ADY|$. K poslednej nerovnosti s uhlami stačí pripočítať $|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CDY|$ a máme dokázaný vzťah (1).

Tvrdenie 2. Nech A, B, C, D sú 4 rôzne body v trojrozmernom priestore. Potom platí

$$|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle ADC| \leq 360^\circ, \tag{2}$$

pričom uvažujeme konvexné uhly.

Dôkaz: Prípad, keď všetky štyri body ležia v jednej rovine, si premyslí každý sám. Nech A, B, C, D neležia v jednej rovine. Označme polpriamky DA, DB, DC opäť a, b, c. Ďalej označme ρ takú rovinu, ktorú polpriamky a, b, c pretínajú postupne v troch rôznych bodoch K, L, M a navyše kolmý priemet P bodu D do ρ leží vo vnútri trojuholníka KLM. Taká rovina vždy existuje (premyslite si, prečo). Všimnime si uhly KDL a KPL. Keďže KD je prepona pravouhlého trojuholníka KDP, platí $|KD| > |KP|$. Podobne aj $|LD| > |LP|$. Trojuholníky KDL a KPL majú spoločnú stranu KL. Ďalšie dve strany sú v prvom z nich vždy väčšie, ako im prislúchajúce strany v druhom trojuholníku. Keď trojuholník KDL otočíme okolo úsečky KL do roviny ρ, dobre uvidíme (a po dokreslení výšok na stranu KL v trojuholníkoch KDL a KPL aj dokážeme), že $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle KDL|$. Obdobným postupom sa dopracujeme aj k nerovnostiam $|\sphericalangle LPM| > |\sphericalangle LDM|$ a $|\sphericalangle MPK| > |\sphericalangle MDK|$. Keďže P je vnútorný bod trojuholníka KLM, platí $|\sphericalangle KPL| + |\sphericalangle LPM| + |\sphericalangle MPK| = 360^\circ$. Spolu máme (2).

Poďme teraz dokázať tvrdenie zo zadania. Mnohí z vás ho dokazovali matematickou indukciou. Nasledujúci postup nám však dá lepšiu predstavu o tom, ako sú tie body v priestore rozmiestnené. Nebudeme sa zaoberať triviálnymi prípadmi, keď $n < 3$. Keď $n = 3$, potom do lomenej čiary vyberieme ramená uhla väčšieho ako 120° v trojuholníku $A_1A_2A_3$. V ďalšom budeme uvažovať $n \geq 4$.

Nech body $A_1, \ldots, A_n$ vyhovujú podmienke v zadaní. V každom trojuholníku $A_iA_jA_k$ je jeden uhol väčší ako 120° a zvyšné dva zrejme menšie ako 60°, lebo súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Označme B_1 a B_n dva najvzdialenejšie body spomedzi $A_1, \ldots, A_n$. V ďalšom odstavci ukážeme, že B_1 ani B_n nemôžu byť vrcholmi uhla väčšieho ako 120°. V každom trojuholníku B_1B_nK je najdlhšia strana B_1B_n, preto najväčší uhol bude oproti nej, t. j. pri vrchole K. Nech sú teraz K, L dva body spomedzi $A_1, \ldots, A_n$ rôzne od B_1 a B_n. Už vieme, že $|\sphericalangle B_1KB_n| > 120^\circ$ a takisto $|\sphericalangle B_1LB_n| > 120^\circ$. Preto $|\sphericalangle KB_1B_n| < 60^\circ$ a $|\sphericalangle LB_1B_n| < 60^\circ$. Z toho a z trojuhlovej nerovnosti pre body K, B_n, L a B_1 vyplýva

$$120^\circ > |\sphericalangle KB_1B_n| + |\sphericalangle B_nB_1L| \geq |\sphericalangle KB_1L|. \tag{3}$$

Lenže potom musí nutne platiť $|\sphericalangle KB_1L| < 60^\circ$. Rovnako by sme postupovali pre trojuholníky KLB_n.

Predpokladajme teraz, že existujú také dva body K, L spomedzi $A_1, \ldots, A_n$ rôzne od B_1, pre ktoré $|B_1K| = |B_1L|$. Potom je trojuholník KLB_1 rovnoramenný so základňou KL. Uhly pri základni sú rovnaké, teda nutne menšie ako 120°. Naposledy sme však ukázali, že aj $|\sphericalangle KB_1L| < 120^\circ$, takže predpoklad $|B_1K| = |B_1L|$ bol nesprávny (trojuholník KLB_1 musí mať niektorý uhol väčší ako 120°). Preto môžeme ostatné body okrem B_1 a B_n označiť $B_2, \ldots, B_{n-1}$ tak, že

$$|B_1B_i| < |B_1B_j| \qquad \text{pre} \quad 1 < i < j \leq n. \tag{4}$$

Dokážme, že pri takomto označení bude pre $1 \leq j < i < n$ platiť $|B_nB_i| < |B_nB_j|$. Predpokladajme, že to neplatí. Existujú preto i, j také, že $|B_1B_i| < |B_1B_j|$ a súčasne $|B_nB_i| \leq |B_nB_j|$, teda $|\sphericalangle B_1B_jB_i| < |\sphericalangle B_1B_iB_j|$ a súčasne $|\sphericalangle B_nB_jB_i| \leq |\sphericalangle B_nB_iB_j|$. Uhly $B_1B_jB_i$ a $B_nB_jB_i$ sú tak nie najväčšie uhly trojuholníkov $B_1B_jB_i$ a $B_nB_jB_i$ a podľa už spomínaného sú oba menšie ako 60°. Podľa trojuhlovej nerovnosti máme

$$|\sphericalangle B_1B_jB_n| \leq |\sphericalangle B_1B_jB_i| + |\sphericalangle B_nB_jB_i| < 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.$$

Uhol $B_1B_jB_n$ je však najväčší v trojuholníku $B_1B_nB_j$ (stačí si spomenúť na skoršie úvahy), a teda väčší ako 120°. To je spor.

Pre $2 \leq i \leq n-1$ nemôže byť bod B_i príliš vzdialený od priamky B_1B_n (lebo $|\sphericalangle B_1B_iB_n| > 120^\circ$ – zamyslite, ako vyzerá množina všetkých bodov X v priestore, pre ktoré platí $|\sphericalangle B_1XB_n| > 120^\circ$). Body $B_1, \ldots, B_n$ sa nachádzajú s nie veľkým rozptylom od priamky B_1B_n približne za sebou. Preto je prirodzené predpokladať, že hľadaná vyhovujúca lomená čiara bude práve $B_1, \ldots, B_n$. Na to musíme dokázať, že vo všetkých trojuholníkoch $B_iB_{i+1}B_{i+2}, 1 \leq i \leq n-2$, platí $|\sphericalangle B_iB_{i+1}B_{i+2}| > 120^\circ$.

Ak $i = 1$, potom zo (4) vieme, že $|B_1B_2| < |B_1B_3|$, a teda $|\sphericalangle B_1B_2B_3| > |\sphericalangle B_1B_3B_2|$. Z (3) zasa vieme, že $|\sphericalangle B_2B_1B_3| < 120^\circ$, preto nutne $|\sphericalangle B_1B_2B_3| > 120^\circ$. Podobnú situáciu, ale z druhej strany, máme pre $i = n-2$.

Nech teraz $1 < i < n-2$. Uvažujme body B_1, B_i, B_{i+1} a B_{i+2}. Určite platí $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}| > 120^\circ$. (V trojuholníku $B_1B_iB_{i+1}$ je $|B_1B_i| < |B_1B_{i+1}|$, čiže opäť $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}| > |\sphericalangle B_1B_{i+1}B_i|$. A ďalej zasa raz z (3) vyplýva $|\sphericalangle B_iB_1B_{i+1}| < 120^\circ$. Preto väčší ako 120° môže byť jedine uhol $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}|$.) Obdobne aj $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+2}| > 120^\circ$.

Podľa tvrdenia 2 je súčet uhlov $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}|+|\sphericalangle B_1B_iB_{i+2}|+|\sphericalangle B_{i+1}B_iB_{i+2}| \leq 360°$. Veľkosti prvých dvoch uhlov už odhadnúť vieme, preto nutne $|\sphericalangle B_{i+1}B_iB_{i+2}| < 120°$.
Už sme skoro na konci s dôkazom. Uvedomme si, že vďaka tomu, že prípady $i = 1$ a $i = n-2$ sme ošetrili zvlášť, sú teraz body B_i, resp. B_{i+2} rôzne od B_1, resp. B_n. Preto môžeme postup z predošlého odstavca použiť aj na body B_n, B_i, B_{i+1} a B_{i+2} a dostaneme $|\sphericalangle B_{i+1}B_{i+2}B_i| < 120°$. A z toho je už zrejmé, že $|\sphericalangle B_iB_{i+1}B_{i+2}| > 120°$, čo sme chceli dokázať.

Úloha č. 12: *Nájdite všetky reálne riešenia $(x_1, \ldots, x_5)$ sústavy nerovníc*

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0\,.
\end{aligned}$$

Riešenie: (opravoval Pišta)
(Podľa *Feriho Simančíka* a *Ondra Budáča*.) Ako ste si určite všimli, naša sústava nerovníc je cyklická. Môžu nastať dva prípady – aspoň jedno z x_i je nulové alebo všetky x_i sú nenulové.
1. prípad: Predpokladajme, že aspoň jedno z x_i je nenulové. Keďže máme cyklickú sústavu, bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_5 = 0$. Potom z prvej nerovnice dostaneme $x_1^2x_2^2 \leq 0$, teda aspoň jedno z x_1, x_2 je nulové. Analogicky z tretej nerovnice $x_3^2x_4^2 \leq 0$, teda aspoň jedno z x_3, x_4 je nulové. Teda môžu nastať štyri možnosti.

(i) Ak $x_1 = x_3 = 0$, tak z piatej nerovnice $x_2^2x_4^2 \leq 0$, teda aspoň jedno z x_2, x_4 je nulové.

(ii) Ak $x_1 = x_4 = 0$, tak z druhej nerovnice $x_2^2x_3^2 \leq 0$, teda aspoň jedno z x_2, x_3 je nulové.

(iii) Ak $x_2 = x_3 = 0$, tak z druhej nerovnice $x_1^2x_4^2 \leq 0$, teda aspoň jedno z x_1, x_4 je nulové.

(iv) Ak $x_2 = x_4 = 0$, tak zo štvrtej nerovnice $x_1^2x_3^2 \leq 0$, teda aspoň jedno z x_1, x_3 je nulové.

Vidíme, že v každom prípade dostaneme aspoň štyri nuly, a to znamená, že najviac jedno x_i je nenulové. Keď si dosadíme do sústavy tieto nuly, tak v každej nerovnici bude aspoň jeden činiteľ nulový, teda nerovnice budú splnené. Takže sme dostali riešenia typu $[0, 0, 0, 0, t]$, $[0, 0, 0, t, 0]$, $[0, 0, t, 0, 0]$, $[0, t, 0, 0, 0]$, $[t, 0, 0, 0, 0]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Samozrejme, pre $t = 0$ tieto riešenia splývajú.
2. prípad: Predpokladajme, že všetky x_i sú nenulové. Po sčítaní nerovníc a menšej úprave dostaneme

$$x_1^2(x_3 - x_5)^2 + x_1^2(x_2 - x_4)^2 + x_2^2(x_1 - x_4)^2 + x_2^2(x_3 - x_5)^2 + x_3^2(x_2 - x_5)^2 +$$
$$+ x_3^2(x_1 - x_4)^2 + x_4^2(x_2 - x_5)^2 + x_4^2(x_1 - x_3)^2 + x_5^2(x_1 - x_3)^2 + x_5^2(x_2 - x_4)^2 \leq 0.$$

Zrejme súčet štvorcov je nulový práve vtedy, keď sú všetky štvorce nulové. Každý sčítanec je v tvare $x_i^2(x_j - x_k)^2$, kde $i \neq j \neq k \neq i$, a keďže $x_i \neq 0$, musí platiť $x_j = x_k$. To ale znamená, že $x_3 = x_5$, $x_2 = x_4$, $x_1 = x_4$, $x_2 = x_5$ atď. Čiže do úvahy prichádza iba riešenie typu $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \neq 0$. Ak ho dosadíme do sústavy nerovníc, presvedčíme sa o tom, že vyhovuje.
Tým je úloha vyriešená.

Komentár: *Michal Prusák* vo svojom riešení použil metódu, ktorá funguje aj pre $n \geq 5$, kde n je počet neznámych, resp. počet nerovníc, ktoré sú tvaru $(x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \leq 0$, pričom indexy berieme modulo n a $i = 1, \ldots, n$.

Úloha č. 13: *Nájdite všetky prvočísla p, q, pre ktoré je zlomok*

$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

celým číslom.

Riešenie: (opravoval Tomáš)
Najprv si urobme jedno cvičenie. Nech r je prvočíslo. Ukážme, že $5^r - 2^r$ je deliteľné prvočíslom r práve vtedy, keď $r = 3$. Vzorný študent by napísal: Ak $r = 3$, tak dosadíme a máme, že skutočne $5^3 - 2^3 = 117 = 3^2 \cdot 13$, a teda to platí. Na druhej strane, číslo $5^r - 2^r$ nie je pre žiadne prirodzené číslo r deliteľné dvoma ani piatimi. Také r to byť nemôže. Ak je r prvočíslo rôzne od 2 a 5, tak $(r, 2) = (r, 5) = 1$, t. j. sú nesúdeliteľné. Potom z malej Fermatovej vety máme

$$1 \equiv 2^{r-1} \equiv 5^{r-1} (\text{mod } r). \qquad (\triangle)$$

Následne, ak má r deliť $5^r - 2^r$, tak

$$0 \equiv 5^r - 2^r = 5 \cdot 5^{r-1} - 2 \cdot 2^{r-1} \overset{(\triangle)}{\equiv} 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 \pmod r,$$

z čoho máme $3 \mid r$. Jediné vyhovujúce prvočíslo je teda $r = 3$.
Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Rozoberme najprv špeciálne hodnoty p, q. Rovnako ako v cvičení, $5^n - 2^n$ nie je pre žiadne prirodzené číslo n deliteľné dvoma ani piatimi, takže p ani q nemôže byť päť ani dva. Skúsme ešte, čo ak $p = 3$ (prvočísla v zadaní môžeme vymeniť, možnosť $q = 3$ nemusíme rozoberať). Potom máme zistiť, pre ktoré prvočísla q je zlomok

$$\frac{(5^3 - 2^3)(5^q - 2^q)}{3 \cdot q} = \frac{3^2 \cdot 13\,(5^q - 2^q)}{3 \cdot q} = \frac{3 \cdot 13\,(5^q - 2^q)}{q}$$

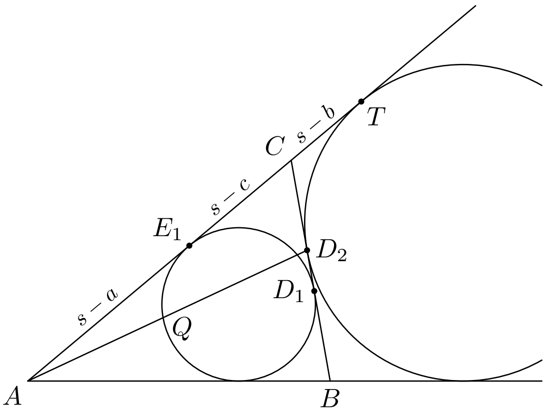
celým číslom. Prvočíslo q má deliť čitateľa, musí teda deliť jedného z troch činiteľov (toto funguje, iba ak je to prvočíslo!). Ak si spomenieme na cvičenie, ostávajú nám iba možnosti $q = 3$ alebo $q = 13$. Obe vyhovujú, riešeniami sú teda dvojice $(3, 3)$, $(3, 13)$, $(13, 3)$. Ukážeme, že iné už nebudú.
Ostal nám prípad $p, q > 5$. Vďaka symetrii môžeme predpokladať, že $q > p$. Prečítajme si ešte raz zadanie, znovu si spomeňme na cvičenie a ostane nám iba možnosť $p \mid 5^q - 2^q$. Použitím $(\triangle)$ máme aj $p \mid 5^{p-1} - 2^{p-1}$. Urobíme malú fintu. Číslo q je prvočíslo a $q > p$, preto q a $p - 1$ sú nesúdeliteľné (premyslite si to!). Potom existujú také prirodzené čísla a a b, že $aq - b(p-1) = 1$ (toto je známe tvrdenie a zároveň cvičenie 2 na domácu úlohu). Na záver označme k zvyšok po delení čísla 5^q prvočíslom p, t. j. $k \equiv 5^q \equiv 2^q \pmod p$ a umne napíšme

$$3 = 5 \cdot 1^b - 2 \cdot 1^b \overset{(\triangle)}{\equiv} 5 \cdot 5^{b(p-1)} - 2 \cdot 2^{b(p-1)} = 5^{b(p-1)+1} - 2^{b(p-1)+1} = 5^{aq} - 2^{aq} \equiv k^a - k^a = 0 \pmod p,$$

čo nespĺňa žiadne prvočíslo $p > 5$.

Úloha č. 14: *Kružnicu vpísanú trojuholníku ABC označme k a body jej dotyku so stranami BC a AC postupne D_1 a E_1. Na stranách BC a AC zvolíme body D_2 a E_2 tak, aby $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$, bod P je priesečník úsečiek AD_2 a BE_2. Kružnica k pretína úsečku AD_2 v dvoch bodoch, ten bližšie k bodu A označíme Q. Ukážte, že platí $|AQ| = |D_2P|$.*

Riešenie: (opravoval Peťo)



Je dobré pamätať si o vpísanej kružnici jednu vec. Jej dotykové body delia strany na úseky, ktorých dĺžku vieme pomocou dĺžok strán jednoducho vyjadriť. Konkrétne, ak (pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC) položíme $s = (a + b + c)/2$, tak (v súlade s označením v zadaní) máme $|AE_1| = s - a$ a tiež $|CD_1| = |CE_1| = s - c$. Zo zadaných rovností $|CD_2| = |BD_1|$, $|CE_2| = |AE_1|$ pritom dostaneme $|BD_2| = |CD_1|$, $|AE_2| = |CE_1|$ (stačí si nakresliť obrázok). Využitím predchádzajúceho tak získame $|BD_2| = |AE_2| = s - c$. Teraz si musíme spomenúť, že aj dĺžky úsekov od vrcholov k dotykovým bodom pripísaných kružníc majú podobný tvar. Presnejšie, ak X je bod, v ktorom sa kružnica pripísaná k strane BC dotýka tejto strany, tak $|BX| = s - c$. Bod D_2 je teda práve tým dotykovým bodom X. (Rovnako aj E_2 je dotykový bod kružnice pripísanej k strane AC, ale to potrebovať nebudeme.)
Obohatení o cenné informácie si celú situáciu nakreslíme. Označme T bod, v ktorom sa kružnica pripísaná k strane BC dotýka predĺženia strany AC. Posledný krát použijeme vedomosti o dĺžkach úsekov dotyčníc a uvedomíme si, že $|CT| = s - b$. Nemožno si nevšimnúť, že obe sledované kružnice na obrázku sú rovnoľahlé v rovnoľahlosti so stredom A (je to priesečník ich spoločných vonkajších dotyčníc). Taktiež kričí do očí, že v tejto rovnoľahlosti sa bod Q zobrazí do bodu D_2 a bod E_1 do bodu T. Zaujíma nás dĺžka úsečky AQ, preto si napíšme, čo pre ňu dostaneme vďaka uvedenej rovnoľahlosti. Vieme, že $|AQ| : |AD_2| = |AE_1| : |AT|$, takže

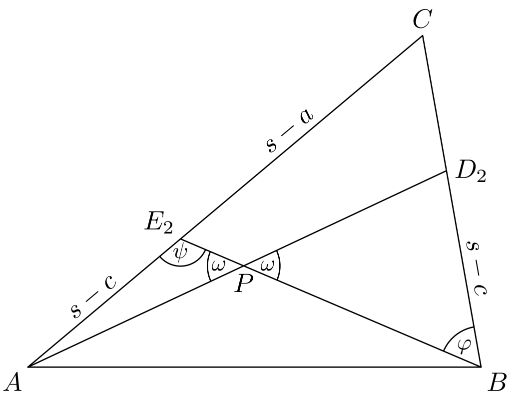
$$|AQ| = \frac{|AE_1|}{|AT|} \cdot |AD_2| = \frac{s-a}{b + (s-b)}|AD_2| = \frac{s-a}{s}|AD_2|. \tag{1}$$

Venujme sa teraz vyjadreniu dĺžky úsečky D_2P. Na to nebudeme potrebovať nič zložitejšie ako zopár sínusových viet. Označme si veľkosti uhlov ako na obrázku. Z trojuholníkov PBD_2 a APE_2 máme

$$\frac{|D_2P|}{\sin\varphi} = \frac{s-c}{\sin\omega} = \frac{|AP|}{\sin\psi}, \qquad \text{takže} \qquad \frac{|AP|}{|D_2P|} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Z trojuholníka BCE_2 zasa

$$\frac{s-a}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin(\pi - \psi)} = \frac{a}{\sin\psi}, \qquad \text{takže} \qquad \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a}{s-a}.$$



Dosadením do predošlého dostaneme

$$\frac{|AP|}{|D_2P|} = \frac{a}{s-a}$$

a následne

$$\frac{|D_2P|}{|AD_2|} = \frac{|D_2P|}{|AP| + |D_2P|} = \frac{1}{\frac{|AP|}{|D_2P|} + 1} = \frac{1}{\frac{a}{s-a} + 1} = \frac{s-a}{s}.$$

Máme tak

$$|D_2P| = \frac{s-a}{s}|AD_2|. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) máme $|AQ| = |D_2P|$.

<u>Komentár:</u> Na vyriešenie tejto úlohy bolo dôležité mať v hlave zakorenené vedomosti o dĺžkach úsekov dotyčníc k vpísanej a pripísanej kružnici (tieto sa dajú odvodiť pomerne jednoducho, skúste si to sami). Bez nich by sme neobjavili rovnoľahlosť a ťažko by sa nám vyjadrovala dĺžka $|AQ|$. Dĺžka $|D_2P|$ sa dala vyjadriť rôznymi spôsobmi, napríklad použitím rôznych podobností či pomocou Cevovej vety.