Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série zimného semestra

Úloha č. 1: *Skupina myšiek bývajúca na F–324 sa rozhodla usporiadať športové zápolenie. Najskôr sa samozrejme musia rozdeliť do družín. Myšky sa o to už hodnú chvíľu snažia a stále nič. Zistili iba, že keby ich bolo o tri viac, mohli by sa rozdeliť do štyroch družín, keby ich bolo o štyri viac, mohlo by byť družín päť a nakoniec, keby ich bolo o päť viac, mohli by sa rozdeliť do šiestich družín. Zistite všetky možné počty myšiek.*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Zaveďme si vhodné označenie. Celý čas budeme rozprávať o počte myšiek, tak si ho označme m. Vieme, že keby bolo myšiek o 3 viac, mohli by sa rozdeliť do 4 rovnakých skupín. To znamená, že číslo $m+3$ je deliteľné štyrmi. Ak od čísla deliteľného štyrmi odpočítame štvorku, určite tiež dostaneme číslo deliteľné štyrmi. Teda aj číslo $(m+3)-4 = m-1$ musí byť deliteľné štyrmi. Ďalej vieme, že keby bolo myšiek o 4 viac, mohli by sa rozdeliť do 5 rovnakých skupín. Takže $m+4$ je deliteľné piatimi, preto päť delí aj $(m+4)-5 = m-1$. Do tretice, vieme, že keby bolo myšiek o 5 viac, mohli by sa rozdeliť do 6 rovnakých skupín, teda $m+5$ aj $(m+5)-6 = m-1$ sú čísla deliteľné šiestimi.
Zistili sme, že číslo $m-1$ je deliteľné číslami 4, 5 aj 6, takže to bude určite nejaký násobok $nsn(4,5,6)$, čo je 60. Preto $m-1 = 60n$, teda m musí byť tvaru $60n+1$, kde n je nejaké prirodzené číslo. To, že každé číslo tohto tvaru spĺňa podmienky zadania, možno overiť jednoduchým dosadením. Myšiek na F–324 môže byť 1 (aspoň teoreticky), $61, 121, 181, \ldots$, čo možno skrátene zapísať ako $m \in \{1 + 60n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Komentár: Mnohí z vás objavili správne riešenie skúšaním. Zistili si niekoľko prvých čísel, ktoré vyhovovali podmienkam zadania a domysleli si, ako bude postupnosť pokračovať. To ale bez dôkazu nemôže stačiť. Fakt, že sa táto postupnosť nejako správa na začiatku, nám nehovorí nič o tom, či to tak ostane navždy.

Úloha č. 2: *V krajine tvaru štvorcovej siete* 3×3 *žijú ovečky a vlci. Každý rok si každý z tvorov vyberie jedno ľubovoľné políčko, kde bude celý nasledujuci rok, pričom* 2 *zvieratká rovnakého druhu nemôžu byť na tom istom políčku. Ak sa na políčku nachádza iba jedna ovečka, po roku umrie, ale porodí ďalšie dve ovečky (tie v nasledujúcom roku môžu ísť na hociktoré políčka). Ak je na políčku iba vlk, tak umrie, lebo sa nenapapá. Ak je na políčku vlk a ovečka, tak vlk zožerie ovečku, po roku zomrie, ale porodí ďalších dvoch vlkov. Zistite, aké počty vlkov a ovečiek v krajine spôsobia, že po niekoľkých rokoch URČITE niektorý z druhov vymrie.*
Poznámka: Ak sa stane, že sa má v krajinke rozmiestniť 10 *alebo viac ovečiek (vlkov), tak sa rozmiestni iba* 9 *a ostatné odídu študovať do USA, pričom sa už nevrátia.*

Riešenie: (opravoval Kubo)
Pozíciou (o,v) budem označovať, že v krajinke je o ovečiek a v vlkov. Úloha sa vlastne skladá z dvoch častí. Prvá je nájsť prežívajúce pozície, vtedy stačí dokázať, že existuje aspoň jedna možnosť ako môžu zvieratká navždy žiť. Druhá je nájsť všetky vymierajúce pozície, vtedy treba dokázať, že nech sa zvieratká rozmiestňujú akokoľvek, tak URČITE jeden z druhov vymrie, t.j. treba rozobrať všetky možnosti ich rozmiestnenia. Na konci vzoráku je aj obrázok, kde sú znázornené vymierajúce pozície. Všetkých pozícií je zrejme $9 \cdot 9 = 81$, lebo vlkov aj ovečiek môže byť 1 až 9. Najskôr nájdeme nejaké vymierajúce pozície, a potom o ostatných dokážeme, že sú prežívajúce.
Poďme hľadať vymierajúce pozície.
Budeme tu používať pravidlo (ktoré je zrejme správne), že ak sa z nejakej pozície môžem dostať (pri ľubovoľnom rozmiestnení zvieratiek) iba do umierajúcich, tak aj táto pozícia je umierajúca. Toto pravidlo budem označovať $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$.

1) Pozície $(1,v)$, kde $1 \le v \le 9$, sú vymierajúce, lebo buď túto ovečku zožerie nejaký vlk (vymrú ovečky a v ďalšom roku aj vlci), alebo ju nezožerie žiadny vlk, teda sa žiadny vlk nenapapá a vymrú vlci.
2) Pozície $(o,9)$, kde $1 \le o \le 9$, sú vymierajúce, lebo vlci zožerú všetky ovečky.
3) Pozície (o,v), kde $o+v \ge 14$. Aspoň 5 vlkov sa napapá, teda ďalší rok bude vlkov 9 $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.
4) Pozície $(9,v)$, kde $1 \le v \le 4$. V každom z ďalších rokov buď neklesne počet ovečiek (ostane 9, ak sa napapá menej ako 5 vlkov) a stúpne počet vlkov (na dvojnásobok, lebo sa všetci napapajú), alebo klesne počet ovečiek (papalo aspoň 5 vlkov) a počet vlkov stúpne na 9. Z toho je zrejmé, že časom bude počet vlkov rovný 9 $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.
5) Pozície $(8,v)$, kde $1 \le v \le 5$. Jediné možnosti, ktoré môžu nastať, sú nasledujúce tri. Papajú 0 až 3 vlci $\longrightarrow$ vznikne $(9,v)$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú. Papajú 4 vlci $\longrightarrow$ $(8,8)$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú. Papajú 5 vlci $\longrightarrow$ $(6,9)$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.
6) Pozície $(7,v)$, kde $1 \le v \le 6$. Zase máme iba tri nasledujúce možnosti. Papajú 0 až 3 vlci $\longrightarrow$ $(8,v)$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú. Papajú 4 vlci $\longrightarrow$ $(6,8)$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú. Papajú 5 až 6 vlci $\longrightarrow$ $(o,9)$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.

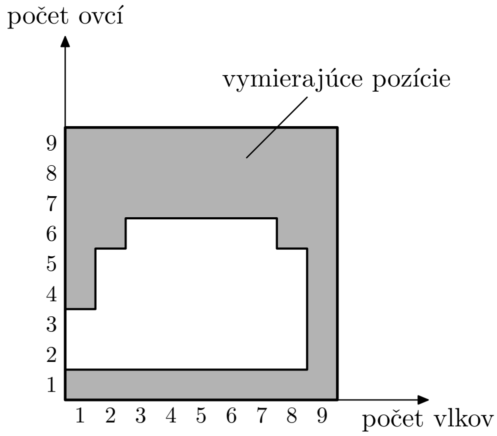
7) Pozície $(6, v)$, kde $1 \leq v \leq 2$. Papajú 0 až 2 vlci $\longrightarrow (o, v)$, kde $o \geq 8 \stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.

8) Pozícia $(5, 1)$. Aspoň jeden vlk musí papať (inak vlci vymrú), takže z $(5, 1)$, 1 vlk papá, dostaneme $(8, 2) \stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ $\stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.

9) Pozícia $(4, 1)$. Podobnou úvahou ako predtým dostaneme $(6, 2) \stackrel{P1}{\Longrightarrow}$ vymrú.

Tak, to by sme mali všetky vymierajúce pozície. A teraz poďme na prežívajúce.

Tu budeme používať pravidlo, že ak sa viem z nejakej pozície dostať do inej prežívajúcej (čo i len jednou možnosťou), tak aj táto pozícia je prežívajúca. Toto pravidlo budem označovať $\stackrel{P2}{\Longrightarrow}$. Opäť v niekoľkých krokoch nájdem prežívajúce pozície.



1) Pozície $(2, v)$, kde $1 \leq v \leq 8$. Papá jeden vlk $\longrightarrow (2, 2)$, a tu môže donekonečna papať práve jeden vlk.

2) Pozície $(4, v)$, kde $2 \leq v \leq 7$. Papajú dvaja vlci $\longrightarrow (4, 4)$, a tu môžu donekonečna papať práve dvaja vlci.

3) Pozície $(6, v)$, kde $3 \leq v \leq 6$. Papajú traja vlci $\longrightarrow (6, 6)$, a tu môžu donekonečna papať práve traja vlci.

4) Pozície $(3, v)$, kde $1 \leq v \leq 8$. Buď papá jeden vlk $\longrightarrow (4, 2) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ $\stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú, alebo papajú dvaja vlci $\longrightarrow (2, 4) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú.

5) Pozície $(5, v)$, kde $3 \leq v \leq 7$. Papajú traja vlci $\longrightarrow (4, 6) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ $\stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú.

6) Pozícia $(5, 2)$. Papajú dvaja vlci $\longrightarrow (6, 4) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú.

8) Pozícia $(5, 8)$. Papajú štyria vlci $\longrightarrow (2, 8) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú.

7) Pozícia $(4, 8)$. Papajú traja vlci $\longrightarrow (2, 6) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú.

9) Pozícia $(6, 7)$. Papajú štyria vlci $\longrightarrow (4, 8) \stackrel{P2}{\Longrightarrow}$ žijú.

Poznámka: Málo z vás naozaj dotiahlo riešenie dokonca, a pritom to vôbec nebolo také ťažké. Vyskytlo sa aj zopár riešiteľov s úplne iným prístupom (vygenerujeme všetky prežívajúce, resp. vymierajúce, pozície a o ostatných je potom zrejmé, že sú tie druhé), ale veľmi si tým nezľahčili úlohu (nie je ľahké dokázať, že sú naozaj všetky).

Úloha č. 3: *Nepárne prirodzené čísla sú rozdelené do skupín nasledovne: V prvej skupine je číslo jedna. Pre $n \geq 2$, po zostavení $n - 1$ skupín zostavíme n-tú tak, že do nej dáme $2n - 1$ najmenších nepárnych prirodzených čísel, ktoré ešte nie sú v žiadnej skupine. Zistite, v ktorej skupine je číslo*

a) 17 *b)* 2004 *c)* $2004^{2004} - 1$.

Riešenie: (opravoval Paľo)

Aby sme si lepšie uvedomili, o čom sa hovorí v zadaní, vypíšme si prvé štyri skupiny:

1. 1,
2. 3, 5, 7,
3. 9, 11, 13, 15, 17,
4. 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

Týmto sme hneď získali odpoveď na prvú otázku (číslo 17 je v tretej skupine). Druhá otázka sa len snažila preveriť vašu pozornosť. Prirodzene, keďže do skupín dávame len nepárne čísla, číslo 2004 nepatrí do žiadnej skupiny.

Teraz už sa poďme venovať tomu zaujímavejšiemu. Číslo $2004^{2004} - 1$ je také obrovské, že zrejme nemá zmysel vypisovať čísla, až dokým naň nenarazíme. Skúsme si preto lepšie pozrieť tie naše skupiny a nájsť v nich nejakú pravidelnosť. Po pozornom skúmaní si všimneme, že číslo 1 je prvé nepárne číslo, 7 je štvrté, 17 je deviate, 31 je šestnáste, ... Začína nám svitať, asi v tom budú zamontované druhé mocniny. Presnejšie sformulované, n–tá skupina končí n^2–tym nepárnym číslom, teda číslom $2n^2 - 1$. Hneď si to dokážeme matematickou indukciou.

1° Pre $n = 1$ to zrejme platí (prvá skupina končí prvým nepárnym číslom).

2° Predpokladajme, že n–tá skupina končí n^2–tym nepárnym číslom. V $(n + 1)$–vej skupine je podľa zadania $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$ čísel, teda v prvých $n + 1$ skupinách bude spolu $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ čísel. Tým sme ukázali, že $(n + 1)$–vá skupina končí $(n + 1)^2$–tym nepárnym číslom, čo bolo naším cieľom.

Z uvedeného vyplýva, že n–tá skupina obsahuje čísla

$$2(n-1)^2 + 1,\ 2(n-1)^2 + 3,\ \ldots,\ 2n^2 - 1\,,$$

teda pre každé číslo x z n-tej skupiny platí

$$2(n-1)^2 - 1 < x \leq 2n^2 - 1\ .$$

Po pričítaní 1, predelení dvoma a odmocnení dostávame

$$n-1<\sqrt{\frac{x+1}{2}}\le n\ .$$

Pre ľubovoľné nepárne číslo x získame číslo príslušnej skupiny n ako hornú celú časť z čísla $\sqrt{(x+1)/2}$. Konkrétne pre $2004^{2004}-1$ získame poradové číslo skupiny ako hornú celú časť z čísla $\sqrt{2004^{2004}/2}$. A to už je výsledok, ktorý sa nijako rozumnejšie zapísať nedá, hoci sa o to niektorí z vás (neúspešne) pokúšali.

Úloha č. 4: *Nech a, b, c sú reálne čísla také, že $a^2+c^2\le 4b$. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí*

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1\ge 0\,.$$

Riešenie: (opravovala Janka)
Mnohí ste si všimli, že druhá mocnina reálneho čísla je vždy nezáporná, či už je číslo kladné alebo nie. Ak by sme výraz v zadaní (pomocou danej podmienky $a^2+c^2\le 4b$) vedeli upraviť na druhú mocninu alebo súčet druhých mocnín, vedeli by sme, že je vždy nezáporný. To sa dá takto:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1\ge x^4+ax^3+(\frac{a^2+c^2}{4})x^2+cx+1=x^2(x^2+ax+\frac{a^2}{4})+(\frac{c^2}{4}x^2+cx+1)=$$

$$=x^2(x+\frac{a}{2})^2+(\frac{c}{2}x+1)^2=(x^2+\frac{a}{2}x)^2+(\frac{c}{2}x+1)^2.$$

Z tejto úpravy vieme, že výraz v zadaní určite nie je menší ako súčet dvoch druhých mocnín. Zároveň je súčet druhých mocnín nezáporný. Preto je výraz v zadaní vždy nezáporný.

Úloha č. 5: 20 *členov tenisového klubu sa rozhodlo usporiadať medzi sebou 14 súbojov dvojhry tak, aby každý člen hral aspoň jeden zápas. Dokážte, že spomedzi týchto 14 súbojov vieme vybrať 6 tak, že všetkých 12 hráčov v týchto súbojoch je rôznych.*

Riešenie: (opravoval Miťo)
Veľmi netradične si na úvod dokážeme všeobecnejšie tvrdenie, a to z dvoch dôvodov. Prvým dôvodom je, že toto tvrdenie nezvádza k skúmaniu všelijakých veľmi konkrétnych prípadov, čo ste mnohí v riešení vo veľkej miere robili a väčšinou to nedopadlo práve najšťastnejšie. Druhý dôvod je, že prečo nie, keď je postup (takmer) rovnaký :).
Tvrdenie: Ak n hráčov spolu odohralo k súbojov tak, že každý hráč hral aspoň raz, tak vieme vybrať $n-k$ súbojov takých, že všetci hráči v týchto súbojoch sú navzájom rôzni.
Dôkaz: Keďže k zápasov sa môže zúčastniť najviac $2k$ hráčov, tak zo zadania vyplýva, že $n\le 2k$. Ak $n=2k$, tak je tvrdenie triviálne, preto môžeme predpokladať, že $n<2k$. To ale znamená, že aspoň jeden hráč sa zúčastnil aspoň dvoch zápasov. Aby sme v tom mali poriadok, nejako si označíme tieto ďalšie zápasy, povedzme tak, že hráčovi za číslo dáme čiarku (napr. $4'$). Všimnime si, že v zozname zápasov je práve $2k-n$ čísel s čiarkou. (Rozmyslite si prečo.)
Teraz už poďme vyberať zápasy tak, aby sa nám žiadny hráč neopakoval. To sa nám zjavne podarí, ak vyberieme iba zásapy, v ktorých žiadny z hráčov nemá čiarku. Koľko je týchto zápasov? Označme z počet *zlých* zápasov, to budú tie, v ktorých má jeden z hráčov, alebo obaja, čiarku. Pre počet *dobrých* zápasov d zrejme platí $d=k-z$. Avšak čísel s čiarkou je $2k-n$, teda $z\le 2k-n$. (Rozmyslite si, prečo to platí a čo to vlastne znamená – toto je totiž pointa celého dôkazu.) To nám ale stačí, pretože $d=k-z\ge k-(2k-n)=n-k$, čo sme mali dokázať.
Poznámka: Môžete skúsiť porozmýšľať, koľko zápasov vieme vybrať, ak $n\le k$.

Iné riešenie:
(*Podľa Tomáša Bzdušeka.*) Toto riešenie bude založené na využití *Dirichletovho princípu.* Budeme postupovať tak, že každého hráča necháme iba v jednom jeho zápase (hociktorom). V jeho ostatných zápasoch necháme voľné miesto. Takto nám ostalo 20 hráčov rozdelených do 14 skupín (zápasov). Sformulujme teraz vyhovujúcu verziu Dirichletovho princípu.
Veta (Dirichletov princíp, jedna z možných formulácií): Ak je $kn+a$ hráčov rozdelených do k skupín, pričom každá skupina môže obsahovať najviac $n+1$ hráčov, potom aspoň a skupín obsahuje práve $n+1$ hráčov.
Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad vo väčšine kníh odporúčaných k tejto sérii.
V našom prípade $a=6$, $n=1$ a $k=14$, teda podľa predchádzajúcej vety aspoň šesť skupín obsahuje dvoch hráčov. Keďže všetkých 20 hráčov, ktorých sme rozdeľovali, bolo rôznych, bude aj týchto 12 rôznych. A to je ono.

Iné riešenie:
Toto riešenie bude založené na využití *teórie grafov.* Vrcholmi budeme reprezentovať hráčov a hranami zápasy medzi nimi; teda hrana bude medzi dvomi vrcholmi práve vtedy, ak hráči zodpovedajúci týmto vrcholom spolu hrali zápas.
Vďaka podmienke zo zadania (viete ktorej?) bude z každého vrcholu vychádzať aspoň jedna hrana. Náš graf zjavne nebude súvislý (porozmýšľajte prečo) a teda bude pozostávať z niekoľkých komponentov (súvislých častí). Ak dokážeme, že komponentov je aspoň šesť, tak sme vyhrali, pretože potom stačí z každého komponentu vybrať

ľubovoľnú hranu. Toto dokážeme sporom, teda budeme predpokladať, že ich je najviac päť. Teraz dokonca budeme predpokladať, že komponentov je *práve* päť, neskôr sa zamyslíme nad tým, či naozaj nemusíme rozoberať aj ostatné prípady.
Označme počet vrcholov v jednotlivých komponentoch ako $v_i + 1$, kde $1 \le i \le 5$. (Toto označenie si naozaj riadne premyslite.) Kedže hráčov je 20 a každý musel hrať, tak $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 15$. Ale keďže ku každému z vrcholov vo v_i musí prináležať aspoň jedna hrana, tak hrán je aspoň 15, čo je hľadaný spor.
Teraz je ten správny čas zaoberať sa korektnosťou predpokladu, že komponentov je práve päť. Tento predpoklad naozaj možno použiť – vypláva to z predchádzajúceho odstavca. Premyslieť to do podrobna láskavému čitateľovi určite nebude robiť problém. Tým bude zároveň dôkaz skončený.

Úloha č. 6: *Prirodzené čísla p, q sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď sú nesúdeliteľné čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$. Je toto tvrdenie pravdivé?*
Poznámka: Dve čísla sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je jedna.

Riešenie: (opravovali Lucy a Miki)
Nech $D(a, b)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel a a b.
Chceme zistiť, či je pravda, že $D(p, q) = 1$ práve vtedy, keď $D(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$. Na hľadanie oboch najväčších spoločných deliteľov využijeme *Euklidov algoritmus*. Spravíme rozdiel čísel p, q (bez ujmy na všeobecnosti nech $p \ge q$). Vieme, že $D(p, q) = D(q, p - q)$, pretože ak nejaké číslo delí p aj q, tak delí aj ich rozdiel. Takto môžeme pokračovať ďalej, až kým jedno z čísel nebude 0 a to druhé z čísel bude hľadaný najväčší spoločný deliteľ čísel p, q. Teraz $D(p, q) = D(p - q, q)$ a

$$D(2^p - 1, 2^q - 1) = D(2^p - 1 - (2^q - 1), 2^q - 1) = D(2^q(2^{p-q} - 1), 2^q - 1) = D(2^{p-q} - 1, 2^q - 1).$$

Môžeme pokračovať aj ďalej. Za predpokladu, že $p - q \ge q$, platí $D(p - q, q) = D(p - 2q, q)$ a

$$D(2^{p-q} - 1, 2^q - 1) = D(2^{p-q} - 1 - (2^q - 1), 2^q - 1) = D(2^q(2^{p-2q} - 1), 2^q - 1) = D(2^{p-2q} - 1, 2^q - 1).$$

Vidíme, že pri hľadaní najväčšieho spoločného deliteľa čísel $2^p - 1, 2^q - 1$ budú v exponentoch presne také isté čísla ako pri hľadaní najväčšieho spoločného deliteľa čísel p, q. Dokážeme to matematickou indukciou.

1° V prvom kroku sú exponenty rovnaké ako čísla v prvej dvojici $(D(2^p - 1, 2^q - 1), D(p, q))$.

2° Nech v nejakom kroku $D(p, q) = D(a, b)$ a $D(2^p - 1, 2^q - 1) = D(2^a - 1, 2^b - 1)$. Ak $a \ge b$, tak potom $D(a, b) = D(a - b, b)$ a $D(2^a - 1, 2^b - 1) = D(2^a - 1 - (2^b - 1), 2^b - 1) = D(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. Teda dôkaz je hotový.

Teraz je už riešenie úlohy ľahké. Vieme totiž, že Euklidov algoritmus skončí vtedy, keď je jedno z čísel rovné nule a najväčší spoločný deliteľ je to druhé číslo. Potom ale $D(p, q) = 1$ znamená, že v poslednom kroku sme mali $D(p, q) = D(1, 0) = 1$. Lenže tým sme zároveň dokázali, že $D(2^p - 1, 2^q - 1) = D(2^1 - 1, 2^0 - 1) = D(1, 0) = 1$. Opačnú implikáciu dokážeme podobne. Ak $D(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$, čiže $D(2^p - 1, 2^q - 1) = D(1, 0) = 1$, tak vieme, že $D(p, q) = D(1, 0) = 1$. To je všetko.

Úloha č. 7: *Tomáš dostal na narodeniny veľkú bonboniéru. Mala štvorcový tvar rozmerov $2n \times 2n$ (bolo v nej teda $4n^2$ cukríkov rozmiestnených v $2n$ riadkoch a $2n$ stĺpcoch). Ešte na oslave ju otvoril a spolu s kamarátmi veľa cukríkov zjedli. Keď sa druhý deň Tomáš zobudil, našiel v bonboniére, chúďa, už iba $3n$ cukríkov. Dokážte, že bez ohľadu na to, ktoré cukríky zostali, môže Tomáš zvoliť takých n riadkov a n stĺpcov bonboniéry, že na nich budú všetky zvyšné cukríky.*

Riešenie: (opravovali Miško a Peťo N.)
Najprv sa budeme snažiť vybrať n riadkov tak, aby v nich bolo čo najviac cukríkov. Usporiadajme si riadky bonboniéry podľa počtu cukríkov. Ukážeme, že ak vyberieme n riadkov s najväčším počtom cukríkov, vždy v nich bude aspoň $2n$ cukríkov. Označme si počty cukríkov v riadkoch bonboniéry $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, pričom $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_{2n}$. Chceme ukázať, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n \ge 2n$.
Ukážeme to sporom. Nech to neplatí. Teda platí, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n \le 2n - 1$. To ale znamená, že aspoň jedno z čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je menšie ako 2. Nech je to číslo a_k. A keďže v bonboniére je dokopy $3n$ cukríkov, musí tiež platiť, že $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \ge n + 1$. No to znamená, že aspoň jedno z čísel $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$ je väčšie ako 1, teda aspoň 2. Nech je to číslo a_ℓ. Spolu máme $2 \le a_\ell \le a_k < 2$, čo je zjavne spor.
Teda vieme vybrať n riadkov tak, aby v nich bolo aspoň $2n$ cukríkov. Ostáva nám najviac n cukríkov, ktoré máme pokryť n stĺpcami, čo zrejme nie je problém (vyberieme tie stĺpce, v ktorých je aspoň jeden cukrík nepokrytý a doplníme ich do počtu n ľubovoľnými ďalšími). Čiže naozaj vieme vybrať n riadkov a n stĺpcov tak, aby sme nimi pokryli všekých $3n$ cukríkov.

Komentár: Uvedené riešenie je pomerne prirodzené – keď chceme pokryť čo najviac cukríkov, skúsime najprv vybrať n „najcukríkovejších“ riadkov a dopočítame, či to bude stačiť. V tomto prípade to stačilo (kľudne sa mohlo stať, že by to nevyšlo a museli by sme riadky a stĺpce vyberať sofistikovanejšie).

Napriek tomu, že úloha nebola veľmi náročná, mnohým vám robila problémy. Väčšinou ste sa zaplietli úvahami typu „*zoberme najhoršie možné rozmiestnenie cukríkov*". Pritom takýto prístup pri podobných úlohách málokedy funguje. Je totiž zložité (zväčša takmer nemožné) zdôvodniť, prečo je nejaké rozmiestnenie „najhoršie".

Úloha č. 8: *Nech x a y sú reálne čísla také, že x^2+y^2, x^3+y^3 aj x^4+y^4 sú racionálne čísla. Dokážte, že potom aj $x+y$ a xy sú racionálne čísla.*

Riešenie: (opravovali Dada a Rúža)

Na vyriešenie tejto úlohy si bolo treba uvedomiť, že keď sčítame, odčítame, vynásobíme, alebo vydelíme dve racionálne čísla (pričom číslo, ktorým delíme, musí byť rôzne od nuly), dostaneme opäť číslo racionálne. Potom sa stačilo chvíľku pohrať s výrazmi v zadaní. Tak sa poďme hrať :). Vieme, že x^2+y^2, teda aj $(x^2+y^2)^2$ je racionálne číslo. Keďže platí

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2\right)^2 &= x^4+2x^2y^2+y^4\\ \left(x^2+y^2\right)^2-(x^4+y^4) &= 2x^2y^2\end{aligned}$$

a x^4+y^4 je tiež racionálne číslo, tak aj x^2y^2 je racionálne. Podobou úvahou, no využijúc nový poznatok, že $x^2y^2 \in \mathbb{Q}$, z rovnosti

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2\right)^3 &= x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6\\ \left(x^2+y^2\right)^3-3x^2y^2(x^2+y^2) &= x^6+y^6\end{aligned}$$

dostávame, že aj $x^6+y^6 \in \mathbb{Q}$. Obdobne z

$$\begin{aligned}\left(x^3+y^3\right)^2 &= x^6+2x^3y^3+y^6\\ \left(x^3+y^3\right)^2-(x^6+y^6) &= 2x^3y^3\end{aligned}$$

vyplýva, že aj $x^3y^3 \in \mathbb{Q}$. Podiel racionálnych čísel x^3y^3/x^2y^2 je tiež racionálny, teda $xy \in \mathbb{Q}$, samozrejme za predpokladu $x^2y^2 \neq 0$. Rovnosť $x^2y^2 = 0$ nastáva práve vtedy, keď $xy = 0$, takže aj v tomto prípade je xy racionálne (lebo $0 \in \mathbb{Q}$). Zo vzťahov

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy\\ (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+y^3+3xy(x^2+y^2)\end{aligned}$$

vyplýva, že $(x+y)^2$ a $(x+y)^3$ sú racionálne čísla. Teda ich podiel $x+y$ je tiež racionálne číslo, samozrejme za predpokladu $(x+y)^2 \neq 0$. Rovnosť $(x+y)^2 = 0$ nastáva práve vtedy, keď $x+y=0$, takže aj v tomto prípade je $x+y$ racionálne. A naša hra končí, lebo chtiac-nechtiac sme dokázali, čo bolo treba.

Komentár: Spôsobov, ako sa zahrať, bolo naozaj habadej. Väčšina z vás mala veľmi pekné a originálne riešenia, ktoré by tu mohli byť namiesto nášho. No tradičnou chybou bolo, že ste zabúdali overiť, či nedelíte nulovým výrazom. Ale inak to bolo veľmi pekné čítanie :).

Úloha č. 9: *Nájdite všetky dvojice celých čísel x a y, pre ktoré platí*

$$(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)+x(x+1)(x+2) = y^{2^x}.$$

Riešenie: (opravovali Rasťo a Tomáš)

Najprv si všimneme, že pravá strana v zadaní (t.j. y^{2^x}) je nezáporné číslo pre všetky celé čísla x a y, okrem prípadu $x=0$ (ten rozoberieme samostatne, stačí ho dosadiť a máme jedno z riešení).

Pre $x \geq 1$ je možné napísať výraz na pravej strane ako druhú mocninu $y^{2^x} = \left(y^{2^{x-1}}\right)^2 \geq 0$. Prečo je to tak aj pre $x \leq -1$? Zdôvodnenie, že to je exponenciálna funkcia, je nesprávne, pretože napr. y^{3^x} je záporné aj pre $y=-1$, $x=1$.

Pre $x \leq -1$ si vieme pravú stranu (s využitím absolútnej hodnoty $|x| \geq 1$ a úprav s exponentami) šikovne prepísať do tvaru

$$y^{2^x} = y^{2^{-|x|}} = y^{\frac{1}{2^{|x|}}} = \sqrt[2^{|x|}]{y} = \sqrt{\sqrt[2^{|x|-1}]{y}} \geq 0,$$

pretože druhá odmocnina je definovaná iba pre $\sqrt[2^{|x|-1}]{y} \geq 0$ a celá je nezáporná.

Ďalším správnym krokom pri riešení tejto úlohy bolo rozobrať $x \leq -4$, $x > 0$ a ostatné možnosti pre x rozobrať dosadením.
Pre $x \leq -4$ sú všetky zátvorky na ľavej strane záporné čísla, súčin troch záporných čísel je záporné číslo. Nakoniec, ak sčítame štyri záporné čísla, dostaneme záporné číslo. Inak povedané, pre $x \leq -4$ je ľavá strana záporná, ale pravá je vždy nezáporná. Riešenie tu nenájdeme.
Pre $x = -3$ dostaneme (tri sčítance sú nulové), že má platiť

$$-6 = (-3)(-2)(-1) = y^{2^{-3}} \geq 0,$$

neexistuje riešenie y.
Pre $x = -2$ dostaneme (tri sčítance sú nulové), že má platiť

$$2 = (-2)(-1)(+1) = y^{2^{-2}} = y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y},$$

umocnením máme $y = 2^4 = 16$. Skúškou (pretože umocňovanie nie je exvivalentná úprava) overíme, že $x = -2$, $y = 16$ je skutočne prvým riešením.
Pre $x = -1$ dostaneme (tri sčítance sú nulové), že má platiť

$$-2 = (-1)(+1)(+2) = y^{2^{-1}} \geq 0,$$

opäť neexistuje riešenie y.
Nakoniec pre $x = 0$ dostaneme (tri sčítance sú nulové), že má platiť

$$6 = (+1)(+2)(+3) = y^{2^0} = y^1,$$

takže $x = 0$, $y = 6$ je druhým riešením.
Ostal nám prípad $x > 0$. Tu nám pomôže zvyšok po delení číslom 4 (tzv. modulo). Ak si roznásobíme ľavú stranu, dostaneme

$$4x^3 + 18x^2 + 22x + 4 = 2(2x+3)(x^2+3x+1) = 2(2x+3)(x(x+1)+2x+1).$$

Všimnime si, že je to číslo deliteľné dvoma, ale nie štyrmi, pretože v zátvorkách sú nepárne čísla ($x(x+1)$ je vždy párne, $2x+1$ je nepárne). To ale znamená, že ak by existovalo riešenie pre $x > 0$, musela by byť aj pravá strana párna, preto aj y musí byť párne. Ak si prečítate druhú vetu v tomto riešení, zistíte, že potom je pravá strana delieľná (pre párne y) štyroma. Túto vlastnosť nemá ľavá strana a tak tu nenájdeme žiadne iné riešenie.
Úloha má dve riešenia $x = -2$, $y = 16$ a $x = 0$, $y = 6$.

Komentár: Mýlili ste sa najmä v argumentácii, prečo platí $y^{2^x} \geq 0$. Pozor, toto nie je „klasická" exponenciálna funkcia! Podobne, ak ste sa rozhodli stavať svoje riešenie pre $x \geq 0$ na tom, že „exponenciálna funkcia rastie rádovo rýchlejšie ako polynomická", patrilo by sa to korektne ukázať.

Úloha č. 10: *Štvorec s rozmermi* 99×99 *je celý pokrytý dlaždičkami tvarov* , *a* . *Žiadne dve dlaždičky sa neprekrývajú a žiadna nevyčnieva von. Dlaždičky môžu byť aj pootáčané. Dokážte, že dlaždičiek tvaru* *je aspoň* 199.

Riešenie: (opravoval Buggo)
Túto úlohu sa môžeme pokúsiť riešiť viacerými spôsobmi. Môžeme napríklad nájsť všetky spôsoby, ako sa dá vydláždiť náš štvorec a pre každé takéto vydláždenie ukázať, že sme použili aspoň 199 dlažičiek tvaru . Tento prístup ale nie je najšťastnejší, pretože by nám trval príliž dlho a asi by sa nám ťažko dokazovalo, že sme naozaj našli všetky vydláždenia. Iná možnosť je nájsť nejakú vlastnosť alebo vlastnosti, ktoré budú mať všetky dobré vydláždenia a pomocou týchto vlastností dokázať, čo treba.
Ako však nájsť takú vlastnosť? V úlohe nám vystupujú iba dlaždičky, štvorce a pokrytie dlaždičkami. Nič iné. Hľadaná vlastnosť by teda mohla byť nejakým vzťahom medzi štvorcom, dlaždičkami a pokrytím. Keď sa pozrieme na dlaždičky, hneď si uvedomíme, že dve z nich pokryjú vždy štyri políčka štvorca (políčko štvorca je malý štvorček 1×1) a jedna tri políčka. Snažme sa nejako využiť túto vlastnosť. Predstavme si, že políčka štvorca ofarbíme niekoľkými farbami (každé políčko práve jednou) a poďme skúmať, na políčkach akej farby budú naše dlaždičky. Snažíme sa nájsť také ofarbenie, ktoré nám dobre vyjadrí (alebo odhalí) náš hľadaný vzťah.
Pokúsme sa štvorec ofarbiť tak, aby dlaždičky , pokryli pri ľubovoľnom rozmiestnení políčka štyroch rôznych farieb a dlaždička troch rôznych farieb. Takéto ofarbenie naozaj existuje (tabuľka 1 – čísla znamenajú farby).

1	2	1	2	
3	4	3	4	...
1	2	1	2	
		⋮		⋱

tabuľka 1

1		1		
				...
1		1		
		⋮		⋱

tabuľka 2

Vyskúšajte teraz s využitím týchto skutočností dokázať naše tvrdenie. My ideme postupovať trošku inak. Urobíme totiž trochu iné ofarbenie. Ofarbíme štvorec, ako je to v tabuľke 2.
Farbou 1 ofarbíme každé políčko, ktoré je v nepárnom riadku a zároveň aj v nepárnom stĺpci. Ostatné políčka budú biele. Všimnime si teraz, že jedna dlaždička zakryje najviac jedno políčko farby 1. Ľahko nahliadneme, že farbou 1 je ofarbených práve $50 \times 50 = 50^2$ políčok. Označme si x počet dlaždičiek tvaru  a y počet zvyšných dlaždičiek. Potom

$$x + y \geq 50^2.$$

Zároveň vieme, že

$$3x + 4y = 99^2.$$

To kvôli tomu, že políčok je spolu 99^2 a zaberie tri políčka a  a  zaberú po štyri. Dajme teraz naše dva vzťahy dokopy a dostaneme

$$x = 4x + 4y - 3x - 4y \geq 4 \cdot 50^2 - 99^2 = 100^2 - 99^2 = (100 - 99) \cdot (100 + 99) = 199,$$

čo sme chceli dokázať.

Poznámka: Bolo by vhodné poznamenať, že nemá zmysel ukladať dlaždičky inak ako priamo tak, ako sú nakreslené v zadaní, alebo otočené o nejaký celočíselný násobok deväťdesiatich stupňov. Skúste sa zamyslieť, prečo.

Úloha č. 11: *Rasťo má na papieri napísaných* 26 *rôznych čísel z množiny* $\{1, 2, \ldots, 100\}$. *Ukážte, že sa z nich dá vybrať niekoľko (aspoň jedno) tak, že ich súčin bude štvorec (t.j. druhá mocnina celého čísla).*

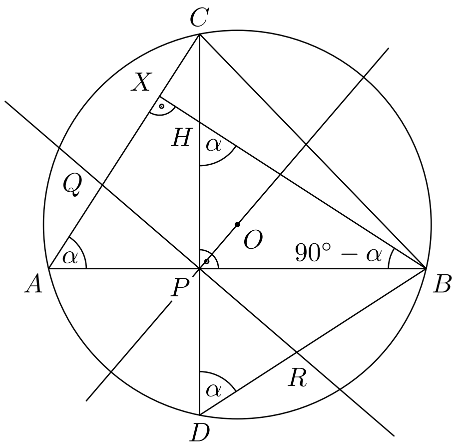
Riešenie: (opravoval Pišta)
Počet prvočísel v množine $M = \{1, 2, \cdots, 100\}$ je 25. Každé prirodzené číslo $m \in M$ sa dá jednoznačne prepísať do kanonického rozkladu v tvare $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_{25}^{\alpha_{25}}$, kde p_i je i-té prvočíslo a $\alpha_i \in \{0, 1, \cdots, 6\}$. Teraz priradíme každému $m \in M$ binárny 25-ciferný kód $\phi(m) = m_1 m_2 \cdots m_{25}$ podľa nasledujúceho pravidla: Ak α_i je párne, tak $m_i = 0$, inak $m_i = 1$. Je zrejmé, že keď je nejaké číslo štvorcom prirodzeného čísla, každé prvočíslo sa v ňom nachádza párny počet krát, a tak jemu priradený kód pozostáva zo samých núl. Počet rôznych binárnych kódov dĺžky 25 je 2^{25}.
Označme si Rasťovu množinu 26 čísel ako R. Taký istý kód môžeme priradiť každej podmnožine G množiny R. Označme si $S(G)$ číslo, ktoré dostaneme ako súčin všetkých prvkov tejto podmnožiny. Kód priradený podmnožine G bude kód, ktorý priradíme číslu $S(G)$. Môžeme to urobiť z toho dôvodu, že v kanonickom rozklade $S(G)$ sa nemôže nachádzať prvočíslo väčšie ako p_{25}, lebo je to súčin prirodzených čísel menších ako 100. Množina R má $2^{26} - 1$ rôznych neprázdnych podmnožín.
Keďže počet všetkých rôznych neprázdnych podmnožín množiny R je väčší ako počet všetkých rôznych kódov, potom na základe *Dirichletovho princípu* existujú dve rôzne podmnožiny G_1, G_2 množiny R, ku ktorým je priradený taký istý kód, tj. $\phi(S(G_1)) = \phi(S(G_2))$. Potom zrejme $S(G_1) \cdot S(G_2)$ je štvorec prirodzeného čísla.
Ak sú podmnožiny G_1 a G_2 disjunktné, tak množina $G_1 \cup G_2 \subseteq R$ a $S(G_1 \cup G_2) = S(G_1) \cdot S(G_2)$, čo je štvorec prirodzeného čísla. Takže $G_1 \cup G_2$ je podmnožina množiny R, ktorá obsahuje čísla, ktorých súčin dáva štvorec.
Ak G_1, G_2 nie sú disjunktné, tak $G_1 \cap G_2 = \{x_1, \cdots, x_k\}$ pre nejaké $k \geq 1$. Nech $G = (G_1 \cup G_2) \setminus (G_1 \cap G_2)$, potom

$$S(G) = \frac{S(G_1) \cdot S(G_2)}{x_1^2 \cdots x_k^2},$$

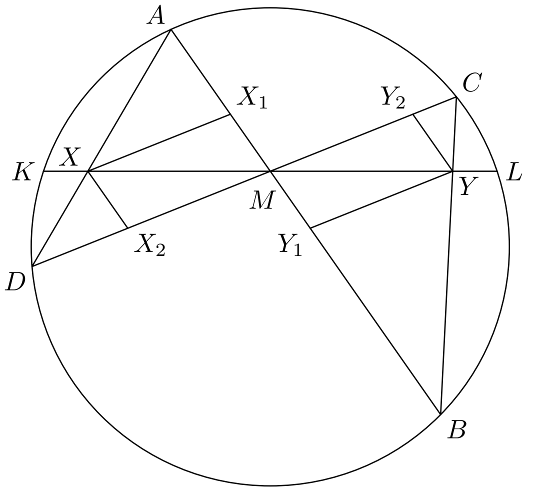
keďže sme spoločné prvky škrtli aj zo súčinu $S(G_1)$ aj z $S(G_2)$. Zrejme $S(G_1) \cdot S(G_2)$ je štvorec prirodzeného čísla, a keďže $x_1^2 \cdot \cdots \cdot x_k^2 \mid S(G_1) \cdot S(G_2)$, tak aj $S(G)$ je štvorec prirodzeného čísla. V tomto prípade je G tá hľadaná podmnožina, ktorej súčin prvkov dáva štvorec.
Tým je úloha vyriešená.

Úloha č. 12: *V ostrouhlom trojuholníku ABC platí $|AC| < |AB|$. Body O, H, P sú postupne stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ortocentrum trojuholníka ABC a päta výšky z vrcholu C na stranu AB. Nech kolmica cez bod P na priamku OP pretína priamku AC v bode Q. Dokážte, že uhly PHQ a BAC majú rovnakú veľkosť.*

Riešenie: (opravovala Hanka)



(*Podľa Fera Simančíka.*) Označme k kružnicu opísanú trojuholníku ABC, D druhý priesečník výšky CP s kružnicou k a X pätu výšky z bodu B na stranu AC. Ďalej nech R je priesečník priamky QP s úsečkou DB. Uhol BAC označme α. V trojuholníku XBA je uhol AXB pravý (BX je výška na AC), preto $|\sphericalangle XBA| = |\sphericalangle HBA| = 90° - |\sphericalangle XAB| = 90° - \alpha$. V trojuholníku PHB je podobne $|\sphericalangle HPB| = 90°$, preto $|\sphericalangle PHB| = = 90° - |\sphericalangle PBH| = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Uhly CAB a CDB sú obvodové uhly kružnice k nad tým istým oblúkom CB, teda $|\sphericalangle CDB| = = |\sphericalangle CAB| = \alpha$. Teraz si všimnime trojuholník HDB. Uhly HDB a DHB majú veľkosť α, preto je tento trojuholník rovnoramenný. Úsečka BP je kolmá na úsečku HD (lebo CP je výška na AB), čiže to bude výška na základňu v rovnoramennom trojuholníku HDB, teda zároveň aj ťažnica a bude platiť $|HP| = |DP|$. Ešte si všimnime, že uhly DPR a QPH sú vrcholové, čiže platí $|\sphericalangle DPR| = |\sphericalangle QPH|$.
Keď sa teraz bližšie pozrieme na to, čo sme zatiaľ zistili, vidíme, že by bolo pekné, keby sa nám ešte podarilo dokázať rovnosť $|PQ| = |PR|$. Tým by sme vlastne dokázali, že trojuholníky QPH a RPD sú zhodné (podľa vety *sus*), a teda aj rovnosť uhlov $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle PDR| = |\sphericalangle PHQ|$, čo je cieľom úlohy.
Skúsme si túto rovnosť dokázať. V našom prípade naozaj platí, čo sa dalo ukázať napríklad analyticky (môžte si skúsiť), alebo elegantnejšie využitím vety, ktorú v anglickej literatúre nazvali *The Butterfly theorem.*



Z toho asi o veľa múdrejší nie ste, tak sa na ňu teraz pozrime zbližšia. Vezmime si kružnicu ℓ a nejakú jej tetivu, ktorej priesečníky s danou kružnicou označíme K, L. Teraz zostrojme dve ľubovoľné tetivy AB a CD prechádzajúce stredom M tetivy KL, pričom A, C ležia v tej istej polrovine určenej priamkou KL (uvedomte si, že presne tento prípad nastáva aj v našom príklade). Potom AD pretína KL v bode X, BC pretína KL v bode Y a bod M je stredom úsečky XY. A dôkaz? Najprv zostrojme cez body X a Y rovnobežky s AB a CD. Priesečníky s AB označme X_1, Y_1 a s CD X_2, Y_2 (pozri obrázok). Ďalej nech $|KM| = |ML| = a$, $|XM| = x$ a $|YM| = y$. Teraz si všimnime, že v obrázku máme kopu podobných trojuholníkov, tak to treba nejak využiť. Vidíme, že trojuholníky XMX_1 a YMY_1 sú podobné, teda $x/y = |XX_1|/|YY_1|$. Podobne dostaneme $x/y = |XX_2|/|YY_2|$ (z podobnosti trojuholníkov XMX_2 a YMY_2). Taktiež platí, že trojuholníky AXX_1 a CYY_2 sú podobné, teda $|XX_1|/|YY_2| = = |AX|/|CY|$. Podobne dostaneme $|XX_2|/|YY_1| = |DX|/|BY|$ (z podobnosti trojuholníkov DXX_2 a BYY_1). Teraz si pomocou toho, čo sme dostali, vyjadríme podiel

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{|XX_1| \cdot |XX_2|}{|YY_1| \cdot |YY_2|} = \frac{|AX| \cdot |DX|}{|CY| \cdot |BY|}.$$

Z mocnosti bodov X a Y ku kružnici ℓ vyplýva $|AX| \cdot |DX| = |KX| \cdot |XL|$ a $|BY \cdot |CY| = |KY| \cdot |LY|$. Preto

$$\frac{|AX| \cdot |DX|}{|CY| \cdot |BY|} = \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a-y) \cdot (a+y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}.$$

Z toho vidíme, že $x = y$, čo sme chceli dokázať.

<u>Úloha č. 13:</u> *Nech p je prvočíslo tvaru $4k+1$. Dokážte, že rovnica $x^2 - py^2 = -1$ má aspoň jedno riešenie (x, y) v celých číslach.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Foto)
(*Podľa Ondra Budáča.*) V riešení využijeme nasledovnú *lemu: Pre každé prirodzené číslo n, ktoré nie je štvorec, má Pellova rovnica $x^2 - ny^2 = 1$ nekonečne veľa riešení v celých číslach.*
Dôkaz sa dá pozrieť v *ŠMM 49 - Řetězové zlomky.*
Tu je na mieste upozorniť vzácnych čitateľov, že po absorbovaní tohto poznatku je už dôkaz len relatívne jednoduchým cvičením z teórie čísel, preto by som ich chcel poprosiť, aby tento text odložili na spodok šuflíka a skúsili si úlohu doriešiť sami.
Nech (a, b) je najmenšie netriviálne riešenie rovnice $x^2 - py^2 = 1$ (rôzne od $(1, 0)$). Skúste si sami dokázať, že a nemôže byť párne. Potom už ľahko nahliadneme, že a musí byť nepárne a b párne. Označme teda $a = 2k + 1$

a $b = 2m$, kde k a m sú priodzené čísla. Platí:

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= pb^2 \\ (a-1)(a+1) &= pb^2 \\ 2k(2k+2) &= p(2m)^2 \\ k(k+1) &= pm^2 \end{aligned}$$

Čísla k a $k+1$ sú nesúdeliteľné, preto práve jedno z nich je deliteľné p. V prvočíselnom rozklade čísla m^2 má každé prvočíslo párny exponent a pre každé z týchto prvočísel s párnym exponentom platí, že je ním deliteľné práve jedno z čísel k, $k+1$. Teraz už vieme, že jedno z týchto čísel je štvorcom a druhé je p-násobkom štvorca. Existujú teda dve také prirodzené čísla c a d, že buď $k = c^2$ a $k+1 = pd^2$, alebo $k = pc^2$ a $k+1 = d^2$. V prvom prípade platí $c^2 - pd^2 = -1$. čiže sme dokázali, že existujú prirodzené čísla, ktoré sú riešením rovnice zo zadania. Druhý prípad šikovnejší čitateľ poľahky dovedie k sporu s predpokladom, že riešenie (a, b) rovnice $x^2 - py^2 = 1$ bolo najmenšie.

<u>Úloha č. 14:</u> *Ľubovoľný n-uholník P leží v rovine. Jeho strany sú označené $1, 2, \dots, n$. Nech $S = s_1, s_2, s_3, \dots$ je konečná alebo nekonečná postupnosť, pričom $s_i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Budeme preklápať mnohouholník P takto: najprv ho preklopíme okolo hrany s číslom s_1 (takže P v novej polohe je osovo súmerný s P v pôvodnej polohe podľa strany s_1), potom okolo hrany s číslom s_2 a tak ďalej.*

a) Dokážte, že existuje nekonečná postupnosť S taká, že keď podľa nej budeme preklápať P, tak každý bod v rovine bude aspoň raz zakrytý mnohouholníkom P.

b) Dokážte, že postupnosť S požadovaná v časti a) nemôže byť periodická.

c) Nech P je pravidelný päťuholník s polomerom opísanej kružnice rovným 1. Nech D je ľubovoľný kruh s polomerom $1,00001$ v rovine päťuholníka. Existuje konečná postupnosť S taká, že keď popreklápame P podľa S, bude päťuholník P celý ležať vnútri kruhu D?

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mazo)

Najprv sa zamyslime nad pár drobnosťami, ktoré sa môžu hodiť pri riešení tejto či inej úlohy.

- Každá konečná množina reálnych čísel má minimum. Nekonečná množina minimum mať nemusí, dokonca ani vtedy, keď je ohraničená zdola. Podobne to funguje pre maximum.
- Ku každej konečnej postupnosti S, podľa ktorej preklápame mnohouholník, existuje inverzná (označme ju S^{-1}); je ňou postupnosť S napísaná odzadu. Pri nekonečnej postupnosti S nemá zmysel hovoriť o inverznej postupnosti.
- Do postupnosti nemôžeme napchať príliš veľa členov. Predstavme si takýto postup: Vezmime si ľubovoľnú nekonečnú postupnosť S. Ak pokrýva všetky body, tak sme hotoví. Ak nie, tak ju skúsme opraviť. Pre každý nepokrytý bod nájdeme konečnú postupnosť S_i, ktorá ho pokryje. A stačí zobrať postupnosť S_i, S_i^{-1}, S; táto postupnosť už pokrýva aj ten pôvodne nepokrytý bod. Problém tohto postupu je v tom, že funguje len vtedy, keď je nepokrytých bodov konečne veľa. Čo sa stane, ak ich je nekonečne veľa? Skúste sa zamyslieť aj nad tým, či sa dajú usporiadať do postupnosti všetky reálne čísla.

Poďme sa pozrieť na samotné riešenie úlohy; využijeme niekoľko pekných nápadov *Ondra Budáča*.
Lema: Pre každý mnohouholník P existuje kladné číslo ε a konečná postupnosť S_ε taká, že keď popreklápame mnohouholník P podľa postupnosti S_ε, tak budú pokryté všetky body, ktoré sú vzdialené nanajvýš ε od obvodu mnohouholníka P.
Dôkaz: Označme hrany mnohouholníka $P = A_1A_2 \dots A_n$ zaradom číslami $1, 2, \dots, n$. Nech A_i je ľubovoľný vrchol mnohouholníka $P = A_1A_2 \dots A_n$. Nech ε_i je kladné číslo menšie než vzdialenosť najbližšieho vrchola mnohouholníka P od vrchola A_i. Potom kruh so stredom A_i a polomerom ε_i vieme pokryť nejakou konečnou postupnosťou S_i, stačí $\lceil 2\pi/\varphi \rceil$ preklopení, kde φ je vnútorný uhol mnohouholníka P pri vrchole A_i. Vezmime si ľubovoľnú hranu A_iA_{i+1} mnohouholníka P ($A_{n+1} = A_1$). Zrejme keď mnohouholník preklopíme podľa tejto hrany, bude pokrytý pás so šírkou $\varepsilon_{i,i+1} > 0$, pričom táto šírka je rovná vzdialenosti najbližšieho vrchola od hrany A_iA_{i+1}. Tento pás sa ťahá pozdĺž celej hrany, jediný problém môže byť v okolí vrcholov A_i, A_{i+1}, ale to nás netrápi, pretože tieto body pokryjeme spomínanými kruhmi. Vezmime si teraz najmenšie z čísel $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{1,2}, \dots, \varepsilon_{n,n+1}$ a označme ho ε. Z voľby čísel ε_j vyplýva, že teraz existuje postupnosť S_ε, ktorá pokryje všetky body vzdialené od mnohouholníka P nanajvýš ε. Dostaneme ju tak, že napíšeme zaradom postupnosti pre jednotlivé epsilony a za každou z nich aj zodpovedajúcu inverznú postupnosť, aby sme dostali P do pôvodnej polohy; $S = S_1S_1^{-1}S_2S_2^{-1} \dots 1122 \dots nn$.
a) Vezmime si množinu M bodov takých, že každý z nich sa dá pokryť konečnou postupnosťou. Táto množina je zjednotením množín pokrytých jednotlivými konečnými postupnosťami. Ak existuje v rovine bod, ktorý nepatrí do M, tak existuje aj bod, ktorý tiež nepatrí do M a pritom je vzdialený nanajvýš ε od nejakého vnútorného

bodu množiny M. To je však spor s lemou (rozmyslite si), preto množina M musí obsahovať všetky body roviny. Nech $\{S_1, S_2, \dots\}$ je množina konečných postupností. Potom postupnosť $S = S_1 S_1^{-1} S_2 S_2^{-1} \dots$ existuje a pokrýva celú rovinu, pretože pokrýva všetky body množiny M. Postupnosť S určite vieme zostrojiť, stačí do nej pridávať postupne všetky konečné postupnosti dĺžky 1, potom postupnosti dĺžky 2,… (zamyslite sa).
Možno sa vám nepáčil predošlý dôkaz časti a). Skúsime si preto skonštruovať hľadanú postupnosť S iným spôsobom. Vezmime si číslo ε z lemy a pravouhlú sieť mrežových bodov (k, l), kde k, l sú celé čísla, pričom jednotková úsečka (určená bodmi $(0, 0)$ a $(0, 1)$) má veľkosť ε. Túto sieť môžeme zvoliť tak, aby bod $(0, 0)$ ležal vnútri mnohouholníka P. Z lemy vyplýva existencia postupnosti S_ε takej, že po vykonaní tejto postupnosti budú pokryté body $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$. Po pokrytí týchto bodov sa presunieme pomocou časti postupnosti S_ε do bodu $(1, 0)$ a celé to zopakujeme. Potom sa posunieme do ďalšieho bodu… a takto pokračujeme ďalej, pričom sa pohybujeme po špirále, aby sme pokryli všetky mrežové body. Z lemy vyplýva, že ak mrežový bod je vnútorným bodom P, tak aj celý kruh s polomerom ε a stredom v tomto mrežovom bode vieme pokryť konečnou postupnosťou, preto sme pokryli celú rovinu, nakoľko je zjednotením týchto kruhov.
b) Nech takáto postupnosť je periodická s periódou p. Potom aj $2p$ je jej perióda, navyše párna, takže existuje taká konečná postupnosť T párnej dĺžky, že po aplikovaní T na mnohouholník P dostaneme s ním zhodný mnohouholník P'. Dvojica mnohouholníkov P, P' určuje zhodné zobrazenie, môže to byť buď otočenie, alebo posunutie (využívame, že postupnosť T má párnu dĺžku, čím vylúčime zloženie osovej súmernosti a otočenia alebo posunutia). V oboch týchto prípadoch je intuitívne jasné, prečo celú rovinu nepokryjeme, korektný dôkaz si skúste spraviť sami. Pomôže vám uvedomiť si, že pre každú konečnú postupnosť existuje kruh, mimo ktorého sú všetky body nepokryté.
c) Preformulujme si úlohu, možno to pomôže. Na dôkaz toho, že pravidelný päťuholník P s polomerom opísanej kružnice dĺžky 1 vieme popreklápať do kruhu k s polomerom $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), stačí dokázať, že jeho stred je od stredu K kruhu k vzdialený menej ako ε. Skúmajme teda stred (ťažisko) R päťuholníka P a skúsme zistiť, kam ho vieme preklápaním presunúť. Označme si strany A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 nášho päťuholníka P číslami 1,2,3,4,5. Postupnosť 2,5 nám posunie bod R v smere strany 1 o $a(3 + \sqrt{5})/2$ (nakreslite si to a zrátajte; a je dĺžka strany mnohouholníka). Postupnosť 2, 1, 5, 2, 1, 5 posunie bod R v smere strany 1 o $a(5 + \sqrt{5})/2$. Ukážeme, že z týchto dvoch posunutí (označme si ich v_1 a v_2) vieme zložiť ľubovoľne malé posunutie. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ položme $m_i = iv_2 - c_iv_1$, pričom číslo $c_i \in \mathbb{N}$ volíme tak, aby platili nerovnosti $0 < m_i < v_1$ (existencia čísla c_i vyplýva z toho, že $v_1 < v_2$ a z iracionality v_2/v_1). Ak pre nejaké $i \neq j$ platí $m_i = m_j$, tak z definície m_i, m_j máme

$$\begin{aligned} iv_2 - c_iv_1 &= jv_2 - c_jv_1 \\ (i - j)v_2 &= (c_i - c_j)v_1 \\ \frac{v_2}{v_1} &= \frac{c_i - c_j}{i - j}, \end{aligned}$$

to však hovorí, že v_2/v_1 je racionálne číslo, čo je spor. Preto všetky m_i sú navzájom rôzne. Rozdeľme interval $\langle 0; v_1\rangle$ na $n - 1$ rovnakých intervalov

$$\left\langle 0;\ \frac{1}{n-1}v_1 \right\rangle, \quad \left\langle \frac{1}{n-1}v_1;\ \frac{2}{n-1}v_1 \right\rangle, \quad \dots, \quad \left\langle \frac{n-2}{n-1}v_1;\ v_1 \right\rangle.$$

Z *Dirichletovho princípu* vyplýva, že v aspoň jednom z týchto intervalov ležia aspoň dve z čísel m_i; nech sú to BUNV m_i a m_j. Potom vieme nejakou konečnou postupnosťou posunúť bod R v smere strany 1 o $d = |m_i - m_j| < v_1/(n-1)$. Zrejme pre všetky čísla $\varepsilon > 0$ vieme zvoliť n tak, aby bolo $d < n$.
Analogická úvaha sa dá spraviť aj pre posunutia v smere strany 2 a s týmto už vieme dokončiť dôkaz tvrdenia c), stačí si uvedomiť, že pre ε, ktoré je určené polomerom kruhu k, môžeme spraviť sieť bodov $(r\varepsilon, s\varepsilon)$, kde r a s sú celé čísla, $(0, 0) = R$, priamka určená bodmi $(0, 0)$ a $(\varepsilon, 0)$ je rovnobežná so stranou 1 a priamka určená bodmi $(0, 0)$ a $(0, \varepsilon)$ je rovnobežná so stranou 2. Zrejme pre ľubovoľnú polohu bodu K je tento bod vzdialený nanajvýš ε od nejakého bodu našej siete.