Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série letného semestra 2005/2006

Úloha č. 1:

V tomto obdĺžniku je práve jedno nepravdivé tvrdenie.
V tomto obdĺžniku sú práve dve nepravdivé tvrdenia.
V tomto obdĺžniku sú práve tri nepravdivé tvrdenia.
⋮
V tomto obdĺžniku je práve 2005 nepravdivých tvrdení.
V tomto obdĺžniku je práve 2006 nepravdivých tvrdení.

Koľko z tvrdení v obdĺžniku je pravdivých?

Riešenie: (opravoval Buggo)
Pozrime sa najprv na tvrdenia v obdĺžniku. Každé obsahuje slovíčko *práve*. Čo znamená toto slovíčko? Keď mám práve päť cukríkov, tak ich nemám ani menej, ani viac. To znamená, že ak je pravdivé jedno tvrdenie, nemôže byť pravdivé žiadne iné. To preto, lebo všetky tvrdenia sa líšia v čísle, ktoré nasleduje za slovkom *práve*.
Z toho vyplýva, že bude pravdivé buď jedno, alebo žiadne tvrdenie. Ak by nebolo pravdivé ani jedno, boli by všetky nepravdivé. Avšak práve toto tvrdí posledné z nich: *V tomto obdĺžniku je práve* 2006 *nepravdivých tvrdení.* Takže by to znamenalo, že toto tvrdenie je pravdivé. To je ale riadna hlúposť, veď malo byť nepravdivé! Dospeli sme teda k sporu a náš predpoklad, že ani jedno tvrdenie nie je pravdivé, bol nesprávny.
Čo by sa stalo, keby bolo pravdivé len jedno tvrdenie? Zvyšných 2005 tvrdení by bolo nepravdivých. Presne toto ale tvrdí 2005. tvrdenie. To znamená, že *práve* toto tvrdenie je pravdivé. (A teda je jediné.) V obdĺžniku je preto napísané práve jedno pravdivé tvrdenie.

Úloha č. 2: *Zistite, aká číslica bude na* 7 000. *mieste za desatinnou čiarkou v desatinnom zápise čísla* $1/7\,000$.

Riešenie: (opravovali Lucia a Čermo)
Mnohí z vás sa do tohto príkladu pustili priamym počítaním čísla $1/7\,000$. Sledujme aj my túto stopu a uvidíme, či nám vnesie trochu svetla do celého problému. Berieme do ruky papier a pero (ak ťa zaujíma, prečo je to niekedy lepšie ako kalkulačka, pozri si poznámku) a delíme. Dopracujeme sa takto k číslu $0,0001428571428571\ldots$ Vidíme, že vo výsledku, ktorý sme dostali, sa po chvíľke začnú opakovať rovnaké cifry v rovnakom poradí. Znova a znova postupnosť cifier 142857. Dokedy to pôjde takto ďalej? Keď pokračujeme v delení a rozpisovaní desatinného zápisu, opäť sa nám objaví tá istá postupnosť cifier. Pomaly už aj tí menej dôverčiví z nás začínajú byť pevne presvedčení o tom, že postupnosť cifier 142857 sa bude v desatinnom zápise opakovať navždy a nič iné v ňom už nenájdeme. O tom, že to tak naozaj je, si povieme o chvíľu.
Ak to naozaj platí pre celý desatinný rozvoj, ľahko určíme, že cifra na 7 000. mieste je 1. Vieš aj ty, prečo je to tak? Teraz sa pozrime na to, či sa postupnosť cifier 142857 bude naozaj už navždy opakovať a nikdy sa nezmení. Všimnime si, ako sa pri čiastočnom delení menia zvyšky. Tie na začiatku $(1, 10, 100)$ sú pre nás nezaujímavé, len pridávame 0, aby sme sa konečne dostali k číslu väčšiemu ako 7 000. A teraz už konečne prídu nejaké väčšie, sú to 1 000, 3 000, 2 000, 6 000, 4 000 a 5 000. Tieto boli všetky rôzne, no po 5 000 dostaneme zvyšok 10 000 a my už teraz vieme povedať, čo za ním bude nasledovať, pretože s týmto číslom urobíme počas delenia presne to, čo sme urobili s predchádzajúcou 1 000-kou. A takto to už pôjde dookola ďalej. Zvyšky po delení aj cifry 142857 v podiele sa budú periodicky opakovať.
To, že sa budú cifry 142857 donekonečna opakovať, vieme ukázať aj iným, pre mnohých z vás iste menej známym, no o to zaujímavejším spôsobom. Ukážeme, že čísla $0,000\overline{142857}$ (pruh znamená opakovanie periódy) a $1/7\,000$ sú si rovné. Pozrime sa na číslo 142857. Vieme ho nejak vyčarovať z čísla $0,000\overline{142857}$? Označme si kvôli prehľadnosti $a = 0,000\overline{142857}$? Číslo 10^9a je už len kúsok od toho, čo chceme dostať. Od čísla 142857 je väčšie o $0,\overline{142857}$, tak odpočítajme túto desatinnú časť. Môžeme ju zapísať ako 10^3a. Potom vieme číslo 142857 zapísať ako rozdiel výrazov 10^9a a 10^3a a môžeme ho ďalej takto upraviť:

$$
\begin{aligned}
10^9a - 10^3a &= 142857 \\
999999000a &= 142857 \\
a = \frac{142857}{999999000} &= \frac{1}{7000}.
\end{aligned}
$$

Tým sme ukázali, že číslo a, ktoré má nekonečný periodický rozvoj s periódou 142857 (tak sme ho „vytvorili"), je naozaj rovné číslu 1/7000 a dôkaz sme ukončili.

Komentár: Na záver sa ešte pár slovami vrátime k vašim riešeniam a spôsobu ich hodnotenia. Mnohí z vás pri riešení nepovažovali za potrebné objasňovať rovnosť $1/7000 = 0,000\overline{142857}$. Ako ste si všimli, táto úloha v postate pozostávala z dvoch častí, prísť na spomínanú rovnosť a pomocou nej určiť 7000-u cifru daného čísla. Vidíme teda, že celý príklad stojí (aj) na správnom určení desatinného rozvoja čísla 1/7000. Z toho dôvodu nestačilo tento rozvoj v riešení len spomenúť, ale bolo treba aj ukázať, že je skutočne taký. Riešenia sme hodnotili adekvátne podľa toho, ako boli jednotlivé úvahy zdôvodňované. Rada do budúcnosti: ak si v nejakom príklade nebudete istí, či treba dokazovať nejaké tvrdenie, ktoré hrá v postupe význam, radšej ho dokážte, isto tým nič nepokazíte a snáď prídete aj na nejaké zaujímavé myšlienky.

Poznámka: Kalkulačka nám vie častokrát urýchliť počítanie s číslami, no musíme vedieť kedy, ako a či sa na ňu môžeme stopercentne spoľahnúť. Vezmime si napríklad také π. Už sme sa s ním párkrát stretli a vieme, že jeho desatinný zápis sa nevojde na displej žiadnej kalkulačky. Napriek tomu na väčšine z nich nájdeme tlačítko π a kalkulačka s ním veselo počíta. Pamätá si totiž len časť z tohto čísla. Ak potrebujeme číselný vysledok, často nám postačí π s takou presnosťou, ako si ho pamätá. To isté robí kalkulačka pri delení, ak je výsledkom číslo s veľkým počtom desatinných miest. Zaokrúhli toto číslo a môže nás doplieť.

Úloha č. 3: *Nájdite najmenšie číslo deliteľné číslom* 12*, ktoré sa v desiatkovej sústave dá zapísať pomocou piatich jednotiek a ľubovoľného počtu číslic* 0 *a* 3*.*

Riešenie: (opravovala Lucy)

V tejto úlohe sme hľadali číslo deliteľné 12-timi. Mnohí z vás sa zamerali na kritérium deliteľnosti 12-timi, ktoré vraví, že dané číslo musí byť deliteľné tromi aj štyrmi. Niektorí použili len tú jeho časť, ktorá vraví, že ak má byť číslo deliteľné 12-timi, určite bude deliteľné aj tromi. Tak či onak, pozrieme sa na to, čo musí platiť pre deliteľnosť tromi. Vieme, že deliteľné tromi sú práve tie čísla, ktoré majú aj ciferný súčet deliteľný tromi. Číslo, ktoré vyhovuje nášmu zadaniu, má pozostávať z piatich jednotiek, niekoľkých núl a niekoľkých trojok, preto bude jeho ciferný súčet rovný $5 \cdot 1 + a \cdot 0 + b \cdot 3 = (1 + b) \cdot 3 + 2$. Z tohto zápisu už vidíme, že nech budeme k piatim jednotkám pridávať ľubovoľne veľa núl alebo trojok, ciferný súčet nebude nikdy deliteľný tromi. Neexistuje číslo deliteľné tromi vyhovujúce zadaniu (deliteľnosť štyrmi ani nepotrebujeme overovať). A už je zrejmé, že neexistuje ani žiadne číslo deliteľné 12-timi, teda ani najmenšie.

Komentár:

Mnohí z vás zvládli úlohu bravúrne, no napriek tomu sa našli niekoľkí, ktorých trochu poplietla. Dajte si pozor, aby ste si nemýlili zápis v desiatkovej sústave s rozvinutým zápisom čísla v desiatkovej sústave. Podaktorí tiež skúmali nielen deliteľnosť tromi, ale aj štyrmi, a takto zistili, že posledné dvojčíslie musí byť 00. To vôbec nie je na škodu. Tých, čo skúmali len deliteľnosť dvoma, chcem upozorniť, že ak by nám táto úloha „nekrachla" na deliteľnosti tromi, tak na riešenie by to nestačilo. A skúste sa ešte zamyslieť nad tým, prečo platí kritérium deliteľnosti tromi. To by už bolo z mojej strany všetko.

Úloha č. 4: *Na obvode kruhu je pravidelne rozmiestnených* 100 *bodov. Niektorých* 50 *z nich je zafarbených na červeno, zvyšných* 50 *na modro. Pri ľubovoľnom zafarbení bodov platí, že počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy sú červené, je rovnaký, ako počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú modré. Dokážte.*

Riešenie: (opravovali Lenka a Mazo)

Aby sme dostali pravouhlý trojuholník na kružnici, tak musia dva z jeho vrcholov tvoriť priemer kružnice. Kde už leží tretí bod, na tom nám nezáleží – trojuholník vytvorený z dvoch bodov na priemere a nejakého ďalšieho bude určite pravouhlý. Keďže bodov máme na kružnici párny počet a sú rozmiestnené pravidelne, každý z nich má oproti sebe práve jeden bod, s ktorým vytvára priemer.

Máme 50 modrých a 50 červených bodov. Ku každej dvojici bodov rovnakej farby tvoriacich priemer máme ešte ďalších 48 bodov tejto farby. Každý z tých 48 bodov nám spolu so spomínaným priemerom vytvorí jeden pravouhlý trojuholník. Takže počet pravouhlých trojuholníkov je určený počtom dvojíc bodov rovnakej farby tvoriacich priemer. Dôležité je, že v každom trojuholníku môže priemer našej kružnice tvoriť iba jedna strana.

Z predchádzajúcich úvah je jasné, že počet červených trojuholníkov (majú všetky vrcholy červené) je rovný počtu modrých trojuholníkov iba vtedy, keď je „modrých" priemerov rovnako veľa ako „červených priemerov". Ukážeme niekoľko rôznych dôkazov toho, že červených a modrých priemerov je rovnako veľa.

Priemery vieme rozdeliť do troch skupín: červené, modré a dvojfarebné. Nech dvojfarebných priemerov je k. Tieto dvojfarebné priemery obsahujú k červených a k modrých bodov. Preto ostáva $50 - k$ bodov tvoriacich červené priemery a $50 - k$ bodov tvoriacich modré priemery. Keďže každý jednofarebný priemer je tvorený dvoma bodmi rovnakej farby, musí byť počet červených aj modrých priemerov rovný $(50-k)/2$. (Z tohto navyše vyplýva, že počet dvojfarebných priemerov je párny.)

Iné riešenie:

Vieme nájsť aspoň jeden prípad, keď máme rovnako veľa červených aj modrých priemerov? Jedno také zafarbenie vyzerá tak, že všetky modré body sú vedľa seba, takisto červené. V tomto prípade nemáme žiadne jednofarebné priemery.

Predstavme si nejaké zložitejšie zafarbenie. Vieme prefarbovaním bodov dosiahnuť toto zafarbenie zo zafarbenia uvedeného vyššie? Samozrejme, pri prefarbovaní nesmieme porušiť rovnosť medzi počtom červených a modrých priemerov.
Je rovnako veľa modrých a červených bodov. Túto rovnováhu najľahšie zachováme tak, že pri prefarbovaní vezmeme jeden modrý bod, jeden červený bod a naraz zmeníme ich farbu na opačnú. Tieto body sú súčasťou nejakých dvoch priemerov, označme tieto priemery AB a CD, vymieňame body A a C. (Kreslite si obrázok.) Toto označenie môžeme zvoliť tak, že bod A je červený a bod C modrý. Ak body B a D majú rovnakú farbu, tak nič výmenou farby A a C nedosiahneme. Ostali teda dve možnosti:

1. Bod B je modrý. Potom D je červený. V tejto situácii priemery AB aj CD sú rôznofarebné. Vymeňme farbu A a C. Potom AB bude modrý priemer a CD bude červený priemer. Tým sa počet modrých aj červených priemerov zvýšil o jedna.

2. Bod B je červený. Potom bod D je modrý. Keď vymeníme farbu bodov A a C, tak ubudne jeden modrý priemer a jeden červený priemer.

Čo sme zistili? Rovnováha počtu červených a počtu modrých priemerov sa výmenou farby bodov A a C nezmenila. Táto úvaha funguje pre ľubovoľné body A a C. Preto si môžeme zvoliť ktorékoľvek dva body na kružnici a vymeniť ich farbu. Konečným počtom takýchto výmen vieme dosiahnuť ľubovoľné ofarbenie, premyslite si, ako.
A keďže po každej výmene sa zachováva rovnováha medzi počtom červených a modrých priemerov, bude to platiť aj na konci.

<u>Iné riešenie:</u>
Dokážeme, že červených a modrých priemerov je rovnako veľa. Máme 50 priemerov, z ich krajných bodov je 50 bodov modrých a 50 bodov červených. Vezmime si nejaký červený priemer AB (ak neexistuje, skončili sme, lebo máme 0 modrých a 0 červených priemerov). Okrem neho máme na kružnici ešte 49 ďalších priemerov. Mohlo by sa stať, že medzi nimi nie je žiaden modrý priemer? V tom prípade každý z tých 49 priemerov má aspoň jeden krajný bod červený. Potom by sme ale museli mať aspoň 51 červených bodov (dva z priemeru AB a aspoň jeden z každého ďalšieho priemeru). To je však spor so zadaním, červených bodov je iba 50.
Týmto sme dokázali, že na kružnici je aspoň jeden modrý priemer. Dajme preč jeden červený priemer a jeden modrý priemer. Ostalo 48 priemerov. Z ich krajných bodov je 48 červených a 48 modrých. Sme teda v takej situácii ako na začiatku. Ak máme červený priemer, tak aj modrý a oba môžeme dať preč. Zrejme raz skončíme a nebudeme mať ani jeden jednofarebný priemer. Keďže ku každému červenému priemeru sme vždy našli jeden modrý, musí ich byť rovnako veľa.
Úvaha, ktorú sme použili v tomto riešení, sa nazýva *Dirichletov princíp*. Vo všeobecnosti ho môžeme sformulovať takto: Máme m priehradiek a $m+1$ guľôčok. Keď dáme všetky guľôčky do priehradiek, v aspoň jednej priehradke budú aspoň dve guľôčky. Rozmyslite si, prečo je to tak. A kde môžeme tento princíp použiť v riešení? Máme 49 priemerov a 50 modrých bodov. Všetky modré body sú koncovými bodmi našich priemerov a preto aspoň jeden priemer má oba koncové body modré. Hotovo.
Skúste vyriešiť túto úlohu: V triede je 27 žiakov. Dokážte, že medzi nimi vždy vieme nájsť troch, ktorí majú narodeniny v ten istý mesiac.

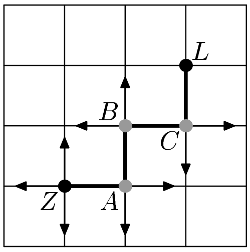
<u>**Úloha č. 5:**</u> *Aďka sa po sústredení rozhodla, že chce domáce zvieratko a kúpila si žabičku. Aby sa žabička nenudila, nakreslila jej na stôl mrežovú sieť a žabku položila do jedného z mrežových bodov. Do bodu, ktorý je o dva body vpravo a o dva body hore od žabičky, Aďka položila lentilku. Pre žabky je lentilka veľká pochúťka, preto sa čoskoro vydá ju zjesť. Žabička sa vie medzi mrežovými bodmi pohybovať iba tak, že skočí o jeden bod hore, dole, doprava alebo doľava. K lentilke sa chce dostať po presne šiestom skoku (nie skôr), pričom jej nevadí, ak medzi niektorými dvomi bodmi skočí viackrát. Pomôžte Aďkinej žabke zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať k pochúťke.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Tina a Miťo)
Rozdeľme si cesty, ktorými sa žabička mohla vydať, na dve veľké skupiny. V prvej skupine budú cesty, na ktorých žabička skočí na niektorý mrežový bod viac než raz a v druhej budú tie, na ktorých skočí na každý bod práve raz.

1. skupina:
Už sme si povedali, že najkratšie cesty sú dlhé 4 skoky. Predstavme si, že si žabička vyberie jednu z týchto ciest a skacká po nej. Zrazu sa však v jednom mrežovom bode pomýli a vyberie sa iným smerom ako pôvodne mala. Našťastie si po chybnom skoku uvedomí, čo urobila a hneď v ďalšom skoku sa vráti späť. Potom pokračuje po ceste, ktorú si vybrala. Cesta, ktorú takto žabička prešla, má dĺžku 6 skokov a na bod, v ktorom sa pomýlila, skočila dvakrát. Keby žabka odbočila z najkratšej cesty viackrát, dĺžka prejdenej cesty by bola väčšia ako 6. Tiež keby sa žabka ihneď nevrátila, tak buď by jej cesta k lentilke zabrala viac ako 6 skokov, alebo by neskočila na niektorý bod viackrát. Dobre, teraz ešte potrebujeme zistiť, koľkými spôsobmi si žabička takto môže odskočiť. Aby sme pracovali trošku systematicky, rozdelíme si odskoky na niekoľko druhov. Aby sme ich vedeli pekne popísať, vyberme si jednu z ciest medzi žabkou a lentilkou, ktorá je dlhá štyri skoky, a chvíľu sa rozprávajme iba o tejto jednej ceste.

a) Prvá možnosť je, že žabička skacká po svojej ceste, jeden skok spraví späť v smere cesty a potom pokračuje podľa pôvodného plánu. Porozmýšľajme, na koľkých miestach sa žabka môže vrátiť. (Bolo by skvelé, keby ste mali niekde po ruke nakreslený vlastný obrázok žabičky :), lentilky a hlavne mrežovej siete, po ktorej žabička skáče. Do tohto obrázku si treba veľa kresliť a sledovať na ňom, ako úlohu riešime.) Dvakrát môže spraviť niektorý z troch skokov na ceste, ten posledný už nie, pretože by žabka skočila k lentilke skôr ako na šiesty skok. Spolu má teda žabka v tomto prípade 3 možnosti, ako si odskočiť mimo cesty.

b) Uvažujme teraz vybočenia mimo cestu, ktorú si žabička vybrala. V bode Z má žabka na výber tri smery, ktorými si môže odskočiť (pozri si obrázok). V bodoch A, B a C má vždy dve možnosti, pretože dvojnásobné skoky v smere cesty sme už zarátali. Toto spolu dáva 9 možností.
Máme teda dvanásť spôsobov, ako možno zmeniť jednu z ciest od žabičky k lentilke. Vieme, že takýchto ciest je 6, čo nám spolu dáva $6 \cdot 12 = 72$ spôsobov, ako sa žabka môže dostať k lentilke. Na záver tejto časti treba spomenúť, že ciest je naozaj toľko, pretože sme žaidnu nezarátali dvakrát – zaručuje to spôsob, akým sme ich vytvárali.



2. skupina:
Tu to budeme mať trochu ťažšie, pretože v tejto skupine je síce menej ciest, ale zároveň sa nedajú popísať tak dobre a prehľadne ako cesty v prvej časti. Treba mať na pamäti, že všetky cesty, ktoré uvažujeme v tejto časti, neprechádzajú cez žiadny bod dvakrát. Celú situáciu si uľahčime tým, že si budeme všímať iba cesty, ktorých prvý skok je smerom doprava, alebo smerom dole. Takto získané číslo prenásobíme dvomi, pretože cesty, ktoré začínajú skokom doľava, alebo hore, sú zrkadlovým obrazom tých ostatných. (Os súmernosti prechádza bodom s lentilkou a bodom, na ktorom začínala svoju púť žabička.) Najprv spočítajme cesty, ktoré nevychádzajú zo štvorca 2×2 určeného žabkou a lentilkou. Takéto cesty sú iba dve a nie je ťažké ich nakresliť. (Určite si to skúste.)
Poďme teraz na tie, ktoré zo spomínaného štvorca vychádzajú. Ak žabka skočí dole, musí hneď potom skočiť doprava, pretože inak by to na šesť skokov k lentilke nestihla, alebo by na niektorý bod skočila viackrát. Teraz má žabka ešte štyri skoky a musí skočiť raz doprava a trikrát hore, aby sa dostala k lentilke. Doprava sa môže posunúť prvým, druhým tretím alebo štvrtým skokom. To sú zatiaľ štyri riešenia.
Čo ak skočí žabička v prvom skoku doprava? Má ešte päť skokov, kam všade môže skočiť v nasledujúcom? Dole, doprava alebo hore. Rozoberme si pozorne každú z týchto možností. Ak skočí teraz dolu, dostane sa na to isté miesto ako v predchádzajúcom odstavci, len z druhej strany. (Kreslíte si?) Jediný smer, ktorým sa môže vydať ďalej je doprava a odtiaľ stále hore až k lentilke. To máme ďalšiu možnosť.
Ak skočí žabka v druhom skoku hore, bude od lentilky na dva skoky. No ona potrebuje urobiť skoky štyri. Naspäť skočiť nesmie. Ak by skočila doľava, preskákala by cestu, ktorá nevybočí zo štvorca 2×2 a tú už sme zarátali, takže zasa nič. Ostali nám už voľné len smery doprava a hore. Opäť sa na chvíľu pristavme a situáciu si rozoberme. Ak žabka skočí doprava, bude rovno pod lentilkou a zostávajú jej ešte tri skoky, počas ktorých musí vyjsť z malého štvorca. Zrejme má teda iba jednu možnosť – jeden skok doprava a potom, keďže sa nemôže vrátiť, hore a doľava. Ak v momente, keď sme sa pristavili, skočí žabka hore, doľava ísť nemôže. (Pretože by nesplnila jednu z podmienok, ktoré nám medzičasom pribudli: žabička musí vyjsť z štvorca 2×2 a nesmie na jeden bod skočiť viackrát.) Zrejme nemôže ísť ani doprava, pretože by k lentilke prišla skôr ako po šiestom skoku. Ostáva jej teda iba cesta hore, pričom pokračovanie je už jedoznačné: doprava a dolu.
A ak by žabka skočila druhým skokom opäť doprava? Chceme spočítať tie možnosti, čo sú mimo štvorca 2×2, no doteraz žabička nevyskočila. Pozrime sa, ako to napraviť. Rozmyslite si, prečo žabka nemôže skočiť dolu a musí zo štvorca vybočiť niekde vpravo. Má tri možnosti na to, ako to spraviť, líšia sa tým, ako medzi ne rozmiestnime skoky hore. (Určite medzi nimi musí byť aspoň jeden taký skok.)
Počet ciest, na ktorých skočí žabička práve raz na každý mrežový bod je teda dokopy $(2 + 3 + 3 + 4) \cdot 2 = 24$. Spolu sme teda našli 96 spôsobov, akými môže žabička doskákať k lentilke. Si celkom má z čoho vyberať, že?

<u>Iné riešenie:</u>
Jeden z možných postupov pri riešení kombinatorických úloh je nájsť počet všetkých možností, a potom od nich odrátať tie, ktoré nám nevyhovujú. V našom prípade to bude znamenať zistiť počet všetkých ciest, ktoré žabičku na šesť skokov dovedú k lentilke, a potom od nich odrátať počet tých, ktoré sa dostanú k lentilke aj skôr.
Aby žabka po šiestich skokoch skončila pri lentilke, musí skočiť dvakrát hore, dvakrát doprava a použiť ešte dvojicu skokov, po ktorých ostane na tom istom mieste, teda doprava a doľava, alebo hore a dole. Ak budeme smery označovať šípkami, žabičkinu trasu bude tvoriť nejaké poradie šípok $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rightarrow\rightarrow$, resp. $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow\uparrow\uparrow$. Nie je ťažké uvedomiť si, že všetkých ciest pre žabku bude presne toľko, koľko je rôznych usporiadaní týchto šestíc šípok. Poďme tento počet zistiť, najprv pre prvú šesticu. Začneme tým, že si vyberieme, na ktorom mieste bude $\downarrow$. Takáto šípka je iba jedna a preto je šesť možností, na ktoré miesto ju môžeme dať. Pre každé z týchto umiestnení teraz uložme dve šípky $\rightarrow$, vieme to spraviť vždy desiatimi spôsobmi, nie je tažké ich všetky vypísať. No a šípky $\uparrow$ budú na zvyšných miestach. Spolu máme teda $6 \cdot 10 = 60$ možností, ako zoradiť tieto šípky. (Podobná úvaha sa dá spraviť aj pre väčšie počty šípok a to aj bez vypisovania. Ak ťa to zaujíma, pozri si komentár.)
Teraz od tohto počtu treba odrátať počet spôsobov, pri ktorých je žabka pri lentilke skôr ako po šiestom skoku. Zrejme sa k lentilke nevie dostať skôr ako na štvrtý skok a ani na päť skokov (toto si skúste rozmyslieť), musí sa teda štyrmi skokmi dostať k lentilke, potom si odskočiť a zase sa vrátiť. Preto musí najprv použiť skoky $\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$ v ľubovoľnom poradí, týchto poradí je 6. (Napr. si ich vypíšte, alebo spočítajte spôsobom, ktorý uvádzame

v komentári.) Posledné dva skoky budú ↑↓ tiež v ľubovoľnom poradí, takéto usporiadania sú dve. Spolu teda máme $6 \cdot 2 = 12$ poradí skokov, pri ktorých sa žabka dostane k lentilke skôr ako na šesť skokov, čo nám po odrátaní od všetkých možností dáva 48 spôsobov pre žabičku.
Pre poradie šípok →→→←↑↑ je situácia takmer rovnaká a výsledok ten istý, pretože dôležité sú počty jednotlivých typov šípok, nie to, aké tie typy sú. Spolu teda máme pre žabku opäť 96 možností.

Komentár: Keď si šípky rovnakého typu očíslujeme, vieme počet všetkých usporiadaní zistiť ako počet permutácií.[1] Nech bolo napr. šípok typu ↑ sedem, mali teda rôzne čísla od jedna do sedem. Všetky poradia, ktoré sa líšili iba poradím očíslovaných šípok ↑, dávali to isté poradie po zmazaní očíslovania. A koľko je poradí s očíslovanými šípkami ↑? Áno, je ich $7 \cdot 6 \cdots 1 = 5040$. Podobný postup zopakujeme aj pre ostatné druhy šípok a máme hľadaný počet.

Úloha č. 6: *Dvaja hráči hrajú takúto hru: Na tabuli sú napísané dve čísla, napríklad* 144 *a* 15*. Hráči sa striedajú v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, si vyberie nejaké dve (rôzne) čísla na tabuli a pripíše nové, ktoré je ich rozdielom (tým kladným rozdielom, záporné čísla sa na tabuľu nepíšu), pričom to nové číslo musí byť rozdielne od všetkých, ktoré už sú na tabuli. Takto hráči ťahajú, až kým jeden z nich nemôže pripísať na tabuľu žiadne nové číslo. Hráč, ktorý nemôže potiahnuť, prehral. Popíšte, ako má ťahať prvý hráč, aby vyhral, ak na začiatku sú na tabuli napísané čísla*
a) 17 *a* 4*,*
b) 102 *a* 201*.*

Riešenie: (opravovali Katka a Zuzka)
S touto úlohou sa stačí troška pohrať a výsledok tak nejako „vyskočí“ sám. Prvý hráč vyhrá v oboch prípadoch, nech ťahá akokoľvek.[2] Prečo je to ale tak? Vyhrá pri ľubovoľnej počiatočnej dvojici čísel na tabuli?
Zhrňme si, čo vieme povedať o číslach, ktoré hráči píšu. Sú kladné, pretože 0 je rozdielom dvoch rovnakých čísel, rovnaké čísla ale na tabuli nemôžeme mať, preto 0 v tejto hre nikdy nedostaneme a záporné čísla podľa zadania nepíšeme. Ďalej vieme, že všetky čísla, ktoré hráči počas hry budú písať na tabuľu, sú menšie ako väčšie z počiatočných čísel (napr. pre čísla 17 a 4 vieme povedať, že všetky dalšie čísla budú menšie ako 17). Táto úvaha je jednoduchá. Ak totiž od čísla odčítame kladné číslo, jeho hodnotu zmenšíme.
Všimnime si ďalej, že ak na začiatku hry máme čísla 17 a 4, hráčom sa podarí napísať na tabuľu všetky prirodzené čísla menšie ako 17. Keď ale začneme s číslami 102 a 201, nepodarí sa nám to, ani keby sme sa potrhali :). Prečo je to tak? Finta je v tom, že čísla 102 a 201 sú súdeliteľné; ich najväčším spoločným deliteľom je číslo 3.
Majme dve ľubovoľné kladné celé[3] čísla m, n a označme ich najväčší spoločný deliteľ d. Keďže obe čísla m a n sú jeho násobkom, môžeme ich vyjadriť ako násobok tohto (najväčšieho spoločného) deliteľa ako $m = k \cdot d$, $n = l \cdot d$, kde k aj l sú nejaké celé čísla. Potom platí

$$m - n = k \cdot d - l \cdot d = (k - l) \cdot d,$$

a keďže $k-l$ je rozdielom dvoch celých čísel, je to tiež celé číslo. To znamená, že rozdiel $m-n$ je tiež deliteľný číslom d. Z týchto úvah vyplýva, že odčítaním dvoch čísel dostaneme vždy číslo deliteľné ich najväčším spoločným deliteľom.
Tento poznatok súvisí s tzv. Euklidovým algoritmom. Vysvetlime si, čo to vlastne je. Euklidov algoritmus je postup, ktorým možno pomerne ľahko nájsť najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel. Namiesto prvočíselného rozkladu (ktorý vie byť pri veľkých číslach riadna potvora) využíva práve to, že odčítaním dvoch čísel vždy dostaneme násobok ich najväčšieho spoločného deliteľa. Ako tento postup vyzerá? Na začiatok si vezmime dve celé čísla m, n, pričom nech $m > n$. Najprv vypočítame rozdiel $m - n$. Ak je výsledok väčší ako číslo n, opäť odrátame n, teda dostaneme $m - 2n$. Tento postup opakujeme až dovtedy, kým nedostaneme číslo menšie ako n, označme ho z. Pripomeňme si, že číslo z je deliteľné najväčším spoločným deliteľom čísel m a n. Teraz vezmime čísla n a z a aplikujme na ne predchádzajúci postup. Zisťujme rozdiely $n - z$, $n - 2z, \ldots$, až kým nezískame číslo menšie alebo rovné ako z, a pokračujme podobne ako predtým. Takýmito krokmi dostávame stále menšie čísla, pričom pre ne platí, že sú deliteľné najväčším spoločným deliteľom čísel m a n – po konečnom počte krokov sa dopracujeme práve k tomuto deliteľu.
Čo to znamená pre náš príklad? V prípade a) máme dve nesúdeliteľné čísla. Z predchádzajúcich úvah výplýva, že sa vieme dostať k ich najväčšiemu spoločnému deliteľu, k číslu 1. Potom si stačí uvedomiť, že ak máme na tabuli napísané číslo 1, vieme v našej hre dostať ľubovoľné prirodzené číslo menšie ako 17. Koľko takých čísel vieme ešte napísať? Čísla 17 a 4 sme mali už na začiatku, teda čísel, ktoré môžeme dopísať, je $17 - 2 = 15$. Toto číslo je nepárne a teda vyhrá prvý hráč bez ohľadu na to, ako bude hrať. V prípade b) máme dve súdeliteľné čísla, pričom ich najväčším spoločným deliteľom je číslo 3. Euklidovým algoritmom vieme na tabuli dostať číslo 3. Treba si uvedomiť, že je to najmenšie číslo, ktoré na tabuľu môžeme napísať (1 a 2 už nie sú deliteľné tromi) a že okrem neho vieme napísať všetky násobky 3 menšie ako 201. Tých je $201/3 = 67$. Čísla 201 a 102 sme mali na tabuli na začiatku, preto pripíšeme ešte $67 - 2 = 65$ čísel, čo je opäť nepárne číslo, a preto prvý hráč opäť vyhrá.

[1] t.j. všetkých zoradení, pri ktorých použijeme všetky šípky
[2] Takýto výsledok sa nikdy nezjaví sám od seba. S úlohou sa treba trochu pohrať, skúsiť si niekoľko hier, rôzne spôsoby ťahania hráčov. A keď do úlohy už trochu „vidíme“, máme tendenciu si o jednom z možných výsledkov myslieť, že je viac pravdepodobný ako tie ostatné; v tomto prípade si myslíme, že hra pre naše konkrétne čísla skončí víťazstvom prvého hráča.
[3] Postup funguje aj pre záporné čísla, ale pre kladné je trochu názornejší.

Zaujímavé a pekné na tejto úlohe je uvedomiť si, že ak sa k nejakému číslu vieme dostať nejakou postupnosťou ťahov (teda existuje v našej hre „cestička“ k tomuto číslu), tak sa hráči k tomuto číslu určite dostanú. Hra sa totiž končí práve vtedy, keď sa už žiaden ťah urobiť nedá. To znamená, že hráči urobili všetky ťahy, ktoré boli možné, a teda prešli aj našu „cestičku“. To je super! Práve sme zistili, že bez ohľadu na to, ako budú hráči hrať, nakoniec bude na tabuli napísaná tá istá množina čísel a hra sa skončí po rovnakom počte ťahov (pre danú počiatočnú dvojicu čísel). A to je presne ten dôvod, prečo je jedno, ako bude prvý hráč hrať.

Komentár: Väčšina z vás si s úlohou poradila pekne. Asi najväčším problémom bolo to, že viacerí z vás neuvažovali o tom, že 3 je najväčším spoločným deliteľom čísel 102 a 201, ale iba prehlásili, že obe čísla sú deliteľné 3. Skúste ale porozmýšľať, prečo takéto vyhlásenie nestačí. Vezmime si napríklad čísla 18 a 12. Obe sú deliteľné 3, je ale zrejmé, že v našej hre by sme pri takýchto počiatočných číslach nikdy nenapísali 3 na tabuľu. Je to tak preto, že ich najväčším spoločným deliteľom nie je číslo 3, ale 6.

Úloha č. 7: *Na tabuli bola nakreslená štvorcová tabuľka s* 10×10 *políčkami. V každom políčku bolo napísané jedno celé číslo. Čísla v riadkoch boli zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Peťo znenazdajky poprehadzoval čísla v každom stĺpci tak, že teraz sú v každom stĺpci čísla zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Dokážte, že pôvodná dobrá vlastnosť tabuľky sa nepokazila, teda čísla v riadkoch sú opäť zoradené podľa veľkosti.*

Riešenie: (opravovali Hanka a Feráč)
Aby sme predišli akýmkoľvek nejasnostiam, upresníme si, že čísla v riadku sú zoradené od najmenšieho po najväčšie vtedy, ak rastú (presnejšie neklesajú) zľava doprava. Podobne čísla v stĺpci sú zoradené od najmenšieho po najväčšie, ak neklesajú zhora nadol. Uvedomte si však, že dobrá vlastnosť tabuľky by sa nepokazila, ani keby Peťo usporiadaval čísla opačným smerom.
No a teraz už poďme k riešeniu. Vezmite si do ruky pero a papier a situáciu si nakreslite. Naozaj! Tvrdenie zo zadania budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že keď Peťo poprehadzoval čísla v tabuľke, v nejakom riadku sa pokazilo ich zoradenie. Nech je to r-tý riadok (zhora). To znamená, že v tomto riadku sú dve čísla x a y také, že $x > y$ a x je naľavo od y. Nech A je stĺpec obsahujúci x a B je stĺpec obsahujúci y. Čísla v B označme zhora nadol $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ a nech a_i je to číslo z A, ktoré bolo pred poprehadzovaním v tom istom riadku ako b_i. Všimnite si, že $b_r = y$ a A pozostáva z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, nie však nutne v tomto poradí. Pred tým, ako sa dostal k tabuľke Peťo, boli čísla v riadkoch zoradené, preto pre všetky prípustné hodnoty i platí $a_i \leq b_i$. No a keďže teraz sú čísla zoradené po stĺpcoch, tak $b_i \leq b_r$ pre všetky $1 \leq i \leq r$, čo nám dokopy dáva $a_i \leq b_i \leq b_r = y < x$ pre $1 \leq i \leq r$. Vidíme teda, že v A je aspoň r čísel menších ako x. Už si len uvedomiť, že sme dostali hľadaný spor. Naozaj, v stĺpci A sú čísla zoradené od najmenšieho po najväčšie, x je na r-tom mieste a okrem neho je tam ešte r čísel od neho menších. A tie na tých $r - 1$ miest, ktoré sú nad ním, poukladať nedokážeme. Dobrá vlastnosť tabuľky sa teda nemohla pokaziť.

Komentár:
Značná časť z vás riešila úlohu s dodatočným predpokladom, že čísla v tabuľke sú rôzne. Pozor, o tomto nie je v zadaní ani zmienka. Tento predpoklad ale riešenie nijak podstatne neuľahčí, preto sme vám za to body nestŕhali. Nabudúce si však radšej poriadne prečítajte zadanie, pretože inak môžete úlohu naozaj zmeniť.

Úloha č. 8: *Mazo dostal na Vianoce čiernu skrinku a k nej manuál obsahujúci konečný počet (najmenej však dve) navzájom rôznych reálnych čísel. Keď do skrinky vložíme ľubovoľné číslo z manuálu, vypadne z nej opäť jedno z čísel uvedených v manuáli. Mazo zistil, že keď vloží do skrinky ľubovoľné číslo* x*, vypadne mu číslo* $ax + b$*, kde* a, b *sú reálne konštanty vmontované výrobcom do skrinky (*$a \neq 0$*).*
(a) Zistite, koľko môže existovať rôznych skriniek (s rôznymi konštantami) k Mazovmu manuálu.
(b) Aďa sa chváli, že dostala manuál, v ktorom je 2005 *čísel so súčtom* 0 *a k nemu dve rôzne čierne skrinky. Mazo overil, že skrinky sú od toho istého výrobcu ako jeho skrinka, zamyslel sa a potom povedal, že v Adinom manuáli musí byť aj číslo* 0*. Má Mazo pravdu?*

Riešenie: (opravoval Miki)

(a) Najprv si označíme čísla v Mazovom manuáli x_i, kde $1 \leq i \leq n$. Prvá vec, čo zistíme o skrinkách pomerne ľahko je, že dve rôzne čísla sa musia zobraziť na čísla, ktoré sú tiež rôzne. Dôkaz som chcel nechať na čitateľa, ale keďže boli Vianoce, spravím ho za vás. Sporom. Povedzme, že sa dve rôzne x_i a x_j zobrazili na to isté číslo c. Potom $ax_i + b = c = ax_j + b$, z čoho mi po úpravách vyjde $x_i = x_j$ a to je spor, pretože tieto čísla mali byť rôzne. Z tejto dobrej vlastnosti vyplýva, že všetky čísla z manuálu sa rozdelia do skupiniek (resp. postupností), v ktorých platí, že prvý člen sa zobrazí na druhý, druhý na tretí atď., až posledný na ten prvý. (Rozmyslite si to.) Tieto skupinky preto nazvem cykly. Ak sa nejaké číslo zobrazí na seba, tak jeho cyklus bude mať jednoducho dĺžku 1. Pozrime sa teraz na nejaký cyklus, pričom jeho čísla označme

$x_1, \ldots, x_k$. Platí nasledovná séria rovností

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= x_2 \\ ax_2 + b &= x_3 \\ &\vdots \\ ax_{k-1} + b &= x_k \\ ax_k + b &= x_1. \end{aligned}$$

Skúsme si vyjadriť x_1 z tejto sústavy postupným dosádzaním rovníc od poslednej po prvú. $x_1 = ax_k + b = = a(x_{k-1} + b) + b = a^2 x_{k-1} + ab + b = \cdots = a^k x_1 + a^{k-1}b + a^{k-2}b + \cdots + ab + b$. Dajme do rovnosti najľavejšiu a najpravejšiu časť predchádzajúceho výrazu. Prehodením x_1 na jednu stranu dostávame

$$x_1(1 - a^k) = b(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1)$$

a za predpokladu $a^k \neq 1$ predelíme. Výraz $1 - a^k$ je pomerne známy a vieme ho rozložiť na súčin $1 - a^k = (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1})$, čím sa pravá strana dosť zjednoduší na

$$x_1 = \frac{b}{1 - a}.$$

Nechajme interpretáciu tohto výrazu ešte chvíľu tak a spočítajme x_2. Dostávame

$$x_2 = ax_1 + b = \frac{ab}{1 - a} + b = b(\frac{a}{1 - a} + 1) = b\frac{1}{1 - a} = x_1,$$

čo je spor, pretože všetky čísla v cykle majú byť rôzne. Buď teda neexistuje taký cyklus, kde je aj x_2 a teda každé číslo sa zobrazí na seba (a potom $a = 1$ a $b = 0$), alebo nie je splnená podmienka $1 - a^k \neq 0$. To znamená, že buď $a = 1$ (a potom $b = 0$), alebo $a = -1$. Našli sme teda jednu dvojicu konštánt a a b pre Mazov manuál a všetky ostatné musia mať $a = -1$.
Preskúmajme teraz skrinky s $a = -1$. Zrejme sa už čísla nebudú zobrazovať na seba. Povedzme, že x_i sa zobrazí na x_j. Potom platí $-x_i + b = x_j$, lenže pričítaním výrazu $x_i - x_j$ dostávame rovnosť $-x_j + b = x_i$, z čoho vyplýva, že x_j sa zobrazí na x_i. A navyše pre všetky takéto dvojice čísel, ktoré sa na seba navzájom zobrazujú, platí $x_i + x_j = b$. Pre taký manuál čísel, kde ku každému číslu x_i patrí do manuálu aj číslo $b - x_i$ teda existuje aj druhá skrinka s parametrami $a = -1$ a $b = b$. Takže k Mazovmu manuálu vždy existuje jedna skrinka, ale špeciálnom prípade môžu existovať aj dve rôzne skrinky.

(b) Aďa má manuál od toho istého výrobcu, kde existujú dve skrinky. Z predchádzajúceho odstavca vyplýva, že čísla z manuálu sú „popáriteľné“ do dvojíc, ktoré sa zobrazujú na seba. Navyše manuál obsahuje aj číslo $b/2$, ktoré nemusí mať pár, lebo sa zobrazuje opäť na $b/2$. Keďže každá dvojica, ktorá sa zobrazuje na seba, dáva súčet b, tak súčet všetkých 2005 čísel bude $1002b + b/2 = 2005b/2$ a to má byť nula. Preto $b = 0$ a my sme už spomenuli, že manuál obsahuje číslo $b/2$, čo je nula. A ako vždy, Mazo má pravdu.

Úloha č. 9: *Nech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$ (známa Fibonacciho postupnosť). Zistite, či existuje nekonečná rastúca aritmetická postupnosť prirodzených čísel, ktorá neobsahuje žiadne číslo z Fibonacciho postupnosti.*

Riešenie: (opravoval Peťo)
Keďže našou úlohou je nájsť aritmetickú postupnosť určitých vlastností, bude pre nás výhodné pozrieť sa na celý problém z perspektívy modulárnej aritmetiky. Totiž, čo je to vlastne nekonečná rastúca aritmetická postupnosť? Je to postupnosť celých čísel a_0, $a_0 + d$, $a_0 + 2d$, ..., kde d je nejaké kladné celé číslo. Na takúto postupnosť sa ale môžeme tiež pozerať ako na postupnosť všetkých celých čísel väčších alebo rovných a_0, ktoré dávajú po delení číslom d zvyšok rovnaký ako a_0, teda $a_0 \bmod d$ (je jasné, že tento zvyšok sa pričítavaním násobkov čísla d nezmení). Takejto množine čísel sa tiež hovorí *zvyšková trieda modulo d*, pričom naša aritmetická postupnosť z nej samozrejme pokryje iba čísla väčšie alebo rovné prvému členu a_0. Preto ak sa nám podarí nájsť také celé čísla a_0 a d, aby žiadne Fibonacciho číslo nedávalo po delení číslom d rovnaký zvyšok ako a_0, úloha bude vyriešená.
Pozrime sa na to, ako vyzerá postupnosť zvyškov, ktoré dostaneme po delení Fibonacciho čísel nejakým prirodzeným číslom d, teda postupnosť $\{F_n \bmod d\}_{n=1}^{\infty}$. Pre nás je dôležité, že členy tejto postupnosti, rovnako ako v prípade pôvodnej Fibonacciho postupnosti, závisia len od predchádzajúcich dvoch členov. Tento fakt môžeme overiť jednoduchým výpočtom:

$$F_{n+2} \bmod d = (F_{n+1} + F_n) \bmod d = ((F_{n+1} \bmod d) + (F_n \bmod d)) \bmod d.$$

Preto ak sa nám v takejto postupnosti zvyškov zopakuje nejaká dvojica za sebou idúcich členov, z uvedenej úvahy vyplýva, že postupnosť sa bude ďalej periodicky opakovať až do nekonečna. Navyše (aj keď my to v našom riešení

nepotrebujeme), dá sa jednoducho dokázať, že nejaká dvojica sa v postupnosti skôr či neskôr vyskytne znovu bez ohľadu na voľbu d, čiže pre každé $d \in \mathbb{N}$ bude postupnosť $\{F_n \bmod d\}_{n=1}^{\infty}$ periodická. Skúste si to.
Zistili sme teda, že nám stačí nájsť také $d \in \mathbb{N}$, že v postupnosti $\{F_n \bmod d\}_{n=1}^{\infty}$ sa nevyskytnú všetky možné zvyšky $0, 1, 2, \dots, d-1$ skôr, než sa nejaká dvojica zvyškov zopakuje, čím sa postupnosť zacyklí. Postupným skúšaním malých hodnôt sa ukáže, že najmenšie také d je rovné 8, postupnosť $\{F_n \bmod 8\}_{n=1}^{\infty}$ totiž vyzerá nasledovne: $1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, \dots$ Keďže sa nám zopakovali dve za sebou idúce jednotky, postupnosť bude už ďalej periodická. Nikde v postupnosti sa však nevyskytol napríklad zvyšok 4, preto žiadne z Fibonacciho čísel nebude dávať po delení ôsmymi tento zvyšok. Vďaka tomu si môžeme byť istí, že napríklad aritmetická postupnosť $\{4 + 8n\}_{n=0}^{\infty}$ žiadne Fibonacciho číslo neobsahuje, a teda spĺňa podmienky zadania.

Úloha č. 10: *Rasťo sa hrá s tabuľkou 6×6, ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kamienok. Rasťo vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke?*

Riešenie: (opravoval Pišta)
Keby Rasťo vedel zmeniť počet kamienkov v každom jednotlivom políčku, tak ľahko vyhrá. Skúsme teda nájsť takýto postup pre jednotlivé políčka. Vezmeme si štvorčekovaný papier a budeme sa hrať. Pomocou jedného štvorca 5×5, dvoch štvorcov 2×2 a dvoch štvorcov 3×3 (umiestnených oproti sebe po diagonále) vieme dosiahnuť, aby sa menil počet kamienkov na strednom políčku toho štvorca 5×5 a nikde inde. Zaujímajú nás iba zvyšky čísel na jednotlivých políčkach po delení tromi, takže sa odteraz budeme na tie čísla tak aj dívať. Z popísanej konštrukcie je jasné, že vieme dosiahnuť, aby na ktoromkoľvek zo štyroch stredných políčok tabuľky 6×6 bolo ľubovoľné číslo.
Vezmime si štvorec 4×4 a v ňom štvorec 2×2 (v strede) a dva štvorce 3×3 oproti sebe po diagonále. Ich vhodným využitím dosiahneme, že vieme súčasne zväčšovať o 1 počet kamienkov na políčkach v rohoch ľubovoľného štvorca 4×4 (tie rohy ležia na koncoch jednej z jeho uhlopriečok, nakreslite si to). Použitím tejto konštrukcie vieme dosiahnuť ľubovoľné číslo v rohoch štvorca 6×6 a potom upraviť predošlou konštrukciou štyri stredné políčka na požadovanú hodnotu (číslo deliteľné tromi).
Takto sa ešte chvíľu pohráme a budeme vedieť upraviť ľubovoľné z políčok ležiacich na uhlopriečkach štvorca 6×6. Ďalej však nech sa snažíme, ako chceme, čísla sa nedajú meniť jednotlivo, ale vždy iba v skupinách po aspoň dve čísla. To možno znamená, že pre „zlú“ pozíciu nevieme dosiahnuť, aby všetky čísla boli deliteľné tromi. V skutočnosti stačí preskúmať 3^{36} pozícií, pretože pre každé políčko môže počet kamienkov na ňom dávať tri rôzne zvyšky po delení tromi. Každý krok (prípustný podľa zadania) umožňuje prejsť z pozície do niekoľkých iných. K tomuto sa dá nakresliť obrázok: pozícii bude zodpovedať bod a prechodom medzi pozíciami šípky. Našou úlohou je zistiť, či sa z ľubovoľnej pozície (bodu) dá po šípkach prejsť do bodu, ktorý zodpovedá pozícii, kde sú všetky počty kamienkov deliteľné tromi. Takýto obrázok by bol super, keby nebol priveľký. Preto sa na to budeme musieť pozrieť inak.
Vezmime si takúto úlohu: Majme číslo 1. V každom kroku prirátame 2 alebo odrátame 4. Dá sa po konečnom počte krokov dosiahnuť číslo 0?
Odpoveď je nie, pretože po každom kroku máme nepárne číslo a pritom 0 je párna. Vidíme, že pozície v tejto úlohe sú buď párne čísla alebo nepárne čísla, podľa toho, či začíname párnym, alebo nepárnym číslom. Vyplýva to z toho, že prípustné kroky nemenia paritu. Hodnotu (resp. vlastnosť), ktorá sa nemení, nazývame *invariant.* Invariantom je v prípade predošlej jednoduchej úlohy parita čísla. Bežne používané invarianty sú práve zvyšky po delení alebo súčty či rozdiely nejakých čísel (závisí to od toho, čo tvorí „pozíciu“).
V našom prípade rozdelíme políčka neležiace na diagonálach štvorca 6×6 do dvoch skupín tak, aby sa nemenil rozdiel I súčtov zvyškov v jednotlivých skupinách (presnejšie povedané, chceme, aby sa nemenil zvyšok tohto rozdielu po delení tromi) po pridaní kamienkov do niektorého štvorca. Symbol (i, j) nech označuje políčko ležiace v i-tom riadku a j-tom stĺpci. Nech políčko $(2, 1)$ je v prvej skupine. Potom políčko $(1, 2)$ musí byť v druhej skupine. Ak by bolo v prvej, tak zvýšením počtu kamienkov v štvorci 2×2 umiestnenom v ľavom hornom rohu veľkého štvorca sa zvýši súčet zvyškov v prvej skupine o 2 a v druhej sa nezmení, takže rozdiel I sa zväčší o 2 a to nechceme. Túto úvahu si dobre rozmyslite, až potom pokračujte v čítaní ďalej.
Políčko $(4, 5)$ musí byť v prvej skupine, pretože políčko $(1, 2)$ je v druhej a jednou z popísaných konštrukcií vieme súčasne zväčšiť počet kamienkov na týchto políčkach o 1. Zopakovaním podobných úvah nájdeme rozdelenie všetkých políčok do skupín, ako ukazuje obrázok.

0	2	2	1	1	0
1	0	2	1	0	2
1	1	0	0	2	2
2	2	0	0	1	1
2	0	1	2	0	1
0	1	1	2	2	0

Čo sme týmto dosiahli? Je isté, že ak sa Rasťovi podarilo vyhrať, tak číslo I má hodnotu 0. Ale ľahko nájdeme pozíciu, kde číslo I má hodnotu 1 či 2 (spravte to). Preto existujú pozície, z ktorých Rasťo vyhrať nemôže. Otvorenou otázkou zostáva, či Rasťo vie vyhrať z každej pozície, v ktorej je číslo I na začiatku rovné 0. Skúste nájsť odpoveď.

Aj by sme boli hotoví, ale zabudli sme na jednu dôležitú vec. Naozaj je číslo I invariantom? Aby sme si boli istí, treba overiť, že pre každý povolený Rasťov ťah sa číslo I nezmení. To znamená vyskúšať všetky polohy štvorcov 2×2 až 5×5, čo už ponechávame na vás.

Komentár: Všetci, ktorí našli nejaký správny invariant, svoj dôkaz aj úspešne zvládli a majú 9 bodov. Tí, ktorí vedeli dosiahnuť, aby na 35 políčkach bol správny počet kamienkov, majú 5 bodov. Ostatní riešitelia majú najviac 3 body, väčšinou za nejakú rozumnú metódu, ktorá našu tabuľku upraví na „krajšiu“, alebo za nejaké postrehy. Za poznámky typu „stačí uvažovať počty modulo 3“, resp. „súčet na konci musí byť deliteľný 3“ som body nedával.

Poznámka: Skúste spôsobmi spomenutými v riešení (obrázok so šípkami, invarianty) vyriešiť nasledujúce úlohy:
1. Máme 9 mincí otočených lícom nahor. Môžeme naraz otočiť dve z nich. Vieme po konečnom počte krokov (otočení dvojice mincí) dosiahnuť, aby bolo všetkých 9 mincí otočných rubom nahor?
2. Tá istá úloha, ale môžeme naraz otočiť 5 mincí.

Úloha č. 11: *Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sa dajú čísla $1, 2, 3, \ldots, 4n$ rozdeliť do n skupín po štyri čísla tak, aby v každej skupine aspoň jedno číslo bolo priemerom zvyšných troch.*

Riešenie: (opravoval Rasťo)
Pri riešení úlohy pre všeobecné n je dobré si vyskúšať niekoľko malých hodnôt n. Buď nám to priamo pomôže niečo objaviť alebo ak aj nie, výsledky pre malé n nám poslúžia ako veľmi dobrá kontrola všeobecného výsledku. Jednoduchým vyskúšaním zistíme, že pre $n = 1$ sa to nedá, ale už pre $n = 2$ to ide. Čísla rozdelíme do dvoch skupín takto: Prvá skupina obsahuje čísla 1, 3, 4, 8, kde číslo 4 je priemerom zvyšných troch. Druhá skupina obsahuje čísla 2, 6, 7 a číslo 5, ktoré je priemerom predchádzajúcich. Podobné rozdelenie bude fungovať aj pre všetky párne n. Keď je n párne, tak máme spolu $8k$ čísel ($k = n/2$). Rozdelíme si ich postupne po osmiciach do k skupín. Prvá osmica teda obsahuje čísla 1 až 8, druhá 9 až 16, k-ta $8(k-1)+1$ až $8k$. V každej z osmíc čísla rozdelíme rovnakým spôsobom ako pre $n = 2$ do dvoch skupiniek. Čiže prvá skupinka $(i+1)$-ej skupiny bude mať čísla $8i+1$, $8i+3$, $8i+8$ a číslo $8i+4$, ktoré je ich priemerom. Druhá skupinka bude pozostávať z čísel $8i+2$, $8i+6$, $8i+7$ a ich priemeru $8i+5$. Pre párne n je teda vždy možné rozdeliť čísla do n skupín po 4 čísla, tak aby bolo v každej skupine aspoň jedno číslo priemerom zvyšných.
Pozrime sa teraz na tie ostatné (nepárne) n. Pre $n = 3$ sme dlho skúšali a stále nič, podozrenie, že to vôbec nepôjde, je namieste. A naozaj. Keďže v každej štvorici a, b, c, d by malo byť jedno číslo priemerom zvyšných troch, tak $(a+b+c)/3 = d$, čiže súčet čísel v skupine $a+b+c+d = 3d+d = 4d$ je násobkom čísla 4. Keďže to platí v každej skupine, tak aj celkový súčet všetkých čísel musí byť násobkom čísla 4. Súčet čísel 1 až $4n$ je $4n(4n+1)/2 = 2n(4n+1)$. Číslo $4n+1$ je vždy nepárne, ak by bolo aj n nepárne, tak súčet našich $4n$ čísel je dvojnásobkom nepárneho čísla a teda nie je deliteľný štvorkou. Pre nepárne n hľadané rozdelenie neexistuje.
Všimnite si, že skúmanie prípadu $n = 2$ (a niekoľko iných párnych n) nám naozaj pomôže pri nájdení všeobecného spôsobu rozdelenia. Na druhej strane neexistencia rozdelenia pre $n = 1$ či $n = 3$ (získaná napríklad prebratím všetkých možností) nehovorí nič všeobecné, na dôkaz neexistencie rozdelenia treba skúmať skôr štruktúru našich štvorprvkových množín vo všeobecnosti.

Úloha č. 12: *Nech $ABCO$ je štvorsten taký, že priamky OA, OB, OC sú navzájom kolmé. Nech r je polomer gule doňho vpísanej a nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že $|OH| \leq \pi r$.*

Riešenie: (opravoval Kenny)
Na to, aby sme sa v tejto úlohe dostali ďalej, musíme najprv zistiť, v akom vzťahu sú O a H (zatiaľ pre nás tieto body tvoria úsečku, ktorá visí kdesi v priestore a nevieme o nej nič). Po chvíľke rozmýšľania a prezerania si obrázkov si môžeme všimnúť, že OH je kolmica na rovinu ABC, a teda H je kolmý priemet bodu O do roviny ABC. Poďme to dokázať.
Zo zadania vieme, že priamka OC je kolmá na priamky OA a OB. Z toho vyplýva, že priamka OC je kolmá na celú rovinu OAB. Keď je priamka kolmá na rovinu, je kolmá aj na každú priamku v tejto rovine, a teda aj na priamku AB. Preto kolmým priemetom priamky OC do roviny ABC je nejaká priamka p kolmá na priamku AB a prechádzajúca bodom C. Takáto priamka p je však výškou v trojuholníku ABC. Zopakovaním tejto úvahy pre priemety priamok OA a OB odvodíme, že priemet bodu O do roviny ABC leží na všetkých výškach trojuholníka ABC, teda je totožný s jeho ortocentrom H. (Z toho tiež vyplýva, že $|OH|$ je najmenšia vzdialenosť medzi O a rovinou ABC.)
A teraz prejdime k samotnému dôkazu nerovnosti (podľa *Ondra Budáča*). Nakreslite si obrázok nášho štvorstena tak, že bod O je akoby v rohu miestnosti. (Inak povedané, priamky OA, OB, OC sú osami pravouhlej súradnicovej sústavy.) Nech G je stred gule vpísanej do nášho štvorstena. Ďalej nech sa táto guľa dotýka trojuholníka ABC v bode S. Dĺžku úsečky GO vieme vyjadriť takto: Úsečka GO je telesovou uhlopriečkou v kocke s hranami dĺžky r (pretože vzdialenosť bodu G od dotykového bodu vpísanej gule so stenami OAB, OBC, OAC je r a navyše priamka cez G a dotykový bod je kolmica na tieto roviny). Teda $|GO| = r\sqrt{3}$. Navyše $|GS| = r$. Lomená čiara OGS je nejaká cesta z bodu O na rovinu ABC a keďže OH je najkratšia takáto cesta, musia platiť nerovnosti

$$\begin{aligned} |OG| + |GS| &\geq |OH|, \\ (\sqrt{3}+1)r &\geq |OH|. \end{aligned}$$

Druhú nerovnosť sme dostali z prvej dosadením vypočítaných dĺžok úsečiek $|OG|$ a $|GS|$. Keďže $\pi > \sqrt{3}+1$, z predchádzajúcej nerovnosti vyplýva aj požadované tvrdenie $\pi r \geq |OH|$.

<u>Iné riešenie:</u>
Úloha sa dá riešiť aj „hrubou silou“. Okrem priameho analytického prístupu je možné využiť Herónov vzorec, ktorý hovorí, že obsah trojuholníka so stranami a, b, c je $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = (a+b+c)/2$ (označenie s pochádza z anglického *semiperimeter*, t. j. polovica obvodu). Skúste si dosadiť túto hodnotu za s a výraz roznásobiť, dostanete $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$.
Objem nášho štvorstena vieme zrátať dvomi spôsobmi (podobne ako obsah trojuholníka, vyskúšajte si to).

$$V = \frac{1}{3}|OH| \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} r\left(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC}\right)$$

Z tohto dostávame

$$\frac{|OH|}{r} = 1 + \frac{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}}{S_{ABC}}.$$

Je jasné, že obsahy trojuholníkov OAB, OBC, OCA sú menšie než obsah trojuholníka ABC, takže máme

$$\frac{|OH|}{r} = 1 + \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OCA}}{S_{ABC}} < 1+1+1+1 = 4.$$

Nanešťastie však $\pi < 4$, takže náš odhad budeme musieť zjemniť.
Nech $|OA| = x$, $|OB| = y$, $|OC| = z$. Týmto je náš štvorsten určený jednoznačne. Chceme dokázať, že

$$S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = (xy + yz + zx)/2 \leq (\pi - 1)S_{ABC}. \tag{1}$$

Strany trojuholníka ABC majú veľkosť $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, ale v roznásobenom Herónovom vzorci vystupujú iba v druhej mocnine. Paráda. Nerovnosť (1) je po umocnení na druhú, vynásobení číslom 4 a dosadení obsahu trojuholníka ABC ekvivalentná s nerovnosťou

$$(xy + yz + zx)^2 \leq (\pi - 1)^2 \cdot (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2y^2).$$

Tento vzťah platí, vidno to po vhodnej substitúcii alebo z Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti (odhadneme ľavú stranu). Dokážte si to sami.

<u>Poznámka:</u> Dokážte (bez použitia Herónovho vzorca), že ak a, b, c sú strany nejakého trojuholníka, tak platí

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) > (a^4 + b^4 + c^4).$$

<u>**Úloha č. 13:**</u> *Daný je rovnobežník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok O. Body M, N sú stredy úsečiek BO, CD (v tomto poradí). Dokážte, že ak trojuholníky ABC a AMN sú podobné, tak $ABCD$ je štvorec.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Erika)
K riešeniu úlohy sa dalo pristupovať viacerými spôsobmi. Dobré je skúsiť si na začiatku obrátiť dokazovanú implikáciu.[4] Ak $ABCD$ je štvorec, sú trojuholníky ABC a AMN podobné? Po chvíli snaženia sa nám to podarí dokázať cez uhly (nájdeme vhodný tetivový štvoruholník). To napovedá, že aj obrátená implikácia by mohla ísť cez uhly. A keďže stredy strán sú pomerne „mizerné“ body, ak chceme rátať uhly, treba im nejako pomôcť. Čo prechádza cez stredy strán trojuholníka? No predsa stredné priečky a uhly pri nich vieme ľahko určiť, keďže sú rovnobežné so stranami. Vyskúšajte si dotiahnuť to do konca, zvoľte vhodné stredné priečky a tetivové štvoruholníky. Ďalej si ukážeme dva iné prístupy.

<u>Prvé riešenie:</u>
Z podobnosti trojuholníkov ABC a AMN vyplýva, že $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle CAM|$. Po odčítaní veľkosti uhla CAB od oboch týchto uhlov dostávame

$$|\sphericalangle NAC| = |\sphericalangle MAB|. \tag{1}$$

Keďže trojuholníky ABC a AMN sú podobné, máme tiež

$$\frac{|AN|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AB|}. \tag{2}$$

Z (1) a (2) dostávame, že trojuholníky NAC a MAB sú podobné, a teda $|\sphericalangle NCA| = |\sphericalangle MBA|$. Z rovnosti týchto uhlov a z vlastnosti, že bod O je rovnako vzdialený od úsečiek AB a CD vyplýva, že $|BO| = |CO|$. Teda vidíme, že uhlopriečky v tomto rovnobežníku majú rovnakú dĺžku. Vieme, že iba uhlopriečky v pravouholníku majú takúto

[4] Aj keď je to dobrý nápad, treba mať na pamäti obmedzené možnosti takéhoto prístupu, totiž obrátená implikácia môže byť hocičo od úplnej triviality až po otvorený problém, vrátane toho, že nemusí platiť. A teda môže byť aj príliš ľahká, extrémne ťažká, alebo nie úplne zmysluplná úloha. Avšak za pokus to stojí, veď sformulovať obrátené tvrdenie trvá obvykle iba chvíľku.

vlastnosť, takže rovnobežník $ABCD$ je buď štvorec, alebo obdĺžnik. Na to, aby sme ukázali, že je to štvorec, treba ukázať, že dve jeho susedné strany majú rovnakú dĺžku. Označme preto $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AC| = u$. Z podobnosti trojuholníkov NAC a MAB máme

$$\frac{|NC|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Vyjadrením a dosadením jednotlivých dĺžok dostávame $2 \cdot a^2 = u^2$. Zároveň z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC máme $a^2 + b^2 = u^2$. Porovnaním posledných dvoch vzťahov získame $a^2 = b^2$, čiže $a = b$. Týmto sme dokázali, že rovnobežník zo zadania je obdĺžnik s dvoma rovnakými susednými stranami, a teda je to štvorec.

Druhé riešenie:
Skúsme teraz úlohu riešiť pomocou komplexných čísel. Toto riešenie je elegantné a jednoduché. Položme rovnobežník $ABCD$ do komplexnej roviny tak, aby bod A bol 0 (úlohu neriešime analyticky, takže bod A je naozaj iba číslo). Ďalej nech body B, D rovnobežníka sú čísla B, D. Pre výpočet číselných hodnôt ostatných bodov môžeme použiť klasické postupy ako pri analytickej geometrii: $C = B + D$, $O = (B + D)/2$, $M = B + (D - B)/4$, $N = D + B/2$. Z podobnosti trojuholníkov ABC a AMN dostávame $|AC|/|AB| = |AN|/|AM|$ a súčasne $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle CAB|$. Pokúsme sa túto podmienku prepísať pomocou komplexných čísel. Zamyslime sa nad tým, čo vyjadruje zlomok C/B. Ako výsledok tohto podielu dostaneme komplexné číslo. Vzdialenosť tohto čísla od A je $|C/B|$. Uhol priradený k tomuto číslu je CAB. Teda keď urobíme podiel čísel C a B, tak tento v sebe zahŕňa informáciu ako o uhle, tak aj o veľkosti pomeru uhlopriečky AC ku strane AB. Ak preto chceme vyjadriť podmienku podobnosti dvoch trojuholníkov v komplexnej rovine, stačí overiť rovnosť pomerov dvoch dvojíc komplexných čísel. V našom prípade musí platiť

$$\frac{C}{B} = \frac{N}{M}.$$

Dosadením vyjadrení jednotlivých bodov a jednoduchými úpravami dostávame rovnosť $B^2 + D^2 = 0$. Z tejto rovnosti môžeme jednoducho vyjadriť B pomocou D, a to ako $B = iD$ alebo $B = -iD$ (i je komplexná jednotka). Tieto dve rovnosti vyjadrujú, že B dostaneme z D otočením o 90 stupňov. A keďže z rovnobežníkov jedine štvorec spĺňa uvedenú vlastnosť, podarilo sa nám dokázať, že rovnobežník $ABCD$ je naozaj štvorec.

Poznámka: Násobenie komplexným číslom $k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ znamená vlastne zloženie dvoch zobrazení: rovnoľahlosti s koeficientom k a otočenia o uhol φ, obe tieto zobrazenia majú stred v bode 0. Takéto zobrazenie sa nazýva v angličtine *spiral similarity*, v slovenčine preň nemáme lepší pojem než doslovný preklad *špirálová podobnosť*. (Skúste pomocou tohto zobrazenia vyriešiť prvú úlohu z IMO 2005.)

Komentár: Ďalší spôsob riešenia úlohy bol pomocou analytickej geometrie. Toto riešenie bolo priamočiare, preto sme sa rozhodli ho vynechať. Riešenie pomocou komplexných čísel si vyžaduje trochu hlbší vhľad do tejto problematiky, preto ak ste neporozumeli niektorým veciam zo vzorového riešenia, pospomínajte si, ako sa vlastne s komplexnými číslami počíta a čo je pre ne charakteristické.

Úloha č. 14: *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí*

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

Riešenie: (opravoval Jakub)
Nech funkcia f je riešením našej rovnice. Potom rovnosť zo zadania platí pre všetky x a y, takže môžeme za x aj y dosádzať ľubovoľné hodnoty, aby sme našli nutné podmienky, ktoré musí funkcia f spĺňať. Nuž dosádzajme:

a) y je ľubovoľné, $x = y - f(y)$:

$$\begin{aligned} f(y - f(y) + f(y - f(y)) + f(y)) &= f(y + f(y - f(y))) + y - f(y) + f(y) - f(f(y)) \\ f(y + f(y - f(y))) &= f(y + f(y - f(y))) + y - f(f(y)) \\ f(f(y)) &= y \end{aligned} \tag{1}$$

Z (1) vyplýva, že funkcia f je prostá (overte!).[5]

b) $x = y = 0$:

$$\begin{aligned} f(0 + 2f(0)) &= f(0 + f(0)) + 0 + f(0) - f(f(0)) \\ f(2f(0)) &= f(0) \end{aligned}$$

Keďže funkcia f je prostá, tak platí $2f(0) = 0$ a preto

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

c) y je ľubovoľné, $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0 + f(0) + f(y)) &= f(y + f(0)) + 0 + f(y) - f(f(y)) \\ f(f(0) + f(y)) &= f(y + f(0)) + f(y) - f(f(y)) && \text{(použime (2))} \\ f(f(y)) &= f(y) + f(y) - f(f(y)) && \text{(použime (1))} \\ y &= f(y) + f(y) - y \\ f(y) &= y \end{aligned}$$

[5] Okrem toho z toho vyplýva, že oborom hodnôt funkcie f je celá množina reálnych čísel.

Teda jediným možným riešením (ak nejaké existuje) je funkcia $f(x) = x$. Dosadením do pôvodnej rovnice ľahko overíme, že táto funkcia naozaj vyhovuje zadaniu. A to je všetko.

Komentár: Samozrejme, horeuvedené riešenie nie je jediné správne. Väčšinou ste úlohu riešili úplne inak, dosádzaním rôznych iných hodnôt. Uvedené dosadenie $x = y - f(y)$ je však pravdepodobne „najlepšie". Získame pomocou neho pomerne silnú rovnosť $f(f(y)) = y$, z ktorej vyplýva, že funkcia f je prostá (s tým ste mali pri dokazovaní väčšinou najväčšie problémy). Z prostosti f a rovnosti $f(0) = 0$ sa dá jednoducho dokázať, že $f(x) = x$ (dosadením $x = 0$). Ako sa dá vymyslieť dosadenie $x = y - f(y)$? Myšlienka za tým môže byť taká, že sa snažíme unifikovať výrazy $f(x + f(x) + f(y))$ a $f(y + f(x))$ (teda chceme, aby boli rovnaké a „vypadli" z rovnice). Potom musí platiť $x + f(y) = y$.