Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série letného semestra 2005/2006

Úloha č. 1: *Daná je úsečka AB. Navrhnite prirodzené číslo n a rozmiestnenie bodov X_1, X_2, …, X_n na úsečke AB tak, aby bol súčet dĺžok polkružníc s priemermi AX_1, X_1X_2, …, X_nB čo najmenší.*

Riešenie: (opravovala Lucy)

V tejto úlohe sme mali navrhnúť počet a rozmiestnenie bodov tak, aby súčet dĺžok polkružníc nad spomínanými priemermi zo zadania bol čo najmenší. Nuž, keď sa zaoberáme kružnicami, napadne nás, že dĺžku kružnice, teda obvod kruhu, vieme vyjadriť ako $2\pi r$ alebo πd. My sme ale mali rátať polkružnice, tie majú dĺžku πr alebo $\pi d/2$. Keď spočítame dĺžky našich $n+1$ polkružníc, ktorých priemery sú $d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$, výsledok môžeme upraviť do tvaru $(d_1 + d_2 + \cdots + d_n + d_{n+1}) \cdot \pi/2$. Z toho vidíme, že tento súčet nezávisí od počtu kružníc, ale len od súčtu dĺžok priemerov týchto kružníc. My navyše vieme, že máme zadanú úsečku AB, na ktorej (zvolením počtu a rozmiestnenia bodov) tieto priemery nájdeme. A tu si úlohu rozdelíme na dva prípady.

Ten ľahší je, keď si povieme, že zvolené body na priamke AB si označíme doradu smerom od A k B ako X_1, X_2, …, X_{n-1}, X_n. V tom prípade každý bod X_i bude raz ľavým a raz pravým krajným bodom priemeru, teda naše priemery budú pospájané, ukončené bodmi A a B a spolu budú tvoriť celú úsečku AB. Preto súčet dĺžok polkružníc nad týmito priemermi bude vždy $|AB| \cdot \pi/2$ bez ohľadu na počet zvolených bodov.

V tom druhom prípade sme si zvolené body neoznačili po poradí, v akom ležia na úsečke AB. To však spôsobí, že niektoré časti priemerov, prípadne celé priemery sa nám budú prekrývať, ale zároveň nebude časť úsečky AB, nad ktorou by nebola polkružnica. Preto

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n + d_{n+1} > |AB|.$$

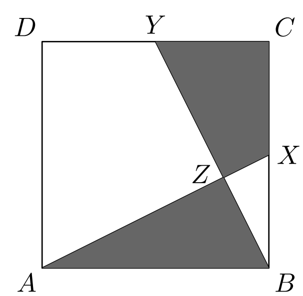
A z toho dostaneme, že súčet dĺžok týchto polkružníc je väčší ako $|AB| \cdot \pi/2$.

To znamená, že pri rovnakom počte bodov v prvom aj v druhom prípade dostaneme menší súčet dĺžok polkružníc v prvom. Tiež sme ukázali, že hľadaný súčet dĺžok nezávisí od počtu zvolených bodov, len od ich rozmiestnenia. A najmenší bude, ak budú body X_1, X_2, …, X_n zoradené vzostupne od bodu A po bod B.

Komentár: Čo sa týka riešení, mnohí z vás sa vôbec nezaoberali tým druhým prípadom, niektorí sa poplietli pri tých polkružniciach alebo si polomer zamenili s priemerom. To už sa hneď odrážalo aj na bodoch. :(

Úloha č. 2: *Na obrázku je nakreslený štvorec $ABCD$. Body X a Y sú stredy strán BC a CD. Porovnajte obsahy dvoch tmavých útvarov.*

Riešenie: (opravovali Hanka Tichá a Lucia)



Chceme určiť, v akom vzťahu sú obsahy útvarov ABZ a $XCYZ$. Najprv si všimnime trojuholníčky ABX a BCY. Kedže $|AB| = |BC|$, $|BX| = |BC|/2 = |CD|/2 = |CY|$ a $|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle BCY| = 90°$, trojuholník ABX je zhodný s trojuholníkom BCY podľa vety *sus*. Potom aj ich obsah je rovnaký. (Pri dĺžke strany a štvorca $ABCD$ je $S_{ABX} = S_{BCY} = a^2/4$. Prečo?). S poznaním, že $S_{ABX} = S_{BCY}$, nie sme už ďaleko od výsledku. Vyjadrime si obsahy týchto trojuholníkov ako súčty tmavých častí a trojuholníka BXZ:

$$S_{ABX} = S_{ABZ} + S_{BXZ}\,, \qquad S_{BCY} = S_{XCYZ} + S_{BXZ}.$$

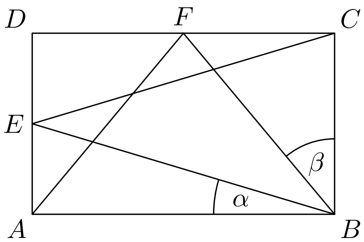
Keď teraz od obsahov trojuholníkov ABX a BCY odpočítame obsah trojuholníčka BXZ, dostávame, že obsahy útvarov ABZ a $XCYZ$ sú rovnaké.

Úloha č. 3: *Majme obdĺžnik $ABCD$. Nech E a F označujú postupne stredy jeho strán AD a CD. Priesečník úsečiek AF a EC označme G. Dokážte, že uhly CGF a FBE majú rovnakú veľkosť.*

Riešenie: (opravovali Bus a Ika)

V tejto úlohe ste mali dokázať, že uhly CGF a FBE majú rovnakú veľkosť. Najjednoduchší spôsob, ako to dokázať, je samozrejme vypočítať veľkosti oboch uhlov, a potom zistiť, či nám vyšli rovnaké. Ako sa však dajú vypočítať tieto uhly, ak nemáme zadané veľkosti skoro žiadnych iných uhlov na obrázku? Označíme si niekoľko uhlov (čím menej, tým lepšie) a pomocou nich vyjadríme veľkosť ostatných uhlov. Napríklad ak by sme poznali $|\sphericalangle EBA|$ a $|\sphericalangle CBF|$, vedeli by sme vypočítať $|\sphericalangle FBE|$. Označme si teda $|\sphericalangle EBA| = \alpha$ a $|\sphericalangle CBF| = \beta$. Pretože pri vrchole obdĺžnika je vždy pravý uhol, musí platiť:

$$|\sphericalangle EBA| + |\sphericalangle FBE| + |\sphericalangle CBF| = 90^\circ$$
$$|\sphericalangle FBE| = 90^\circ - |\sphericalangle EBA| - |\sphericalangle CBF|$$
$$|\sphericalangle FBE| = 90^\circ - \alpha - \beta$$



Teraz sa na chvíľu zastavme a zamyslime sa. Viacerí riešitelia, ktorí sa dopracovali do tej istej situácie, v akej sme my teraz, neváhali a označili si ďalšie uhly na obrázku, aby sa im ľahko vypočítala veľkosť uhla CGF. Aj takýto postup môže viesť k výsledku, s označovaním uhlov to však netreba preháňať. Kým ešte vieme vypočítať čosi nové len s pomocou tých uhlov, ktoré už poznáme, netreba označovať nič navyše, aby sa nám riešenie zbytočne neskomplikovalo. Berúc do úvahy túto poznámku, skúsme zrátať ešte niektoré ďalšie uhly. Z trojuholníka ABE vieme, že veľkosť uhla AEB je $90^\circ - \alpha$. Rovnakým postupom, ale v trojuholníku FBC, vieme zistiť, že $|\sphericalangle BFC| = 90^\circ - \beta$.

Oveľa viacej sa toho už ale vyrátať nedá, skúsme teda použiť ďalšie predpoklady zo zadania. Z toho, že bod E je v strede strany AD, vyplýva rovnosť $|AE| = |ED|$. Tiež vieme, že $|AB| = |CD|$ a $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EDC| = 90^\circ$ (lebo $ABCD$ je obdĺžnik). Trojuholníky ABE a DCE sú teda podľa vety *sus* zhodné a majú rovnaké uhly; $|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle AEB| = 90^\circ - \alpha$. Rovnako aj bod F je v strede strany CD, trojuholníky FBC a FAD sú tiež zhodné podľa vety *sus* a preto $|\sphericalangle DFA| = |\sphericalangle CFB| = 90^\circ - \beta$.

V tejto chvíli je opäť vhodné upozorniť na chyby, ktoré ste často robili. Prvou z nich je, že ste vo svojom riešení nikde nevyužili fakt, že $ABCD$ je obdĺžnik alebo že body E a F sú stredy strán. Ak by niektorá z týchto vecí neplatila, neplatilo by ani tvrdenie, ktoré chceme dokázať. Preto je nutné tieto fakty v riešení využiť; akýkoľvek „dôkaz“ nášho tvrdenia nevyužívajúci tieto fakty je chybný. Ďalej viacerí z vás do riešení písali: „je jasné že trojuholníky ABE a ECD sú zhodné“, prípadne čosi podobné o dĺžkach strán alebo veľkostiach uhlov. Iní dokonca nenapísali ani to a iba do obrázka nakreslili príslušné uhly s rovnakými veľkosťami. Možno sa to viacerým z vás zdá úplne zrejmé, mali by ste však aspoň spomenúť, prečo to tak naozaj je. Dostatočným dôvodom je symetria podľa osi úsečky AD, zjavná na prvý pohľad.

Záver je už jednoduchý. Súčet uhlov v štvoruholníku $EGFD$ musí byť 360°:

$$|\sphericalangle GED| + |\sphericalangle EDF| + |\sphericalangle DFG| + |\sphericalangle FGE| = 360^\circ$$
$$|\sphericalangle FGE| = 360^\circ - |\sphericalangle GED| - |\sphericalangle EDF| - |\sphericalangle DFG|$$
$$|\sphericalangle FGE| = 360^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ - (90^\circ - \beta)$$
$$|\sphericalangle FGE| = 90^\circ + \alpha + \beta$$

Uhol CGF je doplnkom uhlu FGE do 180°, preto $|\sphericalangle CGF| = 90^\circ - \alpha - \beta$, čo je však rovné $|\sphericalangle FBE|$. Presne to sme chceli dokázať.

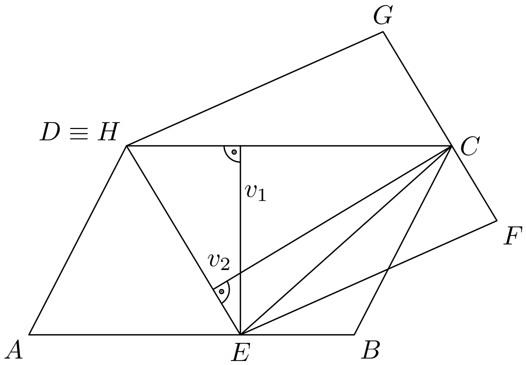
Komentár: S touto úlohou ste si poradili takmer všetci, viacerí z vás vymysleli aj iné riešenie, ako bolo to vzorové (založené na tom, že celá situácia je symetrická podľa osi úsečky AB, takže namiesto uhla FBE môžeme uvažovať o rovnako veľkom uhle FAX, kde X je stred úsečky BC).

Chceli by sme však zdôrazniť, že každý krok vo vašom riešení treba zdôvodniť. V riešení niekomu prezentujete vaše úvahy — ak sú v nich medzery, nepochopí (ak sú úvahy chybné, o to horšie). Preto aj pri bodovaní riešení nehodnotíme to, čo si opravovateľ prečítal v cudzích riešeniach alebo vymyslel po hodinovej úpornej snahe pochopiť vaše riešenie, ale to, čo je napísané v tom vašom riešení. Ak tam niečo chýba, body pôjdu dolu. Ak ste si pozorne prečítali vzorové riešenie, určite už všetci presne viete, za čo sme vám strhli body.

Úloha č. 4: *Dané sú dva rovnobežníky $ABCD$ a $EFGH$, pričom bod D je totožný s bodom H, bod E leží na strane AB a bod C leží na strane FG. Dokážte, že obsahy týchto rovnobežníkov sú rovnaké.*

Riešenie: (opravovali Lenka a Dada)

Majme rovnobežník $ABCD$. Nech bod E najprv leží vnútri strany AB (to znamená, že E je rôzne od A aj B) a bod C vnútri strany FG. Označme výšku na stranu AB v rovnobežníku $ABCD$ ako v_1, výšku v rovnobežníku $EFGH$ ako v_2.



Chceme dokázať, že obsahy rovnobežníkov $ABCD$ a $EFGH$ sa rovnajú. Obsah rovnobežníka vypočítame ako súčin dĺžky jednej jeho strany a výšky na túto stranu. V našom prípade

$$S_{ABCD} = |DC| \cdot v_1, \qquad S_{EFGH} = |DE| \cdot v_2.$$

Strany DC a DE sú zároveň stranami trojuholníka DEC, rovnako ako výšky v_1 a v_2 sú jeho výškami. Obsah trojuholníka DEC vieme vypočítať dvoma spôsobmi:

$$S_{DEC} = \frac{|DC| \cdot v_1}{2}, \qquad S_{DEC} = \frac{|DE| \cdot v_2}{2}.$$

Keď si všimneme, ako sme vypočítali obsah rovnobežníka $ABCD$, určite neujde našej pozornosti, že obsah trojuholníka DEC je polovicou jeho obsahu. Rovnako je obsah DEC polovicou obsahu rovnobežníka $EFGH$. Takže $S_{ABCD} = S_{EFGH} = 2S_{DEC}$.
Čo ak body E, prípadne C neležia vnútri daných strán, ale sú totožné s nejakým ich krajným bodom? V každom prípade trojuholník DEC bude existovať a stále bude mať polovičný obsah rovnobežníkov $ABCD$ a $EFGH$ (nakreslite si každý z týchto prípadov a dobre si to rozmyslite).

Komentár: Mnohí z vás úlohu riešili spôsobom, že presúvali trojuholník DCG tak, aby bol bod G totožný s bodom F. Pri tomto riešení ste však často vyhlásili, že $ABCD$ a $EFGH$ majú spoločný prienik štvoruholník a pomocou toho ste porovnávali obsahy $ABCD$ a $EFGH$. Avšak v prípadoch, keď body E, prípadne C splývajú s niektorým vrcholom, je prienikom trojuholník alebo je $ABCD$ totožný s $EFGH$. Tieto prípady bolo teda treba osobitne rozobrať.

Úloha č. 5: *Pavúk si chce poprezerať bočné steny pyramídy so štvorcovou podstavou a bočnými stenami v tvare rovnostranných trojuholníkov. Svoju púť začína zo stredu bočnej steny a chce navštíviť stredy všetkých ostatných bočných stien tak, aby prešiel najkratšiu trasu, pričom sa môže pohybovať iba po povrchu pyramídy. Ako to má spraviť a aká dlhá bude jeho trasa, ak vieme, že dĺžka každej hrany pyramídy je 2 cm? Nezabudnite dokázať, že trasa, ktorú chcete pavúkovi poradiť, je naozaj najkratšia.*

Poznámka: Tento príklad ste takmer všetci zvládli pomerne dobre, vidno to aj na bodových ziskoch. Zistiť dĺžku najkratšej pavúkovej cesty bolo vo vašich silách a zväčša ste sa aj viac-menej úspešne pokúsili o dôkaz, že vami zvolená cesta je najkratšia. No takmer vo všetkých riešeniach chýbala nejaká nenápadná úvaha, o ktorej nie je úplne jasné, že je zrejmá. Preto som sa ich rozhodol (bolo ich viacero, záviselo to aj od postupu) zaradiť do vzorového riešenia, ktoré je tým pádom určené *všetkým,* vrátane tých, ktorí za príklad získali plný počet bodov.

Riešenie: (opravoval Miťo)
Samotné riešenie sa mohlo uberať jedným z dvoch smerov. Prvá možnosť spočívala v uvedomení si, že aby pavúk prešiel zo stredu jednej steny do stredu nejakej inej, musí sa najprv dostať na hranu. Nájsť potom najkratšiu cestu na hranu bolo väčšinou ľahké. Druhá možnosť využívala, že môžeme povrch pyramídy rozprestrieť do roviny. Najkratšou cestou medzi dvomi bodmi (stredmi) v rovine je úsečka a tak ako predtým, zvyšok bol pomerne ľahký. Teraz si ukážeme obe riešenia vrátane dvoch alebo troch spomínaných zaujímavých úvah, ktoré takmer nikto nerobil.

Pri oboch postupoch prvý krok riešenia spočíva v uvedomení si, kde sa vlastne nachádza stred bočnej steny pyramídy. Za stred trojuholníka sa zvyčajne považuje jeho ťažisko, aj keď býva dobrým zvykom označenie *stred* nepoužívať, aby nedošlo k zbytočným nedorozumeniam. V našom prípade je však trojuholník rovnostranný a teda ťažisko splýva so všetkými ďalšími kandidátmi na stred: priesečníkom výšok, osí uhlov (stredom vpísanej kružnice), osí strán (stredom opísanej kružnice). Všimnime si, že okrem toho, že sme zistili, čo je stred steny, podarilo sa nám tiež získať veľmi veľa informácií o jeho polohe. Niektoré z týchto poznatkov sa nám budú hodiť.

Prvý postup. Pavúk sa nachádza v strede jednej z bočných stien. Aby si mohol ísť pozrieť stred nejakej inej steny, musí opustiť trojuholník, v ktorom sa nachádza. Zo zadania vieme, že sa môže pohybovať iba po povrchu pyramídy, preto musí tento trojuholník opustiť cez hranu. Vieme, že najkratšia cesta z bodu na hranu je kolmica na túto hranu.
Tu sa na chvíľu pristavíme a dokážeme tvrdenie, ktoré sme pred chvíľou tak nenápadne vyslovili: Najkratšia cesta z bodu na hranu je kolmica na túto hranu vedená cez daný bod. Bod označme A a pätu kolmice P. (Kreslite si obrázok.) Skúsme nakresliť nejakú inú cestu z A na hranu, nech táto cesta hranu pretína v bode X. Potrebujeme dokázať, že $|AX| > |AP|$. Určite ste si všimli, že na obrázku nám vznikol pravouhlý trojuholník APX, a keďže sa snažíme dokázať tvrdenie o dĺžkach, mohlo by byť vhodné použiť Pytagorovu vetu. Vyskúšajme, dostávame $|AX|^2 = |AP|^2 + |PX|^2$. A už to skoro máme: keďže $|AP| > 0$, tak $|AX|^2 > |AP|^2$ a preto aj $|AX| > |AP|$.[1] (V skutočnosti sme dokázali, že prepona je vždy najdlhšia strana pravouhlého trojuholníka.) Dalo sa postupovať aj inak, stačí si spomenúť, že v trojuholníku oproti najväčšiemu uhlu vždy leží

[1] Tento zápis má veľa spoločného s nasledujúcou úvahou: Keby $|AX|$ bola menšia ako $|AP|$, bola by jej druhá mocnina menšia ako druhá mocnina $|AP|$ a preto by sa nemohla rovnať druhej mocnine $|AP|$ zväčšenej o niečo ďalšie.

najdlhšia strana, a v našom trojuholníku isto nebude žiadny (iný) uhol väčší ako pravý. Bol náš postup v poriadku? (Nečítajte ďalej, kým neporozmýšľate.) Dôkaz s preponou áno, ale obrázok bol príliš konkrétny, pretože sme bod A nakreslili nad hranu. Ak ho nakreslíme viac bokom,[2] už neplatí, že najkratšia cesta je kolmica. V takejto situácii je najkratšou spojnicou úsečka medzi bodom a bližším koncom hrany. Aj keď táto možnosť v našom príklade nenastáva, je dobré mať na pamäti, že nie vždy všetko funguje tak, ako by sme chceli.

Vráťme sa teda k príkladu a zhrňme si, čo zatiaľ máme. Vieme, že ak sa pavúk chce čo najkratšou cestou dostať na hranu, mal by ísť po kolmici. To vyzerá dobre, veď z hrany už stačí iba prejsť do stredu steny, do ktorej sa dostal, a máme vyhraté. Aj v tejto úvahe však môže nastať problém, a to v prípade, ak cesta z päty kolmice do stredu bude príliš dlhá a „pokazí“ to, čo pavúk ušetril cestou po kolmici.[3] Takáto situácia môže nastať napríklad v prípade, keby chcel pavúk prejsť z nejakého bodu P do nejakého bodu Q cez hranu AB, pričom bod P by bol nad hranou, ale bod Q nie. (Porozmýšľajte, ako by jeho najkratšia cesta vyzerala v tomto prípade.) Avšak opäť, niečo také v našom príklade nenastáva, pretože polohy dvoch stredov stien vzhľadom na hranu sú rovnaké. Inak povedané, ak vezmeme dva rovnostranné trojuholníky so stredmi S_1 a S_2 a spoločnou hranou AB a z oboch stredov spravíme kolmicu na AB, päty týchto kolmíc budú splývať v jeden bod X, stred strany AB.

Teraz si už iba stačí uvedomiť, že cestu dĺžky $|S_1X|$ musí pavúk absolvovať šesťkrát a zrátať túto vzdialenosť. To naozaj nie je ťažké, stačí si nakresliť rovnostranný trojuholník ABC so stredom S a kolmicou cez bod S na stranu AB. (Nakreslite si to.) Priamka CS pretína úsečku AB v bode X, ktorý je zároveň stredom tejto strany, ktorá má zo zadania dĺžku 2 cm. Z Pytagorovej vety platí $|AC|^2 = |AX|^2 + |CX|^2$, z čoho po dosadení dĺžok máme vyjadrenie $|CX| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Keďže CX je ťažnica, môžeme využiť poznatok, že ťažisko – bod S – leží v jednej tretine ťažnice, bližšie k strane. Platí teda $|SX| = \sqrt{3}/3$. Zistili sme, že celková dĺžka pavúkovej cesty je $2 \cdot \sqrt{3}$.

Tu je vhodné poznamenať, že ak budeme uvažovať týmto spôsobom, môže sa nám podariť spraviť dôkaz, v ktorom sa nemusíme zaoberať rozoberaním ciest medzi nesusednými vrcholmi (pozri druhý postup). Kľúčové tvrdenie je takéto: Aby sme navštívili všetky stredy, musíme trikrát odísť z trojuholníka a trikrát doňho prísť. Každá z týchto ciest má dĺžku $2 \cdot \sqrt{3}/3$, čiže nech bude najkratšia pavúkova trasa akákoľvek, jej dĺžka bude aspoň $2 \cdot \sqrt{3}$. Navyše, vďaka tomu, že päty výšok v susedných trojuholníkoch splývajú v jeden bod, vieme pavúkovi poradiť trasu, ktorá má minimálnu dĺžku. (Táto naša trasa minimálnej dĺžky môže byť jedna z viacerých možných.)

Druhý postup. Aj keď je pyramída, ktorú si pavúk obzerá, v priestore, pavúk sa vždy pohybuje iba po jej povrchu, teda v rovine. Pritom keď prechádza cez hranu z jedného trojuholníka do druhého, prechádza zároveň z jednej roviny do druhej. Z toho vyplýva, že pavúkovi neublížime, ak povrch pyramídy rozprestrieme do roviny. Dostaneme tak štyri rovnostranné trojuholníky, z ktorých dva susedné majú vždy totožnú hranu. Spoločnú hranu majú aj prvý s posledným, aj keď na obrázku, ktorý ste si už isto nakreslili, to tak nevyzerá. Podstavu pyramídy sme nemuseli kresliť jednak preto, že na nej je pyramída položená a teda pavúk po nej nemôže chodiť a tiež preto, že každá cesta z jedného stredu steny do druhého je cez podstavu dlhšia, ako podobná cesta (s rovnakými koncami), ktorá podstavu obchádza. Toto si skúste dokázať.

Dobre, náš pavúk teda stojí v strede jednej zo stien a chce sa na pláníku, ktorý sme mu nakreslili do roviny, dostať do nejakého iného stredu. Najkratšia cesta bude v tomto prípade úsečka, vyplýva to z *trojuholníkovej nerovnosti*. (Ak je iná cesta tvorená dvomi úsečkami, môžeme priamo použiť trojuholníkovú nerovnosť. Ak je tvorená viacerými úsečkami, použijeme trojuholníkovú nerovnosť niekoľkokrát za sebou.) Tu môže nastať viacero situácií: buď pavúk bude chodiť iba medzi dvojicami susedných stredov, alebo raz alebo dvakrát pôjde do stredu steny, ktorá je na pláníku vzdialená o dva (teda v pyramíde je oproti), alebo raz dokonca pôjde do stredu ktorý je vzdialený o tri. To, že posledná možnosť je nevýhodná, nechávam na dokázanie hravému čitateľovi, po prečítaní nasledujúcich riadkov (alebo aj predtým) by to nemal byť žiadny problém.

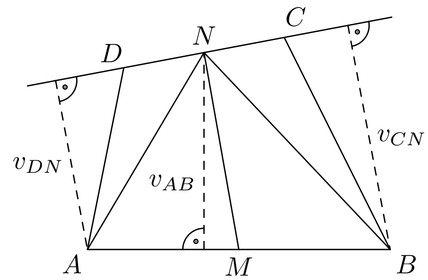
Ukážeme, že cesta, ktorá raz ide do stredu vzdialeného o dva a dvakrát do susedného je dlhšia ako cesta, ktorá ide trikrát medzi susednými stredmi. Obe tieto cesty sa skladajú z troch úsečiek, z ktorých dve majú rovnakú dĺžku, potrebujeme teda iba dokázať, že spojnica stredov vzdialených o dva je dlhšia ako spojnica susedných stredov. Na tento dôkaz nám stačí nakresliť si dobrý obrázok. Na ňom si môžeme všimnúť (po nakreslení dvoch ťažníc), že cesta do vrcholu vzdialeného o dva je rovnako dlhá ako základňa trojuholníka. Pritom táto základňa je dlhšia ako $2 \cdot \sqrt{3}/3$, čo je na základe výpočtu z prvého postupu vzdialenosť dvoch susedných stredov. Hotovo.

Jediné, čo nám ostáva spraviť, je ukázať, že úsečka, ktorá spája dva susedné stredy, naozaj leží na ťažniciach. (Tento fakt sme využili v predchádzajúcom odstavci, skúste nájsť kde.) Toto je ekvivalentné tvrdeniu, že táto úsečka rozpoľuje spoločnú stranu oboch trojuholníkov. Ak si ich vedľa seba nakreslíme, vznikne kosoštvorec, vďaka čomu môžeme tvrdenie opäť preformulovať: daná úsečka leží na uhlopriečke. A dokázať, že oba stredy trojuholníkov ležia na uhlopriečke po krátkom zamyslení iste zvládnete aj sami.

[2] teda tak, aby neležal nad úsečkou, ktorá tvorí hranu

[3] Toto je špeciálny prípad veľmi dôležitého všeobecnejšieho tvrdenia: Bez dodatočných predpokladov najkratší prvý úsek cesty nemusí byť súčasťou najkratšej cesty.

Úloha č. 6: *Na veľkonočnom obruse je už s predstihom nakreslený konvexný štvoruholník $ABCD$. Bod M je stred strany AB a bod N je stred strany CD. Veľkonočný zajačik si (tiež s predstihom) všimol, že úsečka MN rozdelila štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že $ABCD$ je lichobežník.*



Riešenie: (opravovali Zuzka a Miki)
Najskôr sa zamyslime nad tým, čo od nás táto úloha chce. Máme dokázať, že ak konvexný štvoruholník (ľubovoľný) spĺňa danú vlastnosť, potom to musí byť lichobežník. Na začiatku teda uvažujeme o úplne všeobecnom štvoruholníku a postupnými úvahami sa dopracujeme k záveru, že nič iné ako lichobežník to byť nemôže. Je veľmi dôležité uvedomiť si, že nestačí ukázať, že náš štvoruholník $ABCD$ *môže* byť lichobežník. Podstata príkladu je ukázať, že to *musí* byť lichobežník.
Začnime tým, že si nakreslíme pekný obrázok. Predpokladajme teda, že $ABCD$ je ľubovoľný konvexný štvoruholník. Označme $|AB| = a, |CD| = c$. Úsečka MN delí $ABCD$ na dva štvoruholníky, $AMND$ a $MBCN$. Vieme, že ich obsahy sú rovnaké. S obsahmi všeobecných štvoruholníkov sa ale pracuje troška neohrabane, preto si situáciu uľahčíme tým, že si do obrázka dokreslíme úsečky AN, BN. Tým dostaneme štyri trojuholníky (AMN, AND, MBN, BCN). No a obsahy trojuholníkov už počítať vieme. Zrejme platia rovnosti

$$S_{AMND} = S_{AMN} + S_{AND}, \quad S_{MBCN} = S_{MBN} + S_{BCN}.$$

Označme výšku na stranu DN v trojuholníku AND ako v_{DN}, výšku na stranu CN v trojuholníku BCN ako v_{CN} a nakoniec výšku na strany AM, MB v trojuholníkoch AMN a MBN ako v_{AB}. Pre obsahy našich trojuholníkov potom platí

$$S_{AND} = \frac{|DN| \cdot v_{DN}}{2} = \frac{c \cdot v_{DN}}{4}, \quad S_{AMN} = \frac{|AM| \cdot v_{AB}}{2} = \frac{a \cdot v_{AB}}{4},$$
$$S_{BCN} = \frac{|CN| \cdot v_{CN}}{2} = \frac{c \cdot v_{CN}}{4}, \quad S_{MBN} = \frac{|MB| \cdot v_{AB}}{2} = \frac{a \cdot v_{AB}}{4}.$$

Bisťu, všimli ste si to aj vy? Trojuholníky AMN a MBN majú rovnaký obsah! Z toho sa dajú vyvodiť závažné závery.

$$S_{AMN} + S_{AND} = S_{MBN} + S_{BCN}$$
$$S_{AND} = S_{BCN}$$

Teraz je už úloha takmer hotová. Vieme, že obsah trojuholníka určíme ako polovicu súčinu jednej z jeho strán a príslušnej výšky. Keďže platí $|DN| = |NC| = c/2$, pre dodržanie rovnosti obsahov musí platiť aj $v_{DN} = v_{CN}$. To znamená, že vzdialenosť dvoch rôznych bodov priamky AB (bodov $A, B; A \neq B$) od priamky CD je rovnaká, čo je splnené jedine v prípade, že priamky AB a CD sú rovnobežné. Pozor, takéto vyhlásenie môžeme urobiť len vtedy, ak body A, B ležia v jednej polrovine určenej priamkou CD (prečo?). V našom prípade je ale $ABCD$ pekný konvexný štvoruholník, preto môžeme smelo tvrdiť, že body A, B naozaj ležia v jednej polrovine určenej priamkou CD. Tým sme ukázali, že priamky AB, CD sú rovnobežné, teda $ABCD$ je lichobežník.

Komentár: Väčšina z vás si celkom dobre poradila s úlohou. Takmer všetci ste ale zabudli na úvahu o tom, že body A, B ležia v tej istej polrovine určenej priamkou CD. Aj keď sa to môže zdať zbytočné, nie je to tak. Ak by tieto body nespĺňali túto podmienku, celé riešenie nám na tom „spadne“. Preto nezabúdajte na diskusiu. Ďalší problém bol v tom, čo vlastne považujeme za lichobežník. Odpoveď je taká, že v rôznych literatúrach sa stretneme s rôznymi definíciami lichobežníka. Niekde je to jednoducho štvoruholník, ktorého dve strany sú rovnobežné (takúto definíciu spĺňajú aj všetky rovnobežníky), inde nájdeme, že lichobežník je štvoruholník, ktorý má dve strany rovnobežné a dve rôznobežné. Pri zadávaní úlohy sme brali za správnu tú prvú definíciu, teda aj štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec a kosodĺžnik sú špeciálne druhy lichobežníka. Mnohým z vás to spôsobilo pri riešení zmätok a šarapatu. Zadanie malo byť teda zrejme presnejšie sformulované, ospravedlňujeme sa. Nabudúce ale neváhajte a pýtajte sa, ak sa vám čokoľvek v príklade nepozdáva! Presne na to je tu adresa `kms@kms.sk`.

Úloha č. 7: *Zistite a zdôvodnite, či môžu v rovine ležať tri body A, B, C tak, že platí $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2/2$. Ak áno, zistite čo najviac o vzájomnej polohe takýchto troch bodov.*

Riešenie: (opravovali Čermo a Kenny)
Najprv si označme pre zjednodušenie vzdialenosti bodov $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|AB| = c$.
Skúsime zistiť o vzájomnej polohe bodov A, B, C čo najviac — z predpokladu odvodíme nejaké nutné podmienky, ktoré musia body A, B, C spĺňať. Vychádzajúc z nášho vzťahu pre vzájomné vzdialenosti bodov

$$c^2 = 2a^2 + 2b^2 \tag{1}$$

pokúsime sa overiť existenciu bodov A, B, C v najjednoduchších prípadoch. Budeme rozoberať prípady podľa toho, koľko a ktoré vzdialenosti sa budú rovnať. Prvý bude, ak budeme uvažovať všetky vzdialenosti rovnako veľké ($a = b = c$). Rovnosť v (1) nastane len pre nulové vzdialenosti, čo znamená že body A, B, C sú totožné.

Super, našli sme prvé usporiadanie, ktoré vyhovuje zadaniu. Poďme ale ďalej. Ako to bude vyzerať, ak by sa niektoré dve vzdialenosti rovnali? Teraz môžu nastať dva prípady, buď $a = c$ (to isté ako $b = c$) alebo $a = b$. Overte, že prvá možnosť vedie na prechádzajúci prípad (z (1) dostaneme $0 = c^2 + 2b^2$ resp. $0 = 2c^2 + b^2$) a druhá má riešenie $c = 2a = 2b$. Keďže vzdialenosti nespĺňajú trojuholníkovú nerovnosť, netvoria trojuholník. Preto buď ležia na priamke alebo takáto situácia nemôže nastať (napríklad pre vzdialenosti 1, 2, 10). Navyše, c je najväčšia vzdialenosť, preto bude bod C medzi A a B (bod C bude presne v strede úsečky AB).
Ako posledný nám ostal prípad, keď sú všetky vzdialenosti rôzne. Potom aj body A, B, C sú navzájom rôzne. Preto musia spĺňať mierne upravenú trojuholníkovú nerovnosť

$$c \leq a + b.$$

Rovnosť v tejto nerovnosti nastane, ak bod C leží na úsečke AB. Pretože sú vzdialenosti kladné čísla, môžeme nerovnosť umocniť.

$$c^2 \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Z rovnosti (1) môžeme priamo dosadiť c^2 a výsledok upraviť.

$$2a^2 + 2b^2 \leq (a + b)^2$$

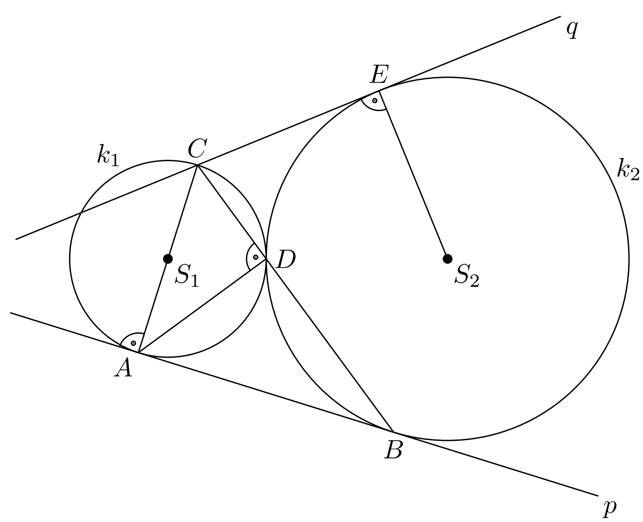
$$(a - b)^2 \leq 0$$

Posledná nerovnosť bude splnená len vtedy, keď $a = b$; tento prípad sme už vyriešili.
Máme teda dve možné usporiadania: body A, B, C sú totožné, alebo bod C je stredom úsečky AB.

Úloha č. 8: *Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v (rôznych) bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.*

Riešenie: (opravovali Rasťo a Feráč)

Prvým krokom pri riešení tejto úlohy bolo uhádnuť, ktoré dve strany trojuholníka ACE sú rovnaké. Po dostatočne presnom narysovaní ste všetci správne usúdili, že to nemôžu byť žiadne iné ako AC a CE. No a ako to dokázať? Postupovali ste viacerými spôsobmi. Našli sa medzi vami aj takí, ktorí si zaviedli súradnicovú sústavu a príklad dokončili analyticky. My si ukážeme pekné geometrické riešenie založené na rovnoľahlosti a mocnosti bodu ku kružnici. Na záver naznačíme iné riešenie, možno trošku priamočiarejšie, vyžadujúce však viac počítania a najmä rozoberania rôznych prípadov.



Prvé riešenie:
Zamyslite sa nad nasledovnou otázkou: vieme sa nejako zbaviť dotyčnice q? Predstavte si, že by body C, D a B ležali na jednej priamke. Potom by sme mohli vyjadriť $|CE|$ pomocou mocnosti bodu C ku kružnici k_2, a to

$$|CE|^2 = |CD||CB|.$$

Tým by sme úlohu redukovali na dôkaz toho, že

$$|AC|^2 = |CD||CB|,$$

čo už nie je príliž zložitá záležitosť. Podľa Tálesovej vety je totiž uhol CDA pravý, čiže D je pätou kolmice z bodu A na priamku CB. Dokazované tvrdenie potom už vyplýva z Euklidovej vety o odvesne použitej na pravouhlý trojuholník ACB.
A prečo by mali byť body C, D, B kolineárne? Keďže sa kružnice k_1 a k_2 dotýkajú, existuje rovnoľahlosť so stredom v ich dotykovom bode D, ktorá zobrazuje k_2 na k_1. Táto zobrazí dotyčnicu p ku kružnici k_2 na s ňou rovnobežnú priamku p', ktorá sa dotýka k_1 v bode B' (obraz pôvodného dotykového bodu B). To je ale možné len vtedy, keď AB' je priemerom k_1 (prípadne $A = B'$, čo je však v tomto prípade vylúčené). Preto nutne $C = B'$. No ale my už vieme, že B', D a B ležia na jednej priamke, vyplýva to priamo z definície rovnoľahlosti. Tým je dôkaz dokončený.

Druhé riešenie:
Označme S_1, S_2 a r_1, r_2 stredy a polomery kružníc k_1 a k_2. Uvedomte si, že hodnotami r_1 a r_2 je situácia určená jednoznačne, preto by sme mali byť schopní pomocou nich vyjadriť $|AC|$ aj $|CE|$. Zrejme $|AC| = 2r_1$. A ako je to s $|CE|$? To vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety z pravouhlého trojuholníka CES_2, konkrétne

$$|CE|^2 = |CS_2|^2 - |S_2E|^2 = |CS_2|^2 - r_2^2.$$

Jediným problémom ostáva vyjadriť $|CS_2|$. To môžeme spraviť buď pomocou kosínusovej vety v trojuholníku CS_1S_2, alebo dvojnásobným použitím Pytagorovej vety, najprv na určenie $|AB|$ a až potom na zistenie samotného $|CS_2|$. Tak či tak, napokon dostaneme

$$|CS_2|^2 = 4r_1^2 + r_2^2,$$

takže naozaj $|CE| = 2r_1 = |AC|$. Pri tomto postupe však treba dávať pozor, pretože v závislosti od pomeru r_1 a r_2 menia niektoré trojuholníky orientáciu (prípadne degenerujú na úsečku), preto je na zisk plného počtu bodov potrebná podrobná diskusia.

Úloha č. 9: *Picasso namaľoval na veľké plátno okrem niekoľkých kociek aj dva trojuholníky, ABC a KLM. Odvtedy však už pár rôčkov uplynulo, obraz podľahol zubu času a z pôvodných trojuholníkov ostali len niektoré body: stred strany BC označený S_{BC}, bod A, priesečník výšok trojuholníka ABC označený V, stred S kružnice vpísanej do trojuholníka KLM a priesečníky osí uhlov MKL a KLM s protiľahlými stranami trojuholníka KLM. Dokážete zrekonštruovať tieto trojuholníky? Múzeum vám poskytne pravítko, kružidlo a ceruzku. Akýkoľvek iný nástroj by mohol obraz poškodiť, preto ho nesmiete použiť.*

Riešenie: (opravovali Aďa a Pišta)
Začneme rekonštrukciou trojuholníka ABC. Ako využiť bod S_{BC}? Keďže máme bod A a bod S_{BC}, tak poznáme polohu ťažiska T, lebo leží v jednej tretine ťažnice bližšie k bodu S_{BC}. To, ako spravíme tretinu úsečky pomocou pravítka a kružidla, asi všetci ovládate zo školy.
Načo nám je ťažisko? Okrem neho poznáme aj polohu priesečníka výšok. Ako súvisia tieto dva body? Nakreslite si trojuholník, v ňom stredné priečky a ťažnice. Nech stredy strán BC, CA, AB sú D, E, F. Ťažnice sú ťažiskom rozdelené v pomere $1:2$, preto body D, E, F sú obrazmi bodov A, B, C v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom $-1/2$. Kam sa zobrazí v tejto rovnoľahlosti priesečník V výšok trojuholníka ABC? Na priesečník O výšok trojuholníka DEF (rozmyslite si presný dôkaz). A čo sú výšky trojuholníka DEF? No predsa osi strán trojuholníka ABC. Inak povedané, bod O je stredom opísanej kružnice trojuholníka ABC. Celé to znamená, že body V, T, O ležia v tomto poradí na jednej priamke. (Táto úvaha funguje pre ľubovoľný trojuholník ABC, až na to, že niekedy niektoré z bodov V, T, O splynú. Kedy?) Táto priamka sa nazýva *Eulerova priamka*. Čo viete navyše povedať o vzdialenostiach $|VT|$ a $|OT|$? Ďalšie zaujímavosti o Eulerovej priamke nájdete v dostupnej literatúre, obráťte sa na knižnicu KMS (`mito@kms.sk`).
Vyzbrojení týmto poznatkom sa môžeme vrátiť k rekonštrukcii trojuholníka ABC. Ak $V = T$, tak aj $O = V = T$. Ak $V \neq T$, tak môžeme nakresliť Eulerovu priamku, na tejto priamke leží aj stred O opísanej kružnice. Keby sme urobili cez bod S_{BC} rovnobežku s priamkou AV, tak by sme dostali os strany BC. Potom bod O dostaneme ako priesečník tejto osi s Eulerovou priamkou. Teraz si nakreslíme priamku BC a to tak, že urobíme kolmicu na priamku AV cez bod S_{BC}. Ak si teraz nakreslíme opísanú kružnicu, tak priesečníky tejto kružnice s priamkou BC dávajú body B a C, pokiaľ tieto priesečníky existujú. Ak neexistujú, tak nás niekto z múzea oklamal, lebo tieto 3 body s týmito vlastnosťami nemohli určovať trojuholník. Teraz predpokladajme, že existujú tie dva priesečníky. Spojením bodov A, B, C dostaneme trojuholník. To je síce pekné, ale v tichosti sme predpokladali, že $A \neq V$, aby sme vedeli nakresliť priamku AV, taktiež sme predpokladali, že $O \neq A$ pri opísanej kružnici. Prípad $O = A$ vedie k tomu, že $A = B = C$, takže to nebude trojuholník, ale iba jeden bod; navyše ak $A \neq S_{BC}$, tak S_{BC} nemôže byť stredom BC.
Ak $A = V = S_{BC}$, tak nutne $B = C = A$, takže sa nejedná o trojuholník. Ak $A = V \neq S_{BC}$, tak Picasso musel nakresliť pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A, potom S_{BC} bude stred opísanej kružnice. Keď si teraz nakreslíme opísanú kružnicu zistíme, že ľubovoľný priemer tejto kružnice neobsahujúci bod A môže byť stranou BC, teda obrázok nemôžeme jednoznačne zrekonštruovať a nejako musíme vysvetliť riaditeľovi múzea, že síce vieme nakresliť takýto trojuholník, ale je malá šanca, že to bude ten istý trojuholník, ktorý nakreslil Picasso.
Poznámka: Iné riešenie sa dá založiť na tom, že obraz priesečníka výšok V v osovej súmernosti podľa priamky BC leží na opísanej kružnici trojuholníka ABC. Skúste to dokázať a potom využiť v riešení.

Teraz prikročíme k rekonštrukcii trojuholníka KLM. Zo zadania vieme, že na plátne zostali tri body: priesečník P_K osi uhla MKL a strany LM, priesečník P_L osi uhla KLM a strany KM a stred vpísanej kružnice S. Ľahko sa presvedčíte, že žiadne z týchto bodov nemôžu splynúť. Poďme teda rekonštruovať.
Vychádzajme z toho, že bod na ramene uhla sa cez os uhla premietne na druhé rameno uhla. Teda P_L môžeme podľa osi uhla MKL zobraziť do bodu U_L a P_K môžeme podľa osi uhla KLM zobraziť do bodu U_K. V prípade, že $U_L \neq U_K$, môžeme viesť priamku týmito dvoma bodmi. Na tejto priamke bude ležať v priesečníku s P_KS bod K a v priesečníku s P_LS bod L. Už máme dva vrcholy; tretí vrchol M dostaneme tam, kde sa pretne P_LK s P_KL.
Netešme sa však predčasne. Touto konštrukciou ešte nemáme ošetrené, že bod S bude ležať vo vnútri vzniknutého

trojuholníka. (Mohol by byť stredom pripísanej kružnice[4]). Preto si uhly $\triangle KLM$ označíme po rade 2α, 2β, 2γ. Potom $|\sphericalangle P_K S P_L| = \gamma + 90°$ (porátali sme uhly, využívame, že súčet uhlov vo vhodných trojuholníkoch je $180°$). Trojuholník KLM je teda konštruovateľný iba vtedy, ak $180° > P_K S P_L > 90°$.
Čo však spravíme, keď body U_L a U_K splývajú do bodu U? Tento prípad nastane vtedy, keď $|\sphericalangle P_K S P_L| = 120°$. To znamená, že pri vrchole M je uhol veľkosti $60°$. Teda si nakreslíme oblúk, z ktorého vidíme úsečku $P_K P_L$ pod uhlom $60°$. Bod M leží na tomto oblúku, avšak vyhovuje iba časť tohto oblúka, lebo priamka MP_K nemusí pretínať polpriamku $P_L S$, takisto je to s priamkou MP_L a polpriamkou $P_K S$. V takomto prípade máme nekonečne veľa riešení a obraz nemôžeme jednoznačne zrekonštruovať. Netreba zabudnúť na dôkaz správnosti konštrukcie: nie je jasné, prečo pre každý bod M na spomínanom oblúku budú priamky SP_L, SP_K osami uhlov trojuholníka KLM.

Poznámka: Iné riešenie sa dalo založiť na tom, že úsečky SP_L a SP_K vidno z bodu M pod uhlom γ. Jeho veľkosť síce nie je zadaná, ale vieme ju ľahko zistiť z veľkosti uhla $P_L S P_K$, ktorá je $\gamma + 90°$. Takto dostaneme bod M ako priesečník dvoch kružníc.

Úloha č. 10: *Vnútri strany AC trojuholníka ABC leží bod D taký, že $|AB| = |CD|$ a uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode E. Dokážte, že priamky AB a DE sú rovnobežné.*

Riešenie: (opravoval Mazo)
Nakreslíme si obrázok. (Spravte to.) Priamka AE je osou uhla. Os uhla má okrem iných vlastností dve často využívané:
1. Os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán, t. j.v našom prípade $CE/BE = AC/AB$. Toto sa dá dokázať niekoľkými rôznymi spôsobmi a pekne na tom vidno súvislosť medzi pomermi, obsahmi a rovnobežnosťou. Uvádzame náčrt dvoch rôznych prístupov, skúste z nich spraviť úplné dôkazy.
Vypočítajte obsah trojuholníkov AEB a AEC dvoma spôsobmi, raz uvažujte výšku z vrchola A a potom výšku z vrchola E. Aký je pomer týchto obsahov?
Iný prístup: Veďme bodom E rovnobežku so stranou AC, jej priesečník so stranou AB označme F. Namiesto pomeru CE/BE môžeme skúmať pomer AF/FB, lebo sú rovnaké. Ako využijeme, že AE je osou uhla BAC?
2. Os uhla, os protiľahlej strany a opísaná kružnica trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. (Skúste si to dokázať.)
Vráťme sa k zadanej úlohe. Čo máme dokázať? Akúsi rovnobežnosť. Tá sa dá veľmi dobre popísať pomocou pomerov: stačí, keď dokážeme, že

$$\frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AD}. \tag{2}$$

Rozmylite si, prečo je to ekvivalentné s rovnobežnosťou priamok AB a DE. Veľkosť pomeru CE/BE poznáme z prvého tvrdenia o osi uhla, platí

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}. \tag{3}$$

Zo zadania vieme, že uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Bez tohto predpokladu priamky AB a DE nemusia byť rovnobežné (nakreslite si príklad), preto tento predpoklad treba použiť v dôkaze. Ako? Nuž, trojuholníky ABD a ACB sú podobné (dve dvojice rovnakých uhlov). (Prezrite si obrázok podrobnejšie a porátajte niektoré ďalšie uhly. Nájdite ešte aspoň jednu dvojicu podobných trojuholníkov.) Takže platí

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD} = \frac{CD}{AD}, \tag{4}$$

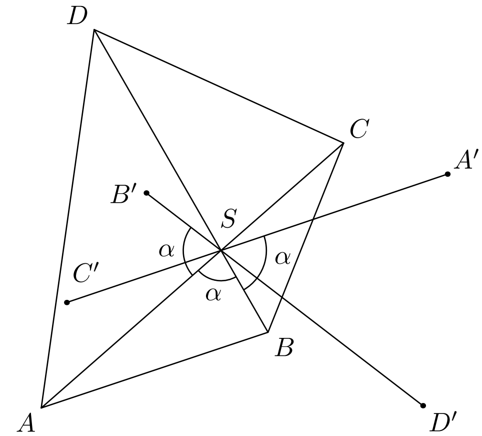
poslednú rovnosť máme zo zadania.
Porovnaním vzťahov (3) a (4) dostaneme vzťah (2) a sme hotoví.

Iné riešenie:
Bodom D vieme viesť rovnobežku s priamkou AB. Označme E' jej priesečník so stranou BC. Os uhla BAC má so stranou BC jediný priesečník E, takže vlastne našou úlohou je dokázať, že bod E' je totožný s bodom E.
Bod E' sme zostrojili tak, aby $DE' \parallel AB$. Preto uhly CDE' a CAB majú rovnakú veľkosť. Zo zadania vieme, že úsečky AB a CD sú rovnako dlhé. Keď sa na tieto úsečky bližšie pozrieme, vidíme, že trojuholníky ABD a DCE' sú zhodné podľa vety *usu.* Z toho vyplýva zhodnosť úsečiek AD a DE', takže trojuholník ADE' je rovnoramenný. Teraz stačí porátať pár uhlov a je jasné, že AE' je osou uhla CAB, preto body E a E' sú totožné.
Všimnite si, ako postupujeme. Vytvoríme si „neskutočný“ bod E', o ktorom vieme čosi iné, než o bode E. S týmto novým bodom sa nám potom ľahšie pracuje. Skúste touto metódou vyriešiť nasledujúcu úlohu:
V rovine sú dané body A, B, C, D tak, aby priamky AB a CD mali priesečník M. Dokážte, že ak platí $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, tak body A, B, C, D ležia na kružnici.

[4]O pripísaných kružniciach si môžete niečo prečítať v knihe Geometrické perličky. Napíšte na `kms@kms.sk`, ak sa chcete dozvedieť viac.

<u>**Úloha č. 11:**</u> *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Označme v tomto poradí A', B', C', D' obrazy bodov A, B, C, D v osových súmernostiach podľa tej uhlopriečky, na ktorej neležia. Dokážte nasledujúce tvrdenia:*
a) Ak $ABCD$ je lichobežník a $A'B'C'D'$ je štvoruholník, tak $A'B'C'D'$ je tiež lichobežník.
b) Ak S je obsah štvoruholníka $ABCD$ a S' je obsah štvoruholníka určeného bodmi A', B', C', D', tak $S' \leq 3S$.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Hanka a Martin)



Vezmime si konvexný štvoruholník $ABCD$ a zobrazme ho na $A'B'C'D'$. Body A a C sa v osovej súmernosti podľa BD zobrazia na A' a C'. Nech S je priesečník uhlopriečok (z konvexnosti vyplýva, že existuje práve jeden vnútri štvoruholníka). Kam sa zobrazí bod S v osovej súmernosti podľa BD? Keďže leží na osi BD, zobrazí sa sám na seba. Úsečka AC sa zobrazí na úsečku $A'C'$, ktorá tiež prechádza bodom S. Navyše $|A'S| = |AS|$ a $|C'S| = |CS|$. Podobne to platí aj pre body B, D a osovú súmernosť podľa osi AC.

Teraz sa pustíme do riešenia prvej časti úlohy. Štvoruholník $ABCD$ je lichobežník. Čo robí lichobežník lichobežníkom? Hneď by nás mali napadnúť dve rovnobežné strany. Skúsme však nájsť nejakú inú vlastnosť, resp. trochu inak a pre náš príklad užitočnejšie popísať túto istú vlastnosť. V lichobežníku $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok S platí, že trojuholníky ABS a CDS sú podobné (vyplýva to priamo z rovnobežnosti priamok AB a CD). Pre ich strany teda platí $|AS|/|BS| = |CS|/|DS|$. Táto podmienka je za predpokladu, že AC a BD sú uhlopriečky a S ich priesečník, ekvivalentná tomu, že $AB \parallel CD$ (zamyslite sa prečo).

Už len poskladať dokopy to, na čo sme doteraz prišli. Štvoruholník $ABCD$ sa nám zobrazí na štvoruholník $A'B'C'D'$, pričom S bude priesečníkom jeho uhlopriečok. Ďalej už vieme, že $|A'S| = |AS|$, $|B'S| = |BS|$, $|C'S| = |CS|$ a $|D'S| = |DS|$, teda $|A'S|/|B'S| = |AS|/|BS| = |CS|/|DS| = |C'S|/|D'S|$. Z toho už pekne vidíme, že $A'B' \parallel C'D'$ (ak nevidíme, prečítame znovu, najlepšie s papierom a ceruzkou v ruke).

V druhej časti máme dokázať niečo o obsahoch. Na obsah všeobecného konvexného štvoruholníka aspoň mňa hneď nejaký ten jednoduchý vzorček nenapadne, tak si ho skúsme odvodiť. Najlepšie taký, čo súvisí s uhlopriečkami. Keď S je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$, vieme povedať $S_{ABCD} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CDS} + S_{DAS}$. Teraz ešte vyjadriť obsahy jednotlivých trojuholníkov. Platí $S_{ABS} = |AS| \cdot |BS| \cdot \sin(|\sphericalangle ASB|)/2$. Podobné vzťahy dostaneme aj pre ostatné trojuholníky. Označme $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD| = \alpha$. Môžeme predpokladať, že $\alpha \leq 90°$. Potom $|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle DSA| = 180° - \alpha$ a keďže platí $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, pre obsah štvoruholníka $ABCD$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (|AS|\cdot|BS| + |BS|\cdot|CS| + |CS|\cdot|DS| + |DS|\cdot|AS|) = \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (|BS|\cdot(|AS|+|CS|) + |DS|\cdot(|AS|+|CS|)) = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot|AC|\cdot|BD|. \end{aligned}$$

Veľkosti uhlopriečok štvoruholníka $A'B'C'D'$ už poznáme. Teraz nás bude zaujímať uhol, ktorý zvierajú. Bod A' je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa BD, preto $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'BS| = \alpha$. Bod B' je obraz bodu B v osovej súmernosti podľa AC, preto $|\sphericalangle ASB'| = |\sphericalangle ASB| = \alpha$. Takže platí $|\sphericalangle A'SB'| = |\sphericalangle A'SB| + |\sphericalangle BSA| + |\sphericalangle ASB'| = 3\alpha$. Tu sme sa dostali na miesto, kde mnohí z vás urobili chybu. Ďalší postup totiž závisí od veľkosti uhla 3α. Aká môže byť?

Pri uhle $\alpha < 60°$ je $3\alpha < 180°$ a teda pri výpočte obsahu môžeme použiť $\sin(3\alpha) = \sin(180° - 3\alpha)$, keďže uhol, ktorý zvierajú priamky $A'C'$ a $B'D'$, je 3α alebo $180° - 3\alpha$ (podľa toho, ktorý je menší, pričom pri vzorci pre obsah je to jedno). Pre obsah štvoruholníka teda bude platiť $S_{A'B'C'D'} = \sin 3\alpha \cdot (|A'C'| \cdot |B'D'|)/2$.

Ak $\alpha = 60°$, potom $3\alpha = 180°$ a body A', B', C', D' budú ležať na priamke. Obsah je teda nulový a daná nerovnosť je splnená.

Pre $90° \geq \alpha > 60°$ je $270° \geq 3\alpha > 180°$. Vtedy uhol, ktorý zvierajú priamky $A'C'$ a $B'D'$, je $3\alpha - 180°$ (tento uhol je nanajvýš $90°$). Preto pre obsah štvoruholníka dostávame $S_{A'B'C'D'} = \sin(3\alpha - 180°) \cdot (|A'C'| \cdot |B'D'|)/2$. Z vlastnosti funkcie sínus vyplýva $\sin(3\alpha - 180°) = -\sin 3\alpha$.

Pre obsah teda dostávame vzťah $S_{A'B'C'D'} = |\sin 3\alpha| \cdot (|A'C'| \cdot |B'D'|)/2$.

Teraz nám ostáva už len posledný krok, a to ukázať, že $S_{A'B'C'D'} \leq 3S_{ABCD}$, na čo stačí ukázať $|\sin 3\alpha| \leq 3\sin\alpha$, keďže $|AC| = |A'C'|$ a $|BD| = |B'D'|$. A to už pomocou pár súčtových vzorcov zvládne každý z vás:

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \cdots = 3\sin\alpha - 4(\sin\alpha)^3.$$

Úloha č. 12: *Nech M je množina slov dĺžky n nad k-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny M.*
Poznámka: Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

Riešenie: (opravovala Erika)
Dokážeme, že množina M má najviac k^{n-1} prvkov. Skúsme toto tvrdenie dokázať sporom. Nech je v M aspoň $k^{n-1}+1$ prvkov. Ukážeme, že v tom prípade sú v M aspoň dve slová, ktoré sa líšia iba v jednom písmene. Rozdeľme slová do skupín podľa toho, ktorým písmenom abecedy začínajú. Takto dostaneme k skupín, z ktorých aspoň jedna má na základe Dirichletovho princípu $k^{n-2}+1$ prvkov. Každé dve slová v tejto skupine sa musia líšiť na aspoň dvoch miestach. Po odmyslení prvého písmena slov tejto skupiny dostaneme $k^{n-2}+1$ slov dĺžky $n-1$. Tieto sa opäť dajú rozdeliť na k skupín, podľa toho, ktorým písmenom začínajú, pričom jedna z množín bude mať minimálne $k^{n-3}+1$ prvkov. Po odmyslení prvého písmena tejto množiny dostávame $k^{n-3}+1$ slov dĺžky $n-2$. Opakovaním tohoto postupu sa dostaneme do situácie, že máme slová dĺžky $n-(n-1)=1$, ktoré sa líšia aspoň v dvoch písmenách, a týchto slov je $k^{n-n}+1=2$. Toto tvrdenie je evidentne nepravdivé a teda náš predpoklad bol nesprávny. Z toho máme, že množina M má najviac k^{n-1} prvkov.
Skúsme teraz nájsť k^{n-1} slov tak, aby tvorili prípustnú množinu M. Namiesto s písmenami abecedy budeme pracovať s číslami $0, 1, \dots, k-1$. Na tieto čísla sa môžeme dívať ako na písmená a keď nájdeme príklad pre číslovú abecedu, tak zrejme substitúciou čísel písmenami vyriešime úlohu aj pre ľubovoľnú inú abecedu. Ako by sme skonštruovali príklad k^{n-1} prvkovej množiny M zo zadania? Vytvorme slová nasledovne. Prvých $n-1$ písmen slov budeme voliť ľubovoľne a posledné písmeno zvolíme tak, aby vlastnosť množiny M platila. Vieme, že možností na výber $n-1$ prvých písmen n-písmenového slova nad k-prvkovou abecedou je k^{n-1}. Posledné písmeno slova určíme jednoznačne, a to ako zvyšok po delení súčtu prvých $n-1$ písmen slova číslom k. Teraz ukážeme, že každé dve takéto slová $x_1x_2\dots x_n$ a $y_1y_2\dots y_n$ z M sa líšia aspoň na dvoch miestach.

1) Ak sa slová líšia aspoň v dvoch písmenách na prvých $n-1$ miestach, vtedy nie je čo dokazovať.

2) Ak sa slová líšia na prvých $n-1$ miestach iba v jednom písmene, treba ukázať, že sa líšia aj na poslednom mieste. Nech sa teda líšia na pozícii i, $1 \le i < n$. Potom

$$x_i - y_i \equiv x_n - y_n \pmod{k}.$$

Keďže $x_i - y_i \neq 0$ a pracujeme iba so zvyškami po delení číslom k, musia aj čísla x_n a y_n dávať po delení číslom k rôzne zvyšky a teda sú rôzne.

Ukázali sme, že množina M má najviac n^{k-1} prvkov a zároveň sme našli príklad množiny, ktorá túto hodnotu dosahuje. Teda množina M má naozaj maximálnu možnú veľkosť n^{k-1}.

Úloha č. 13: *Bod P je vnútorným bodom daného pravidelného mnohouholníka $A_1A_2\dots A_n$. Stredy strán A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 označíme v tomto poradí $M_1, M_2, \dots, M_n$. Dokážte, že*

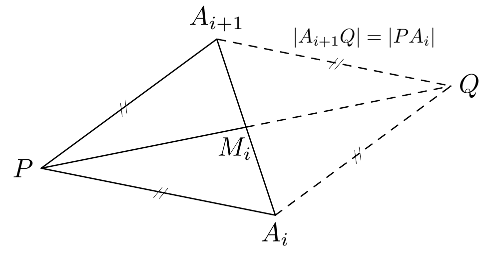
$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i| \ge \sum_{i=1}^{n} |PM_i| \ge \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} |PA_i|\,.$$

Kedy nastáva rovnosť? Skúste nájsť čo najlepší dolný a horný odhad pomeru $\sum_{i=1}^{n} |PM_i| \Big/ \sum_{i=1}^{n} |PA_i|$.

Riešenie: (opravoval Peťo)
Dokážeme najskôr jednoduchšiu ľavú nerovnosť. V akom sú vzťahu dĺžky $|PM_i|$ a $|PA_i|$? Keď situáciu nakreslíme, uvedomíme si, že PM_i je ťažnica v trojuholníku A_iPA_{i+1}, zatiaľ čo PA_i a PA_{i+1} sú jeho strany (pre zjednodušenie zápisu položme $A_{n+1} = A_1$).

Dĺžku ťažnice pritom vieme zhora ohraničiť veľmi jednoducho práve pomocou dĺžok strán. Z obrázka dobre vidieť, že

$$2|PM_i| < |PA_i| + |PA_{i+1}| \qquad (1)$$

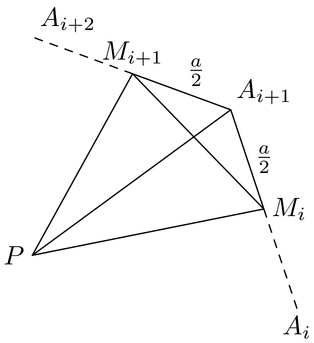


(stačí použiť trojuholníkovú nerovnosť v trojuholníku PQA_{i+1}, pričom Q získame doplnením trojuholníka A_iPA_{i+1} na rovnobežník s uhlopriečkou PQ dĺžky $2|PM_i|$). Sčítaním nerovností (1) pre $i = 1, \dots, n$ dostaneme

$$2|PM_1| + 2|PM_2| + \dots + 2|PM_n| < |PA_1| + |PA_2| + |PA_2| + |PA_3| + \dots + |PA_n| + |PA_1|,$$

odkiaľ po vydelení dvoma máme $\sum_{i=1}^{n} |PA_i| > \sum_{i=1}^{n} |PM_i|$, čo sme chceli dokázať. Vidíme, že v tomto prípade rovnosť nenastáva nikdy.

Teraz dokážeme druhú nerovnosť (podľa *Jakuba Opršala*). V prvej (ľahšej) časti nám pomohlo, že sme rozdelili celú nerovnosť na súčet jednoduchších nerovností. Zbavili sme sa tak znaku sumy, s ktorým sa narába ťažšie. Skúsme niečo podobné urobiť aj tu. Môžeme skúsiť rozdeliť nerovnosť rovnako ako v prvej časti. Avšak to by sme museli dokázať, že $|PM_i| \geq \cos(\pi/n)(|PA_i|/2 + |PA_{i+1}|/2)$, čo sa nám určite nepodarí (keďže táto nerovnosť neplatí pre každú polohu bodu P). Lepší nápad je zobrať dve úsečky PM_i a jednu PA_i, t. j. pokúsiť sa dokázať, že pre každé $i = 1, \ldots, n$ je $|PM_i|/2 + |PM_{i+1}|/2 \geq \cos(\pi/n)|PA_i|$ (tentoraz berieme $M_{n+1} = M_1$).



Po nakreslení obrázka vidíme, že výhodné bude použiť *Ptolemaiovu nerovnosť*[5] (je dobré si ju pamätať, je to jedna z najjednoduchších geometrických nerovností). Jej aplikovaním na štvoruholník $PM_iA_{i+1}M_{i+1}$ a drobnými úpravami dostaneme

$$|PM_i||A_{i+1}M_{i+1}| + |PM_{i+1}||A_{i+1}M_i| \geq |PA_{i+1}||M_iM_{i+1}|,$$
$$|PM_i| \cdot \frac{a}{2} + |PM_{i+1}| \cdot \frac{a}{2} \geq |PA_{i+1}| \cdot a \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$
$$\frac{|PM_i|}{2} + \frac{|PM_{i+1}|}{2} \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot |PA_{i+1}|, \tag{2}$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať. (Ptolemaiova nerovnosť platí aj v prípade, že bod P leží na úsečke M_iM_{i+1}, t. j. keď uvažovaný štvoruholník nie je štvoruholníkom. Premyslite si túto situáciu.) Pri úprave sme využili, že $|M_iM_{i+1}| = a\cos(\pi/n)$. To možno jednoducho odvodiť z kosínusovej vety v trojuholníku $M_iA_{i+1}M_{i+1}$ (keďže vieme, že $|\sphericalangle M_iA_{i+1}M_{i+1}| = \pi - 2\pi/n$) Ešte jednoduchšie to dostaneme z toho, že mnohouholníky $A_1 \ldots A_n$ a $M_1 \ldots M_n$ sú podobné s koeficientom podobnosti $|SM_i| : |SA_i| = \cos(\pi/n)$ (pričom S je stred oboch pravidelných mnohouholníkov), takže aj $|M_iM_{i+1}| : a = \cos(\pi/n)$. Tým je úloha vyriešená (stačí už len sčítať nerovnosti (2) pre $i = 1, \ldots, n$). Rovnosť nastane práve vtedy, keď nastane vo všetkých Ptolemaiových nerovnostiach, teda keď sú všetky štvoruholníky $PM_iA_{i+1}M_{i+1}$ tetivové. To platí len v prípade, keď P je stredom mnohouholníka $A_1 \ldots A_n$ (premyslite si to).

Komentár: Úloha sa dala veľmi elegantne vyriešiť aj pomocou komplexných čísel, ako to urobil *Ondrej Budáč*. Treba si uvedomiť, že vrcholy pravidelného mnohouholníka sa dajú chápať ako čísla $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ v komplexnej rovine, pričom ω je komplexné číslo spĺňajúce $\omega^n = 1$. Ďalšie je vecou šikovných úprav a vhodného využitia „trojuholníkovej nerovnosti“ $|x| + |y| \geq |x + y|$, ktorá pre komplexné čísla platí.
Otázke, aký je najlepší horný a dolný odhad pomeru $\sum_{i=1}^{n} |PM_i| / \sum_{i=1}^{n} |PA_i|$, sa nevenoval nikto. Najlepší dolný odhad sme vlastne v riešení našli — je ním $\cos(\pi/n)$ (ukázali sme, že $\sum_{i=1}^{n} |PM_i| / \sum_{i=1}^{n} |PA_i| \geq \cos(\pi/n)$ a zároveň sme našli prípad, keď nastane rovnosť[6]). S horným odhadom je to náročnejšie. Hypotéza sa dá urobiť pomocou počítača — keď každý vnútorný bod P mnohouholníka $A_1 \ldots A_n$ vykreslíme farbou podľa toho, aká je hodnota skúmaného pomeru (napr. väčšie hodnoty tmavšie, menšie svetlejšie), všimneme si, že najtmavšie sú oblasti okolo vrcholov mnohouholníka. Dá sa teda očakávať, že pomer bude maximálny, keď P bude niektorým vrcholom A_i. Skúste porozmýšľať, ako by sa táto hypotéza dala dokázať.

Úloha č. 14: *Neznámy dobrodinec nám daroval n bielych mačiatok ležiacich v kruhu, prirodzené číslo m a nasledovnú hru. Začneme počítať mačiatka od prvého a keď napočítame do m, presne m-té mačiatko v poradí zafarbíme na fialovo. Pokračujeme podobne ako predtým: začneme počítať od nasledujúceho ($(m+1)$ mod n)-tého :) mačiatka, pričom fialové mačiatka už nepočítame, a keď napočítame do m, dotyčné mačiatko zafarbíme. Takto postupujeme, až kým neostane posledné nezafarbené mačiatko. Jedno biele mačiatko si chceme nechať, ale musíme dopredu, pred začatím farbenia, povedať, ktoré. Zjavne teda nie je jedno, ktoré mačiatko si vyberieme, pretože ho chceme mať biele a nie zafarbené na fialovo.*
a) Majme v kruhu $2n$ mačiatok, prvých n sú mačičky a druhých n sú kocúrikovia. Vieme zvoliť také m, že najprv zafarbíme všetkých kocúrikov?
b) Majme n mačiatok, ktoré už ležia v kruhu. Mačiatko, ktoré sme si vybrali, je na p-tom mieste. Vieme zvoliť m tak, že mačiatko, ktoré sme si vybrali, ostane posledné?

Riešenie: (opravoval Miško)
(Podľa *Ondra Budáča*.)
a) Ak zvolíme $m = (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)$, potom prvý padne kocúrik s číslom $2n$ (spravíme $m/2n$ okruhov a skončíme na kocúrikovi $2n$). Následne začíname rátať od mačiatka číslo 1 a v kruhu už máme len $2n-1$ mačiatok. Keďže $2n-1$ delí m, tak po $m/(2n-1)$ okruhoch skončíme u kocúrika s číslom $2n-1$. Toho zafarbíme a opäť začíname rátať od mačiatka číslo 1. Predpokladajme teraz, že v i-tom ($1 \leq i \leq n$) kroku zafarbíme mačiatko s číslom $2n-i+1$ a následne začneme odpočítavať od mačiatka číslo 1. V $(i+1)$-om kroku zafarbíme mačiatko $2n-i$, pretože v kruhu máme $2n-i$ nezafarbených mačiatok a m je deliteľné číslom $(2n-i)$, teda po $m/(2n-i)$ okruhoch skončíme na kocúrikovi $2n-i$ a toho zafarbíme. Takto po n krokoch zafarbíme všetkých kocúrikov a žiadnu mačičku.

[5] http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfPtolemysInequality.html
[6] Pre dané n je $\cos(\pi/n)$ konštanta, čo znamená, že odhad je naozaj najlepší možný. To je dôležité, lebo vo všeobecnosti vieme každý zmysluplný výraz X odhadnúť zdola výrazom Y takým, že $X \geq Y$ a niekedy sa dosahuje rovnosť. Stačí zvoliť $Y = X$.

b) V riešení využijeme *Bertrandov postulát*[7] , ktorý tvrdí, že ak $n \geq 3$, tak existuje prvočíslo p také, že $n/2 < p < n$. Majme teda takéto prvočíslo p. Vieme, že p delí $n!$, no p^2 nedelí $n!$ (keďže $p > n/2$). Nech $s = n!/p$. Potom zjavne p nedelí s. Zoberme si čísla $s, 2s, 3s, \ldots, ps$. Ak by is a js $(i \neq j)$ mali rovnaký zvyšok po delení p, tak potom by p delilo $is - js = s(i - j)$. Keďže p je nesúdeliteľné s s, tak p musí deliť $(i - j)$. Z toho ale vyplýva, že $i = j$, čo je spor. Teda čísla $s, 2s, 3s, \ldots, ps$ dávajú rôzne zvyšky po delení p a je ich p, teda sa medzi nimi nachádzajú všetky zvyšky po delení p. Položme teraz m postupne $s, 2s, 3s, \ldots, ps$. Označme písmenom x počet nezafarbených mačiatok. Pokiaľ $x > p$, tak sa zafarbovanie správa rovnako ako v prípade a). Vieme, že x delí s a s delí m, teda x delí m. Teda v danom kroku zafarbíme x-té mačiatko a začneme odpočítavať od prvého. Takto postupne zafarbíme mačiatka $n, n - 1, \ldots, p + 1$.

V nasledujúcom kroku, keďže $s, 2s, 3s, \ldots, ps$ majú rôzne zvyšky po delení p, zafarbíme pre každé $m = is$ iné mača a ostane nám $p - 1$ nezafarbených.

V ďalších krokoch však pokračujeme ako predtým. Vždy zafarbíme mačiatko pred tým mačiatkom, ktoré bolo zafarbené v predchádzajúcom kroku (keďže $(p - 1), (p - 2), \ldots, 1$ delia s). Takto nám na konci zostane ľubovoľné mačiatko z mačiatok $1, 2, \ldots, p$, podľa toho, aké m zvolíme (pre iné m nám ostane iné mača).

Čo ale s ostatnými mačiatkami $p + 1, \ldots, n$? Všímnime si nasledujúcu vec. Ak pri odrátavaní $m \leq ps \leq n!$ ostane mačiatko j, tak pri odrátavaní $m' = n! + 1 - m > 0$ ostane mačiatko $n + 1 - j$. Prečo? Uvažujme ako, bude prebiehať farbenie. Nech nám v prvom kroku pri odrátavaní m ostane mača j. Pri odrátavaní m' najprv narátame $n! + 1$ mačiat (teda spravíme $(n - 1)!$ okruhov) a dostaneme sa na to mača, od ktorého sme začínali odrátavať, čiže na mača číslo 1. Potom odrátame m mačiat v opačnom smere. Tým pádom zafarbíme mača $n + 1 - j$, ktoré je symetrické cez stred s mačaťom j. V ďalších krokoch budeme stále zachovávať symetriu. Po odrátaní $n! + 1$ mačiatok sa dostaneme na mačiatko, z ktorého sme začínali a potom opačným smerom odrátame m mačiatok. Skončíme na mačiatku symetrickom cez stred s mačaťom, ktoré by sme zafarbili pri odrátavaní m (vychádzame zo symetrických mačiatok a robíme rovnaký počet odrátavaní, ale opačným smerom, teda skončíme opäť v symetrickým mačatách). Tým pádom ak nám pri odrátavaní m ostane na konci mačiatko j, tak pri odrátavaní m' ostane mačiatko $n+1-j$. A sme na konci riešenia, pretože ak pomocou odrátavaní $s, 2s, \ldots, ps$ vieme dosiahnuť, že na konci ostanú mačatá $1, 2, \ldots, p$, tak pomocou odrátavaní $n! + 1 - s, n! + 1 - 2s, \ldots, n! + 1 - ps$ nám na konci ostanú mačatá $n+1-1, n+1-2, \ldots, n+1-p$. No $p > n/2$, teda $\{1, 2, \ldots, p\} \cup \{n+1-1, n+1-2, \ldots, n+1-p\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ a teda vieme pre každé mača j vybrať také m, aby mača j nebolo zafarbené. Aby bolo riešenie úplne kompletné, potrebujeme ešte vybaviť prípady, keď $n \leq 2$, ktoré sme hneď v úvode riešenia vylúčili (vzhľadom na podmienku v Bertrandovom postuláte). No pre $n \leq 2$ to je jednoduché. Ak $n = 1, j = 1$, potom $m = 1$; ak $n = 2, j = 1$, potom $m = 2$; a ak $n = 2, j = 2$, potom $m = 1$.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Proof_of_Bertrand's_postulate