Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série letného semestra 2005/2006

Úloha č. 1: *Na medzinárodnej olympiáde z matematiky, ktorá sa konala na Galapágoch, sa objavila takáto náročná úloha:* Na štvorčekovom papieri je nakreslený obdĺžnik s rozmermi 2×4, vrcholy má v mrežových bodoch a strany má rovnobežné zo stranami papiera. Vyfarbite štvrtinu z jeho obsahu, môžete pri tom vyfarbovať len celé štvorčeky štvorčekovej siete. Nájdite práve jedno riešenie. *Úlohu zdarne vyriešili všetci účastníci súťaže. Pri kontrole výsledkov organizátori s údivom zistili, že žiadne dve riešenia nie sú rovnaké a nikto nevyfarbil dva štvorčeky, ktoré spolu susedili stranou. Inak sa vyskytli všetky možné riešenia. Zistite počet účastníkov tejto olympiády.*

Riešenie: (opravoval Jakub)
Vzhľadom na to, že ste všetci vyriešili túto úlohu správne, tak nebudem písať toto vzorové riešenie veľmi podrobne. Zo zadania sa dá ľahko vidieť, že v podstate treba zistiť počet dvojíc políčok, ktoré nesusedia hranou. Ak si všimneme jedno políčko, ktoré je v rohu obdĺžnika, tak preň existuje päť ďalších políčok, ktoré s ním môžu byť vo dvojici. Ak si všimneme nerohové políčko, tak preň sú v obdĺžniku ďalšie štyri políčka, ktoré s ním môžu byť vo dvojici. Rohových políčok je 4 a nerohových je takisto 4. Takto dostaneme $4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 36$ dvojíc. Ale každú dvojicu sme týmto spôsobom zarátali dvakrát – rozmyslite si prečo! Takže správny výsledok je $36/2 = 18$.

Komentár: Za povšimnutie stojí to, že úloha sa dala riešiť o dosť jednoduchšie ako vypísaním všetkých možností (tak to robila väčšina z vás).

Úloha č. 2: *Zdôvodnite, prečo pre žiadne prirodzené čísla x, y neplatí $x^2 - 5y = 27$.*

Riešenie: (opravovala Tina)
Pustíme sa do toho pekne poporiadku. Zo zadania úlohy vieme vyčítať, že sa nám nikdy nepodarí nájsť také čísla x a y, pre ktoré bude platiť daná rovnosť. Z tohto dôvodu sa sústreďme na to, kde je háčik a na vysvetlenie, prečo je to tak.
Chvíľku sa dívajme na rovnicu v zadanom tvare. Nevieme z nej veľa vyčítať, no vieme, že nám niečo hovorí o vzťahu čísel x a y. Preto by nám mohlo pomôcť vyjadriť si z nej jedno z nich, možno nám rovnosť v novom tvare napovie, ako postupovať v riešení ďalej. Vyjadrime si najskôr x, po potrebných úpravách rovnice dostaneme, že sa má rovnať výrazu $\sqrt{5y + 27}$. Prirodzené číslo x má byť odmocninou nejakého súčtu. Viete už teraz, čo ďalej? Ak áno, skúste si príklad dopočítať sami. A ak to tak nie je, nevzdávame sa a vyjadríme si y, možno nám bude povedomejší takýto tvar rovnice.
Dostávame rovnosť $y = (x^2 - 27)/5$. To už vyzerá zaujímavejšie. Zlomok sa má rovnať nejakému prirodzenému číslu, čo to znamená? Čitateľ musí byť násobkom menovateľa, aby sme po úprave na základný tvar dostali celé číslo (ak má byť y prirodzené číslo, určite musí byť aj celým). Aké povinnosti z toho plynú pre číslo $x^2 - 27$? Jeho poslednou cifrou musí byť 0 alebo 5, lebo len také čísla sú deliteľné päťkou. Aby tomu tak bolo x^2 musí mať na mieste jednotiek cifru 7 alebo 2.
Pozrime sa teraz ako vyzerajú druhé mocniny prirodzených čísel: **0**, **1**, **4**, **9**, 1**6**, 2**5**, 3**6**, 4**9**, 6**4**, 8**1**, 10**0**, 12**1**, 14**4**, 16**9**, 19**6**, 22**5**, 28**9**, 32**4**... Pravdupovediac, nevyzerá to, že by niektorá z druhých mocnín chcela mať na mieste jednotiek 2 alebo 7. Pozrieme sa do matematických tabuliek, prelistujeme zopár strán s rôznymi prirodzenými číslami a ich druhými mocninami. Pozorne sa zadívame a začíname podozrievať cifry na mieste jednotiek, že sa budú pravidelne opakovať v takomto poradí: 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Vyzerá to, že vždy, keď umocníme na druhú číslo končiace cifrou 0, poslednou cifrou druhej mocniny bude tiež 0. Keď umocníme číslo, ktoré má na mieste jednotiek cifru 3, dostaneme číslo s poslednou cifrou 9. Skúste si, či niečo podbné platí aj pre ostatné cifry. A veru, platí. Začíname tušiť, že posledná cifra čísla x^2 závisí len od poslednej cifry čísla x. Neuspokojíme sa len s týmto tušením a ukážeme si, že je to naozaj tak.
Každé číslo x vieme napísať v tvare Ab, kde b je posledná cifra x a A sú všetky ostatné cifry. Hodnota čísla x je potom $10A + b$. Čo sa stane, keď toto číslo umocníme? Dostaneme $100A^2 + 20Ab + b^2 = 10 \cdot (10A^2 + 2Ab) + b^2$. Číslo $10 \cdot (10A^2 + 2Ab)$ nemá na cifru na mieste jednotiek žiaden vplyv, preto bude posledná cifra x^2 taká istá ako posledná cifra čísla b^2. Za cifru b môžeme dosadiť len jednu z cifier 0, 1,..., 8, 9, preto môže byť poslednou cifrou druhej mocniny len niektorá z cifier 0, 1, 4, 5, 6 a 9. Preto číslo $x^2 - 27$ nebude nikdy deliteľné piatimi a zadaná rovnosť neplatí pre žiadne prirodzené x a y.

Poznámka: Potešení vyrátaním príkladu zo série sa smelo vrhneme na ďalší, veľmi podobný, ktorý si len tak ide okolo: Nájdite dvojicu prirodzených čísel x, y, pre ktorú platí $x^2 - 23y = 6$ Pokúste sa vyriešiť tento príklad, kým budete čítať ďalej.

Už máte? Tak teraz ja. Rovnosť si upravím, $y = (x^2-6)/23$. Vyskúšam všetky cifry, ktoré by mohli byť na poslednom mieste čísla x, umocním odčítam 6. Ani jedno takéto číslo nie je deliteľné 23, to znamená, že nech vyberiem ľubovoľné x, nikdy k nemu nenájdem vhodné celočíselné y, preto takáto dvojica čísel neexistuje. Potom len tak, pre istotu, vyskúšam za x dosadiť 11. A zrazu $(11^2 - 6)/23 = 5$. Akoby to ešte nestačilo, vyskúšam $x = 12$ a čo sa nestane: $(12^2 - 6)/23 = 6$.
Kde sa stala chyba? Niekde v mojej hlavičke, kým som nad príkladom uvažovala. Je pravda, že deliteľnosť piatimi závisí len od poslednej cifry, no nie je tomu tak s každým deliteľom a 23 je jedným z čísel, pre ktoré to neplatí. Napríklad čísla 230 a 50 končia obe cifrou 0, no jedno z nich je číslom 23 deliteľné a druhé nie je. Jedno dáva po delení zvyšok 0 a druhé zvyšok 4. Zvyšok po delení 23. To je ono! Koľko takýchto zvyškov môže byť? No predsa 23, od 0 do 22. A ja som sa vo svojom riešení pozerala iba na desať cifier 0 až 9. To znamená, že som vynechala všetky čísla, ktoré majú po delení 23 zvyšky 10 až 22. Tie by bolo dobré teraz dodatočne overiť.
Túto časť nechám na vás. Napoviem iba, že pre druhú mocninu všetkých takých x, ktoré majú po delení 23 zvyšok 11 (preto vieme nájsť $k \in \mathbb{N}$, aby $x = 23k + 11$) platí: $(23k + 11)^2 = 23k^2 + 2 \cdot 23 \cdot 11k + 121$. Keď od tohto čísla odpočítame 6 a výsledok vydelíme 23, dostaneme $k^2 + 2 \cdot 11k + 6$, čo je, tak ako aj x, prirodzené číslo.
Vedeli by ste teraz napísať riešenie príkladu zo série bez toho, aby ste sa pozerali na to, akou cifrou končia druhé mocniny prirodzených čísel?

Poznámka: Na záver pre vás, ktorým sa predošlé dva príklady zapáčili, tu mám ešte jeden. Snáď sa vám bude páčiť aspoň tak ako mne. Nájdite najmenšie také prirodzené číslo $n > 1$, aby rovnica $x^n - 7y = 17$ mala riešenie v prirodzených číslach (to znamená, že existujú prirodzené čísla x a y, ktoré vyhovujú danej rovnici).

Úloha č. 3: *Máme päť mincí, z ktorých každá má hodnotu jedno euro. Vieme, že tri z nich sú pravé a dve falošné. Falošné mince majú rovnakú hmotnosť, ale nevieme, či väčšiu ako pravé, alebo menšiu. Pravé jednoeurovky majú samozrejme tiež navzájom rovnakú hmotnosť. Na koľko najmenej vážení na rovnoramenných váhach vieme nájsť aspoň jednu pravú mincu?*

Riešenie: (opravovala Aďa)
Začnime tým, čo nám hovorí zadanie. Máme 2 falošné mince a 3 pravé mince. O ich hmotnostiach vieme len to, že falošné vážia rovnako, pravé vážia tiež rovnako. Ale falošné majú inú hmotnosť ako pravé. Preto keď dáme mince na misky váh, zistíme len to, či mince vážia rovnako, prípadne ktorá je ťažšia. Z týchto dôvodov nemá zmysel položiť na misky váh rôzne počty mincí.
Začnime teda vážiť. Kedže chceme položiť na misky rovnaké množstvo mincí, tak môžeme vážiť mince buď po dvoch, alebo po jednej. Čo sa môžeme dozvedieť z jedného váženia?

- keď vážime mince po jednej, zistíme o dvoch minciach či majú rovnakú hmotnosť (teda sú rovnakej pravosti), alebo rôznu.
- keď vážime mince po dvoch, môže nastať tiež rovnosť, alebo nerovnosť, no tu toho vieme ešte viac.
  a) ak nastala rovnosť, musí byť na každej miske 1 pravá a 1 falošná minca. Nakoľko falošné mince sú dve a pravé sú tri, nevážená minca je pravá.
  b) ak nastala nerovnosť, tak na jednej miske musia byť dve pravé a na druhej buď dve falošné alebo 1 falošná a 1 pravá.

To je všetko čo sa dozvieme z jedného váženia. No nestačí nám to na to, aby sme s istotou našli pravú mincu. Poďme vážiť druhý krát.
Povedzme, že sme prvý raz vážili mince po jednej. Zoberme si teraz dve nové mince a položme ich po jednom na misky. Zas mohla nastať buď rovnosť, alebo nerovnosť. Spolu s prvým vážením máme potom 4 možnosti:

(i) nerovnosť–nerovnosť: v tomto prípade boli na váhach prvý aj druhý krát jedna pravá a jedna falošná minca. Zvyšná, ešte nevážená minca bude potom pravá.

(ii) nerovnosť–rovnosť: v tomto prípade pri nerovnosti sme vážili jednu pravú a jednu falošnú mincu. Vo vážení, kde bola rovnosť potom nemohli byt dve falošné, teda to boli dve pravé, takže jednu z nich môžeme pokojne vybrať. Opäť sme našli pravú mincu.

(iii) rovnosť–nerovnosť:tento prípad je rovnaký ako (ii)

(iv) rovnosť–rovnosť: v tomto prípade sú raz na miskách 2 pravé a raz dve falošné, teda pravá minca je tá, ktorú sme nevážili.

To je super, lebo v každej z možností, ktorá môže nastať vieme nájst pravú mincu, teda nám stačia 2 váženia.

Iné riešenie:
Ak ste skúšali vážiť po dve mince, tiež to nebola zlá voľba. Rovnosť pri prvom vážení už máme vyriešenú (netreba druhé váženie). No čo ked je tam nerovnosť? Vezmime z každej misky 1 mincu a vymeňme ich. Teraz ich odvážime (je to druhé váženie). Čo sa môže stať?

(i) ak máme rovnosť znamená to, že predtým boli na jednej miske 2 pravé a na druhej 2 falošné. Nevážená minca je potom určite pravá.

(ii) ak máme nerovnosť opačnú ako na prvom vážení znamená to, že predtým boli na jednej miske 2 pravé mince a na druhej falošná a pravá. Vymenili sme falošnú s pravou. Obe mince, ktorými sme nehýbali sú potom pravé a môžeme jednu z nich vybrať.

(iii) ak máme rovnakú nerovnosť ako na prvom vážení znamená to, že boli na jednej miske 2 pravé mince a na druhej falošná a pravá. Vymenili sme dve pravé mince, jednu z nich môžeme vybrať

Vyčerpali sme všetky možnosti, teda vieme aj v tomto prípade nájst pravú mincu na 2 váženia. Howgh!

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Zábudlivý duch Dušan žije v strašidelnom dome. Tento dom má dva vchody a Dušan má za úlohu strašiť pri práve jednom z nich, zabudol však pri ktorom. Pamätá si len, že pri jeho vchode je vždy párny počet dobrých duchov. Naopak, pri vchode, kde Dušan nemá strašiť, je vždy nepárny počet dobrých duchov. Okrem Dušana sú v dome len dobrí a zlí duchovia, Dušan nie je ani dobrý, ani zlý. Každý dobrý duch hovorí vždy pravdu, každý zlý vždy klame. Dušan sa vybral k jednému z vchodov a tam stretol troch duchov A, B a C, ktorí mu povedali:*

A: Pri tomto vchode je párny počet zlých duchov.

B: Práve teraz je tu nepárny počet duchov. (Vrátane Dušana.)

C: Som dobrý duch práve vtedy, keď A a B maju rovnakú povahu. (Obaja sú dobrí, alebo sú obaja zlí.)

Je Dušan pri svojom vchode? Pozor. A, B a C nemusia byť jediní duchovia, ktorí sú pri tomto vchode.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Dadda a Buggo)
Výrok ducha C sa môže na prvý pohľad zdať vcelku neužitočný. Avšak ak sa mu trošku bližšie prizrieme, zistíme, že táto predstava je mylná. Poďme si rozobrať obe možnosti – keď C hovorí pravdu a keď C klame.

♡ Duch C hovorí pravdu. Potom platí výrok ducha C zo zadania, preto A a B sú rovnakej povahy.

♡ Duch C klame. Potom výrok, ktorý povedal, nemôže byť pravdivý, ale naopak, platí negácia toho výroku. A ako vyzerá jeho negácia? Uvedomme si, že duch C vyslovil ekvivalenciu, teda hľadáme negáciu ekvivalencie. Negácia vyzerá takto: Som dobrý duch a A, B sú rôzni alebo som zlý a A, B sú rovnakí.

Nesmieme zabudnúť, že stále predpokladáme, že C klame. Potom nemôže platiť prvá časť negácie (som dobrý duch a niečo…), lebo C dobrý duch nie je. Preto aby celá negácia platila, musí platiť jej druhá časť – som zlý a A a B sú rovnakí. Toto naozaj platiť môže (lebo C je zlý), preto A a B musia byť rovnakí.

Zistili sme, že či už je C klamár alebo nie, A a B musia byť vždy rovnakej povahy.
Poučení týmto faktom, rozoberme možnosti pre A a B.

♡ Obaja hovoria pravdu. To znamená, že pri tomto vchode je párny počet zlých duchov a zároveň je tam párny počet duchov bez Dušana. Nakoľko rozdiel dvoch párnych čísel je číslo párne, pri vchode je párny počet dobrých duchov a teda Dušan je pri správnom vchode.

♡ Obaja klamú. To znamená, že pri tomto vchode je nepárny počet zlých duchov a zároveň je tam nepárny počet duchov bez Dušana. Nakoľko rozdiel dvoch nepárnych čísel je číslo párne, pri vchode je párny počet dobrých duchov a teda Dušan je opäť pri správnom vchode.

Z uvedeného vyplýva, že aj keď nevieme s určitosťou povedať, ktorý duch je dobrý a ktorý je zlý, Dušan je určite pri svojom vchode.

<u>Komentár:</u>
Výrok ducha C sa dá znegovať aj elegantnejšie, a mnohí ste tak aj spravili. Príklad takejto elegantnej negácie je „Som zlý práve vtedy, keď A a B majú rovnakú povahu."
Niektorí ste výrok ducha C neznegovali správne a za negáciu ste považovali tvrdenie „Som zlý práve vtedy, keď A a B sú rôzni." Toto tvrdenie je však zhodné s pôvodním tvrdením (porozmýšľajte prečo).
Niektorí ste sa do úlohy pustili tak, že ste rozobrali všekty možnosti povahy A a B a podľa toho ste skúmali povahu C. Ale pozor, tam si treba uvedomiť, že ak A aj B sú rovnakej povahy, C môže aj klamať!
Pravopisné okienko: rovnak**í**/zl**í**/dobr**í** duchovia :)

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Máme šachovnicu s rozmermi* 3×3, *v jej strede stojí kráľ. Na ostatné políčka okolo neho sa rozostavujú poddaní, pričom na každom políčku môže byť ľubovoľný počet poddaných. Rozostavujú sa tak, aby ich počet bol rovnaký v oboch krajných riadkoch aj stĺpcoch. Zistite, aké rôzne počty poddaných sa môžu rozostaviť na šachovnicu, ak má byť ich počet v každom z krajných riadkov aj stĺpcov* 19. *Nezabudnite k týmto počtom napísať aj príslušné rozostavenie.*

Riešenie: (opravoval Miško)
Najprv si ohraničme možné počty poddaných na šachovnici. V prvom a aj v treťom riadku musí byť 19 poddaných, naviac tieto dva riadky nemajú žiadne spoločné políčko. Preto musí byť na šachovnici rozmiestnených aspoň 38 poddaných (aby v prvom aj v treťom riadku mohlo byť 19 poddaných). Pozrime sa, koľko ich môže byť na šachovnici rozostavených najviac. Poddaných rozmiestňujeme do dvoch riadkov a dvoch stĺpcov. V každom krajnom riadku a stĺpci je 19 poddaných, teda celkovo môžeme na šachovnicu umiestniť maximálne $4 \cdot 19 = 76$ poddaných. Všimnime si, že uvedené tvrdenia vôbec nehovoria o tom, či daný počet poddaných na šachovnicu naozaj umiestniť ide. Ako teda rozmiestniť poddaných, aby ich na šachovnici bolo 38? Možných rozostavení je veľa, nám však stačí jedno, napríklad toto:

19	0	0
0	K	0
0	0	19

Teraz si všimnime, že počet poddaných na šachovnici vieme jednoduchým spôsobom zväčšiť o 1 na 39.

18	1	0
1	K	0
0	0	19

Čiže v rohovom políčku sme počet poddaných znížili o 1, zatiaľ čo v jeho susedných políčkach sme počet poddaných zvýšili o 1, aby sa zachoval súčet v riadku aj v stĺpci. Takto vieme pokračovať, až v rohovom políčku nebude stáť nikto.

0	19	0
19	K	0
0	0	19

Preto vieme na šachovnicu umiestniť od 38 po 57 poddaných. Teraz to isté začneme robiť aj s poddanými v pravom dolnom rohu.

0	19	0
19	K	1
0	1	18

Čiže budeme opäť zvyšovať počet poddaných až dôjdeme k počtu 76 s nasledujúcim rozmiestením.

0	19	0
19	K	19
0	19	0

Tým je úloha vyriešená, pretože sme ukázali, že počet poddaných musí byť aspoň 38 a zároveň nemôže byť väčší ako 76 a pre každý počet poddaných $38, 39, \ldots, 76$ sme našli požadované rozmiestnenie na šachovnici.

Komentár: Veľa z vás úlohu vyriešilo správne. Najdôležitejšie bolo nájsť maximálny a minimálny možný počet poddaných a nezabudnúť to aj poriadne zdôvodniť (na čo veľa z vás zabudlo).

Úloha č. 6: *Máme šachovnicu s rozmermi 3×3. V dolných rohoch sú dva červené kone, v horných rohoch sú dva modré kone. Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že dva červené kone budú v horných rohoch a dva modré kone budú v dolných rohoch? Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že po diagonálach (uhlopriečkach) budú oproti sebe kone rovnakej farby?*

Riešenie: (opravovali Ika a Jakub)
Po chvíli skúšania si uvedomíme, že pohyb koní po šachovnici je veľmi obmedzený. Na stredné políčko sa nedá skočiť zo žiadneho iného miesta našej šachovnice. Z ostatných políčok môže kôň skočiť práve na dve iné políčka. Navyše všetky políčka, po ktorých môže kôň postupne skákať tvoria jeden cyklus – viď obrázok. Z jedného čísla sa dá skočiť práve na číslo o 1 menšie alebo o 1 väčšie (výnimkou sú 1 a 8, tu možeme skákať z jednotky na osmičku a naopak).

3	8	5
6		2
1	4	7

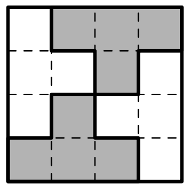
Po tomto zistení si môžeme políčka preusporiadať do radu od 1 do 8, pričom kone sa v tomto rade môžu hýbať vždy iba o jedno políčko doľava alebo doprava („naľavo" od 1 je 8 a „napravo" od 8 je 1).
Teraz si všimnime, že ak do tohto cyklu umiestnime dané štyri kone podľa zadania, na prvé políčko červený kôň 1 (ďalej ho budeme označovať červený1, podobne aj ostatné kone), na tretie políčko modrý1, na piate modrý2

a na siedme červený2. Toto ich poradie v cykle sa už nikdy nezmení, lebo sa môžu pohybovať len o jedna, preto sa nedokážu obísť. To napríklad pre červeného1 znamená, že bude mať najbližšie napravo od seba vždy modrého1 a najbližšie naľavo od seba vždy červeného2.
Takže druhá úloha („po diagonálach sú kone rovnakej farby“) nemôže mať žiadne riešenie, lebo vo výslednom postavení majú oba červené kone najbližšie naľavo aj napravo od seba iba modré kone. To vidno z toho, keď si túto pozíciu prekreslíme do radu.
Prvá úloha sa potom zrejeme dá splniť na 16 ťahov – každý kôň postupne 4-krát skočí o jedno políčko doprava. A navyše z pôvodného a výsledného rozostavenia koní sa dá ľahko určiť, že červený1 musí skončiť na políčku 5 (teda spraví minimálne 4 ťahy), modrý1 musí skončiť na políčku 7 (minimálne 4 ťahy), modrý2 musí skončiť na políčku 1 (min. 4 ťahy) a červený2 musí skončiť na políčku 3 (min. 4 ťahy).
Totiž červený1 nemôže skončiť na políčku 7 (dvomi ťahmi doľava). Potom by musel červený2 skončiť na políčku 5 (dvomi ťahmi doprava). Ale to by oba modré kone skončili medzi nimi na políčku 6 a nie tam, kde majú. Tým sme dokázali, že na menej ako 16 ťahov sa táto úloha vyriešiť nedá.

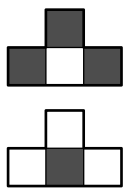
Komentár: : Musíme vás pochváliť, že väčšina z vás si správne domyslela niektoré fakty, ktoré neboli priamo napísane v zadaní. Napríklad: kone skáču do „L“; dva kone nemôžu byť naraz na jednom políčku; nemusíme striedať ťahy červenými a modrými koňmi. Samozrejme hore uvedené riešenie nie je jediné správne (napísali ste aj iné správne riešenia), ale je jedno z najnázornejších.

Úloha č. 7: *V Uhorkovom meste majú neuveriteľne veľa štvorcových námestí so stranou celočíselnej dĺžky. Chcú ich vydláždiť dlaždicami tvaru*
Poznámka: Jednotkový štvorec je štvorec so stranou dĺžky 1.

Riešenie: (opravovali Erika a Peťo)



Keď chvíľu skúšame pomocou dlaždíc predpísaného tvaru vydláždiť nejaké námestia, rýchlo objavíme, že štvorec rozmerov 4×4 sa pokryť dá (pozri obrázok). Odtiaľ je len malý krok k poznaniu, že vieme vydláždiť všetky námestia, ktorých strana je násobkom štyroch – stačí celé námestie rozdeliť na štvorce rozmerov 4×4 a na každý z nich poukladať dlaždice tak, ako na malom námestí 4×4 (ktoré sme v riešení vydláždili ako prvé).
Na druhej strane, žiadne ďalšie námestia (so stranou, ktorá nie je násobkom štyroch) sa nám pokryť nedarí. Pokúsme sa dokázať, že iné námestia už naozaj vydláždiť nevieme. V prípade, že strana námestia má nepárnu dĺžku, ľahko si uvedomíme, že pokrytie nie je možné. Totiž počet jednotkových štvorcov, ktoré treba pokryť, je v takomto prípade nepárny (zamyslite sa, prečo), zatiaľ čo dlaždicami predpísaného tvaru (bez prekrývania a prečnievania) vieme pokryť len územia zložené z párneho počtu jednotkových štvorcov (dokonca musí byť tento počet deliteľný štyrmi, keďže každá dlaždica sa skladá zo štyroch jednotkových štvorcov).
Ostáva teda vyšetriť možnosť, keď strana námestia má párnu dĺžku, ktorá nie je deliteľná štyrmi (teda je tvaru $4k+2$ pre nejaké celé číslo k). Počet jednotkových štvorcov, ktoré v tomto prípade máme pokryť, deliteľný štyrmi je, takže podobný argument ako pri nepárnej dĺžke strany použiť nemôžeme. Zrátajme, koľko dlaždíc by sme na želané pokrytie potrebovali. Pre námestie 6×6 by to bolo $6 \cdot 6/4 = 9$ dlaždíc, pre námestie 10×10 by sme potrebovali $10 \cdot 10/4 = 25$ dlaždíc, atď. Dôležité je všimnúť si, že tento počet vychádza nepárny. Naozaj, aj vo všeobecnosti potrebujeme $(4k+2)^2/4 = 4k^2 + 4k + 1$ dlaždíc, čo je nepárne číslo.



Vyriešme teraz úlohu sporom. Predpokladajme, že sa nám námestie rozmerov $(4k+2) \times (4k+2)$ pokryť dlaždicami podarilo. Ofarbime celé námestie tak, ako šachovnicu, t. j. striedavo čiernou a bielou farbou (a jednotkové štvorce nazývajme odteraz políčka). Zrejme každá z dlaždíc (akokoľvek je umiestnená) pokrýva buď tri čierne a jedno biele políčko, alebo jedno čierne a tri biele (pozri obrázok). Každá dlaždica teda pokrýva nepárny počet čiernych políčok. V predchádzajúcom odstavci sme ukázali, že počet dlaždíc je nepárny. To znamená, že všetky dlaždice, nech sú umiestnené akokoľvek, pokrývajú dokopy nepárny počet čiernych políčok (lebo súčet nepárneho počtu nepárnych čísel je nepárny). Ale koľko čiernych políčok je na celom námestí? Pre konkrétne malé rozmery to ľahko spočítame, napr. pre 6×6 ich je 18 a pre 10×10 ich je 50, vychádza teda párne číslo. Vo všeobecnosti, čiernych políčok je presne polovica (rozmyslite si, prečo), teda $(4k+2)^2/2 = 8k^2 + 8k + 2$, čo je párne číslo. Ukázali sme teda, že nech uložíme dlaždice akokoľvek, zakryjú určite nepárne veľa čiernych políčok, no všetkých čiernych políčok je párne veľa. Z toho vyplýva, že dlaždice nemôžu pokryť celé námestie. Tým je úloha vyriešená.
Vydláždiť sa teda dajú práve tie námestia, ktorých strana je násobkom štyroch, t. j. námestia s rozmermi 4×4, 8×8, 12×12, ...

Poznámka: Kľúčom k vyriešeniu bolo šachovnicové ofarbenie námestia a všimnutie si, že sú dve možnosti, aké políčka môže dlaždica pokrývať. Na základe toho už sa dala úloha doriešiť viacerými spôsobmi. Napríklad, keďže čiernych a bielych políčok je rovnako veľa, musí byť aj dlaždíc oboch typov rovnako veľa (inak by jedna z farieb prevládala), teda ich musí byť párny počet, čo vedie k sporu.

Komentár: Podobný trik (ofarbenie pokrývanej plochy) sa pri úlohách tohto typu používa často. Nie vždy pomôže šachovnicové ofarbenie, niekedy treba plochu ofarbiť zložitejšie, niekedy treba dokonca použiť viac farieb. Je dobré zapamätať si to a nabudúce pri podobnej úlohe niečo také skúšať.

Úloha č. 8: *Sofiine šťastné čísla sú tieto: všetky mocniny čísla* 5*, všetky súčty aspoň dvoch rôznych mocnín čísla* 5 *a číslo* 69*. Raz chcel Miťo zavolať Sofii, no nepamätal si jej číslo. Vedel len, že je to jej* 2006*-te najmenšie šťastné číslo. Pomôžte Miťovi zistiť Sofiine telefónne číslo.*

Riešenie: (opravovali Peťo G. a Miki)
Na začiatku si všimnime, že číslo 69 patrí medzi najmenšie Sofiine štastné čísla – je konkrétne ôsme v poradí – a nič okrem poradia neovplyvňuje, takže naňho zabudneme a hľadáme 2005-te najmenšie šťastné číslo. Najprv si vypíšeme zopár najmenších šťastných čísel dúfajúc, že z toho budeme múdrejší.

$$1, 5, 6, 25, 26, 30, 31, 125, \ldots$$

Z tohto ťažko niečo usúdiť, napíšem ich preto tak, aby bolo vidno, že sčítavame len mocniny čísla 5, možno to bude prehľadnejšie:

$$5^0, 5^1, 5^1 + 5^0, 5^2, 5^2 + 5^0, 5^2 + 5^1, 5^2 + 5^1 + 5^0, 5^3, \ldots$$

Na prvý pohľad to nevyzerá príliš prehľadne. Všimnime si však ako vyzerajú exponenty v jednotlivých číslach. Striedajú sa v určitej pravidelnosti, trocha pripomínajú dvojkovú sústavu. Preto je na mieste troška iný zápis, kde si budeme všímať iba tieto exponenty:

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \ldots$$

Jednotka na i-tom mieste (počítame sprava) znamená, že sa mocnina 5^{i-1} nachádza v súčte tohto čísla a nula znamená, že sa príslušná mocnina 5 v súčte nenachádza (teraz to už dvojkovú sústavu pripomína viac, ale to využijeme trocha neskôr:)).
Teraz by sa patrilo dokázať, že Sofiine čísla sú naozaj usporiadané tak, ako tvrdíme v tomto treťom zápise. Nech a a b sú nejaké dve čísla zapísane tretím spôsobom a $a < b$. Chceme ukázať, že tieto dve čísla zapísané prvým spôsobom budú usporiadané rovnako. Pre korektnosť úvahy si doplňme a na začiatku nulami tak, aby mali rovnaký počet cifier. Prechádzajme si teraz cifry oboch čísel zľava doprava a nájdime prvú, kde sa líšia – tam bude mať b jednotku a a nulu - nech je to na k-tom mieste sprava. Keď odrežeme od oboch čísel spoločný začiatok a vzniknuté si označíme a_1 a b_1, potom že $b_1 \geq 5^{k-1}$ a $a_1 \leq 5^{k-2} + \cdots + 5^0$ – to je prípad, že a už ďalej obsahuje samé jednotky a b samé nuly. Zo súčtu konečnej geometrickej postupnosti ale vieme, že $5^{k-2} + \cdots + 5^0 = (5^{k-1} - 1)/4 < 5^{k-1}$ a tým je to dokázané.
Je to vlastne zápis Sofiiných šťastných čísel v 5-kovej sústave. Keďže sa konkrétna mocnina nemôže nachádzať v nejakom čísle viackrát, tak iné cifry ako 0 a 1 sa v tomto zápise nemôžu vyskytovať. A naopak, v tomto zápise je každé číslo zložené z núl a jednotiek aj Sofiine šťastné.
Už sa nám len stačí pozrieť sa na tieto čísla

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \ldots$$

ako na všetky prirodzené čísla napísané v dvojkovej sústave a z toho hneď vieme, že 2005-te číslo v tejto postupnosti bude 11111010101, pretože $(11111010101)_2 = 2005$. Nakoniec prepočítame toto Sofiine číslo do desiatkovej sústavy a dostaneme $5^{10} + 5^9 + 5^8 + 5^7 + 5^6 + 5^4 + 5^2 + 5^0 = 12203776$.

Úloha č. 9: *Dané sú kladné reálne čísla x, y, z také, že rozdiel každých dvoch z nich má absolútnu hodnotu menšiu ako* 2*. Dokážte, že*

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

Riešenie: (opravovali Zuzka a Kenny)
Vychádzajme z nerovnosti, ktorú chceme dokázať. Všimnime si, že na ľavej strane máme tri odmocniny. Po chvíľke uvažovania môžeme skúsiť pravú stranu nerovnosti nejak upraviť, aby sme pôvodnú nerovnosť mohli upraviť na viacero nerovností. Tým sa okrem iného môžeme zbaviť odmocnín, keďže výraz pod odmocninou je kladný a – ako uvidíme – aj druhá strana nerovnosti bude kladná. Bez odmocnín sa jednoduchšie dopracujeme ku predpokladu. Po chvíľke skúšania si všimneme, že výraz na pravej strane môžeme napísať ako $(2x + 2y + 2z)/2$, čo vieme upraviť na tvar $(x + y)/2 + (y + z)/2 + (z + x)/2$. Teraz môžeme nerovnosť rozdeliť na 3 nerovnosti, pričom druhú a tretiu dostaneme z prvej cyklickou zámenou premenných.

$$\sqrt{xy+1} > \frac{x+y}{2}, \qquad \sqrt{yz+1} > \frac{y+z}{2}, \qquad \sqrt{zx+1} > \frac{z+x}{2}.$$

Poďme teda upravovať prvú nerovnosť. Pripomeňme, že cieľom bude pravdepodobne dostať sa k výrazu $2 > |x-y|$, pretože to je predpoklad zo zadania, ktorý je asi vhodné využiť. :)

$$\begin{aligned}\sqrt{xy+1} &> \frac{x+y}{2},\\ xy+1 &> \frac{(x+y)^2}{4},\\ 4xy+4 &> (x+y)^2,\\ 4xy+4 &> x^2+2xy+y^2,\\ 4 &> x^2-2xyx+y^2,\\ 4 &> (x-y)^2.\end{aligned}$$

Prvú úpravu – umocnenie – sme mohli beztrestne spraviť vďaka tomu, že obe strany nerovnosti sú kladné (lebo x a y sú podľa zadania kladné). Z poslednej nerovnosti už vidíme, že za predpokladu $2 > |x-y|$ tvrdenie platí, keďže všetky naše úpravy boli ekvivalentné (naozaj? overte to!) a z $2 > |x-y|$ (po umocnení) vyplýva, že $4 > (x-y)^2$. Obdobne ukážeme aj z predpokladov $2 > |y-z|$ a $2 > |z-x|$ postupne $\sqrt{yz+1} > (y+z)/2$ a $\sqrt{zx+1} > (z+x)/2$. Keď tieto tri nerovnosti znovu spojíme do jednej, dostávame pôvodnú nerovnosť, ktorú sme mali dokázať.

Poznámka: Je dôležité, aby sme si uvedomili nasledujúce fakty. Keď rozdelíme nerovnosť na nejaké časti, a tieto nebudú osobitne platiť, ešte to neznamená, že pôvodná nerovnosť neplatí. Občas však má zmysel takéto rozdelenie skúsiť, hlavne ak máme nejaké vzťahy medzi premennými, alebo ak sa dostaneme k výrazom, ktoré vyzerajú cyklicky. My sme mali na ľavej strane pod odmocninami postupne x a y, y a z, z a x. Navyše sme v zadaní mali, že rozdiel týchto premenných je menší ako 2. Keďže vzťahy v zadaní boli medzi každou dvojicou premenných, bolo najlogickejšie rozdeliť nerovnosť na tri menšie, pričom v každej z nich bude vystupovať dvojica premenných. A čo sa týka dôkazu – musíme si uvedomiť, že dôkaz vedie od predpokladu ku dokazovanému tvrdeniu, nie opačne. Teda ukázaním, že sa úpravami vieme dostať z našej nerovnosti ku predpokladu ešte nie je dôkaz, musíme ukázať aj to, že sa vieme dostať naspäť – a to zaručujeme ekvivalentnosťou úprav.

Úloha č. 10: *Nech k je prirodzené číslo a $P(x)$ polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že existuje prirodzené číslo n také, že súčet $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)$ je deliteľný číslom k.*

Riešenie: (opravoval Miťo)

Je veľmi pravdepodobné, že hľadané n bude závisieť od stupňa polynómu a/alebo od čísla k. Vyskúšajme preto takéto n nájsť pre konkrétne malé hodnoty k a pre konkrétny polynóm, napríklad $P(x) = x^2+3x+1$. Napíšme si najprv zvyšky, ktoré dáva $P(i)$ po delení číslom k, ukazuje ich tabuľka. (Riadky určujú postupne i, stĺpce k.) Pomocou týchto zvyškov zistíme zvyšky súčtov $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)$, napíšme si preto aj tie. (Po riadkoch sa zvyšuje hodnota n.)

Zvyšky hodnôt $P(i)$.

	2	3	4	5	6	7
1	1	2	1	0	5	5
2	1	2	3	1	5	4
3	1	1	3	4	1	5
4	1	2	1	4	5	1
5	1	2	1	1	5	6
6	1	1	3	0	1	6
7	1	2	3	1	5	1
8	1	2	1	4	5	5
9	1	1	1	4	1	4
10	1	2	3	1	5	5

Zvyšky súčtov.

	2	3	4	5	6	7
1	1	2	1	0	5	5
2	0	1	0	1	4	2
3	1	2	3	0	5	0
4	0	1	0	4	4	1
5	1	0	1	0	3	0
6	0	1	0	0	4	6
7	1	0	3	1	3	0
8	0	2	0	0	2	5
9	1	0	1	4	3	2
10	0	2	0	0	2	0

Ak sa na napísané čísla pozrieme pozoznejšie, ľahko si všimneme, že pre jednotlivé hodnoty k sa zvyšky pravidelne opakujú, čo by sme radi aj dokázali. Potrebujeme ale ešte vedieť, čo vlastne chceme dokázať, teda presne ako často sa zvyšky hodnôt opakujú. Prípad $k = 2$ je zrejme nezaujímavý, no hodnoty $k = 3, 4, 5$ nám prezradia to, čo potrebujeme. (Treba si ešte uvedomiť, že napr. pre prípad $k = 3$ nie je dôležité, že $P(1) = P(2)$. To dôležité je, že sa opakuje postupnosť 2,2,1, ktorá má dĺžku tri.) Vidíme teda, že pre $k = 3, 4, 5$ sa zvyšky hodnôt opakujú postupne po každých troch, štyroch, resp. piatich číslach[1].

Chceme dokázať, že $P(i)$ a $P(k+i)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom k. Nech

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \tag{Υ}$$

[1] Začíname si teda myslieť, že toto opakovanie nezávisí od stupňa polynómu.

Stačí ukázať, že každý člen na pravej strane (Υ) dáva pre i a $k+i$ rovnaký zvyšok po delení k. To znamená, že i^l a $(k+i)^l$ dávajú rovnaký zvyšok pre všetky l. Výraz $(k+i)^l$ je asi trochu zložitejší, ako by sme chceli, zjednodušiť ho vieme pomocou Binomickej vety, dostávame

$$(k+i)^l = \binom{l}{0}k^l + \binom{l}{1}k^{l-1}i + \binom{l}{2}k^{l-2}i^2 + \cdots + \binom{l}{l-1}k^1 i^{l-1} + \binom{l}{l}k^0 i^l. \qquad (\wr)$$

Keďže $k^0 = 1$, tak v rozvoji ($\wr$) sú všetky členy okrem posledného deliteľné číslom k. Pritom posledný člen je i^l, čo sme chceli ukázať.
Čo toto opakovanie znamená pre naše súčty? (Porozmýšľajte.) Časť súčtu od $k+1$ po $2k$ bude dávať rovnaký zvyšok ako časť od 1 po k, označme zvyšok tohto čiastočného súčtu ξ[2]. Podobne aj časti od $2k+1$ po $3k$, od $3k+1$ po $4k$,... budú dávať zvyšok ξ. Preto najjednoduchšie, čo môžeme spraviť, je vziať takýchto čiastočných súčtov k, súčet ich zvyškov potom bude $k \cdot \xi$, čo je deliteľné číslom k. Takýto počet súčtov dosiahneme, ak za n zvolíme k^2. Hotovo.

Poznámka: Vzťah $(k+i)^l \equiv i^l \pmod k$[3] vlastne znamená, že postupnosť zvyškov hodnôt polynómu je periodická. Zároveň ho vieme dokázať aj bez použitia Binomickej vety – keďže $(k+i) \equiv i$, tak túto rovnosť nepokazíme, ani keď ju umocníme na l.
Postupovať sa dalo aj trochu inak, s využitím faktu $(b-a)|P(b)-P(a)$, ktorý nie je ťažké dokázať. Odporúčame vám vyskúšať si aj tento postup.

Komentár: Niektorí z vás sa pri riešení potýkali s problémom, ako nájsť súčet prvých n k-tych mocnín, resp. ako ukázať, že tento súčet je racionálnym násobkom čísla n. Niektorý zo spôsobov, ako tento súčet nájsť je v mnohých bežných knihách. (Dobre spracovaná je táto téma napr. v L. Larson: Metódy riešenia matematických problémov; J. Herman, R. Kučera, J. Šimša: Metódy riešenia matematických úloh I; alebo R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: Concrete mathematics. Všetky tieto knihy sú aj v Knižnici KMS a teda k dispozícii aj pre vás – `kms@kms.sk`.) Oba problémy sú zaujímavé, pričom druhý je o poznanie ťažší, hlavne preto, že nie je známy.

Niektorým z vás príklad nerobil veľké ťažkosti, preto vám ponúkame dva problémy s podobnou tématikou, vyskúšajte ich vyriešiť.
1. O polynóme $P(x)$ s celočíselnými koeficientami vieme, že pre 5 rôznych celých čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 platí $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = P(a_5) = 3$. Dokážte, že pre žiadne celé číslo t neplatí $P(t) = 8$.
2. Dokážte, že ak $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami a existuje prirodzené k, ktorým nie je deliteľné žiadne z čísel $P(1)$, $P(2)$,...,$P(k)$, tak $P(x)$ nemá celočíselný koreň.
3. Nech $P(x)$ je taký polynóm, že $P(2)$ je deliteľné piatimi, $P(5)$ je deliteľné dvoma. Dokážte, že $P(7)$ je deliteľné 10.

Úloha č. 11: *Bača má v stáde 101 oviec. Ak z nich vyberie ľubovoľných 100, vždy ich vie rozdeliť na 2 skupiny po 50 oviec tak, aby súčty hmotností oviec v jednotlivých skupinách boli rovnaké. Dokážte, že každé dve bačove ovce vážia rovnako.*

Riešenie: (opravovali Hanka a Mazo)
Najprv si len tak nezáväzne všimnime, že keď máme ovce s nejakými hmotnosťami a každú z tých hmotností vynásobíme nejakým nenulovým číslom, alebo k nej nejaké číslo pričítame, vlastnosť zo zadania nijako nepokazíme. Ak sme ovce vedeli rozdeliť predtým, vieme ich rozdeliť aj teraz a to presne tak isto. Ak sme ich nevedeli rozdeliť predtým, tak ich nevieme ani teraz (zamyslite sa, prečo to platí).
Zaoberajme sa najprv jednoduchšou situáciou. Vezmime si takých 101 oviec, aby hmotnosť každej z nich bolo prirodzené číslo. Poďme v takto zjednodušenej úlohe dokázať sporom, že všetky ovce majú rovnakú hmotnosť.
Nech medzi našimi ovečkami je nejaká s „párnou hmotnosťou“ a nejaká s „nepárnou hmotnosťou“. Rozdeľme ich teraz do dvoch košiarov, v prvom budú tie s párnymi hmotnosťami, v druhom tie s nepárnymi hmotnosťami. V každom košiari bude aspoň jedna ovca. Keďže oviec je nepárny počet, tak bude buď tých v prvom košiari, alebo tých v druhom košiari, nepárny počet.
Čo to znamená pre nás? Vždy vieme vybrať nejakú ovečku tak, aby v druhom košiari ostal nepárny počet oviec. Keď teraz ostatných sto chceme rozdeliť na dve rovnako vážiace 50-tice, nepodarí sa nám to.(Rozoberte dva prípady). Preto na začiatku musela byť parita hmotností všetkých ovečiek rovnaká.
Ešte to nie je úplne hotové, ale už sme blízko. Na otázku „čo ďalej?“ odpovie nasledujúca básnička:

Do práce sa rýchlo dáme,
všetky ovce ostriháme.
Až ostane jedna – chúďa,
ktorej hmotnosť bude nula.

V preklade to znamená, že si vyberieme najľahšiu ovečku a jej hmotnosť odčítame od všetkých oviec. Ona teda bude mať nulovú hmotnosť a všetky ostatné nezápornú. Z predošlej úvahy vieme, že všetky hmotnosti musia mať

[2] Malé xí je jedno z najkrajších gréckych písmen.
[3] Takúto rovnosť čítame ako „je kongruentné“, alebo „je ekvivalentné“, alebo jednoducho iba „dáva rovnaký zvyšok ako“. Je to skrátený zápis vlastnosti, ktorú sme v riešení vypisovali slovne.

rovnakú paritu, a teda sú párne. Čo sa stane, keď tieto hmotnosti vydelíme dvoma? Ako sme si povedali v úvode, nič to nepokazí na pôvodnej vlastnosti, a teda našu úvahu môžeme zopakovať znovu. A znovu. Aby to celé fungovalo tak, ako má, musia byť hmotnosti ovečiek deliteľné dvomi až do nekonečna, takže to musia byť nuly.(Túto úvahu si dobre rozmyslite!)
Tým sme ukázali, že keď máme ovečky s celočíslenými hmotnosťami, tak musia byť tieto hmotnosti rovnaké.
Čo sa stane, ak budú hmotnosti racionálne? Vieme ich vynásobením upraviť na prirodzené čísla. Pre túto situáciu sme tvrdenie práve dokázali, takže nám ostávajú už len iracionálne čísla (ovečku s komplexnou hmotnosťou si neviem veľmi predstaviť, ale funguje to aj pre ne).
Pozrime sa zbližšia na reálne hmotnosti našich oviec (nikdy by som nepovedala, že raz napíšem takúto vetu `:)`). Ako môžu vyzerať? No keby to boli napríklad všetko $\sqrt{2}$-násobky racionálnych čísel, tak to už vieme, nie? Lenže vo všeobecnosti nebudú. Skúsme si preto zapísať hmotnosti všetkých našich ovečiek ako súčet racionálnych násobkov nejakých škaredých čísel (1, $\sqrt{2}$, π,...). Od týchto škaredých čísel navyše budeme požadovať, aby sa žiadne z nich nedalo zapísať ako súčet racionálnych násobkov ostatných škaredých čísel.
Nie je jasné, že takáto netriviálna množina M škaredých čísel vôbec existuje. Vezmime na začiatku množinu M, ktorá obsahuje všetky hmotnosti oviec. Ak sa nejaké číslo z tejto množiny dá zapísať ako súčet racionálnych násobkov ostatných, z M ho vyhodíme. Toto opakujeme, kým všetky čísla z M nemajú požadovanú vlastnosť.
Načo je dobrá množina M? Ak vieme nejaké reálne číslo vyjadriť ako súčet racionálnych násobkov prvkov množiny M, tak toto vyjadrenie musí byť jednoznačné. (Ak by sme mali dve rôzne vyjadrenia, ich odčítaním dostaneme súčet racionálnych násobkov niektorých čísel z M rovný 0. To by znamenalo, že niektoré číslo z M sa dá napísať ako súčet racionálnych násobkov ostatných čísel z M.)
Navyše vieme hmotnosť každej ovce (aj skupiny oviec) zapísať ako súčet racionálnych násobkov čísel z množiny M. Nech m je niektoré číslo z množiny M. Majme dve skupiny oviec s rovnakou hmotnosťou H. Hmotnosť každej ovce z prvej skupiny má vo svojom zápise pomocou čísel z M nejaký koeficient pri čísle m. Číslo H je súčtom hmotností oviec v prvej skupine, preto koeficient pri m v zápise čísla H je súčtom koeficientov pri m v zápisoch hmotností jednotlivých oviec z prvej skupiny. Taká istá úvaha funguje aj pre druhú skupinu. Z jednoznačnosti zápisu čísla H dostávame, že súčty koeficientov pri m pre ovce z prvej a druhej skupiny sa rovnajú. Tieto koeficienty sú racionálne a funguje to rovnako pre výber ľubovoľnej ovce a rozdelenie zvyšných na dve rovnako veľké skupiny. Nepripomína vám to niečo? Áno, problém, ktorý sme už vyriešili kdesi vyššie.

Poznámka: Každé rozdelenie oviec na dve skupiny sa dá popísať lineárnou rovnicou, kde neznáme sú hmotnosti našich oviec a koeficienty sú 0 (ovca mimo), 1 (ovca v prvej skupine), -1 (ovca v druhej skupine). Takže máme sústavu 101 rovníc so 101 neznámymi. Stačí ukázať, že jediným riešením tejto sústavy sú reálne násobky riešenia $(1, 1, \dots, 1)$. To spravíme tak, že vhodne sčítavame a odčítavame rovnice a sledujeme paritu koeficientov pri jednotlivých neznámych. Riešenie vyžaduje isté znalosti o sústavách lineárnych rovníc, preto ho tu neuvádzame. Ak oň máte záujem, napíšte na `mazo@kms.sk`.

Úloha č. 12: *Nech ABC je trojuholník ($|AB| < |BC|$) a S stred kružnice doňho vpísanej. Označme M stred úsečky AC a N stred toho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý obsahuje bod B. Dokážte, že uhly SMA a SNB majú rovnakú veľkosť.*

Riešenie: (opravoval Foto)
Riešenie podľa *Michala Takácsa.*
Keďže N je stred oblúka AC, je zrejmé, že trojuholník ACN je rovnoramenný a MN je os strany AC. Známou vlastnosťou každého trojuholníka je, že os vnútorného uhla pretína os protiľahlej strany na opísanej kružnici. Tí z vás, pre ktorých bola táto známa vlastnosť doteraz neznámou, si ju určite hravo a radi dokážu pomocou vety o obvodovom uhle. Vieme teda, že os uhla ABC, priamka MN a opísaná kružnica sa pretínajú v jednom bode. Nazvime ho P. Zjavne NP je priemerom opísanej kružnice, čiže uhol NBP je pravý.
V riešení využijeme ešte jednu známu vlastnosť každého trojuholníka a síce, že

$$|AP| = |SP| = |CP| = \frac{b}{2\cos\frac{\beta}{2}}\,.$$

Táto sa dá tiež hravo dokázať pomocou obvodových uhlov.
Pätu kolmice z S na AC označme Q, polomer vpísanej a opísanej kružnice nazvime ρ a R. Ľahko nahliadneme, že $|SQ| = \rho$ a $|AQ| = s - a$, kde s označuje polovicu obvodu[4] trojuholníka ABC, čiže $s = (a + b + c)/2$. Ďalej $|AM| = b/2$ a teda

$$|QM| = \frac{b}{2} - s + a = \frac{a-c}{2}\,.$$

Nech T je päta kolmice z S na NP. Potom $STMQ$ je obdĺžnik, preto $|ST| = |QM| = (a-c)/2$. Navyše trojuholníky BNP a TSP majú jeden uhol spoločný a sú pravouhlé, čiže sú podobné. Platí teda

$$\frac{|SP|}{|ST|} = \frac{|NP|}{|BN|}\,\frac{\frac{b}{2\cos\frac{\beta}{2}}}{\frac{a-c}{2}} = \frac{2R}{|BN|}|BN| = \frac{2R(a-c)\cos\frac{\beta}{2}}{b}\,.$$

[4]v angličtine sa táto hodnota nazýva semiperimeter

Trojuholníky SBN a SQM sú pravouhlé, našim cieľom bude dokázať, že sú podobné. Čiže chceme dokázať

$$\frac{|BN|}{|BS|} = \frac{|QM|}{|QS|},$$

čo je ale ekvivalentné s nasledujúcimi rovnosťami

$$\frac{\frac{2R(a-c)\cos\frac{\beta}{2}}{b}}{\frac{\rho}{\sin\frac{\beta}{2}}} = \frac{\frac{a-c}{2}}{\rho}\,\frac{2R(a-c)\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{b} = \frac{a-c}{2}\,\frac{b}{\sin\beta} = 2R\,,$$

z ktorých posledná je opäť známou vlastnosťou každého trojuholníka vyplývajúca zo sínusovej vety. Suma sumárum, máme Č.B.T.D.

Iné riešenie:
Dokreslíme si bod P ako v predošlom riešení. Uhol NBP je pravý. Uhol SMA sa nachádza pri ťažnici v trojuholníku SCA. Preto sa jeho veľkosť ťažko vyjadruje pomocou uhlov α, β. My však tú veľkosť nepotrebujeme. Stačí nájsť trojuholník SDE podobný s trojuholníkom SCA, v ktorom je SNB uhlom pri ťažnici SN. Preto body D, E musia ležať na priamke BN. Nech D, E sú priesečníky priamky BN s priamkami AS, CS. Trojuholníky SDE a SCA sú podobné, dokážeme to porátaním uhlov s využitím vlastností osí uhlov (vieme, aké uhly zvierajú okolo bodu S) a toho, že uhol NBP je pravý.
Dokazujeme, že bod N je stredom úsečky DE. Po porátaní veľkostí niekoľkých ďalších uhlov zistíme, že uhly DCE a DAE sú pravé. Nech F je priesečník priamok EA a DC. Ukážeme, že F leží na priamke BS. Vyplýva to z toho, že keď vezmeme bod G ako bod stredovo súmerný s bodom S podľa stredu P, tak úsečka GS je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ASC (pretože P je stred tejto kružnice). Takže uhly SCF, SAF nad priemerom SG sú pravé. Preto bod G je totožný s bodom F.
V trojuholníku DEF sú body A, B, C pätami výšok. Preto kružnica opísaná trojuholníku ABC je Feuerbachovou kružnicou v trojuholníku DEF. Bod N je jej druhý priesečník so stranou DE, preto je to stred strany DE. Hotovo.

Pozrite si to riešenie, obsahuje niekoľko poučných nápadov. Navyše ukazuje, že niekedy treba veľa viery v správnosť postupu, pretože riešenie nevidno hneď a pozostáva z viacerých krokov. Napríklad tu v tomto riešení si môžeme po prečítaní prvého odstavca všimnúť, že štvoruholníky $ASBE$, $CSBD$, $DCAE$ sú tetivové. To nám dodá nádej. Proste tá konfigurácia je tak dobrá, že z nej niečo vyjsť musí. Najmä, keď je jasné, čo dokazujeme.

Úloha č. 13: *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y, pre ktoré platí*

$$3^x = y \cdot 2^x + 1.$$

Riešenie: (opravovala Hanka)
Najprv sa trocha pohráme. Skúsime nájsť aspoň jedno riešenie. To nám okrem iného povie, že nebude existovať žiaden triviálny dôvod, prečo by rovnica nemala riešenie. Príkladom takého dôvodu sú rôzne zvyšky strán rovnice po delení tromi.
Pravá strana našej rovnice je vždy nepárna. Aj ľavá. Toto nám nedá žiadnu informáciu o číslach x, y. Skúsime (inšpirovaní pravou stranou) vyššiu mocninu dvojky. V prípade $x = 1$ dostávame $y = 1$ a máme jedno riešenie rovnice. Ak $x \geq 2$, tak pravá strana je deliteľná štyrmi. Aj ľavá musí byť, a z toho máme, že číslo x je párne. (Ostatné výsledky hrania nebudeme v tomto riešení potrebovať.)
Naša rovnica má dve celočíselné neznáme. Jednej z nich sa vieme ihneď zbaviť:

$$y = \frac{3^x - 1}{2^x}.$$

Takže hľadáme také párne prirodzené čísla $x \geq 2$, že $2^x \mid 3^x - 1$.
Všimnime si výraz $3^x - 1$. Akou najväčšou mocninou dvojky je deliteľný? Ak by napríklad nebol deliteľný 32, tak stačí vyskúšať $x \leq 4$. Ku každej mocnine dvojky však nájdeme x, pre ktoré je výraz $3^x - 1$ deliteľný touto mocninou dvojky. Skúsme. Číslo $3^2 - 1$ je deliteľné 8. Potom číslo $3^4 - 1 = (3^2 - 1)(3^2 + 1)$ je deliteľné 16, $3^8 - 1$ je deliteľné 32,...[5]
Vráťme sa k našej úlohe. Dá sa číslo $3^x - 1$ rozložiť na súčin? Vieme, že x je párne, teda $x = 2k$ pre nejaké prirodzené číslo k. Potom $3^x - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1)$. Čísla $3^k - 1$, $3^k + 1$ sú za sebou idúce párne čísla, preto jedno z nich nie je deliteľné 4 a teda delí ho nanajvýš jedna dvojka. Všetky ostatné dvojky z čísla 2^{2k} musia deliť druhé zo spomínaných po sebe idúcich čísel. Preto $2^{2k-1} \leq 3^k + 1$ (rozmyslite si, odkiaľ sa to zobralo). A z poslednej nerovnosti je jasné, že ju môže spĺňať len niekoľko malých k (jednoriadkový dôkaz si spravte sami). Tie vyskúšame a dostaneme riešenia $(2, 2)$ a $(4, 5)$.

[5] Existencia vhodného exponentu vyplýva aj z Eulerovej vety, ktorá hovorí, že ak prirodzené čísla a a n sú nesúdeliteľné, tak $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. V našom prípade zvolíme $a = 3$, $n = 2^x$.

Poznámka: Vyriešte rovnicu $x^y = 1 + 5 \cdot 3^y$ v obore prirodzených čísel. Skúste nájsť viac postupov.

Úloha č. 14: *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokážte, že*

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Riešenie: (opravoval Mazo)
Výraz na ľavej strane nerovnosti označme V. Chceme ho zdola odhadnúť konštantou. Chceme čo najlepší odhad, takže by mala niekedy nastávať rovnosť. Rovnosť obyčajne nastáva v krajných bodoch alebo ak sú všetky premenné rovnaké. Vyskúšame, rovnosť nastáva pre $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ a asi nikdy inokedy. Medzitým sme z väzby zistili, že čísla a, b, c sú z intervalu $(0, 1)$ a preto všetky ďalšie úvahy budeme robiť na tomto intervale.
Nemá veľký zmysel roznásobovať nerovnosť. Konštanta na pravej strane z niečoho vyjsť musí a len tak zadarmo to nebude. Navyše výraz V sa vôbec nepodobá na väzbu. Väzba $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ je stupňa 2 a niet ju kam dosadiť, aby sme zhomogenizovali nerovnosť. Takže budeme skúšať niečo iné.
Prvé riešenie: Ako sa dá použiť väzba? Ak by sa nám podarilo dokázať, že na intervale $(0, 1)$ platí

$$\frac{a}{1-a} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}\, a^2, \tag{1}$$

tak stačí sčítať takéto nerovnosti pre a, b, c a máme tvrdenie dokázané. Problém je, že nerovnosť (1) neplatí. Najľahšie sa o tom presvedčíte tak, že nájdete konkrétne a, pre ktoré neplatí.
Ale idea je to dobrá. Možno treba trocha upraviť výraz $a/(1-a)$ a už to pôjde. Z niekoľkých možných úprav vyskúšame tú, ktorá menovateľ výrazu upraví na čosi podobné väzbe. (Môže a nemusí to viesť k riešeniu.)

$$\frac{a}{1-a} = \frac{a\cdot(1+a)}{(1-a)\cdot(1+a)}\frac{a\cdot(1+a)}{(1-a)\cdot(1+a)} = \frac{a+a^2}{1-a^2}\frac{a+a^2}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2}+\frac{1+a^2-1}{1-a^2}\frac{a}{1-a^2}+\frac{1+a^2-1}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^2}-1$$

Vyzerá to horšie ako predtým. Pozrime sa však na to po častiach. Ako nájdeme dolný odhad výrazu

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}\,?$$

Napíšte si nerovnosť medzi harmonickým a aritmetickým priemerom pre tri čísla. Okrem iného sa dá napísať v tvare

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Hociktorý z výrazov na ľavej strane vieme odhadnúť zdola pomocou druhého výrazu. Dosaďme $x = 1-a^2$, $y = 1-b^2$, $z = 1-c^2$ a použime väzbu. Dostaneme

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Vieme teda, že

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} - 3 \geq \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{3}{2}\,.$$

Teraz na odhad členov v tvare $a/(1-a^2)$ stačí metóda zo začiatku odstavca, dokážeme, že na intervale $(0, 1)$ platí

$$\frac{a}{1-a^2} \geq 3\sqrt{3}\, a^2.$$

To stačí na dôkaz celej nerovnosti. Pri dôkaze poslednej nerovnosti dostaneme kubický mnohočlen s premennou a. Ten treba rozložiť na súčin; pomôže nám pri tom, že vieme, kde nastáva rovnosť. Tá rovnosť musí nastať aj v našom odhade, takže poznáme jeden koreň nášho mnohočlena.
Druhé riešenie: Vylepšíme metódu z prvého riešenia. Na prvé prečítanie vám to možno príde komplikované, ale myšlienka je pekná a užitočná, nedajte sa odradiť.
Najprv trocha upravíme výrazy na ľavej strane, ku každému z nich pripočítame 1. Dokazovaná nerovnosť sa zmení na

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+9}{2}.$$

Označme $f(x) = 1/(1-x)$. Skúsime funkciu f odhadnúť na intervale $(0, 1)$ zdola nejakou funkciou g. Od funkcie g budeme požadovať, aby prechádzala bodom $[1/\sqrt{3}, f(1/\sqrt{3})]$, lebo v ňom nastáva rovnosť. Navyše budeme chcieť,

aby pre $x = 1/\sqrt{3}$ mala funkcia $g(x)$ rovnakú deriváciu ako $f(x)$. Nakreslite si obrázok, je z neho jasné, že chceme, aby graf funkcie g ležal medzi grafom funkcie f a dotyčnicou k f v bode $1/\sqrt{3}$. Potom bude fungovať odhad $f(a) + f(b) + f(c) \geq g(a) + g(b) + g(c)$ a budeme navyše chcieť $g(a) + g(b) + g(c) \geq (3\sqrt{3} + 9)/2$.
Zo všetkých takých funkcií g si vyberieme takú, ktorá sa podobá na väzbu. Budeme hľadať g v tvare $g(x) = px^2 + q$. Pre čísla p, q dostaneme z podmienok kladených na funkciu $g(x)$ sústavu rovníc

$$p + 3q = \frac{3\sqrt{3} + 9}{2},$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2p\,\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vyriešením tejto sústavy získame čísla p, q. Treba dokázať, že platí $f(x) \geq g(x)$ na celom skúmanom intervale. To už ponechávame na vás.
<u>Tretie riešenie:</u> Ideou tohto riešenia je využiť na odhad ľavej strany váženú Jensenovu nerovnosť. Dôležité je upraviť ľavú stranu do takého tvaru, kde sa dá táto nerovnosť použiť. Ostatné kroky sú technické. (Týmto vám okrem iného naznačujem, že je dobré poznať bežné nerovnosti a mať v ich používaní aspoň akú-takú prax.)
Dokážeme nerovnosť v tvare

$$\frac{a^2}{a(1-a)} + \frac{b^2}{b(1-b)} + \frac{c^2}{c(1-c)} \geq \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}.$$

Nech $f(x) = 1/x(1-x)$ pre x z intervalu $(0, 1)$. Funkcia f je konvexná, preto z Jensenovej nerovnosti máme

$$a^2 f(a) + b^2 f(b) + c^2 f(c) \geq f(a^3 + b^3 + c^3).$$

Z nerovnosti medzi mocninovými priemermi máme

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odtiaľ dostávame $a^3 + b^3 + c^3 \geq 1/\sqrt{3}$. Na intervale $(1/2, 1)$ je funkcia f rastúca, preto

$$f(a^3 + b^3 + c^3) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}.$$

<u>Poznámka:</u> Vyskúšajte si predvedené metódy na nasledujúcej úlohe.
Nech $n \geq 4$ a $a_1, \ldots, a_n$ sú nezáporné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{a_1}{1 - a_1} + \frac{a_2}{1 - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 - a_n} \geq 4.$$

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Podolák Martin	3.	Gamča BA	5	1		9	8	9	9	9	9		45	135
2.	Budáč Ondrej	4.	GBST LC	11	10			9	9	9	9	9		45	134
2.	Szabados Michal	3.	ŠPMNDG BA	6	2		9	9	9	9	9	0		45	134
4.	Boža Vladimír	2.	GDT PP	4	0	9	7	9	9	9				43	129
4.	Hapák Samuel	2.	Gamča BA	4	1			8	8	9	9	7		41	129
4.	Perešíni Peter	4.	GJGT BB	12	10			9	6	9	9	9		42	129
7.	Ujházi Vladislav	2.	GPJŠ RO	5	2		6	9	9	9	9			42	127
8.	Takács Michal	4.	GJGT BB	12	8			9	9	9	9			36	123
9.	Hojčka Michal	1.	GKom PE	2	0	6	6	8	5	8				33	118
9.	Vdovičenko Martin	2.	GPár NR	5	1		8	9	9	1	3			30	118
11.	Kováč Michal	4.	Gamča BA	5	0	9	9	4	6	3	3	1		31	117
11.	Tureková Katarína	2.	GJGT BB	6	1		9	9	8	9	9			44	117
13.	Minárik Marián	2.	GPár NR	3	0	9	9	4	5					27	116
14.	Klimoš Miroslav	1.	Bílovec ČR	2	0	9	8	9	9					35	114
14.	Selečéniová Ivana	4.	GJGT BB	10	2		9	9	9	9	9			45	114
14.	Starovská Mária	2.	Gamča BA	6	1			9	9	9	9			36	114
17.	Pôbišová Zuzana	4.	GJGT BB	10	3			8	9	9	3	7		36	112
17.	Škrovinová Katarína	4.	GPár NR	12	5			9	6	1	9	5		30	112
19.	Kocák Tomáš	2.	GPoš KE	4	0	9	9			9				27	110
19.	Prusák Michal	4.	GJAR PO	11	6			9	8	9	9			35	110
21.	Mokcsayová Michaela	2.	GDax VT	4	0	9	4	9	6	9				37	109
22.	Hančl Jaroslav	4.	Bílovec ČR	6	4			9	6	9				24	106
22.	Melicherčík Martin	2.	GPár NR	6	1		9	4	9					22	106
24.	Beran Jakub	4.	GAlej KE	9	4			9	9	9				27	105
25.	Molnárová Zuzana	4.	GAlej KE	7	2		9	8	9	9				35	104
26.	Baláž Miroslav	2.	GLS HE	5	1		9	8	5		3			25	103
27.	Čevorová Kristína	3.	ŠPMNDG BA	6	1		7	4	5	9	9	5		35	100
28.	Pich Ján	4.	GDH SK	7	3				8	9	9	0		26	99
29.	Čolláková Veronika	4.	GPoš KE	7	1		6	9	9	3		2		29	98
30.	Hojčková Martina	3.	GJH BA	6	1		7	9	6	8				30	96
31.	Novák Vladimír	2.	GPoš KE	3	0	9	5	3	6	3		0		26	95
32.	Černohorská Eva	4.	Karl.Vary ČR	6	3			9	3	9	9	0		30	94
32.	Magyarová Katarína	3.	GBST LC	6	0	9	7	3	8	9	4			37	94
34.	Fedák Matúš	4.	GTV SL	5	1		9	3	0	9		3		24	93
34.	Košinárová Alena	2.	Gamča BA	6	1		9	9	6		9	9		42	93
34.	Kucharík Marcel	4.	GMRŠ NM	4	0	9	5	3	5	9	3			31	93
34.	Mikuláš Ondrej	3.	GBST LC	8	3			9	9	1	9	1		29	93
38.	Simanová Lucia	2.	Gamča BA	5	0	9		9	6	9	9			42	91
39.	Imriška Jakub	4.	GJH BA	9	7			3	9	9				21	90
39.	Sudolský Michal	3.	GJGT BB	7	5			3	5	9				17	90
41.	Dvoranová Veronika	2.	G Šurany	4	0	8	6	4	6	1				25	88
41.	Špesová Nikola	2.	GK2 PO	5	1		5	9	7	3		0		24	88
43.	Povolná Katarína	2.	GAlej KE	5	1		7	6	6		0			19	87
44.	Mikuláš Ján	4.	GBST LC	11	7			9	8	9	9	4		39	85
44.	Selečéniová Radka	3.	GJGT BB	8	2		6	7	9					22	85
46.	Oľhava Rastislav	4.	GAlej KE	7	6			3	6					9	84
47.	Bzdušek Tomáš	3.	GPdC PN	7	2									0	78
47.	Kovalčíková Kristína	3.	GVar ZA	8	1		6	8	9			3		26	78
49.	Kuncová Alexandra	1.	GAlej KE	3	0	9	6	9	6					30	77
50.	Jakubík Jozef	2.	GKom PE	5	1		5	7	3					15	73
51.	Bachratá Alena	4.	GVO ZA	10	3			9	6	9		0		24	71
52.	Mikula Ján	4.	GJGT BB	8	1		4	2	5	2				13	70

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
52.	Vancáková Judita	3.	GPoš KE	5	1		4	8	6	1				19	70
54.	Szabadosová Emília	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	5	2	4					20	69
55.	Kuklišová Nina	1.	GMet BA	4	0	5	2		5					12	67
56.	Juríková Katarína	2.	GJGT BB	4	0									0	59
57.	Matejovičová Lenka	2.	Gamča BA	6	1			9	8					17	57
58.	Godány Martin	3.	ŠPMNDG BA	6	1		5	3	9	3				20	56
59.	Gál Dárius	4.	GPoš KE	7	0	9	5	3	4					21	53
60.	Formánek Michal	1.	ŠPMNDG BA	2	0	9		2	6			0	-17	0	44
61.	Lenhardtová Slavomíra	4.	GJH BA	10	3			8	4					12	42
62.	Hergelová Beáta	4.	GBST LC	8	1									0	41
62.	Opršal Jakub	4.	Brno ČR	4	0									0	41
64.	Bittová Kamila	1.	Čes.Těšín ČR	1	0									0	40
65.	Heželyová Daniela	2.	Gamča BA	4	0									0	36
66.	Hrdá Marcela	4.	GJH BA	8	4									0	30
67.	Janíková Karolína	3.	GVar ZA	5	0									0	29
68.	Zámečník Peter	4.	GMRŠ NM	5	0									0	27
69.	Cimbáková Viera	3.	GŠtud SV	4	0									0	26
69.	Macková Veronika	2.	GAlej KE	4	0									0	26
71.	Dlabaja Petr	3.	Holešov ČR	3	0									0	22
72.	Masárová Zuzana	4.	GJH BA	9	5									0	18
73.	Petruchová Zuzana	4.	Gamča BA	10	3									0	13
74.	Hodásová Judita	1.	Gamča BA	2	0	0	1		0			0		1	3
75.	Kováčik Michal	5.	GVar ZA	5	1									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Sabová Simona	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	7	9	9	5	3		124
2.	Hollá Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	6	7	8		122
3.	Csiba Peter	1.	ŠPMNDG BA	2		9	7	5	9	9	1		120
4.	Petrucha Michal	1.	GMet BA	2		9	8	4	8	7	2		117
5.	Uhrík Jakub	1.	Gamča BA	2		9	9	8	9		8		116
6.	Haas Emil	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	3		111
7.	Jablonická Kristína	1.	ŠPMNDG BA	2		9	7	9	9		2		106
8.	Fecko Miroslav	1.	GPan BA	2		9	4		9		3		94
8.	Fekiač Jozef	1.	Gamča BA	2		8	7	8	9		3		94
10.	Mieresová Ľubomíra	1.	Gamča BA	2		9	3	5	9		3		87
11.	Paulovský Michal	2.	Gamča BA	3			2	4	9	5	3		80
12.	Grečmalová Gréta	1.	ŠPMNDG BA	1	9			8					79
13.	Hajdin Michal	1.	GJH BA	2		9	7		9	5	2		69
14.	Pažický Martin	1.	GJH BA	1		8	2	3	2	1			63
15.	Chorvát Oliver	3.	ŠPMNDG BA	3			8	3	9	7	3		52
16.	Hodásová Judita	1.	Gamča BA	2			3		0	1			36
17.	Formánek Michal	1.	ŠPMNDG BA	2					9		2	-17	35
17.	Šrámek Martin	2.	GTilg BA	3			5	7	2		3		35
19.	Poliaková Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	9	6	2		0	4			32
20.	Nógellová Veronika	1.	Gamča BA	2									25
21.	Statelov Marek	3.	ŠPMNDG BA	3			0	0	5	4			20
21.	Vraník Milan	1.	GJH BA	1									20
23.	Labiková Halina	0.	ŠPMNDG BA	0									19
24.	Kraus Peter	3.	GJH BA	3									18
25.	Buchholcerová Anna	1.	GLS BA	2									14
26.	Pieter Michal	2.	ŠPMNDG BA	2			0	0	5	5	3		13
27.	Herich Ján	3.	ŠPMNDG BA	3			0	1	5	4	1		11
28.	Malík Lukáš	3.	ŠPMNDG BA	3			0		0				0

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Herencsár Albert	1.	Gmaď GA	2		9	9	9	9	9	9		135
2.	Hojčka Michal	1.	GKom PE	2		9	9	9	6	6	8		129
3.	Dvoranová Mária	1.	G Šurany	2		9	5	5	9	4	3		105
4.	Minárik Marián	2.	GPár NR	3					9	9	4		72
5.	Zajičková Veronika	2.	G Šurany	3			7	9	9	4	2		67
6.	Babiarová Dana	1.	GJab MY	1	9	0	2	3	0				45
7.	Vargová Natália	1.	GPár NR	2									29
8.	Proksa ondrej	1.	GPár NR	2									22

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Biskupičová Lívia	1.	GŠkol PB	2		9	8	8	8	4			124
2.	Hudec Vladimír	1.	GVar ZA	2		9	9	9	9	5			122
3.	Šagát Marián	2.	GŠkol PB	3			5	3	9	5	3		110
4.	Melo Matej	1.	GsvFA ZA	2		9	8	9	9	5			101
5.	Kubina Filip	2.	GPOH DK	3			7	9	9	8	3		100
6.	Rizman Tomáš	1.	GVar ZA	2		9	7	9		4	3		99
7.	Kobza Vladimír	2.	GJGT BB	3			0	9	7	1	2		98
8.	Roháľ Branislav	2.	GŠkol PB	3		9	9	6		6	4		92
9.	Vrbovská Mária	2.	GJGT BB	3			3	9	9	2	3		81
10.	Oravcová Zosia	1.	GJGT BB	2	9	9	3	9	0				77
11.	Kobolková Petra	1.	GVPT MT	1	9	9	2				2		76
12.	Kotrlová Katarína	1.	GVPT MT	2		9	6	7	8		3		75
13.	Suchá Nina	1.	GVPT MT	1	9	9	3	6		4	1		73
14.	Šiagi Miroslav	2.	GJGT BB	3			0	3	5				62
15.	Živčáková Andrea	2.	GJGT BB	3			0	3					59
16.	Harhajová Xénia	1.	GVPT MT	1	9	9	7	1		4	2	-31	58
17.	Nerer Juraj	2.	GJGT BB	3			0	0			2		49
18.	Alberty Roman	2.	GJGT BB	3									40
19.	Konôpková Júlia	1.	GJGT BB	2		7							37
20.	Mlynáriková Michaela	1.	GJGT BB	2		8	2						33
21.	Kapustová Katarína	1.	GJGT BB	2		8		1		2			30
22.	Kostrubová Lucia	1.	GBST LC	1									22
23.	Szabo Martin	2.	GJGT BB	3									21
24.	Nemec Juraj	2.	GJGT BB	3									15
25.	Slovík Lukáš	2.	GJGT BB	3			2	3	2				9
26.	Chrastina Andrej	2.	GJGT BB	3									2
27.	Kováč Michal	1.	GJGT BB	1									0
27.	Majláth Martin	2.	GJGT BB	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Batmendijnová Kristína	1.	GTV SL	1	9	9	4	9	9				123
2.	Popovič Viktor	0.	GJAR PO	0	9	9	7	9	7		3		120
3.	Liščinský Miroslav	1.	GAlej KE	3			8	9	9	5	3		116
4.	Fedáková Dominika	2.	GTV SL	2		9	7	9	0	9			112
5.	Jursa Jakub	1.	GAlej KE	3			7	9	8	4	9		107
5.	Vendel Dávid	1.	GPoš KE	2		9	7	9	5	4			107
7.	Kuncová Alexandra	1.	GAlej KE	3			7	9	9	6	9		103

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
8.	Kuzma Tomáš	1.	GAlej KE	3			7	7	5	6	9		94
9.	Polačko Martin	1.	GAlej KE	3			9	7	9	5	3		86
10.	Jirásková Mária	1.	GsvTA KE	1			8					-8	59
11.	Novák Vladimír	2.	GPoš KE	3					9	5	3		58
12.	Kažimírová Lucia	1.	GJAR PO	1									57
13.	Fialková Elena	0.	ZŠ MN	0									32
14.	Olexa Ján	1.	GPoš KE	2									22
15.	Pivovarník Marek	2.	GJAR PO	3									0

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Beran Jakub	4.	GAlej KE					0		85
2.	Budáč Ondrej	4.	GBST LC	9	9	7	7	9		213
3.	Bzdušek Tomáš	3.	GPdC PN							73
4.	Hapák Samuel	2.	Gamča BA	9	7					114
5.	Hrdá Marcela	4.	GJH BA							39
6.	Kocák Tomáš	2.	GPoš KE							28
7.	Molnárová Zuzana	4.	GAlej KE					0		18
8.	Perešíni Peter	4.	GJGT BB	9	9					161
9.	Pich Ján	4.	GDH SK	9	0			1		59
10.	Podolák Martin	3.	Gamča BA	9	9					97
11.	Prusák Michal	4.	GJAR PO	9						76
12.	Szabados Michal	3.	ŠPMNDG BA	9	0	3	3			115
13.	Takács Michal	4.	GJGT BB	9		7	7	1		124
14.	Škrovinová Katarína	4.	GPár NR	9	5					68