Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série zimného semestra 2005/2006

Úloha č. 1: *Vieme, že súčet trinástich rôznych prirodzených čísel je 92. Zistite súčet dvoch najväčších z týchto čísel.*

Riešenie: (opravoval Miško)

Samé zadanie úlohy nám napovedá, že zrejme bude existovať len jeden možný súčet dvoch najväčších čísel. Poďme teda nájsť jeden taký súčet; potom dokážeme, že je jediný možný.

Vezmime si 11 najmenších prirodzených čísel. Ich súčet je $1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = 66$. Aký by bol súčet najväčších dvoch čísel, keby bolo týchto 11 medzi trinástimi hľadanými? Zvyšné dve čísla musia byť väčšie ako 11. Inak by sa jedno z nich rovnalo niektorému z jedenástich predchádzajúcich (čo zadanie vylučuje). No a $92 - 66 = 26$, teda súčet dvoch najväčších čísel musí byť 26. Ale $26 = 12 + 14$. Máme 13 čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14$, ktorých súčet je 92 a všetky sú rôzne. Čiže vyhovujú podmienkam zadania a súčet najväčších dvoch z nich je 26.

Prvú časť riešenia máme úspešne za sebou, ostáva nám dokázať, že 26 je jediný možný súčet dvoch najväčších čísel. Môže byť tento súčet väčší ako 26? Ak by bol väčší, potom by súčet zvyšných 11 čísel musel byť menší ako 66. Ale my sme vybrali 11 najmenších možných prirodzených čísel a ich súčet bol 66, teda menší súčet dosiahnuť nemôžeme, čoho dôsledkom je, že súčet najväčších dvoch čísel nemôže byť väčší ako 26.

Môže byť ten súčet menší ako 26? Zjavne druhé najväčšie číslo nemôže byť menšie ako 12 (keby bolo menšie, neexistovalo by od neho 11 menších). Z toho vyplýva, že najväčšie číslo musí byť aspoň 13. No a $12 + 13 = 25$. Ukázali sme, že súčet najväčších dvoch musí byť aspoň 25. Ale ak by bol rovný 25, potom by ostatných 11 čísel muselo byť menších ako 12, a teda by to museli byť čísla $1, 2, \ldots, 11$, ktorých súčet je 66. Ale $66 + 25 = 91$ a to je menej ako 92. Teda súčet 25 nevyhovuje, z čoho vyplýva, že súčet najväčších dvoch čísel musí byť aspoň 26.

Ukázali sme, že súčet najväčších dvoch čísel nemôže byť väčší ako 26 a zároveň, že nemôže byť menší ako 26. Tým sme vlastne ukázali, že buď bude 26, alebo nebude žiadny. Keďže sme našli jednu 13-icu, vyhovujúcu zadaniu, v ktorej bol súčet najväčších dvoch čísel 26, môžeme spokojne napísať odpoveď: súčet najväčších dvoch čísel je 26.

Komentár: Nájsť riešenie tejto úlohy nebolo ťažké. Všetci ste prišli na to, že súčet najväčších dvoch je 26. Problém nastal pri dokazovaní, že je to jediný možný súčet. Väčšina z vás to nedokázala. Všetci ste našli vyhovujúcu 13-icu a samozrejme, každému z vás sa zdalo zrejmé, že to je jediná vyhovujúca 13-ica. Pretože súčet $1+2+3+\cdots+13 = 91$ a potrebujeme ešte niekam pridať jednotku, no nemôžeme ju pridať k číslam $1, 2, \ldots, 12$, lebo by sme dostali dve rovnaké. Tak ju pridáme k číslu 13 a dostaneme vyhovujúcu 13-icu. No a keby sme zase zobrali jedno z čísel väčšie ako 14, tak potom by sme v konečnom dôsledku dostali súčet väčší ako 92. Takto nejako by sa dalo pokračovať v dôkaze a väčšina z riešení bola tohto typu. Tu je trochu zložitejšie na nič nezabudnúť a vyjadriť sa dostatočne jednoznačne. (Všimnite si, že v našom riešení nedokazujeme o 13-ici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, že je jediná vyhovujúca.)

Úloha č. 2: *Dve dobré kamarátky Janka a Hanka si prvého septembra presne napoludnie nastavili ručičkové hodinky na rovnaký (správny) čas. O niekoľko dní sa znovu stretli a zistili, že Jankine hodinky sa každú hodinu ponáhľajú o jednu sekundu a Hankine sa každú hodinu omeškajú o jeden a pol sekundy. Zistite, o koľko hodín najbližšie od poludnia prvého septembra budú hodinky oboch dievčat ukazovať rovnaký čas. Zistite tiež, o koľko hodín budú najbližšie ukazovať naraz správny čas.*

Riešenie: (opravovali Zuzka C. a Buggo)

Pozrime si poriadne zadanie nášho príkladu. Vieme, že Jankine hodinky sa za každú hodinu posunú oproti reálnemu času o jednu sekundu dopredu. Hankine sa za ten istý čas posunú o $1,5$ sekundy dozadu. Aký teda bude rozdiel medzi časmi na hodinkách dievčat po uplynutí jednej hodiny? $2,5$ sekundy. Po uplynutí druhej hodiny už bude tento rozdiel päť sekúnd a s každou ďalšou hodinou bude narastať vždy o $2,5$ sekundy. Ako veľmi musí tento rozdiel narásť, aby časy na oboch hodinkách boli rovnaké? A dá sa to vôbec? Skúsme sa na to pozrieť.

Po jednom dni bude rozdiel na hodinkách jedna minúta $(24 \cdot 2,5 = 60)$. Vtedy hodinky nebudú ukazovať ten istý čas. Ak budú jedny hodinky meškať za druhými o hodinu, tiež nebudú ukazovať rovnaký čas. Aký je teda najmenší možný rozdiel medzi časmi na hodinkách našich dievčat, pri ktorom budú opäť ukazovať rovnaký čas? Áno, je to dvanásť hodín! (Kto neverí, nech si nakreslí obrázok a premyslí si to. Uverí!) Teraz je už úloha jednoduchá – vieme, že o jednu hodinu sa rozdiel medzi časmi na hodinkách dievčat zväčší o $2,5$ sekundy a že potrebujeme, aby tento rozdiel bol až dvanásť hodín, čo predstavuje $12 \cdot 3\,600$ sekúnd. To znamená, že dievčatá budú mať na hodinkách rovnaký čas presne o $12 \cdot 3\,600 / 2,5 = 17\,280$ hodín.

Druhú časť úlohy teraz zvládneme v pohode. V okamihu, keď hodinky oboch dievčat budú ukazovať čas presne, musí zároveň platiť, že ukazujú rovnaký čas. To ale znamená, že náš hľadaný čas je násobkom čísla 17 280. Zároveň

musí platiť, že Jankine (alebo Hankine) hodinky ukazujú presný čas. Odpovedzme si na otázku, kedy budú Jankine hodinky ukazovať presný čas. Za jednu hodinu sa posunú o jednu sekundu dopredu oproti reálnemu času, teda ak chceme, aby znova vyrovnali ten rozdiel, ktorý takto vznikne, musia si „nadbehnúť“ celých dvanásť hodín. (Prečo? Na túto otázku sme si odpovedali v prvej časti príkladu.) To znamená $12 \cdot 3\,600 = 43\,200$ hodín. No a keďže potrebujeme, aby tieto podmienky boli splnené obe, hľadáme najmenší spoločný násobok čísel 17 280 a 43 200. Ľahko zistíme, že je to číslo 86 400. Teda presný čas budú ukazovať hodinky oboch dievčat o 86 400 hodín.
Prečo nám stačilo skúmať len Jankine hodinky a neuvažovať o Hankiných? Ak budú ukazovať správny čas hodinky jednej dievky a zároveň bude na oboch časomeroch rovnaký čas, budú správny čas ukazovať i hodinky druhej dievky. Je teda jedno, ktorú si vyberieme. Preto keď budeme skúsenejší, povieme jednoducho *„Hodinky oboch dievčat musia ukazovať rovnaký čas a bez ujmy na všeobecnosti musia Jankine hodinky ukazovať presný čas“.*

Úloha č. 3: *Zistite, koľko rôznych štvorciferných čísel možno napísať pomocou cifier* $1, 2, \ldots, 8$, *ak majú byť všetky cifry v čísle navzájom rôzne a všetky zostavené čísla majú byť deliteľné deviatimi.*

Riešenie: (opravovali Erika a Lucy)
Našou úlohou je zistiť, koľko je štvorciferných čísel zložených z cifier $1, 2, \ldots, 8$, ktoré majú všetky cifry rôzne a sú deliteľné deviatimi. Jednou z možností by bolo vypísať ich všetky, a potom zrátať ich počet. Ale to je pomerne zdĺhavé a mohli by sme sa pri tom ľahko pomýliť. Preto úlohu budeme riešiť inak. Ako prvé si uvedomíme, aký spoločný znak majú všetky čísla deliteľné deviatimi. Vieme, že číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi (skúste dokázať). To znamená, že z cifier $1, 2, \ldots, 8$ sa snažíme vyrobiť štvorciferné čísla, ktorých ciferný súčet je $9, 18, 27, \ldots$ Uvedomme si, že ďalej má zmysel uvažovať len ciferný súčet 18, keďže minimálny ciferný súčet takýchto štvorciferných čísel je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ a maximálny je $5 + 6 + 7 + 8 = 26$. Predstavme si, že sme našli nejaké štvorciferné číslo deliteľné deviatimi, ktoré má všetky cifry nenulové a rôzne. Napríklad číslo 1278 je takéto. Skúsme teraz vyriešiť otázku, koľko ďalších štvorciferných čísel s rovnakými ciframi (1, 2, 7, 8) vieme z neho vyrobiť. Odpoveď je 23, lebo dokopy z čísel 1, 2, 7, 8 vieme vyrobiť 24 rôznych štvorciferných čísel (premyslite si to). Preto sa naša úloha zredukovala na nájdenie všetkých takých štvoríc čísel, ktoré sú navzájom rôzne a ich súčet je 18. Keď budeme vedieť, koľko takýchto štvoríc je (označme tento počet n), tak počet čísel, ktorý sa snažíme zistiť, je $24 \cdot n$. Takže teraz systematicky vypíšeme všetky takéto štvorice čísel. Je ich osem: 1278, 1368, 1467, 1458, 2367, 2358, 2457, 3456. Je dobré nájsť si nejaký zmysluplný postup, ktorým vypíšeme všetky možnosti. Keby sme ich vypisovali náhodne, ľahko nám nejaká unikne alebo niektorú napíšeme viackrát (skúste odhaliť systém v našom vypísaní možností a skúste vypísať možnosti od najväčšieho čísla 8721). Teraz, keď vieme, že počet rôznych štvoríc je 8, tak celkový počet čísel je, ako sme už vyššie odôvodnili, $24 \cdot 8$. Teda počet čísel, ktoré sú zložené z cifier $1, 2, \ldots, 8$, majú všetky cifry rôzne a sú deliteľné deviatimi, je 192.

Úloha č. 4: *O jednej skúške vieme, že priemerný počet bodov študentov, ktorí túto skúšku spravili, je* 65. *Priemerný počet bodov tých, ktorí ju nespravili, je* 35. *Zistite, koľko percent študentov skúšku spravilo, ak je celkový priemerný počet bodov* 53.

Riešenie: (opravovali Dada a Tina)
Našou úlohou je zistiť, koľko percent študentov skúšku spravilo. Preto, keď budeme vedieť pomer úspešných študentov ku všetkým, vyhrali sme. Označme si teda počet úspešných študentov u, počet všetkých v. Pozrime sa, čo všetko nám zadanie hovorí. Ak vydelíme súčet bodov úspešných študentov počtom úspešných študentov u, dostaneme 65 bodov. Čiže súčet bodov úspešných študentov je rovný $65u$. Keďže $v - u$ je počet neúspešných študentov, potom $35(v - u)$ vyjadruje súčet bodov neúspešných študentov. Aký je súčet bodov všetkých študentov, ktorí sa na skúške zúčastnili? Dostaneme ho dvoma spôsobmi: sčítaním bodov úspešných a neúspešných študentov $(65u + 35(v - u))$ a taktiež ako priemerný počet bodov všetkých študentov vynásobený počtom všetkých študentov $(53v)$. Dostali sme rovnicu:

$$\begin{aligned} 65u + 35(v - u) &= 53v \\ 30u &= 18v \\ 5u &= 3v \\ \frac{u}{v} &= \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} \end{aligned}$$

Z toho už vidíme, že u tvorí 60% z v.

Komentár: Mnohí ste poriadne nevysvetlili, ako ste prišli na rovnice, ktoré ste počítali. To bola hlavná príčina, prečo ste strácali body. Inak ste boli super! A ešte dobrá rada do života: zapamätajte si, že v slove *ktorí* sa v nominatíve množného čísla píše mäkké i. :)
Napadlo vám zamyslieť sa nad tým, koľko ľudí sa minimálne muselo skúšky zúčastniť? Koľko ich bolo najmenej, ak vieme, že je medzi nimi študent, ktorý mal 91 bodov? A čo v prípade, keď najhorší študent, ktorý skúšku spravil, mal 18 bodov? Skúste to, neoľutujete!

Úloha č. 5: *V triede je 29 študentov. Každý študent buď stále klame, alebo stále hovorí pravdu. Jedného dňa si študenti posadali okolo okrúhleho stola a každý z nich povedal, že obaja jeho susedia sú klamári. Dokážte, že v triede je aspoň* 10 *študentov, ktorí stále hovoria pravdu. Je možné, aby v triede bolo presne* 10 *takýchto študentov?*

Riešenie: (opravovali Aďa a Miťo)

Najprv si uvedomme, že medzi našimi študentmi bude aspoň jeden pravdovravný. Označme si tohto študenta číslom 1 a napravo od neho postupne číslujme zvyšných študentov, zatiaľ v rade. Kedže vedľa seba nemôžu byť viac ako dvaja klamári, tak najbližší pravdovravný bude mať číslo 4, *alebo nižšie*. Podobne, tretí pravdovravný v poradí bude mať číslo *menšie alebo rovné* ako 7. Keď túto úvahu niekoľko krát zopakujeme, zistíme, že deviaty pravdovravný študent v poradí bude mať číslo *menšie alebo rovné* ako 25. Ostali nám teda *aspoň* štyri voľné miesta, pričom študent s číslom 29 musí susediť so študentom s číslom 1, aby sa kruh uzavrel. Tieto aspoň štyri voľné miesta však nemôžu byť obsadené iba klamármi, pretože už traja klamári nemôžu sedieť vedľa seba, nieto ešte štyria alebo viacerí. Preto medzi nimi musí byť ešte aspoň jeden pravdovravný, čím sme dokázali, že pravdovravných musí byť aspoň 10.

Nájsť také rozsadenie, v ktorom je práve 10 pravdovravných študentov je pomerne ľahké, stačí na to iba papier, ceruzka a pár minút skúšania.

Iné riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že okolo stola sedí najviac 9 pravdovravných študentov. Potom je medzi nimi najviac 9 medzier, do ktorých môžeme usádzať klamárov. Avšak vedľa seba nemôžu sedieť viac ako dvaja klamári, takže v každej medzere budú najviac dvaja. Spolu máme teda najviac 18 klamárov, čo dáva s najviac 9 pravdovravnými najviac 27 študentov; to je spor.

Iné riešenie:

Vieme, že za sebou nemôžu sedieť traja klamári, teda v každej trojici študentov, ktorí sedia za sebou, musí byť *aspoň* jeden pravdovravný. Takýchto trojíc je pri stole 29 a teda máme aspoň 29 pravdovravných študentov. Lenže každý študent sa nachádza v práve troch trojiciach, teda pravdovravných je aspoň 29/3. Keďže však počet študentov musí byť celé číslo, tak ich musí byť aspoň 10.

Komentár: Táto úloha bola pomerne náročná, pretože bolo ťažké vyhnúť sa odvolávaniu na nejaké konkrétne rozsadenie. Veľa z vás sa snažilo rozmiestniť študentov „čo najlepšie“, ale takéto tvrdenie treba aj dokázať, čo bolo v tejto úlohe skoro nemožné. Dôkazy treba písať tak, aby platili pre akékoľvek rozsadenie študentov, nie len pre to, o ktorom si myslíme, že je viac fajn, ako nejaké iné. Dôvod je ten, že ak poskladáme rozsadenie z trojíc, ktoré sú samé o sebe najlepšie, nikto nám nezaručí, že aj to rozsadenie bude najlepšie. Takéto niečo sa stáva vtedy, keď malé časti nie sú izolované, ale súvisia spolu a môžu sa ovplyvňovať aj navzájom.

Úloha č. 6: *Nevedko vie, že Hlavné námestie v Uhorkovom meste má tvar obdĺžnika a je celé pokryté štvorcovými dlaždičkami veľkosti* $10\,cm \times 10\,cm$*, ktoré sa neprekrývajú. Jeho kamarát Vševedko vie, že polovica všetkých dlaždičiek leží na okraji námestia. A čo vy, viete povedať, aké má toto námestie rozmery?*

Riešenie: (opravovali Martin a Peťo G.)

Podľa zadania máme obdĺžnik zložený zo štvorcov $10\,\mathrm{cm}\times 10\,\mathrm{cm}$. Označme si počty štvorcov na stranách obdĺžnika x a y. Podľa tvrdenia v zadaní potom platí rovnosť

$$xy = 2(2x + 2y - 4) \tag{1}$$

Ak sa s touto rovnosťou trochu pohráme, všimneme si, že sa dá výhodným spôsobom upraviť nasledovne (skúste porozmýšľať nad geometrickou interpretáciou súčinu $(x-4)(y-4)$, tá vám našepká, prečo by sme sa túto rovnosť mali snažiť upravovať práve týmto spôsobom):

$$\begin{aligned} 8 &= xy - 4x - 4y + 16 \\ 8 &= (x-4)(y-4) \end{aligned}$$

Kedže počet dlaždičiek na námestí je prirodzené číslo, sú oba výrazy $x - 4$ a $y - 4$ celočíselné. Číslo 8 sa dá napísať ako súčin dvoch celých čísel štyrmi spôsobmi:

- $1 \cdot 8$, potom $x = 5$, $y = 12$,
- $2 \cdot 4$, potom $x = 6$, $y = 8$,
- $(-1) \cdot (-8)$, potom $x = 3$, $y = -4$,
- $(-2) \cdot (-4)$, potom $x = 2$, $y = 0$,

respektíve v opačnom poradí. Posledné dve možnosti zjavne nevyhovujú zadaniu a tak hľadané rozmery námestia sú $50\,\mathrm{cm}\times 120\,\mathrm{cm}$ alebo $60\,\mathrm{cm}\times 80\,\mathrm{cm}$, čím je úloha vyriešená.

Ak sa nám tento „trikový“ postup odhaliť nepodarí, stále sa môžeme pokúsiť vyjadriť si z rovnice (1) jeden z rozmerov pomocou toho druhého. Dostávame $x(y-4) = 4y-8$, odkiaľ za predpokladu $y \neq 4$ (pre $y = 4$ má rovnica podobu $0 = 8$ a teda nemá riešenie) vyplynie

$$x = \frac{4y-8}{y-4} = \frac{4(y-4)+8}{y-4} = 4 + \frac{8}{y-4}.$$

Keďže x má byť prirodzené, musí platiť, že číslo 8 je deliteľné výrazom $y-4$, a teda $y-4 \in \{1,2,4,8,-1,-2,-4,-8\}$. Preto do úvahy pripadá len $y \in \{5,6,8,12,3\}$ a ak sa tieto možnosti pokúsime dosadiť do pôvodnej rovnice, dostaneme rovnaké riešenia ako pri predošlom postupe.

Komentár: Mnohí z vás upravili počiatočnú rovnosť do niektorého z podielových tvarov $x = (4y-8)/(y-4)$ alebo $x = 4 + 8/(y-4)$, pričom drvivá väčšina z vás zabudla vyšetriť prípad $y = 4$. I keď ste týmto spôsobom nestratili žiadne riešenie, je to chyba, obyčajne je to totiž naopak. Pri rozkladaní čísla 8 na deliteľov ste zase zabúdali na rozklady so zápornými činiteľmi, čím ste opäť mohli stratiť nejaké korene. Riešeniam, ktoré postupne overovali hodnoty x v závislosti na meniacom sa y často chýbal dôkaz, že nájdené rozmery sú naozaj všetky.

Úloha č. 7: *Nekonečne veľa mravcov ide za sebou popri stene domu. Prvý ide Ferdo. Druhý si udržiava od Ferda konštantný odstup pol metra. Tretí mravec ide $3/4$ metra za Ferdom, štvrtý $4/5$ metra a pre $n \geq 5$ ide n-tý mravec v poradí $n/(n+1)$ metra za Ferdom. Vracajú sa domov s úlovkom pozostávajúcim z piatich stebiel trávy rovnakej dĺžky l. Nájdite najmenšie možné l, ak viete, že každý mravec nesie aspoň jedno steblo.*

Riešenie: (opravovali Lenka a Jakub)
Prvý fakt, ktorý si väčšina z vás všimla, je, že, jedno z tých stebielok musí ležať až celý jeden meter za Ferdom. Ak by to tak totiž nebolo, posledné stebielko by ležalo za Ferdom iba vo vzdialenosti $x \leq 1$. A to je problém, lebo potom by sa našiel taký k-ty mravček, že $x \leq k/k+1$, ktorý by evidentne neniesol žiadne stebielko. Takže môžeme vlastne predpokladať, že aj jeden meter za Ferdom ide jeden mravček. Teraz nás ľahko napadne jednoduché, ale bohužiaľ nesprávne riešenie, kde $l = 1/5\,\mathrm{m}$. Jednoduché je preto, že takto ľahko pokryjeme všetkých mravčekov, ktorí sú do jedného metra za Ferdom. Nesprávne preto, že stačia aj kratšie stebielka. Ako je to možné? Pozrieme sa na takéto $1/5$-metrové stebielka. Zistíme, že Ferdo nesie stebielko, ktoré nenesie nikto iný. To je zbytočné plytvanie stebielkom, lebo samotného Ferda by pokrylo aj oveľa kratšie stebielko. To isté platí aj o mravčekovi $1/2\,\mathrm{m}$ za Ferdom.
Keď to zvážime, tak vymyslíme nové, lepšie (možno najlepšie) riešenie: Ferda pokryjeme jedným stebielkom (ľubovoľne dlhým), $1/2$-metrového mravčeka tiež jedným stebielkom a zvyšných mravčekov, ktorí zaberajú $1-3/4 = 1/4$ metra pokryjeme tromi stebielkami. Takto dostaneme riešenie $l = (1/3)/4\,\mathrm{m} = 1/12\,\mathrm{m}$. Po chvíľke márneho snaženia sa o lepšie riešenie usúdime, že lepšie riešenie asi neexistuje a skúsime to aj dokázať. To sa nám podarí, napríklad takto:
Ferdo a $1/2$-metrový mravček naozaj musia niesť každý sám svoje stebielko, lebo ak by to tak nebolo, potom by dĺžka stebielka musela byť buď aspoň $1/2\,\mathrm{m}$ (Ferdo a $1/2$-metrový mravček nesú spolu stebielko) alebo aspoň $3/4 - 1/2 = 1/4$ metra ($1/2$-metrový a $3/4$-metrový mravčekovia nesú spolu stebielko), čo je priveľa. Otázne je už len to, či sa mravčekovia $3/4$, $4/6$, …, $n/(n+1)$, 1 nedajú pokryť tromi stebielkami kratšími ako $1/12\,\mathrm{m}$. A to nejde preto, že $3/4$-ový, $3/4 + 1/12 = 5/6$-ový, $3/4 + 1/12 + 1/12 = 11/12$-ový, $3/4 + 1/12 + 1/12 + 1/12 = 1$-ový mravčekovia sú spolu až štyri mravčeky, ktoré sú od seba vzdialené aspoň $1/12\,\mathrm{m}$, a teda tromi stebielkami kratšími ako $1/12\,\mathrm{m}$ nemôžeme pokryť všetkých týchto štyroch mravčekov. To je všetko. Správny výsledok je $l = 1/12\,\mathrm{m}$. Správny postup by mal byť jasný z tohto vzoráku. :)
Bonusová úloha: Ako by sa zmenil výsledok, keby pribudol za Ferdom aj $2/3$-ový mravček? Riešenie je trochu zložitejšie a správny výsledok je … (nepoviem!). Prípadne môžete skúsiť riešiť príklad aj pre úplne iné vzdialenosti mravčekov (napr.: $1/2$, $3/4$, $7/8$, $15/16$, …) a iný počet stebielok.

Komentár:
Najčastejšie ste robili chybu, keď ste dali niektorým mravčekom niesť steblo samostatne a ostatnú dĺžku vydelili počtom ostávajúcich stebielok. Takto ste potom určili dĺžku stebielka. Toto však nie je správne, lebo možno vieme násť kratšiu dĺžku. Ako? Ak niektoré medzery medzi mravčekmi nebudeme pokrývať stebielkami, tak by sme možno takto potom mohli skrátiť stebielka a stále by to bolo dobre. To, že sa to nedá, je ukázané v riešení. Avšak pre úplné, správne riešenie toto bolo treba rozobrať.

Úloha č. 8: *Máme 45 klebetníc, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niektorej inej zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Na koľko najmenej zavolaní to ide?*

Riešenie: (opravovali Bus a Miki)
Aby sme vás dlho nenapínali, správna odpoveď je 86. Toto číslo však treba aj nejako odôvodniť.
1. Treba dokázať, že 86 telefonátov skutočne postačuje. Toto je pravda, dá sa to uskutočniť napríklad takto: prvá klebetnica zavolá druhej, potom druhá tretej, a tak ďalej, až štyridsiata druhá zavolá štyridsiatej tretej. Potom si zavolajú štyridsiata štvrtá so štyridsiatou piatou, štyridsiata štvrtá so štyridsiatou treťou a štyridsiata piata so štyridsiatou druhou. Nakoniec znova štyridsiata druhá zavolá všetkym zvyšným. Môžete si ľahko overiť, že po týchto 86 telefonátoch bude naozaj každá klebetnica vedieť všetky klebety.

2. Ďalej treba ukázať, že na menej ako 86 telefonátov sa to nedá. Dokážeme dokonca trochu všeobecnejšie tvrdenie: pre n klebetníc je vždy potrebných aspoň $2n-4$ hovorov. Toto dokážeme indukciou.
1° Pre $n \leq 4$ si môže tvrdenie dokázať sám čitateľ.
2° Predpokladajme, že medzi $n-1$ klebetnicami sa môžu všetky informácie rozšíriť až na najmenej $2(n-1)-4$ telefonátov. My chceme dokázať, že pre n klebetníc je minimum telefonátov aspoň $2n-4$. Skúsme na to ísť sporom a predpokladať, že si klebetnice dokážu vymeniť všetky klebety na najviac $2n-5$ volaní.
Uvedomme si najskôr niekoľko zaujímavých vecí. Vezmime si dve ľubovoľné klebetnice a na začiatku ich posaďme do jednej miestnosti, v ktorej už potom celý čas ostanú. Ak niekto volá jednej z nich, dozvie sa aj klebety tej druhej a tiež obe sa dozvedia klebety tej klebetnice, ktorá im volala. Tieto dve klebetnice zatvorené v jednej miestnosti si môžeme predstaviť ako jednu superklebetnicu a dostaneme tým vlastne situáciu pre $n-1$ klebetníc. Zrejme po rovnakej postupnosti telefonátov ako predtým, budú nakoniec tiež všetky klebetnice plne informované a ešte sa nám aj podarí ušetriť všetky telefonáty medzi týmito dvoma klebetnicami.
Ďalej si všimnime, že žiadne dve klebetnice si nemôžu volať viac ako raz. Keby si nejaké dve klebetné klebetnice A, B telefonovali aspoň dvakrát, môžeme si ich predstaviť od začiatku zavreté v jednej miestnosti. Ušetríme tým aspoň dva telefonáty a podarí sa nám rozšíriť všetky klebety $n-1$ klebetníc (jedna z nich je superklebetnica AB) na prinajhoršom $2n-5-2=2(n-1)-5$ telefonátov, čo je však v spore s indukčným predpokladom.
Dvom klebetniciam A, B môžeme vymeniť ich telefóny v momente, keď vedia presne tie isté informácie (čiže napríklad tesne po tom, ako spolu telefonovali) a nič sa tým nezmení na výsledku telefonátov klebetníc. Vymenenie telefónov znamená, že od danej chvíle sa každý, kto bude volať klebetnici A, dovolá klebetnici B a naopak. Navyše klebetnica A bude odteraz volať tým ľuďom, ktorým chcela volať B a naopak. To, že sa touto výmenou nijako neovplyvní počet potrebných telefonátov, je zrejmé, pretože klebetnice A, B sú pre nás vo chvíli, keď vedia presne tie isté informácie, úplne identické a teda by sme ich aj tak nevedeli nijako inak rozlíšiť.
Pomocou týchto tvrdení už vieme dokázať, že žiadne dve klebetnice, ktoré spolu telefonovali, nemohli pred týmto ich telefonátom vedieť obe tú istú klebetu. Dôkaz je najjednoduchší sporom. Predpokladajme, že dve klebetnice A, B vedia tú istú klebetu c a následne si zatelefonujú. Keďže obe vedeli klebetu c, museli sa ju obe nejako dozvedieť od klebetnice C, ktorá túto klebetu na začiatku vedela ako jediná. (A a C, B a C nemusia byť nutne rôzne.) Nech sa teda A dozvedela c od C tak, že C zavolala X_1, tá zas zavolala X_2, a tak ďalej až X_n zavolala A. Podľa predchádzajúceho tvrdenia sa však kľudne mohlo stať, že C zavolala X_1 a potom si vymenili telefóny – tým dostaneme možno trochu odlišnú postupnosť telefonátov, ale znova sa všetky klebety rozšíria ku všetkým klebetniciam na rovnaký počet telefonátov, takže nám to nevadí. Potom by už však X_2 nevolala s X_1, ale s C a tie dve by si znova mohli ihneď potom vymeniť telefóny. Takto by si C mohla aj ďalej vymieňať telefóny s klebetnicami X_i, až by si nakoniec vymenila telefón s klebetnicou A. Sme teda v situácii, keď chce klebetnica B telefonovať klebetnici C, pričom vie jej klebetu c. (Tu by sme boli, aj keby A a C boli od začiatku jedna a tá istá klebetnica.) Znova si však môžeme zistiť zoznam klebetníc Y_i, cez ktoré sa B dozvedela c a podobným spôsobom ich povymieňať, až kým sa nedostaneme do situácie, že B sa vlastne dozvedela klebetu c priamo telefonátom s C. My však už vieme, že B nemôže s C telefonovať dvakrát a tým dostávame spor.
Ďalej vieme, že ak A uskutočnila svoj posledný hovor s B, bol toto zároveň aj posledný hovor B. To je vcelku triviálne, pretože A po svojom poslednom hovore už bude vedieť všetky klebety a teda ich bude všetky vedieť aj B. Keby si potom ešte B chcela s niekým poklebetiť, určite by už tie dve poznali aspoň jednu spoločnú klebetu (B ich totiž vie všetky). To však nemôže nastať, ako sme pred chvíľou ukázali.
O každom hovore teda môžeme povedať, že je buď finálny (ak je to posledný hovor oboch klebetníc) alebo nefinálny (ak nie je posledným hovorom ani jednej z klebetníc). Vezmime si teraz najneskôr uskutočnený nefinálny hovor; nech je medzi klebetnicami A_1, A_2. Obe tieto klebetnice budú telefonovať ešte práve raz a určite nie znova medzi sebou. Nech teda A_1 uskutoční svoj finálny hovor s A_3. Keďže tento hovor bol finálny aj pre A_3, musí A_2 uskutočniť svoj finálny hovor ešte s nejakou inou klebetnicou, povedzme A_4. Všimnime si, že A_1 a A_3 už budú po svojom vzájomnom hovore plne informované a súčasne pred ním nesmeli mať žiadnu spoločnú klebetu, informácie klebetníc A_1 a A_3 sú preto tesne pred ich hovorom doplnkové. To isté platí aj pre A_2 a A_4. Keďže A_1 a A_2 v tom čase vedia presne tie isté klebety, musí vedieť aj A_3 také isté klebety ako A_4.
Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že predposledný hovor A_3 a A_4 bol medzi sebou navzájom. Ak by to tak nebolo, nech je predposledný hovor A_3 s nejakou inou klebetnicou A_5. Tá však po ich hovore bude vedieť to isté ako A_3 a teda aj to isté ako A_4. Preto A_4 a A_5 môžeme s kľudným svedomím vymeniť a dostaneme to, čo sme chceli.
Ďalej vieme povedať aj to, že žiadna z týchto štyroch klebetníc nevolala iba dvakrát, pretože jej klebetu by sa už mohli dozvedieť len tie zvyšné tri a podľa predpokladu je klebetníc viac ako štyri. Preto A_1, A_2 ani A_3, A_4 nie sú prvým hovorom žiadnej z nich – nech teda prvý hovor klebetnice A_i je s klebetnicou B_i. A_i a B_i musia byť tiež všetky navzájom rôzne, lebo inak by znova neskôr telefonovali spolu klebetnice, ktoré majú spoločné klebety, čo nie je možné. Keďže spomínané štyri hovory klebetníc A_i už prebiehajú len čisto medzi nimi, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že tieto štyri hovory boli až úplne posledné hovory medzi všetkými n klebetnicami a teda v čase, keď prebiehali, už B_i vedeli všetky klebety. Spojme teraz dvojice klebetníc A_i, B_i do superklebetníc $(AB)_i$ a pozrime sa, čo sa stane. Odpadnú nám štyri hovory A_i, B_i a taktiež nám odpadnú štyri hovory medzi A_i navzájom. Prečo? Keďže klebetnice B_1 až B_4 vedeli v čase týchto štyroch hovorov všetky klebety, budú ich

vedieť aj superklebetnice $(AB)_i$ a teda hovory medzi A_i už budú ďalej zbytočné. Tým sme však dostali postupnosť telefonátov pre $n-4$ klebetníc na $2n-5-8=2(n-4)-5$ hovorov, čo je spor.

Komentár: Na záver by sme vám ešte chceli povedať, že riešenie tohto príkladu bolo predmetom mnohých matematických článkov v sedemdesiatych a osemdesiatych rokoch. Objavili sa mnohé verzie tohto problému a skúmajú sa dodnes, preto je tento príklad pre nás stretnutím so súčasnou matematikou a s reálnymi problémami, ktoré sa riešia. Viac môžete nájsť na internetových stránkach ako sú napríklad *http://mathworld.wolfram.com/Gossiping.html* a *http://www.cs.cornell.edu/vogels/Epidemics/gossips-telephones.pdf.* Ďalšie zdroje nájdete na internete, ak dáte vyhľadávať „gossip problem".
Toto vzorové riešenie je založené na uvedených publikáciách, len sme sa ho snažili prepísať do pochopiteľnejšej podoby, keďže viaceré z nich využívajú vysokoškolskú matematiku a navyše sú v anglickom jazyku. Úloha bola skutočne ťažká. Ako vidíte, samotné kroky nie sú nad sily stredoškolákov, ale bolo ich príliš veľa. Pri riešení často nestačí mať poznatky potrebné na vyriešenie, ale treba vytrvalosť, trpezlivosť a ochotu skúšať nové prístupy k problému.
Väčšine riešiteľov sa podarilo nájsť riešenie na 86 alebo 87 telefonovaní. Málokto sa však pokúsil dokázať, že toto riešenie je najlepšie možné a kompletný dôkaz sa bohužiaľ nepodarilo nájsť vôbec nikomu. Body sme dávali za akýkoľvek krok, ktorý mohol viesť ku korektnému dôkazu.

Úloha č. 9: *Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc*

$$\begin{aligned} x^3-y^2 &= z^2-x, \\ y^3-z^2 &= x^2-y, \\ y^3-x^2 &= y^2-z. \end{aligned}$$

Poznámka: Daná sústava naozaj nie je symetrická a tak to aj má byť. :)

Riešenie: (opravovali Hanka a Ďuriško)
Prvé, čo by sme pri riešení zložitejšej sústavy rovníc mali skúsiť, je jednotlivé rovnice nejako šikovne sčítať alebo od seba odčítať. Máme totiž do činenia so sústavou, v ktorej na prvý pohľad nepôjde priamočiaro vyjadriť jednu premennú ako funkciu inej. Takže sa najprv poďme pozrieť, čo dostaneme odčítaním druhej rovnice od prvej.

$$\begin{aligned} (x^3-y^2)-(y^3-z^2) &= (z^2-y)-(x^2-y) \\ x^3-y^3+x^2-y^2+x-y &= 0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)+(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1) &= 0 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice buď platí $x=y$, alebo $x^2+xy+y^2+x+y+1=0$. Poďme najprv na prvý pohľad ťažšou cestou a skúsme zistiť, kedy bude platiť

$$x^2+xy+y^2+x+y+1=0.$$

Po prenásobení dvomi dostaneme
$2x^2+2xy+2y^2+2x+2y+2=(x^2+2xy+y^2)+(x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)=(x+y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\geq 0$
Tento výraz je rovný nule iba ak $x+y=y+1=x+1=0$, čo naraz nie je možné (ak neveríte, pozrite sa lepšie). Musí teda platiť $x=y$. Po dosadení $y=x$ do prvej rovnice máme

$$x^3-x^2+x-z^2=0. \tag{2}$$

Skúsme teraz využiť už aj tretiu rovnicu a odčítajme ju od druhej,

$$(y^3-z^2)-(y^3-x^2)=(x^2-y)-(y^2-z)$$

Po jednoduchej úprave dostaneme:

$$\begin{gathered} y^2-z^2+y-z=0 \\ (y-z)(y+z+1)=0 \end{gathered}$$

Znovu buď $z=y$, alebo $z=-(y+1)$.
Nech $z=y=x$, tak dosadením do (1) dostaneme $x^3-2x^2+x=x(x-1)^2=0$. Z toho už máme dve riešenia: $x=y=z=0$ a $x=y=z=1$.
Nech $z=-(y+1)=-(x+1)$, tak dosadením do (1) dostávame po úprave kubickú rovnicu

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0.$$

Ľahko overíme, že pre každé x, ktoré je riešením tejto rovnice, je trojica $(x, x, -x-1)$ riešením pôvodnej sústavy. Po vyskúšaní niektorých „rozumných" x zistíme, že žiadne nevyhovuje danej kubickej rovnici. Ako teda nájdeme jej korene?
Presnú hodnotu zistíme pomocou Cardanových vzorcov, ktoré mnohí z vás v nejakej knižke objavili (nájdeme ich napríklad aj na týchto adresách: *http://www.algebra.com/algebra/about/history/Cubic_equations.wikipedia, http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html*). My sa však uspokojíme aj s tým, že zistíme, koľko riešení má daná kubická rovnica a skúsime určiť ich približnú hodnotu.
Potrebujeme zistiť, koľkokrát graf funkcie $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1$ pretína x-ovú os. Na to však už potrebujeme trochu zložitejšiu matematiku. Zderivovaním funkcie vieme zistiť, v ktorých bodoch sa funkcia mení z rastúcej na klesajúcu alebo opačne. Keďže koeficient pri x^3 v $x^3 - 2x^2 - x - 1$ je kladný, funkcia bude buď na celom svojom definičnom obore rastúca, alebo najprv rastúca, potom klesajúca a znovu rastúca (zamyslite sa, prečo).
Zderivovaním f dostaneme $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Vyriešením rovnice $f'(x) = 0$ zistíme, že lokálne extrémy funkcie f sú

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}.$$

Vidíme, že $x_1 < x_2$, teda v x_1 sa f zmení z rastúcej na klesajúcu (bude to teda lokálne maximum). Ľahko sa presvedčíme, že $f(x_1) < 0$. Z toho vyplýva, že funkcia f pretína os x práve raz, a teda naša kubická rovnica má práve jedno reálne riešenie. Ak vyskúšame za x dosadiť niekoľko čísel, zistíme, že riešenie našej rovnice je z intervalu $(2, 3)$, rovné približne číslu $2,55$.
Skúmaná sústava rovníc má tri riešenia $(0,0,0), (1,1,1), (t, t, -1-t)$, kde t je jediným reálnym riešením rovnice $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$.

Úloha č. 10: *Na plániku je* 2 000 *miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto A je počet miest spojených s mestom A priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel* 1, 2, 4, 8, ..., 1 024. *Nech $S(A)$ je počet ciest z mesta A do iných miest (rôznych od A) s najviac jedným medzipristátím. Nezabudnite, že z mesta A do mesta B môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do $S(A)$ započítať. Dokážte, že keď sčítame $S(A)$ všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť* 10 000.

Riešenie: (opravoval Rasťo)
Úspech slávil najmä prístup, v ktorom ste sa na letecké linky pozreli z nadhľadu a uvedomili si, že čo to vlastne súčet všetkých $S(A)$ je. Ale začnime pekne po poriadku. $S(A)$ je počet liniek z mesta A do iných miest s najviac jedným medzipristátím, čiže je to počet priamych liniek (označme si $P(A)$) plus počet liniek, ktoré začínajú v A, idú cez suseda A a nekončia v A.
Súčet všetkých $S(A)$ sa skladá zo súčtu všetkých priamych liniek a zo súčtu všetkých liniek s jedným medzipristátím. Súčet všetkých priamych liniek je $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{2000})$ (kde A_i je i-te mesto), lebo z každého mesta A môžeme letieť práve $P(A)$ spôsobmi. Teraz spočítame počet ciest s jedným medzipristátím. Ak je mesto medzipristátia A, tak máme $P(A)$ spôsobov, ako sme do neho mohli priletieť (lebo s toľkými má priame spojenie) a $P(A) - 1$ spôsobmi môžeme z neho odísť (do mesta, odkiaľ sme prileteli, sa už nemôžeme vrátiť).
Dostávame, že pre súčet počtov ciest platí

$$S(A) = \sum_{i=1}^{2000} P(A_i) + \sum_{i=1}^{2000} P(A_i)\,(P(A_i) - 1) = \sum_{i=1}^{2000} P(A_i)^2.$$

Teraz nám už ostáva len zistiť, prečo $S(A)$ nemôže byť práve 10 000. Na to použijeme informáciu zo zadania, ktorú sme ešte nepoužili. (Dobrá rada do života: ak vyriešite úlohu bez toho, aby ste použili niektorú časť zadania, tak sa nad tým vždy radšej ešte raz zamyslite. :)) Vieme totiž, že $P(A_i)$ je mocninou 2. Čiže $P(A_i)^2$ je mocninou 4. A keďže mocniny 4 dávajú po delení tromi vždy zvyšok 1, tak súčet $S(A)$ bude dávať po delení tromi zvyšok $2\,000 \cdot 1$, teda 2. Lenže 10 000 dáva po delení tromi zvyšok 1, a tak súčet $S(A)$ nemôže byť 10 000.
Deliteľnosť je veľmi často dôvod, prečo sa niečo nedá, napr. rozdeliť čokoládu medzi 31 ľudí. Zaujímavé zvyšky nedávajú len mocniny štvorky. Najčastejšie sa zvyšky používajú pri štvorcoch prirodzených čísel, najmä zvyšky po delení tromi a štyrmi (či vyššími mocninami dvojky). Vyskytujú sa aj úlohy kde kľúčom k riešeniu je deliteľnosť číslom 5, 8 alebo nebodaj i 73. :) Pozrite si nasledujúcu úlohu.

Úloha č. 11: *Nájdite najmenšie nepárne prirodzené číslo $n > 1$ s nasledujúcou vlastnosťou: existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorých štvorec (druhá mocnina) je rovný súčtu štvorcov nejakých n za sebou idúcich prirodzených čísel.*

Riešenie: (opravoval Peťo)
(Čiastočne podľa *Ondra Budáča*.) Máme nájsť najmenšie nepárne číslo väčšie ako 1, ktoré spĺňa podmienky zadania. Rozumné teda bude skúšať postupne nepárne čísla 3, 5, 7, ... a zisťovať, či vyhovujú. Keď natrafíme na prvé, ktoré vyhovuje (a dokážeme to o ňom a o predošlých dokážeme, že nevyhovujú), bude úloha vyriešená.

Skúsme teda ako prvú hodnotu $n = 3$. Chceme zistiť, či existuje nekonečne veľa čísel, ktorých štvorec je súčtom troch po sebe idúcich štvorcov. Zaujíma nás preto, či rovnica

$$k^2 = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2$$

má v obore prirodzených čísel nekonečne veľa riešení. (Presnejšie takých riešení, pre ktoré platí $a > 1$, lebo chceme, aby $a-1$, a aj $a+1$ boli prirodzené. Avšak ak bude nekonečne veľa prirodzených riešení, bude aj nekonečne veľa takých, pri ktorých $a > 1$.) Tvar $(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2$ sme uprednostnili pred tvarom $a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2$ len z kozmetických dôvodov (po úprave vypadnú niektoré členy), celé riešenie sa dá urobiť aj bez tohoto „triku“. Po úprave uvedenej rovnice dostaneme

$$k^2 = 3a^2 + 2.$$

Skúsené oko už zbadá, že táto rovnosť nemôže byť splnená pre žiadne celé čísla k, a. Totiž pravá strana očividne dáva pre ľubovoľnú hodnotu a po delení tromi zvyšok 2, zatiaľ čo ľavá strana je štvorec, a tak dáva po delení tromi zvyšok 0 alebo 1 (dokázať to vám nebude robiť problém, stačí rozobrať tri možnosti podľa toho, aký zvyšok dáva po delení tromi číslo k). Tým sme dokázali, že hodnota $n = 3$ prípustná nie je (neexistuje *žiadne* číslo, ktorého štvorec je súčtom troch po sebe idúcich čísel, nie to ešte nekonečne veľa čísel).
Fajn, už máme 1 bod, poďme si vybojovať ďalší. Na rade je hodnota $n = 5$. Tentoraz nás zaujíma rovnica

$$k^2 = (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2$$

(opäť sme urobili kozmetickú úpravu). Po úprave dostaneme prijateľnejší tvar

$$k^2 = 5(a^2 + 2).$$

Ak by ostatná rovnosť platila pre čísla k a a, tak nutne $5 \mid k^2$, teda aj $5 \mid k$ (keď má k^2 v prvočíselnom rozklade päťku, musí ju mať aj k), z čoho zasa $25 \mid k^2$. Preto 25 musí deliť aj pravú stranu, čiže $5 \mid a^2 + 2$. Avšak $a^2 + 2$ nemôže byť nikdy deliteľné piatimi, ako vidíme z tabuľky.

zvyšok a po delení piatimi	0	1	2	3	4
zvyšok a^2+2 po delení piatimi	2	3	1	1	3

Takže $n = 5$ tiež nevyhovuje.
Hodnotu $n = 7$ vybavíme veľmi podobne, ako sme to urobili pri $n = 5$. Po úprave príslušnej rovnice (už ju nebudeme písať) totiž dostaneme

$$k^2 = 7(a^2 + 4).$$

Ak k a a spĺňajú túto rovnosť, skopírovaním úvah z predošlého odstavca dostaneme $7 \mid a^2 + 4$. Z tabuľky opäť vidíme, že to nie je možné.

zvyšok a po delení siedmimi	0	1	2	3	4	5	6
zvyšok a^2+4 po delení siedmimi	4	5	1	6	6	1	5

Vylúčiť prípad $n = 9$ je ešte jednoduchšie. Po úprave máme rovnicu

$$k^2 = 9a^2 + 60.$$

Pravá strana však zjavne nemôže byť štvorcom, lebo je deliteľná tromi, ale nie je deliteľná deviatimi (zatiaľ čo každý štvorec, ktorý je deliteľný tromi, je deliteľný aj deviatimi – podobnú úvahu sme robili už pri hodnote $n = 5$, keď z predpokladu $5 \mid k^2$ sme odvodili $25 \mid k^2$).
Pomaly strácame chuť príklad ďalej takto riešiť. Naoko to vyzerá, že zakaždým ukážeme, že rovnica nemá žiadne riešenie a že teda žiadne číslo n nevyhovuje podmienkam zadania. Našťastie sa toto zdanie ukáže ako mylné už pri nasledujúcom kandidátovi $n = 11$. Riešenú rovnicu

$$k^2 = (a-5)^2 + (a-4)^2 + (a-3)^2 + \cdots + (a+3)^2 + (a+4)^2 + (a+5)^2 \tag{1}$$

upravíme na tvar

$$k^2 = 11(a^2 + 10).$$

Pravá strana je vždy deliteľná jedenástimi, preto aj $11 \mid k$ a môžeme položiť $k = 11m$, kde m je prirodzené číslo. Po vykrátení tak dostaneme

$$11m^2 = a^2 + 10. \tag{2}$$

Príliš sme si nepomohli, len sme o niečo znížili koeficienty rovnice. Avšak pri tejto rovnici na prvý pohľad vidíme, že jej riešením je dvojica $(m, a) = (1, 1)$. I keď táto dvojica nám ešte nedá 11 za sebou idúcich štvorcov prirodzených čísel, ktorých súčet je štvorcom (na to potrebujeme $a > 5$), vieme vďaka nej, že sa nám určite nepodarí dokázať

(tak ako sa nám to podarilo pri $n = 3, 7, 9, 11$ pomocou zvyškových tried), že rovnica (2) nemá v celých číslach žiadne riešenie (jedno sme predsa práve našli). Navyše pri tomto type rovníc často nájdenie jedného riešenia naznačuje, že riešení by mohlo byť nekonečne veľa. Na vyriešenie úlohy nepotrebujeme vyriešiť rovnicu (2) všeobecne, t. j. nemusíme nájsť všetky riešenia a dokázať, že žiadne iné neexistujú. Stačí nájsť nekonečne veľa riešení. Skúsme teda nejaké ďalšie riešenia objaviť. Skvelé by bolo vytvoriť rekurentný vzťah, ktorým vieme generovať z už nájdených riešení nové riešenia. Veľmi dobrou metódou je zopár riešení nájsť pomocou kalkulačky či počítača, rekurentný vzťah sa dá potom ľahšie objaviť. Skúsme to však bez toho.
Chceme vytvoriť postupnosť riešení (m_k, a_k), $k = 1, 2, \dots$, pričom každé ďalšie sa bude dať vyjadriť pomocou predchádzajúceho. Také vyjadrenie môže mať povedzme tvar

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= A \cdot m_k + B \cdot a_k, \\ a_{k+1} &= C \cdot m_k + D \cdot a_k, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

pričom práve koeficienty A, B, C, D chceme nájsť. Dopredu síce vôbec nemáme záruku, že také vyjadrenie existuje, t. j. že existujú celé čísla A, B, C, D také, že postupnosť definovaná pomocou (3) s počiatočnými hodnotami $(m_1, a_1) = (1, 1)$ je postupnosťou riešení rovnice (2), ale za pokus to stojí, veď ak také čísla nájdeme, bude úloha vyriešená.
Každé riešenie (m, a) danej rovnice spĺňa rovnosť $11m^2 - a^2 = 10$. Vhodné teda bude navoliť A, B, C, D tak, aby platilo

$$11m_{k+1}^2 - a_{k+1}^2 = 11m_k^2 - a_k^2, \tag{4}$$

z čoho po dosadení z (3) postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 11(Am_k + Ba_k)^2 - (Cm_k + Da_k)^2 &= 11m_k^2 - a_k^2, \\ (11A^2 - C^2)m_k^2 + (11B^2 - D^2)a_k^2 + (22AB - 2CD)m_k a_k &= 11m_k^2 - a_k^2. \end{aligned}$$

Táto rovnosť má platiť pre každý index k. Klasickým porovnaním koeficientov dostávame sústavu

$$\begin{aligned} 11A^2 - C^2 &= 11, \\ 11B^2 - D^2 &= -1, \\ 22AB - 2CD &= 0. \end{aligned}$$

Uhádnime nejaké riešenie. Z prvej rovnice sústavy vidíme, že $11 \mid C$. Vyskúšajme do nej dosadiť $C = 11, 22, 33, \dots$ Prvé dve hodnoty nám nedajú celočíselné A. No pre $C = 33$ dostaneme $A = 10$ (prípadne $A = -10$, ale nezabúdajme, že iba hádame hocaké riešenie, zápornej možnosti sa teda nevenujme). Zatiaľ sme pracovali len s prvou rovnicou. Dosaďme uhádnuté čísla do tretej rovnice sústavy. Získame

$$22 \cdot 10B - 2 \cdot 33D = 0 \qquad \text{a po vykrátení} \qquad 10B - 3D = 0.$$

Už dosadením najmenšieho prirodzeného riešenia tejto rovnice $B = 3$, $D = 10$ do druhej rovnice sústavy zistíme, že vyhovuje ($11 \cdot 3^2 - 10^2$ je naozaj -1). Našli sme teda jedno riešenie $(A, B, C, D) = (10, 3, 33, 10)$ a po dosadení do (3) máme postupnosť

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= 10m_k + 3a_k, \\ a_{k+1} &= 33m_k + 10a_k, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \dots, \quad m_1 = a_1 = 1.$$

Pre zaujímavosť zrátajme prvých pár členov. Dostaneme dvojice $(1, 1)$, $(13, 43)$, $(259, 859)$, … Neveriaci ľahko overia, že sú to naozaj riešenia rovnice (2). Zrejme takto vygenerujeme nekonečne veľa rôznych riešení (postupnosť je zjavne rastúca). To, že sú to naozaj riešenia, vyplýva z postupu, akým sme našli konštanty A, B, C, D. Platí totiž vzťah (4) a ostatné je vecou indukcie. Dokázali sme teda, že rovnica (2) má nekonečne veľa riešení, preto ich má nekonečne veľa aj rovnica (1). (Ku každej dvojici (m_k, a_k), ktorá je riešením (2), máme dvojicu $(11m_k, a_k)$, ktorá je riešením (1). Pritom pre $k > 1$ máme $a_k > 5$, takže z každej dvojice $(11m_k, a_k)$ pre $k > 1$ dostaneme nových 11 po sebe idúcich štvorcov *prirodzených* čísel.)
Tým je úloha vyriešená. Hľadaným číslom je $n = 11$.

Poznámka: Prípady $n < 11$ bolo možné vylúčiť viacerými spôsobmi. Napríklad pre $n = 5$ stačilo rozobrať všetky možnosti zvyškov po delení štyrmi a pre $n = 7$ po delení šestnástimi.
Viacerí riešitelia popisovali riešenia rovnice (2) iným rekurentným vzťahom. Keď máme vygenerovaných zopár riešení, dá sa uhádnuť, že riešenia tvoria postupnosť (m_k, a_k) definovanú

$$m_{k+2} = 20m_{k+1} - m_k, \qquad a_{k+2} = 20a_{k+1} - m_k, \qquad m_1 = a_1 = 1,\ m_2 = 13,\ m_2 = 43.$$

Matematickou indukciou, ktorá ale vyžaduje trochu viac technických detailov, sa potom dá dokázať, že táto postupnosť naozaj obsahuje riešenia rovnice.

Rovnica (2) má aj iné riešenia ako tie, ktoré sme popísali našou postupnosťou. Vyhovuje napríklad aj dvojica $(7, 23)$. Zamyslite sa nad tým, ako vyzerá množina všetkých riešení. Ďalšou zaujímavou otázkou je, ktoré nepárne n okrem jedenástky spĺňajú podmienky zadania.

Komentár: Mnohí ste sa snažili riešiť úlohu so všeobecným n. Namiesto viacerých konkrétnych rovníc, ktoré sme dostali pre $n = 3, 5, 7, 9, 11$ (poslednou z nich je rovnica (1)), ste tak dostali jednu rovnicu tvaru $k^2 = na^2 + V$, pričom V ste vyjadrili pomocou vzorca pre súčet štvorcov prvých niekoľko prirodzených čísel. S touto rovnicou sa ale moc pohnúť nedalo. Naše riešenie ukazuje, prečo to nešlo. Veď pre každú hodnotu n sme použili odlišné argumenty. Ťažko ich možno všetky objaviť z jednej všeobecnej rovnice. Pritom v zadaní sa priamo ponúkalo, aby sme odbavovali prípady jednotlivo. Nájsť predsa bolo treba *najmenšie* nepárne číslo s uvedenými vlastnosťami, a nie všetky.

Úloha č. 12: *Nech $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je taká funkcia, že funkcie $f(x) - x^3$ a $f(x) - 3x$ sú rastúce. Zistite, či funkcia $f(x) - x^2 - x$ musí byť monotónna.*

Riešenie: (opravovali Kenny a Mazo)

(Podľa *Ondra Budáča*.) Na skúmanie priebehu funkcií máme v matematickej analýze mnoho užitočných metód, avšak v našom príklade sa použiť nedajú. O funkcii f nevieme takmer nič. Nemusí byť spojitá, diferencovateľná... Dokonca môže byť spojitá a pritom môže nemať v žiadnom bode svojho definičného oboru deriváciu (aj také funkcie existujú). Preto prístupy využívajúce skúmanie derivácie funkcie $f(x) - x^2 - x$ neviedli k cieľu.

Rastúcosť funkcie môžeme prepísať priamo z definície; funkcia f je rastúca práve vtedy, keď pre každé x, y z jej definičného oboru platí, že ak $x < y$, tak $f(x) < f(y)$.

Po chvíľke hry s funkciou $f(x) - x^2 - x$ zistíme, že je rastúca. (Hra by mala zahŕňať voľbu konkrétnych funkcií namiesto f a dosádzanie konkrétnych hodnôt za x.) Toto tvrdenie dokážeme. Presnejšie, nech a, b sú dve kladné reálne čísla s vlastnosťou $a > b$. Dokážeme, že $f(a) - a^2 - a > f(b) - b^2 - b$, inak napísané $f(a) - f(b) > a^2 + a - b^2 - b$. Z predpokladov v zadaní vieme, že pre naše a, b platí

$$f(a) - a^3 > f(b) - b^3 \qquad \text{a tiež} \qquad f(a) - 3a > f(b) - 3b.$$

Takže pre rozdiel $f(a) - f(b)$ máme dva dolné odhady

$$f(a) - f(b) > a^3 - b^3, \qquad\qquad f(a) - f(b) > 3a - 3b.$$

Chceme ukázať, že aspoň jedno z čísel $a^3 - b^3$ a $3a - 3b$, ktorými sme odhadli rozdiel $f(a) - f(b)$, je väčšie ako $a^2 + a - b^2 - b = (a - b)(a + b + 1)$. Spravíme teda niekoľko porovnaní.

$$3a - 3b \geq (a - b)(a + b + 1) \iff 3 \geq a + b + 1 \iff a + b \leq 2$$

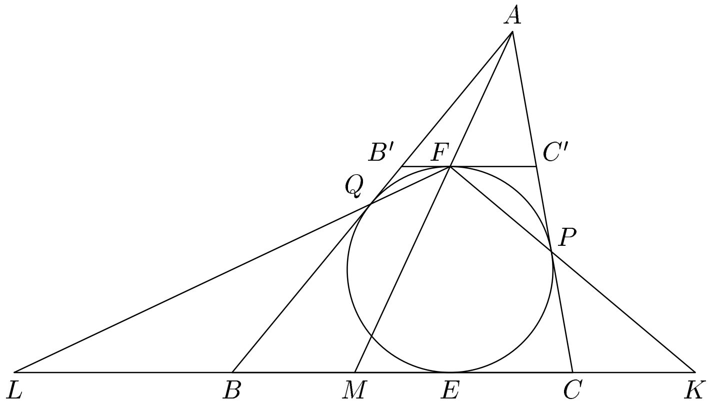
Takže stačí dokázať, že pre $a + b > 2$ platí nerovnosť

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &\geq (a - b)(a + b + 1) \\ a^2 + ab + b^2 &\geq a + b + 1 \\ 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2a - 2b - 2 &\geq 0 \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b)^2 - 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je pravdivá, lebo $a + b > 2$ a štvorce sú nezáporné. Všimnite si, ako sme k nej dospeli; cieľom úprav bolo získať na ľavej strane štvorce a na pravej nulu.

Úloha č. 13: *Kružnica k vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka strán AB, BC, CA po poradí v bodoch Q, E, P. Úsečka EF je priemerom kružnice k. Priamky FA, FP, FQ pretínajú priamku BC po poradí v bodoch M, K, L. Dokážte, že bod M je stredom úsečky KL.*

Riešenie: (opravoval Foto)



Vari najťažšou časťou riešenia bolo všimnúť si, že body M a F sú rovnoľahlé so stredom v bode A a z toho vyvodiť, že bod M je dotykom pripísanej kružnice k strane BC trojuholníka ABC.
Na úvod si pripomeňme známe tvrdenia o vpísanej a pripísanej kružnici. Keďže E je bod dotyku vpísanej kružnice a strany BC, platí

$$|CE| = \frac{a+b-c}{2}, \qquad |BE| = \frac{a+c-b}{2}\cdot$$

Ďalej ak M je bodom dotyku strany BC a k nej pripísanej kružnice, tak

$$|BM| = \frac{a+b-c}{2}, \qquad |CM| = \frac{a+c-b}{2}\cdot$$

Na tomto mieste mi nedá neapelovať na vzácneho čitateľa, že by bolo vhodné si k týmto vzťahom vytvoriť správny vzťah. To jest, mať ich dokonale ohmatané, a teda aj dokázané.
Narysujme si rovnobežku s BC cez bod F. Jej prieniky s AB a AC označme B' a C'. Priamka $B'C'$ je zjavne dotyčnicou k vpísanej kružnici, preto sú trojuholníky $PC'F$ a $QB'F$ rovnoramenné. Potom aj k nim podobné trojuholníky PCK a QBL sú rovnoramenné, čiže $|KC| = |CP|$ a $|LB| = |BQ|$. Opäť raz použijeme triviálnu vlastnosť vpísanej kružnice $|CP| = |CE|$ a $|BQ| = |BE|$ a dostaneme

$$|KM| = |KC| + |CM| = |CE| + |CM|$$

$$|LM| = |LB| + |BM| = |BE| + |BM|$$

A pri pohľade na naše, teraz už dobre známe, vzťahy z úvodu riešenia zistíme, že platí $|KM| = |LM|$.

Úloha č. 14: *Dokážte, že z ľubovoľných* 200 *prirodzených čísel vieme vybrať práve* 100 *čísel tak, že súčet vybratých čísel je deliteľný číslom* 100.

Riešenie: (opravoval Miťo)
Po prečítaní zadania úlohy ste si asi všetci všimli istú podobnosť s niektorými príkladmi na Dirichletov princíp (DP). Háčik je v tom, že pomocou DP sa dokazujú tvrdenie typu „... potom existuje *aspoň*... “, čo však nie je náš prípad. Teda zrejme nebude stačiť priama aplikácia DP. Nevadí, poďme ďalej, vrátime sa k tomu neskôr.
Pri čítaní zadania vás asi tiež napadlo, že čísla 100 a 200 nie sú len náhodne vybraté, ale mohol by medzi nimi byť nejaký dôležitý vzťah. Vidíte nejaký? Áno, väčšina asi tipla n a $2n$, čo je úplne super, pretože nám to dáva priestor na experimentovanie s malými číslami, čo sa hodí skoro vždy. A viete čo? Skúste si to. :)
Máme teda hypotézu, že ak $n > 1$ je prirodzené číslo, tak z ľubovoľných $2n-1$ celých čísel vieme vybrať práve n tak, že súčet týchto n čísel je deliteľných číslom n.
Ocitli sme sa v podstate na začiatku, ale sme o čosi múdrejší, ako aj odvážnejší, keďže sme sa chystáme dokázať ešte všeobecnejšie tvrdenie, ako pôvodné. Máme teda tvrdenie, ktorého platnosť sa snažíme dokázať pre všetky prirodzené čísla. Matematická indukcia v takých prípadoch väčšinou nebýva zlý nápad. Skôr či neskôr to však vzdáme, pretože spraviť indukčný krok z deliteľnosti n na deliteľnosť $n+1$ je, zdá sa, nemožné.
Ale môže nás napadnúť niečo iné. Nebudeme robiť obyčajnú indukciu, ale nejakú, kde vieme dobre narábať s deliteľnosťou. Napríklad robiť indukčný krok z n na $2n$, tam by sa deliteľnosť zachovávala. Skúsme to. Majme teda n, o ktorom predpokladáme, že z ľubovoľných $2n-1$ čísel vieme vybrať n tak, že ich súčet je deliteľný n. Zoberme teraz ľubovoľných $2(2n)-1 = 4n-1$ čísel, využime náš predpoklad a vyberme z nich n, ktorých súčet je deliteľný n. Zostalo nám $3n-1$ čísel a keď náš predpoklad využijeme ešte dva krát, získavame tri (disjunktné) n-tice čísel, z ktorých každá má súčet prvkov deliteľný n. Označme si teraz súčty prvkov týchto n-tíc S_1, S_2 a S_3. Vieme, že sú deliteľné n a preto ich môžeme zapísať ako $S_1 = nT_1$, $S_2 = nT_2$, $S_3 = nT_3$. Pri experimentovaní s malými číslami na začiatku dokázali, že z čísel T_1, T_2, T_3 vieme vybrať dve, ktorých súčet je párny. (Ak sme to na začiatku úplnou náhodou neukázali, ukážeme to teraz. :-) Vybraté čísla môžeme označiť T_1 a T_2. Potom však $S_1 + S_2 = nT_1 + nT_2 = n(T_1 + T_2)$ a toto číslo je deliteľné $2n$, teda z ľubovoľných $4n-1$ čísel sa dá vybrať $2n$ čísel deliteľných $2n$.
To znie celkom fajn, nie? Veď teraz vieme, že ak naše tvrdenie platí pre n, tak platí aj pre $2n$; teda sme ho dokázali pre všetky čísla tvaru 2^k. Zovšeobecnenie nás napadne celkom prirodzene, stačí, aby sme si všimli, ako vyzeral dôkaz pri prechode z n na $2n$. Predpokladajme, že naše tvrdenie platí pre n aj pre m, ukážeme, že platí aj pre mn. Majme ľubovoľných $2mn-1$ čísel. Vieme, že pokiaľ je čísel aspoň $2m-1$, môžeme z nich podľa predpokladu v každom kroku vybrať m-ticu čísel so súčtom deliteľným m. Takýchto krokov môžeme urobiť $2n-1$; dostávame tak $2n-1$ m-tíc, ktorých súčty si označíme S_1, S_2,..., S_{2n-1}. Stále postupujeme podobne ako predtým, súčty zapíšme ako $S_i = mT_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Spomedzi čísel T_i však vieme vybrať práve n tak, že ich súčet bude deliteľný číslom n. Teraz už isto ľahko zvládnete ukázať, že sme takto našli hľadaných mn čísel.
Celkom slušný výsledok, nie? Ak by sme teraz naše tvrdenie dokázali pre prvočísla, dokázali by sme ho pre všetky prirodzené čísla.

Znovu sa mení formulácia dokazovanej hypotézy, tentokrát všetky výskyty „prirodzeného čísla n“ nahradzujeme „prvočíslom p“. Ale zrejme teraz už nebudeme môcť použiť žiadnu indukciu, ale budeme sa musieť spoľahnúť na vlastnosti prvočísel, DP a na naše nápady.
Ďalej budú všetky úvahy modulo p. Zoraďme si naše čísla podľa veľkosti a prečíslujme ich, dostávame tak $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2p-1}$. Položme ďalej $b_k = a_{p+k} - a_k$ pre $k = 1, 2, \ldots, p-1$, pričom platí $0 \leq b_k \leq p-1$. Kedže možnosť, že nejakých p z čísel a_i je rovnakých, už rozobral nedočkavý čitateľ, môžeme predpokladať $b_k \neq 0$. Naše p-prvkové množiny čísel budú všetky obsahovať a_p a z každej dvojice $\{a_k, a_{p+k}\}$ budú obsahovať práve jedno číslo. Ak zo všetkých dvojíc vyberieme prvé číslo, súčet bude $S = a_1 + \cdots + a_p$. Ak z i-tej dvojice chceme vybrať druhé číslo, stačí k S pripočítať $b_i = a_{p+i} - a_i$. Vhodnou voľbou čísel z jednotlivých dvojíc teda vieme získať všetky súčty S spolu s ľubovoľnými z čísel b_k. Zostáva ešte dokázať, že takto vieme získať aj súčet 0. Nech S_j označuje tie zvyškové triedy modulo p, ktoré vieme získať ako súčet čísla S a nejakej podmnožiny množiny $\{b_1, b_2, \ldots, b_j\}$.
Často sa stáva, že kľúčom k riešeniu úlohy je voľba vhodného označenia. V predchádzajucom odstavci sme zaviedli netriviálne značenie, s využitím ktorého celú úlohu stačí už len doklepnúť. To však neznamená, že je to triviálne; preto na požiadanie zašleme záujemcom hint, ak by sa im nedarilo dôkaz dokončiť ani po úpornej snahe.