Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti 2005/06

Milí riešitelia!

Dostávajú sa vám do rúk ďalšie vzorové riešenia. Píšeme ich pre vás z niekoľkých dôvodov. Určite vás zaujíma riešenie úlohy, ktorú ste nevyriešili, alebo vyriešili len čiastočne. Veď ste sa s ňou toľko natrápili! Ďalším dôvodom je to, že vás chceme naučiť, ako má vyzerať riešenie matematickej úlohy. Ale ešte dôležitejšie je, aby ste sa naučili úlohy riešiť. Preto mnohé vzorové riešenia neobsahujú len samotné riešenie, vyriešených úloh si nájdete v knižkách a ročenkách MO dostatok. Ale snažíme sa do riešení napísať aj to, ako môžeme k riešeniu dospieť, prečo postupujeme práve týmto spôsobom a prípadne aj niekoľko doplňujúcich úloh, aby ste si mohli vyskúšať nové metódy. Preto má zmysel čítať vzorové riešenia aj v prípade, že ste úlohu vyriešili. Nebojte sa dĺžky riešení, väčšinou sú dlhšie práve preto, aby sa dali ľahšie pochopiť. Pristupujte k čítaniu aktívne, s ceruzkou v ruke, kreslite si, píšte; odnesiete si z toho viac.

Keď píšete riešenie úlohy zo seminára, myslite na to, že niekto ho bude opravovať. Píšte čitateľne a nechávajte na okrajoch strán medzery, aby sme vám tam mohli písať komentáre k riešeniu. Pokiaľ viete, že ani sami po sebe neviete poriadne čítať, môžete skúsiť písať riešenie na počítači. A riešenie si po sebe prečítajte, často zistíte, že ste na niečo zabudli alebo máte kadečo naviac. Nepotrebné veci do riešení nepíšte. Stačí tvrdenia, ktoré platia a potrebujete ich v riešení. Samozrejme, ku každému tvrdeniu patrí primerané zdôvodnenie. Netreba zdôvodňovať veci, ktoré sa bežne učia v škole, trebárs že súčet uhlov v trojuholníku je $180°$ či Pytagorovu vetu.

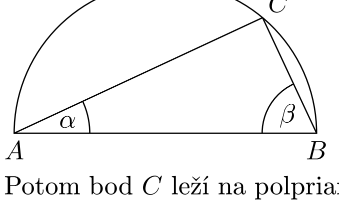
Pred samotnými vzorovými riešeniami si povieme niekoľko praktických rád, vhodných pri riešení geometrických úloh. Keď dostaneme do rúk úlohu, prečítame si zadanie. Toto prvé prečítanie nám dá približný obraz o úlohe, napríklad zistíme, že sa tam spomínajú kružnice a úloha je konštrukčná. Potom si zadanie prečítame ešte raz a tentoraz poriadne, dbáme na všetky detaily. Súčasne si popritom kreslíme obrázok, stačí náčrt. Keď sa niekde pomýlime, napríklad sa majú nejaké dve priamky pretnúť a nám akurát vyšli rovnobežné (lebo sme si nevhodne zvolili nejaké body), tak sa nebojíme začať kresliť odznova. Niektoré úlohy majú obrázok taký nepríjemný, že sa nám ho nepodarí nakresliť rukou, vtedy neváhame použiť rysovacie pomôcky. Zrozumiteľný obrázok je dôležitý. Len málo úloh je takých, že si vieme všetko predstaviť aj bez obrázka. A so zlým obrázkom sa zle pracuje: keď tri body sú na priamke, tak nech aj na obrázku sú na priamke, inak na to zabudneme. Keď je niečo kružnica, tak to má patrične aj vyzerať, a nie ako nepodarený zemiak. Lebo často treba obrázok skúmať a vytvárať si hypotézy, napríklad o kolmosti priamok. A ako si všimneme, že tie priamky sú na seba kolmé, ak na našom obrázku zvierajú uhol $70°$?

Keď už máme dobrý obrázok, prečítame si zadanie znova. Tentokrát si k obrázku napíšeme všetky dôležité fakty, ktoré sa spomínajú v zadaní, napríklad ktoré priamky sú na seba kolmé, že BD je osou uhla ABC a podobne. Pre kolmosť priamok či rovnobežnosť máme dohodnuté značky, ktoré sa dajú kresliť do obrázka, určite ich poznáte. Takisto si treba niekam napísať, ktoré body ako vznikli, napríklad, že M je priesečník priamky AB s priamkou CD. A nakoniec si rozmyslíme a poznamenáme na papier, čo od nás v úlohe chcú. Dokázať niečo? Nájsť množinu bodov? Zostrojiť niečo? Niekedy je v zadaní chyba alebo mu nerozumieme. Treba sa spýtať toho, kto nám úlohu zadal, v prípade úlohy v KMS je na to určená emailová adresa `kms@kms.sk`.

Máme za sebou prvú fázu riešenia. Je dôležitá a nevynechávajú ju ani skúsení riešitelia. Bez nej nevieme, o čo v úlohe ide a ťažko môžeme niečo riešiť. A tí z vás, ktorí si už niekedy zle prečítali zadanie a potom dostali 0 bodov, určite vedia, prečo sa oplatí správnemu pochopeniu zadania venovať dostatok času.

V jednoduchých úlohách po tejto fáze už aj vieme, čo robiť a akým spôsobom postupovať. Čo však, keď úloha je pre nás nová a zatiaľ sme sa s podobnou nestretli? Ukážeme si jednu z možností, ako postupovať. Budeme počítať uhly. A to nie hocijako, ale tak, aby sme úlohu vyriešili. Táto metóda nám často pomôže, ale nie je všemocná. Neskôr si ukážeme niekoľko príkladov, pri ktorých sa uhly počítať nedajú.

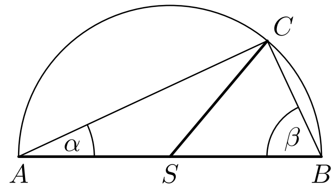
Príklad: Daná je polkružnica k s priemerom AB. Nech C je ľubovoľný bod na tejto polkružnici rôzny od bodov A, B. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.



Máme danú kružnicu, jej priemer AB a bod C. To všetko máme nakreslené na obrázku. Body A, B, C neležia na priamke kvôli podmienke zo zadania a preto ABC je naozaj trojuholník. Je pravouhlý? Ešte nevieme, ale budeme vedieť na túto otázku odpovedať, keď budeme poznať jeho vnútorné uhly. Zatiaľ o nich nevieme nič. Označme si veľkosť uhla CAB ako α, veľkosť uhla CBA nech je β. Čo vieme o týchto uhloch povedať? Môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty? Nuž, nech $\alpha = 30°$. Potom bod C leží na polpriamke, ktorá s priamkou AB zviera uhol $30°$. Táto polpriamka však pretne polkružnicu k v jedinom bode, takže bod C je jednoznačne určený. Ale potom aj uhol CBA je jednoznačne určený. Túto úvahu vieme zopakovať pre hocijakú veľkosť uhla α. A navyše ju vieme aj obrátiť: začneme uhlom β a pre veľkosť uhla α dostaneme jedinú hodnotu. Takže medzi uhlami α a β je nejaká skrytá zákonitosť, ktorej presné odhalenie by mohlo viesť k výsledku.

Čo máme dokázať? Že trojuholník ABC je pravouhlý. Uhly α a β sú ostré, je to jasné z obrázka. Podrobnejšie zdôvodnenie môžeme založiť na tom, že polkružnica k leží okrem bodov A, B celá vnútri pásu určeného dotyčnicami ku k v bodoch A, B. (Tieto dotyčnice sú kolmé na priamku AB. Nakreslite si to.) Bod C je na k, teda tiež vnútri tohto pásu.
Takže jediný uhol, ktorý by mohol byť pravý, je uhol pri vrchole C. Jeho veľkosť γ vieme určiť z toho, že súčet uhlov v trojuholníku ABC je $180°$. Jednoduchou úpravou dostaneme, že $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Ale zatiaľ nevieme, či táto hodnota je $90°$ alebo nie.

Predsa potrebujeme odhaliť ten vzťah medzi uhlami α a β. Keď sa vrátime k úvahe o tomto vzťahu, všimneme si, že súvisí s tým, že bod C leží na polkružnici k. Čo to znamená? Kružnica je množinou bodov rovnako vzdialených od jej stredu. Označme teda ten stred S. Keďže AB je priemer, je bod S aj stredom úsečky AB. A teraz vieme, že $SA = SB = SC$, lebo C leží na kružnici k. To si zaslúži nový obrázok, na ktorom tieto rovnaké vzdialenosti zvýrazníme hrubšou čiarou.



Na obrázku sú dva rovnoramenné trojuholníky. Vidíte ich? Boli tam aj doteraz, lenže uvedomiť si to a napísať na papier medzi zistené veci je ďalším krokom v riešení. Rovnoramenný trojuholník má rovnaké uhly pri základni. Nakreslíme to do obrázka. Určite si kreslíte na papier vlastný, takže to zvládnete aj sami. A čo sme zistili? Že veľkosť uhla pri vrchole C je rovná $\alpha + \beta$. Ale my už o tejto veľkosti čosi vieme, $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Takže máme rovnicu

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - \gamma.$$

Rozmyslite si, odkiaľ sa táto rovnosť zobrala. Z nej ľahko dopočítame veľkosť uhla $\gamma = 90°$ a aj vzťah $\alpha + \beta = 90°$, ktorý sme tušili už od začiatku.
Videli sme, že počítanie uhlov nám pomohlo. Nerobili sme to však bezhlavo. Skúsme si zhrnúť pravidlá, podľa ktorých sa pri rátaní uhlov zvyčajne riadime.
1. Uhly označujeme písmenkami, zvyčajne gréckymi: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \varepsilon, \omega, \ldots$ Keď vieme, že dva uhly majú rovnakú veľkosť, označíme ich rovnakým písmenom. Nezaškodí niekam napísať, prečo sú rovnaké.
2. Kreslíme si veľký obrázok. Aby bol prehľadný a aby bolo dosť miesta na všetky veci, ktoré tam neskôr budeme chcieť doplniť, napríklad zistené veľkosti uhlov.
3. Nepotrebujeme do obrázka písať veľkosti všetkých uhlov, ktoré vieme vypočítať. Napríklad z dvoch vrcholových uhlov stačí napísať veľkosť len k jednému. Pomáha to udržať si prehľad o tom, čo vlastne robíme. Keď ideme skúsiť niečo nové, nebojme sa nakresliť si nový obrázok. Staré pokusy by len odvádzali našu pozornosť. Na starý obrázok sa môžeme pozrieť kedykoľvek, keď to bude potrebné.
4. Uhly rátame len vtedy, keď to vyzerá nádejne. Mnoho vecí sa dá vyjadriť v reči uhlov. Napríklad rovnoramennosť trojuholníka, os uhla, kolmosť či rovnobežnosť dvoch priamok, podobnosť trojuholníkov. Aj to, že tri body A, B, C ležia na priamke, to nastáva vtedy, keď uhol ABC je priamy (má veľkosť $180°$). Rozmyslite si, ako pomocou uhlov popíšete tieto situácie. Napadá vás aj nejaká iná, ktorá sa dá popísať uhlami?
Pokiaľ na obrázku nič takéto nie je, tak ani uhly nemá zmysel počítať, veď o ich veľkostiach nebudeme vedieť povedať takmer nič. Dobrým príkladom je uhol, ktorý zviera ťažnica s protiľahlou stranou. Ten pomocou vnútorných uhlov tohto trojuholníka vyjadriť nijako pekne nevieme. (Narysujte si niekoľko trojuholníkov, ktorých vnútorné uhly sú „pekné“ a odmerajte uhol medzi ťažnicou z nejakého vrchola a protiľahlou stranou. Čo ste zistili?)
5. Uhol označíme (resp. pripíšeme veľkosť) len vtedy, keď to potrebujeme. Nové písmenko na označenie uhla zavedieme len vtedy, keď máme naozaj *dobrý* dôvod. Uvedieme si tri známe dobré dôvody.
a) Uhol je nezávislý na veľkostiach doteraz označených uhlov. Všimnime si ten príklad o polkružnici a pravouhlom trojuholníku. Uhol ASB je priamy. Keď teraz pridáme do obrázka bod C, uhol CAB nezávisí od veľkosti žiadneho z uhlov, ktoré boli na obrázku doteraz. Môžeme vhodnou voľbou bodu C dosiahnuť, že bude mať ľubovoľnú veľkosť z istého intervalu. Preto na jeho veľkosť potrebujeme nové písmenko, neexistuje žiaden vzťah, pomocou ktorého by sme vedeli túto veľkosť vypočítať z už známych uhlov.
b) Uhol síce je závislý, ale nevieme ho dobre vyjadriť. Toto napríklad nastane po označení veľkosť uhla CAB písmenom α. Vieme, že veľkosť uhla β už je určená, keď poznáme veľkosť α, ale túto závislosť zatiaľ presne nepoznáme. Podobne je to s tým uhlom pri ťažnici. Pre daný trojuholník ABC s veľkosťami vnútorných uhlov α, β, γ je síce jeho ťažnica aj uhol pri nej jednoznačne určená, ale my jeho veľkosť pomocou α, β, γ vyjadriť nevieme. Preto ak chceme jeho veľkosť použiť ďalej vo výpočtoch, treba ju označiť novým písmenkom.
c) Uhol vieme vyjadriť, ale vyjadrenie je zložité či neprehľadné. Napríklad označíme tretí uhol v trojuholníku γ namiesto $180° - \alpha - \beta$, aby sme mali stručnejšie všetky zápisy, ktoré sa tohto uhla týkajú.
Pri počítaní uhlov si treba dávať pozor na to, že situácia nemusí vyzerať vždy tak, ako ju máme nakreslenú. Môže sa stať, že body ležia na priamke či kružnici v inom poradí, nie tak, ako máme na obrázku. Potom sú niektoré uhly záporné, napríklad keď máme trojuholník s vnútornými uhlami α, β a nejaké ďalšie uhly, medzi nimi uhol s veľkosťou $\alpha - \beta$. To znamená, že náš obrázok verne zachytáva situáciu iba vtedy, keď $\alpha > \beta$. Pre $\alpha = \beta$ a $\alpha < \beta$ si musíme nakresliť iné obrázky a skontrolovať, či náš dôkaz funguje aj tam.
Poďme teraz už k samotným vzorovým riešeniam.

Úloha č. 1: *Máme daný pravidelný päťuholník $ABCDE$. Nájdite súčet veľkostí uhlov ACB, CAD a ADE.*

Riešenie: (opravovala Katka)

Máme daný pravidelný päťuholník $ABCDE$. To znamená, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé a všetky jeho vnútorné uhly sú rovnako veľké. Na začiatok skúsme preskúmať uhly, ktorých súčet chceme vypočítať.

Uhol ACB nájdeme v trojuholníku ABC. V ňom sú dve strany (AB a BC) zároveň stranami päťuholníka $ABCDE$. To znamená, že sú rovnako dlhé a trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AC. V rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni rovnako veľké (skúste sa zamyslieť, prečo tento tak známy poznatok platí), a preto $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB|$. Ďalším z uhlov, ktoré sa v hľadanom súčte vyskytujú, je ADE. Podobne ako uhol ACB, aj ADE je vnútorným uhlom rovnoramenného trojuholníka, lebo strany DE a EA sú stranami pravidelného päťuholníka $ABCDE$. Preto sú uhly ADE a DAE rovnako veľké.

Hľadaný súčet uhlov si podľa zistených poznatkov môžeme upraviť ako

$$|\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle BAE|.$$

Teraz nám už stačí zistiť, aký veľký je vnútorný uhol BAE v pravidelnom päťuholníku. Už v predchádzajúcich úvahách sme rozdelili päťuholník na tri trojuholníky (ABC, ACD, ADE). Súčet vnútorných uhlov týchto trojuholníkov tvorí presne súčet vnútorných uhlov päťuholníka. Vieme, že každý trojuholník má súčet vnútorných uhlov $180°$, preto súčet vnútorných uhlov týchto trojuholníkov bude $3 \cdot 180° = 540°$. Náš päťuholník je pravidelný, vďaka čomu má všetky uhly rovnako veľké, pričom ich veľkosť je $540°/5 = 108°$. Našli sme veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka a tým sme našli aj hľadaný súčet veľkostí uhlov ACB, CAD a ADE.

Komentár: Úlohu ste riešili rôznymi spôsobmi. Mnohí z vás si vyjadrili veľkosti všetkých uhlov jednotlivo a potom ich sčítali. Je to samozrejme dobré riešenie, ale niekedy nemusíme vedieť veľkosti jednotlivých uhlov a stačí nám len výsledný súčet. Podobné je to aj v aritmetike; ukážeme si to na príklade.

Tri sestry mali dokopy 60 cukríkov. Ak by mala Janka o tri cukríky viac, mala by tretinu cukríkov, Danka by bez troch cukríkov mala šestinu z celkového množstva. Koľko cukríkov mala tretia sestra Majka?

Príklad môžeme vypočítať vyrátaním počtu cukríkov, ktoré mali Danka a Janka jednotlivo, a potom ich súčet odpočítať od celkového počtu. Druhým spôsobom je vyjadriť si počet Majkiných cukríkov pomocou neznámej x, ktorá vyjadruje počet všetkých cukríkov. Majka má $x - (x/3 - 3 + x/6 + 3) = x/2 = 30$ cukríkov. Skúste príklad vypočítať oboma spôsobmi na papieri, lepšie tak porozumiete rozdielu medzi jednotlivými postupmi.

Úloha č. 2: *V trojuholníku ABC označme S priesečník osí jeho vnútorných uhlov. Bodom S veďme priamku p rovnobežnú so stranou AB. Priesečníky priamky p so stranami AC, BC označme po rade P, Q. Dokážte, že $|PQ| = |AP| + |BQ|$.*

Riešenie: (opravovala Lucy)

V tejto úlohe sme mali dokázať, že $|PQ| = |AP| + |BQ|$. V prvom rade je fajn si túto situáciu narysovať, aby sme zistili, či to naozaj má šancu platiť. Tým, čo vedia pekne rysovať :), pokusy ukázali, že to platí. Na presnom obrázku však vidno aj viac. Vznikli nám trojuholníky ASP a BSQ, ktoré sa tvária rovnoramenne. Ak by to bola pravda, dokázať dané tvrdenie by už pre nás bolo hračkou. Ak teda budú naše predpoklady správne, potom $|AP| = |PS|$ a $|SQ| = |QB|$. Z toho nám už nedá veľkú námahu ukázať, že $|PQ| = |AP| + |BQ|$, keďže úsečka PQ je bodom S rozdelená na tie dve správne časti (PS a SQ).

A teraz nám ešte ostáva ukázať, že spomínané trojuholníky sú naozaj rovnoramenné. Trojuholník je rovnoramenný práve vtedy, keď má rovnaké uhly pri základni, tak sa pozrime na tie uhly. Nech uhol CAB má veľkosť 2α. Takéto označenie je výhodnejšie do budúcnosti, keďže tušíme, že aj tak budeme potrebovať vyjadriť polovicu tohto uhla, totiž $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle BAS| = \alpha$. A nakoniec potrebujeme zistiť, aký veľký je uhol ASP. No a tu sa už vaše riešenia rozchádzali, preto si ukážeme rovno dva spôsoby, ako sa dalo pokračovať.

Prvý spôsob. Uvedomíme si, že trojuholníky ABC a PQC sú podobné. Všetky tri uhly majú rovnaké, pretože PQ je rovnobežná s AB. Platí $|\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle CAB| = 2\alpha$, a preto pre jeho susedný uhol platí $|\sphericalangle QPA| = 180° - |\sphericalangle CPQ|$. Tiež vieme, že súčet uhlov v každom trojuholníku je $180°$. Teraz si už ľahko vyjadríme veľkosť uhla ASP:

$$|\sphericalangle ASP| = 180° - |\sphericalangle PAS| - |\sphericalangle APS| = 180° - \alpha - (180° - 2\alpha) = \alpha.$$

Tým sme ukázali, že $|\sphericalangle PAS| = |\sphericalangle ASP|$, čiže trojuholník ASP je skutočne rovnoramenný.

Druhý spôsob. Uvedomíme si, že uhol ASP je striedavý uhol k uhlu BAS, teda $|\sphericalangle ASP| = |\sphericalangle BAS| = \alpha$. Tak sme ukázali, že $|\sphericalangle PAS| = |\sphericalangle ASP|$, teda trojuholník ASP je (opäť raz :)) rovnoramenný.

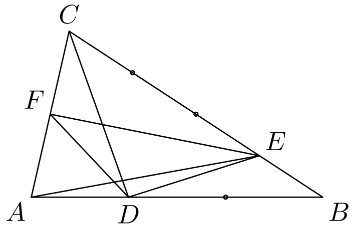
Či už ste si viac osvojili prvý alebo druhý spôsob, oba môžeme obdobne použiť aj pre trojuholník BSQ. Vieme teda dokázať, že oba pre nás dôležité trojuholníky ASP a BSQ sú rovnoramenné. Z toho, na základe našich úvah zo začiatku, vyplýva, že platí $|PQ| = |AP| + |BQ|$. A máme to! :)

Úloha č. 3: *Daný je trojuholník ABC. Na strane AB leží bod D tak, že je v jednej tretine tejto strany bližšie k bodu A. Na strane BC leží bod E tak, že je v jednej štvrtine tejto strany bližšie k bodu B. Na strane AC leží bod F tak, že je v jednej polovici tejto strany. Zistite, aký je pomer obsahov trojuholníkov DEF a ABC.*

Riešenie: (opravovali Aďa a Dada)
Snažíme sa zistiť pomer obsahov trojuholníkov DEF a ABC. Je dobré si uvedomiť, že o trojuholníku DEF zatiaľ nevieme skoro nič – nepoznáme veľkosti jeho strán, výšok, ani uhlov. Nám však stačí poznať jeho obsah. Ako by sme ho mohli zistiť? Pomohlo by nám, keby sme poznali obsahy trojuholníkov ADF, BED a FEC? Ak sa na chvíľku zamyslíme, zistíme, že by nám to naozaj pomohlo, potom by sme totiž mohli vyjadriť obsah trojuholníka DEF ako

$$S_{DEF} = S_{ABC} - S_{BED} - S_{FEC} - S_{ADF}.$$

Poďme teda zisťovať obsahy týchto troch trojuholníkov, začnime napríklad trojuholníkom ADF. Aby sme vedeli vyjadriť jeho obsah, potrebujeme napríklad jednu stranu a výšku na túto stranu. Zrejme strana DF nebude tá správna voľba, pretože nepoznáme ani jej dĺžku, ani dĺžku výšky na túto stranu. Ostali nám dve možnosti, buď strana AD, alebo AF. Výšku na stranu AD síce vieme vypočítať, ale vyžaduje si to trochu viac námahy. Je to však dosť zaujímavé na to, aby ste si to skúsili.
Ak sa pozrieme na stranu AF a výšku na túto stranu, môže sa zdať, že o nej tiež nič nevieme. Nie je to však úplne tak, pretože táto výška je tiež výškou v trojuholníku ADC na stranu AC. A keďže AF je polovicou strany AC, tak obsah trojuholníka ADF je polovicou obsahu trojuholníka ADC. To stále nie je presne to, čo by sme potrebovali, avšak už sme na dobrej ceste. Teraz nám stačí porovnať obsahy trojuholníkov ADC a ABC. To nie je ťažké, pretože jednu výšku (z vrcholu C) majú spoločnú a strany prináležiace tejto výške sú v pomere jedna ku trom. Preto aj pomer obsahov spomínaných trojuholníkov je jedna ku trom. (Porozmýšľajte nad tým.) Ak to zhrnieme, zistili sme, že obsah trojuholníka ADF je šestinou obsahu trojuholníka ABC.



Tu je vhodné spomenúť, že pri počítaní obsahu trojuholníka ADF odzneli všetky úvahy potrebné na dokončenie riešenia, pretože obsahy zvyšných dvoch trojuholníkov sa počítajú veľmi podobne. Kľúčom je všimnúť si trojuholníky, ktoré majú niektorú výšku spoločnú a základne prislúchajúce k tejto výške sú v pomere, ktorý poznáme. Vtedy vieme určiť aj pomer obsahov takýchto trojuholníkov.
Pozrime sa teraz na trojuholník DBE. Tento má spoločnú výšku s trojuholníkom ABE, pričom pomer základní je $2 : 3$. Teraz by sme potrebovali poznať obsah trojuholníka ABE, tento má však s trojuholníkom ABC spoločnú výšku na stranu BC. Vieme, že pomer základní BE ku BC je $1 : 4$. Vďaka tomu zisťujeme, že obsah trojuholníka DBE je šestina obsahu trojuholníka ABC. Všimnime si, že na tento pomer sa dalo prísť aj využitím spoločnej výšky trojuholníkov DBE a DBC. Skúste si to premyslieť a pomer obsahov týmto spôsobom naozaj zrátať.
Asi nikoho už teraz neprekvapí, že aj pri zisťovaní obsahu trojuholníka FEC budeme postupovať takmer rovnako ako doteraz. Ak ste sa dočítali až sem, pevne veríme, že ste schopní a ochotní tento postup samostatne využiť. Pre tých, čo sa po ceste náhodou stratili, uvedieme malú pômocku: trojuholníky, ktoré môžeme použiť, sú AEC a BCF, pričom tak ako predtým stačí jeden z nich.
Pre úplnosť a kontrolu uvádzame aj výsledok: pomer obsahov trojuholníkov DEF a ABC je $7 : 24$.

Komentár: Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Ak ste počítali obsahy pomocou výšok, bolo treba riadne zdôvodniť ich veľkosti. Dostali sme aj veľmi pekné riešenia využívajúce vzorec $2S = a \cdot b \cdot \sin\gamma$. Viete, prečo tento vzorec platí? Odvodiť ho vôbec nie je zložité – majme ľubovoľný trojuholník ABC. Pomocou goniometrických vzťahov (konkrétne z definície funkcie sínus) vieme jeho výšku v_b zapísať ako $v_b = a \cdot \sin\gamma$. Zároveň poznáme vzorec pre obsah trojuholníka ABC, ktorý je $2S = b \cdot v_b$. Ak do tohto vzťahu dosadíme predchádzajúce vyjadrenie výšky v_b, dostávame dokazovaný alternatívny vzorec pre obsah. Postup je rovnaký, ak vyjadrujeme niektorú zo zvyšných výšok v_a, v_c, vyskúšajte si to a všimnite si, ako vyzerajú výsledné vzorce. Tento vzorec sa dá výhodne použiť na výpočet obsahu trojuholníka ADF, ak poznáme obsah trojuholníka ABC. Vyskúšajte.

Úloha č. 4: *V rovine je daný trojuholník KMS, ktorý je mapou nejakého územia. Územie je rozdelené medzi tri štáty, ktorých hlavné mestá sú vrcholy trojuholníka K, M, S. Každý bod trojuholníka patrí tomu štátu, ku ktorého hlavnému mestu je najbližšie. Ak je nejaký bod rovnako vzdialený od dvoch (troch) hlavných miest, patrí hranici týchto štátov. Zistite, ako musí vyzerať trojuholník KMS, aby niektoré dva štáty nemali spoločnú hranicu.*

Riešenie: (opravovali Bus a Tina)
Najdôležitejšie je asi nakresliť si pekný obrázok aj s hranicami medzi jednotlivými štátmi. Pre body na hranici medzi dvoma štátmi podľa zadania platí, že sú rovnako vzdialené od hlavných miest oboch štátov. Množinou všetkých bodov rovnako vzdialených od dvoch hlavných miest je os úsečky spájajúcej tieto dve mestá, čiže os jednej zo strán trojuholníka KMS. Hranice medzi štátmi budú preto ležať na osiach strán trojuholníka KMS.
Keď si teraz narysujeme osi strán, všimneme si, že sa budú nejako pretínať. Ako? Vezmime si najskôr len dve osi, osi strán KS a SM. Tie sa nám určite pretnú (vieme prečo?). Označme priesečník týchto priamok X a prizrime sa mu bližšie. Bod X leží na osi úsečky KS, takže je rovnako ďaleko od bodu K ako od bodu S. Tiež o ňom vieme, že patrí osi úsečky SM, a preto je rovnako vzdialený od bodov S a M. Keď si to teraz dáme dokopy a zamyslíme sa, prichádzame na to, že bod X patrí aj tretej osi trojuholníka, osi úsečky KM. Takže X je priesečníkom všetkých troch osí a je jediným takýmto bodom v rovine (určite?). A čo viac, o tomto bode vieme čosi, čo sme ešte nespomenuli. Je rovnako ďaleko od všetkých troch vrcholov trojuholníka KMS a je to stred kružnice trojuholníku KMS opísanej.

Vieme tiež, že stred opísanej kružnice ostrouhlého trojuholníka leží vo vnútri tohto trojuholníka. Preto vyzerajú hranice v ostrouhlom trojuholníku ako spojnice stredu opísanej kružnice so stredmi jednotlivých strán. Každé dva štáty majú ako hranicu práve jednu z týchto spojníc.
V pravouhlom trojuholníku je stred opísanej kružnice v strede jeho prepony. Preto budú dvomi hranicami spojnice stredov odvesien so stredom opísanej kružnice a tretia hranica bude len jediný bod – stred prepony, čo je však tiež hranica.
Nakoniec, v tupouhlom trojuholníku je stred opísanej kružnice vždy mimo trojuholníka. Ked si narysujeme osi strán, žiadne dve sa nám v trojuholníku nepretnú (keďže ich priesečník je mimo trojuholníka). Čo to znamená? Budú všetky tri hranicami štátov? Nech je najdlhšou stranou trojuholníka strana KM a tupý uhol nech je pri vrchole S. Osi strán KS a MS oddeľujú územia štátov s hlavnými mestami K, S a M, S. Úsečka na osi strany KM však už územia štátov s hlavnými mestami K a M neoddeľuje, pretože leží celá vo vnútri štátu s hlavným mestom S – štáty pri K a M teda nemajú spoločnú hranicu. Zdôvodnili sme teda, že hľadané trojuholníky sú tupouhlé a žiadne iné. Odpoveďou je, že trojuholník KMS musí byť tupouhlý.

Iné riešenie:
Predstavme si najskôr jednoduchší prípad pre dva štáty s hlavnými mestami A a B. Ich hranicou, čiže množinou všetkých bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od A a od B, je práve os úsečky AB. Dve polroviny určené touto osou sú potom územia daných štátov. My však máme štáty až tri, ich hlavné mestá sa volajú K, M a S. Územie štátu s hlavným mestom K je množina takých bodov, ktoré sú ku K bližšie ako k M a zároveň ku K bližšie ako k S. Prvú podmienku spĺňa polrovina určená osou úsečky KM, druhú podmienku polrovina určená osou úsečky KS, územie štátu s hlavným mestom K teda bude prienikom týchto polrovín. Rovnako vieme nájsť aj územia zvyšných dvoch štátov, všetky budú určené osami strán trojuholníka KMS. Osi strán sa pretínajú v jednom bode a to v strede opísanej kružnice – označme si ho O. Každé dva štáty budú teda mať práve jednu spoločnú hranicu tvaru polpriamky začínajúcu v bode O. Nás však zaujíma len vnútro trojuholníka KMS. Ak leží bod O vo vnútri trojuholníka, každá z polpriamok má prienik s trojuholníkom KMS a teda každé dva štáty maju spoločnú hranicu. Ak leží iba na obvode – povedzme na strane KM – tak štáty s hlavnými mestami K a M majú síce vo vnútri trojuholníka ako spoločnú hranicu len tento jediný bod O, avšak aj to je nejaká hranica a teda tvrdenie zo zadania znova neplatí. Poslednou možnosťou je prípad, keď O leží mimo trojuholníka KMS. Vtedy už bude jedna z hraničných polpriamok celá mimo trojuholníka a teda niektoré dva štáty ostanú bez hranice. Stred opísanej kružnice leží mimo trojuholníka práve vtedy keď je tento trojuholník tupouhlý, čo je tým pádom aj správne riešenie: Trojuholník KMS musí byť tupouhlý.

Komentár: Ak riešime úlohu a chceme rozoberať viac možností, je fajn zamyslieť sa (aj) nad tým, ktoré z týchto možností je potrebné rozoberať. Napríklad v tejto úlohe nebolo potrebné zisťovať, ako sa stred opísanej kružnice správa v rovnostrannom trojuholníku, pretože ten je ostrouhlý a to, že je rovnostranný, nijako nevplýva na to, či je stred kruľnice tomuto trojuholníku opísanej vnútri trojuholníka alebo mimo neho. Naopak, keď si kreslíme nejaký obrázok, na ktorom chceme mať ostrouhlý trojuholník (a viac o ňom nevieme), musíme si dať záležať na tom, aby bol ostrouhlý, no aby nebol nejaký špeciálny (napríklad rovnoramenný). To by nás totiž mohlo zavádzať a presviedčať nás o veciach, ktoré nie sú vždy pravdivé (napríklad že os uhla v trojuholníku je zároveň aj jeho výškou).

Poznámka: Určite ste sa už stretli s kružnicou vpísanou do trojuholníka. Ako túto kružnicu konštruujeme? Skúste overiť, že tento postup konštrukcie je správny a že existuje práve jedna takáto kružnica. Prečo sa osi uhlov pretínajú v jednom bode?
Ďalej stojí za zamyslenie, prečo leží stred opísanej kružnice mimo trojuholníka práve vtedy, keď je tento trojuholník tupouhlý. Vieme, že takto nás to učili v škole, ale uvedomte si, že to nie je dôvod, pre ktorý to platí. Vieme toto tvrdenie podoprieť rozumnými argumentmi? Pokúste sa o to, poradíme vám, že ak si nakreslíte obrázok a v ňom stred opísanej kružnice, vznikne vám niekoľko rovnoramenných trojuholníkov so stranami dĺžky polomeru opísanej kružnice. (Toto sa stane bez ohľadu na to, či spomínaný stred leží vnútri alebo mimo trojuholníka.) Kľúčové je popísať nejasný pojem „vnútri“ či „mimo“ pomocou uhlov, prípadne iných pojmov, s ktorými vieme dobre narábať. Ak si neviete poradiť, skúste napísať mail na `kms@kms.sk`, radi vám poradíme.
Na záver ešte jedna zaujímavá úvaha, ktorú môžete ďalej rozvíjať sami (vrelo doporučujeme). Majme trojuholník ABC a kružnicu jemu opísanú, jej stred označme O. Dokreslime si do obrázka stredné priečky trojuholníka ABC, tieto úsečky vytvoria menší trojuholník DEF podobný s trojuholníkom ABC (lebo stredné priečky sú rovnobežné so stranami trojuholníka). Osi strán trojuholníka ABC sú vlastne výškami v trojuholníku DEF, preto O je priesečníkom výšok trojuholníka DEF. Keďže trojuholník DEF je ostrouhlý, jeho priesečník výšok leží vnútri trojuholníka DEF (prečo?) a preto leží aj vnútri trojuholníka ABC. Trojuholníky ABC a DEF sú rovnoľahlé. Viete nájsť stred rovnoľahlosti, ktorá zobrazí jeden trojuholník na druhý?

Úloha č. 5: *Nech CD a BE sú výšky trojuholníka ABC. Dokážte, že trojuholníky ACB a ADE sú podobné.*

Riešenie: (opravovali Ďuriško a Miťo)
Našou úlohou je dokázať podobnosť nejakých trojuholníkov. Nakreslime si teda obrázok so situáciou zo zadania a skúsme tam pohľadať akúkoľvek podobnosť; vedeli by sme trochu viac a možno by nám to pomohlo. Keďže v zadaní nie sú uvedené žiadne dĺžky strán a ani ich nevieme nejakým rozumným spôsobom získať, sústredíme

sa na hľadanie podobnosti podľa dvoch rovnakých uhlov. Okrem uhlov trojuholníka ABC máme na obrázku ešte niekoľko pravých uhlov, a teda aj niekoľko trojuholníkov, v ktorých už zhodnosť jedného z ďalších uhlov zaručuje ich podobnosť. Skúste teraz niektoré z týchto dvojíc trojuholníkov pohľadať. (A v čítaní naozaj nepokračujte, kým aspoň jednu takúto dvojicu nenájdete, alebo si skutočne nebudete vedieť rady.) Pomerne rýchlo sa dá nájsť dvojica AEB a ADC. Tieto trojuholníky sú podobné, pretože majú spoločný uhol pri vrchole A. (Ak si priesečník výšok BE a CD označíme S, potom ďalšími dvojicami sú napríklad SED a SCB, či SDB a SEC.) Vieme, že podobné trojuholníky majú rovnaký pomer prislúchajúcich strán, preto platí $|AE| : |AD| = |AB| : |AC|$.
Všimnime si, že teraz vieme povedať niečo viac o trojuholníku ADE, pretože už vieme niečo o pomere dĺžok jeho strán. To je výborné, pretože môžeme začať využívať aj iné druhy podobnosti, konkrétne *sus* alebo *sss*. Keďže trojuholníky ADE a ACB majú spoločný uhol pri vrchole A, skúsme to využiť a spojiť s našimi vedomosťami o pomeroch strán. Keby pre pomery dĺžok strán, ktoré zvierajú spoločný uhol BAC, platil vzťah $|AB| : |AC| = |AE| : |AD|$, boli by trojuholníky ADE a ACB podobné. Platnosť tohto vzťahu sme však už ukázali, stačí sa pozrieť o niekoľko riadkov vyššie.

<u>Komentár:</u> To, čo ste práve dočítali, je „vzorové“ riešenie za 7 bodov. Tomuto riešeniu totiž chýba akákoľvek diskusia. Nikde nie je ani zmienka o tom, či situácia vždy musí vyzerať takto, pričom v skutočnosti nemusí. Napríklad ak je trojuholník ABC pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A, tak jeden z trojuholníkov spomínaných v zadaní vôbec neexistuje, za to sme však body nestrhávali. Čo je dôležitejšie, ak bude trojuholník ABC tupouhlý, či už s tupým uhlom pri vrchole A, alebo pri niektorom zo zvyšných dvoch, situácia vyzerá trochu inak. Teraz je opäť vhodný čas nakresliť si obrázok a dobre sa nad situáciou zamyslieť. Všimneme si, že v jednom z prípadov nami ukázaný postup nefunguje, stačí ho však už len trochu upraviť. Zapamätajte si, že diskusia je vždy nevyhnutnou súčasťou riešenia.

<u>Poznámka:</u> Úloha sa dala výhodne riešiť aj pomocou *tetivových štvoruholníkov.* (To sú štvoruholníky, ktorým sa dá opísať kružnica. Platí pre ne, že súčet protiľahlých vnútorných uhlov je 180°.) V našom prípade je tetivový štvoruholník $EDBC$, ktorého vrcholy ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BC. (Stredom tejto kružnice je teda stred strany BC.) Keď si túto kružnicu dokreslíme do obrázku, vznikne nám niekoľko rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vieme pomerne efektívne použiť. Ak sa chcete s tetivovými štvoruholníkmi zoznámiť podrobnejšie, skúste napr. knižku *J. Šedivého: Kružnice*, ktorá vyšla v edícii ŠMM, alebo si pozrite vzorové riešenie nasledujúcej úlohy.

<u>**Úloha č. 6:**</u> *Kružnicu k so stredom S pretínajú dve rôznobežné priamky p a r. Priesečník P týchto priamok leží zvonku kružnice k. Priamka p prechádza bodom S a pretína kružnicu k v bodoch A a B, pričom bod B leží na úsečke AP. Priamka r pretína kružnicu k v bodoch C a D, pričom bod D leží na úsečke CP. Dĺžka DP je zhodná s polomerom kružnice k. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, ak viete, že uhol priamok p a r je φ.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kenny a Miki)
Keď sa nám podarilo nakresliť si pekný a prehľadný obrázok, začneme rozmýšľať nad tým, ako využiť predpoklady zo zadania. Zaujímavá je informácia $|DP| = \ell$, kde sme písmenom ℓ označili polomer kružnice k. Za zaujímavú ju považujeme vďaka tomu, že polomer kružnice k sa vyskytuje na viacerých miestach na obrázku, označme si teda všetky tieto úsečky písmenom ℓ, aby sme vedeli, že majú rovnakú dĺžku. (Len pre poriadok uvádzame, že na obrázku sa nám z polomerov kružnice k objavili SB, SD, SC a nakoniec aj SA.) Ak sme si tieto úsečky aj pekne zvýraznili, nie je ťažké všimnúť si, že trojuholníky SDP, BSD, DSC a CSA sú rovnoramenné. Ešte lepšie však je, že vnútorné uhly týchto trojuholníkov spolu tvoria všetky vnútorné uhly štvoruholníka $ABDC$. Čo to pre nás znamená? No predsa to, že ak zistíme veľkosti vnútorných uhlov týchto rovnoramenných trojuholníkov, tak budeme mať vyhrané, pretože už ľahko (t.j. priamočiaro a bez námahy) nájdeme odpoveď na otázku zo zadania. Poďme sa teda do toho pustiť.
Začnime trojuholníkom SPD. Máme na to dobrý dôvod, poznáme totiž veľkosť jedného z uhlov pri základni, konkrétne vieme, že $|\sphericalangle SPD| = \varphi$. V rovnoramennom trojuholníku to stačí na to, aby sme zistili veľkosti všetkých vnútorných uhlov, konkrétne $|\sphericalangle DSP| = \varphi$ a $|\sphericalangle PDS| = 180^\circ - 2\varphi$. Z týchto informácií nám zatiaľ bude užitočná tá druhá, totiž uhol PDS je susedný k uhlu SDC a teda $|\sphericalangle SDC| = 180^\circ - |\sphericalangle PDS| = 2\varphi$.
Výborne. Zistili sme, že uhol pri základni rovnoramenného trojuholníka SDC je 2φ, vieme teda dopočítať $|\sphericalangle DCS| = |\sphericalangle SDC| = 2\varphi$ a tiež $|\sphericalangle CSD| = 180^\circ - 4\varphi$. Už sme skoro na konci, ostáva nám už len trojuholník ASC. Keď sa pozrieme na obrázok, kam sme si medzičasom dopisovali veľkosti uhlov, ktoré už poznáme, vieme zistiť veľkosť uhla CSB. Ten sa „skladá“ z uhlov CSD a DSB, preto vieme vyjadriť $|\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle DSB| = (180^\circ - 4\varphi) + \varphi = 180^\circ - 3\varphi$. Uhol CSA je susedný k uhlu CSB, preto je jeho veľkosť 3φ. Teraz by nám už nemalo robiť žiadne ťažkosti zistiť veľkosť rovnakých uhlov CAS a ACS, ktorá je rovná $(180^\circ - 3\varphi)/2 = 90^\circ - 3\varphi/2$.
Teraz už máme všetky potrebné informácie, sú iba roztrúsené po predchádzajúcich odstavcoch. Keď ich dáme dokopy, dostaneme

$$|\sphericalangle ABD| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}, \qquad |\sphericalangle BDC| = 90^\circ + \frac{3\varphi}{2}, \qquad |\sphericalangle DCA| = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}, \qquad |\sphericalangle CAB| = 90^\circ - \frac{3\varphi}{2}.$$

Je dobré uvedomiť si, že na zistenie veľkostí všetkých vnútorných uhlov by nám stačilo poznať veľkosti ľubovoľných troch z týchto uhlov.

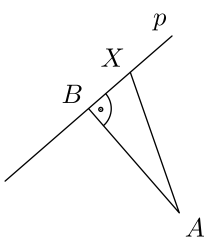
Iné riešenie:
Riešenie tejto úlohy môže vyzerať aj inak, a to nielen vďaka využitiu faktu, že štvoruholník $ABDC$ je tetivový. Keďže asi nie je všetkým z vás jasné, čo tým myslíme, na chvíľu sa pri tom pristavíme. Štvoruholník nazývame *tetivový*, ak sa mu dá opísať kružnica (jeho strany sú *tetivami* jemu opísanej kružnice). Zrejme túto vlastnosť nemá každý štvoruholník. Ak štvoruholník uhlopriečkou rozdelíme na dva trojuholníky, každému z nich sa dá opísať práve jedna kružnica. (Skúste to dokázať a tiež porovnať s úvodnou časťou vzorového riešenia štvrtej úlohy.) Daný štvoruholník potom bude tetivový práve vtedy, ak budú tieto kružnice totožné. Tiež platí, že štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet jeho protiľahlých uhlov je 180°. (Stojí za pokus toto tvrdenie aspoň *skúsiť* dokázať; ak vám to nepôjde, uvedomte si, že všetky body ležiace na kružnici sú rovnako vzdialené od jej stredu; potom to už pôjde. `:))`
Máme teda jeden spôsob, ako o švtoruholníku dokázať, že je tetivový – stačí ukázať, že súčet niektorej dvojice jeho protiľahlých vnútorných uhlov je 180°. Trochu jednoduchšie je všimnúť si, že nad spoločnou preponou sú dva pravé uhly, vrcholy týchto uhlov budú potom ležať na jednej (Tálesovej) kružnici. (Porovnaj s úlohou číslo päť.) Celkom nakoniec uvádzame asi najľahší spôsob, ako o štvoruholníku zistiť, že je tetivový – jednoducho jeho vrcholy vznikli ako priesečníky danej kružnice s nejakými útvarmi, ako napríklad v tejto úlohe.
Teraz už k samotnému riešeniu. Z rovnoramennosti trojuholníka PSD vyplýva, že uhol DSB má veľkosť φ. Trojuholník SDB je tiež rovnoramenný, preto $|\sphericalangle SBD| = 90° - \varphi/2$. Keďže tento uhol je totožný s uhlom ABD a vieme, že súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je 180°, vidíme, že $|\sphericalangle ACD| = 90° + \varphi/2$. Teraz už ostáva len všimnúť si, že uhol CAB, ktorého veľkosť chceme zistiť, sa nachádza (aj) v trojuholníku CAP, v ktorom poznáme dva zvyšné uhly. Preto stačí dopočítať aj ten tretí a máme $|\sphericalangle CAP| = 90° - 3\varphi/2$. Úplne na záver z tetivovosti štvoruholníka $ABDC$ (alebo z toho, že súčet všetkých vnútorných uhlov štvoruholníka je 360°) získavame $|\sphericalangle DBC| = 90° + 3\varphi/2$.
Nejako podobne, ako vyzerá posledný odstavec, si predstavujeme vaše riešenia. Treba však pripomenúť, že tvrdenia, ktoré my nechávame na zváženie čitateľovi (konkrétne „prečo je štvoruholník $ABDC$ tetivový" a „prečo sú jednotlivé trojuholníky rovnoramenné") treba vo vašich riešeniach riadne zdôvodniť.

Komentár: Na záver sa vám chceme ospravedlniť za chybu v zadaní, nejde o štvoruholník $ABCD$, ale o $ABDC$. Našťastie väčšina z vás riešila správny príklad a mnohí ste na to aj upozornili. Niektorí dokonca spočítali aj vnútorné uhly „motýlika" $ABCD$.

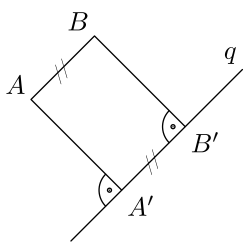
Úloha č. 7: *Medzi Marsom a Jupiterom sú tri planétky K_{01},M_{10} a S_{11}, ktoré neležia na jednej priamke. Naša NASA vyslala sondu, ktorá by mala okolo nich preletieť po priamke tak, aby boli vzdialenosti všetkých troch planétok od dráhy letu sondy rovnaké. Pomôžte svojim kolegom matematikom z NASA a určte množinu všetkých možných dráh sondy.*

Poznámka: Čítanie tohto riešenia vyžaduje kúsok predstavivosti, dostatok času a trpezlivosti, ale hlavne veľa chuti naozaj sa dozvedieť, ako hľadané priamky vyzerajú. A papier a ceruzka sa tiež môžu hodiť. Inak povedané, odporúčame celý postup pozorne sledovať (aj) kreslením si vlastných obrázkov.

Riešenie: (opravovali Zuzka a Hanka)
Našou úlohou bolo nájsť množinu všetkých dráh sondy tak, aby vzdialenosti všetkých troch planétok od dráhy boli rovnaké. Čo to vlastne znamená? Hľadáme všetky priamky, ktorých vzdialenosť od daných troch bodov je rovnaká. Na začiatok si jasne povedzme, čo je to vzdialenosť bodu A od priamky p. Predstavme si, že by sme vzali každý bod priamky a odmerali jeho vzdialenosť od bodu A. Čo myslíte, ktorá z nich by bola tá „správna"? `:)`Kto si myslí, že tá najmenšia, má pravdu. Vzdialenosťou bodu od priamky naozaj nazývame najmenšiu z „nameraných" vzdialeností. Samozrejme, nie sme schopní všetky ich odmerať a zisťovať, ktorá z nich je najmenšia, keďže priamka má nekonečne veľa bodov. Preto to treba skúsiť nejako inak. Spusťme z bodu A kolmicu na priamku p a označme jej pätu (bod, v ktorom sa pretnú) B. Potom pre každý bod $X \in p$, $X \neq B$ platí $|AX| > |AB|$, keďže AX je preponou v pravouhlom trojuholníku AXB (*obr. 1*). Hľadaná vzdialenosť je teda dĺžka kolmice vedenej z daného bodu na našu priamku. Ale ako túto kolmicu nájsť v trojrozmernom priestore? Nájdeme rovinu kolmú na priamku[1] p a prechádzajúcu bodom A. Tá sa s priamkou p pretína práve v jednom bode, označme ho C. Priamka AC bude kolmá na priamku p, preto v tomto prípade bude hľadanou vzdialenosťou $|AC|$.



obr. 1

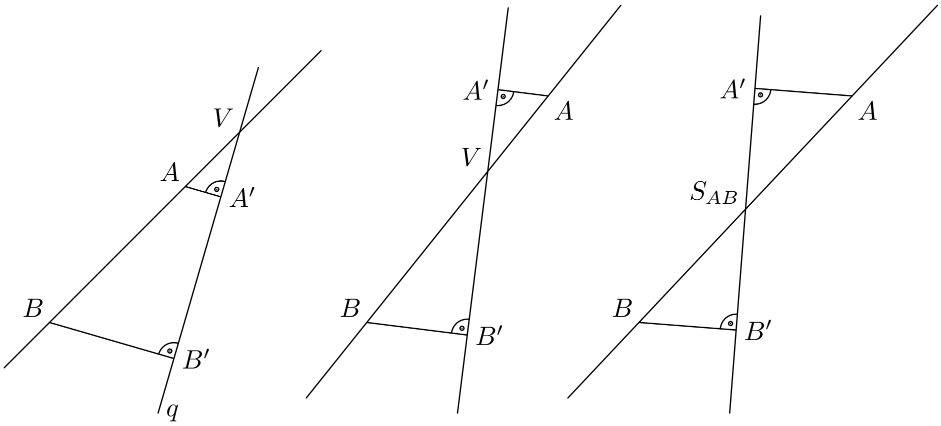


obr. 2

Teraz sa môžeme pustiť do riešenia samotnej úlohy. Rozoberme náš problém najskôr v rovine danej bodmi K_{01}, M_{10} a S_{11}. Označme si našu priamku p. Jej vzdialenosť od všetkých troch bodov K_{01}, M_{10} a S_{11} má byť rovnaká. Skúsme si to ešte viac zjednodušiť a skúmajme najprv priamky, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch bodov. Uvažujme v rovine body A, B. Každá priamka q, ktorá je od nich rovnako vzdialená, je s úsečkou AB buď rovnobežná alebo rôznobežná. Každá rovnobežka s AB má od bodov A a B rovnakú vzdialenosť (*obr. 2*). Zaujímavejšie bude skúmať rôznobežky. Predĺžme úsečku AB na priamku. Keďže q je s ňou rôznobežná, pretnú sa v nejakom bode; označme ho V. Päty

[1]Intuitívne je to taká rovina, na ktorú priamka nevrhá tieň, resp. tieň je iba jeden bod.

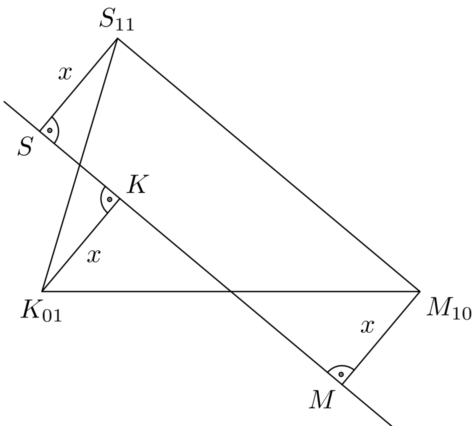
kolmíc z bodov A, B na priamku q označme A', B' (*obr. 3*). Všimnime si, že trojuholníky $AA'V$ a $BB'V$ sú podobné. Chceme, aby platilo $|A'A| = |B'B|$. Ak sa dva podobné trojuholníky zhodujú v zodpovedajúcej strane, „povýši“ ich to na zhodné [2]. Preto nutne $|AV| = |BV|$. Jediný taký bod V ležiaci na priamke AB je stred úsečky AB. Naozaj, každá priamka prechádzajúca stredom AB spĺňa danú vlastnosť.



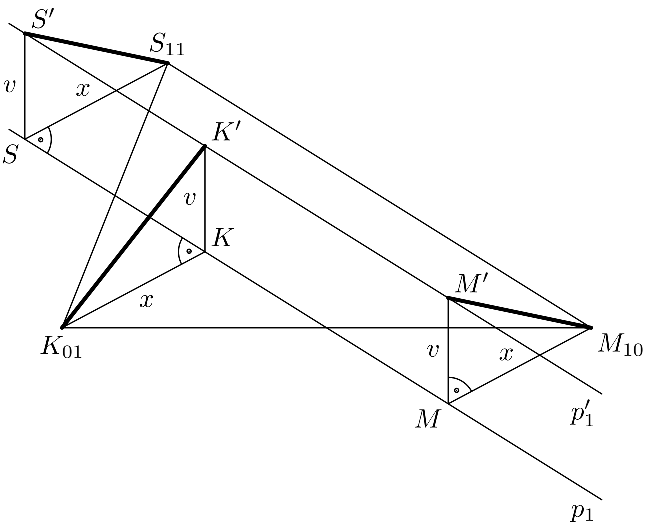
obr. 3

Našli sme teda množinu všetkých priamok v rovine, ktorých vzdialenosť od dvoch bodov je rovnaká. Ako nám to pomôže pri troch bodoch? Priamka p musí byť rovnako vzdialená od bodov K_{01} a M_{10}, preto je buď rovnobežná s priamkou $K_{01}M_{10}$, alebo prechádza stredom úsečky $K_{01}M_{10}$. Naviac musí byť rovnako vzdialená aj od bodov M_{10} a S_{11}. Nech je priamka p rovnobežná s priamkou $K_{01}M_{10}$. To znamená, že nemôže byť rovnobežná aj s priamkou $M_{10}S_{11}$ (keďže body K_{01}, M_{10}, S_{11} nie sú kolineárne, t.j. neležia na jednej priamke), teda musí prechádzať stredom úsečky $M_{10}S_{11}$. Druhá možnosť je, že prechádza stredom úsečky $K_{01}M_{10}$. Potom buď prechádza aj stredom úsečky $M_{10}S_{11}$, alebo je s ňou rovnobežná. Tým sme vyčerpali všetky možnosti. V rovine sú teda hľadanou množinou tri priamky. Keď si nakreslíme obrázok a nad nájdenými priamkami sa na chvíľu zamyslíme, uvedomíme si, že sú to vlastne predĺžené stredné priečky trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$.

Problém je v tom, že rovina nám nestačí, pretože vesmír je trojrozmerný. Posuňme sa teda do priestoru. Je zrejmé, že všetky riešenia, ktoré sme našli v rovine, budú riešeniami aj v priestore. Naozaj, body K_{01}, M_{10} a S_{11} určujú v priestore trojuholník, ktorého stredné priečky majú rovnakú vzdialenosť od všetkých troch bodov. Ak tieto priamky posunieme v smere kolmom na rovinu trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$, rovnosť vzdialeností nepokazíme. Poďme sa o tom presvedčiť.



obr. 4



obr. 5

Vezmime si jednu z priamok, ktoré boli riešením našej úlohy v rovine $K_{01}M_{10}S_{11}$, nech je to priamka p_1. Označme jej vzdialenosť od bodov K_{01}, M_{10} a S_{11} ako x a päty kolmíc z bodov K_{01}, M_{10}, S_{11} na priamku p_1 označme postupne K, M, S (*obr. 4*). Posuňme teraz priamku p v smere kolmom na rovinu nášho trojuholníka o vzdialenosť

[2] Túto úvahu si rozmyslite. Existujú dva podobné trojuholníky, ktoré sa zhodujú dokonca vo veľkostiach dvoch dvojíc strán a predsa nie sú zhodné. Nájdite také!

v. Túto novú priamku, ktorú sme dostali, nazvime p'_1. Nakoniec označme ešte päty kolmíc z bodov K_{01}, M_{10}, S_{11} na priamku p'_1 ako body K', M', S' (*obr. 5*). Pozrime sa teraz na trojuholník $K_{01}KK'$. Je dôležité uvedomiť si, že tento trojuholník je pravouhlý a vrchol jeho pravého uhla je v bode K (skúste porozmýšľať, prečo je to tak). Z Pytagorovej vety potom vieme, že platí $|K_{01}K'|^2 = |K'K|^2 + |K_{01}K|^2 = v^2 + x^2$. Analogickým postupom pre trojuholníky $M_{10}MM'$ a $S_{11}SS'$ dostávame $|M_{10}M'|^2 = |S_{11}S'|^2 = x^2 + v^2$. To znamená, že vzdialenosti priamky p'_1 od bodov K_{01}, M_{10} a S_{11} sú rovnaké, čo je presne to, čo sme sa snažili dokázať. Tým sme množinu riešení rozšírili na všetky priamky, ktoré sú rovnobežné so strednými priečkami trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$ a zároveň ležia v rovinách kolmých na rovinu tohto trojuholníka. Tu je dôležité si uvedomiť, že sú to jediné priamky rovnobežné s rovinou trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$, ktoré spĺňajú podmienku zo zadania. Akákoľvek iná priamka q', rovnobežná s našou rovinou, je totiž posunutie nejakej priamky q, ležiacej v našej rovine, o nejakú dĺžku v smerom kolmým na našu rovinu. Vzdialenosť priamky q' od bodov K_{01}, M_{10}, S_{11} vieme určiť rovnako ako pre priamky „nad“ strednými priečkami trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$ – určite si to skúste. Preto vzdialenosť tejto priamky q' od bodov K_{01}, M_{10}, S_{11} bude rovnaká len vtedy, keď bude priamka q rovnako vzdialená od bodov K_{01}, M_{10}, S_{11}. Výsledkom tohto odstavca preto je, že v rovinách rovnobežných s rovinou trojuholníka podmienkam zo zadania vyhovujú naozaj len priamky „nad“ strednými priečkami trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$.

Otázkou teraz je, či to už je všetko, alebo sa dajú nájsť ešte iné riešenia. Čo napríklad priamka prechádzajúca stredom kružnice opísanej trojuholníku $K_{01}M_{10}S_{11}$, ktorá je kolmá na jeho rovinu? Jej vzdialenosť od bodov K_{01}, M_{10} a S_{11} je zrejme práve polomer opísanej kružnice, teda aj táto priamka vyhovuje. Zároveň je to jediná priamka, ktorá je kolmá na rovinu $K_{01}M_{10}S_{11}$ a je riešením úlohy.

Zatiaľ sme našli priamky rovnobežné s rovinou nášho trojuholníka a jednu, ktorá je na túto rovinu kolmá. Potrebujeme ešte prešetriť prípad, že hľadaná priamka zviera s rovinou trojuholníka uhol α, $0 < \alpha < 90°$. Teraz budeme potrebovať kúsok predstavivosti (tú vlastne potrebujeme už od začiatku :)). Majme teda v priestore ľubovoľnú priamku p a zostrojme na ňu kolmice z bodov K_{01}, M_{10}, S_{11}. Sú to tri úsečky.

Čo uvidíme, ak sa na body K_{01}, M_{10}, S_{11} a zostrojené kolmice pozrieme v smere, ktorý udáva priamka p? Samotná priamka sa premietne do jediného bodu, body K_{01}, M_{10} a S_{11} sa premietnu do trojuholníka (pozor, nie je to náš trojuholník $K_{01}M_{10}S_{11}$, ale iba jeho priemet do roviny kolmej na priamku p) a kolmice z bodov K_{01}, M_{10} a S_{11} na priamku p sa premietnu na úsečky. Tu je dôležité uvedomiť si, že pod týmto uhlom pohľadu ich vidíme v ich skutočnej veľkosti, keďže priamka p je na každú z nich kolmá. Skúsme si to, čo vidíme, načrtnúť. Útvary, ktoré takto nakreslíme na papier (do roviny), sú priemetom objektov z priestoru do roviny, ktorá je kolmá na priamku p (skúste si to premyslieť). Kde musí byť umiestnený bod, do ktorého sa premietne priamka p, aby platilo, že jej vzdialenosť od bodov K_{01}, M_{10}, S_{11} je rovnaká? Zrejme je to stred kružnice opísanej trojuholníku, ktorý nám vznikol premietnutím pôvodného trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$.

Takto sme teda určili ďalšie priamky, ktoré sú riešením našej úlohy. Ostáva nám už len ukázať, že sú to naozaj všetky riešenia a žiadne iné neexistuje. To je už jednoduché. Ľubovoľnú priamku si vieme premietnuť do roviny kolmej na ňu a ak sa nám táto priamka nepremietne do stredu kružnice opísanej trojuholníku, ktorý je priemetom trojuholníka $K_{01}M_{10}S_{11}$, potom nemôže platiť, že jej vzdialenosť od bodov K_{01}, M_{10} a S_{11} je rovnaká. Toto tvrdenie vyplýva z toho, že stred opísanej kružnice je jediným bodom v rovine, ktorý je rovnako vzdialený od troch bodov v nej. (Rozmyslite si, prečo; prípadne porovnajte vaše myšlienky s riešením štvrtej úlohy.)

<u>Komentár:</u> Mrzí nás, že mnohí z vás túto úlohu riešili v rovine a nie v priestore, ako to bolo myslené. Veď vesmír predsa nie je rovina! Ak vám čokoľvek zo zadania nie je jasné, určite sa nás spýtajte, ako sme to mysleli (podľa možností nie deň pred termínom série :)). Najčastejšia chyba bola v tom, že mnohí z vás niektoré myšlienky nezdôvodnili dostatočne. Napríklad keď dokazujeme, že sme našli všetky priamky, ktoré majú v rovine rovnakú vzdialenosť od dvoch bodov. Nestačí ukázať, že pre tieto a ešte tieto to naozaj platí, ale treba ukázať aj to, že pre žiadne iné už nie. Takže nabudúce na to nezabudnite! Táto úloha bola náročná a nájsť všetky riešenia nebolo vôbec jednoduché. Napriek tomu ste sa s ňou popasovali naozaj statočne a sme na vás hrdí! :)Sme radi, že sa toľkí z vás do nej pustili. Aj ked úplne ju vyriešili iba niekoľkí, boli sme milo prekvapení niektorými originálnymi myšlienkami. Presvedčili ste nás o tom, že sa nebojíte rozmýšľať a hľadať cestičky k cieľu. Nie je vždy dôležité úlohu vyriešiť úplne, aj pri čiastočnom vyriešení alebo vôbec zamyslení sa nad nejakým problémom sa môžete veľa naučiť. Takže… len tak ďalej!

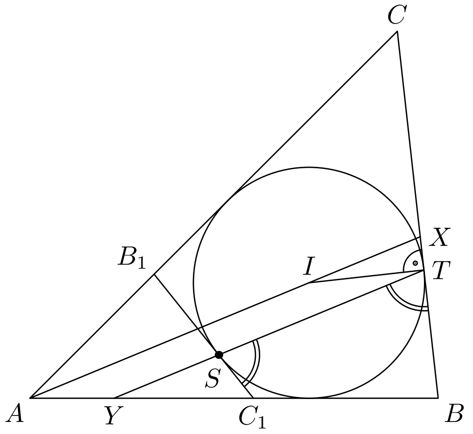
<u>**Úloha č. 8:**</u> *Nech bod I je stred kružnice k vpísanej do trojuholníka ABC a nech T je prienik tejto kružnice s úsečkou BC. Priamka rovnobežná s priamkou IA prechádzajúca bodom T pretína kružnicu k po druhý raz v bode S. Dotyčnica ku kružnici k v bode S pretína úsečky AB a AC v bodoch C_1 a B_1 (v tomto poradí). Dokážte, že trojuholníky ABC a AB_1C_1 sú podobné.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Jakub)

Na začiatku je dôležité zamyslieť sa nad tým, či obrázok, ktorý používame, je dostatočne všeobecný, prípadne či pokrýva všetky možnosti. Aby sa nám náhodou nestalo, že tvrdenie dokážeme iba pre niektoré špeciálne typy trojuholníkov. Tento úvodný krok viacerí z vás neurobili, ale keďže to je dosť ľahké a možno práve preto ste to nepísali, tak som sa rozhodol vám za to body nestrhávať. Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo to, že pri trochu inej situácii by niektoré uhly, ktoré ste počítali, boli záporné.

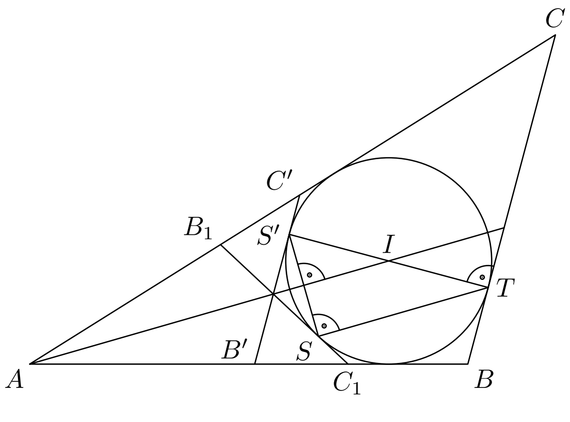
Označme si prienik priamky AI a priamky BC ako X. Pre polohu bodu T na úsečke BC môžu nastať tri možnosti.

Body X a T sú totožné iba vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný; platnosť dokazovaného tvrdenia dokážeme v tomto prípade ľahko. Ak sú body T a X rôzne, tak T leží vnútri niektorej z úsečiek BX, CX. Keďže označenie vrcholov B, C je zameniteľné, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že leží vnútri úsečky BX (rozmyslite si to). Prvé riešenie bude založené na (cieľavedomom) počítaním uhlov.



Nech Y je priesečník priamok ST a AB. Ďalej označme veľkosti uhlov CAB a ABC postupne α, β. Priamky BC a B_1C_1 sú dotyčnice ku kružnici k, priamka ST je spojnicou dotykových bodov. Preto $|\sphericalangle STB| = |\sphericalangle TSC_1|$, tieto uhly sú osovo súmerné podľa kolmice na sečnicu ST prechádzajúcej stredom kružnice I (osová súmernosť zachováva veľkosti uhlov). Toto pozorovanie využijeme pri ďalšom počítaní uhlov.
Čo máme dokázať? Podobnosť trojuholníkov ABC a AB_1C_1. Tieto trojuholníky majú jeden spoločný uhol pri vrchole A, na dôkaz podobnosti preto stačí nájsť ďalší zhodný uhol. Poďme dokázať, že $|\sphericalangle AC_1B_1| = |\sphericalangle ACB|$ (nie je to o nič horšie, než uvažovať o uhle AB_1C_1).
Keďže AX je os uhla CAB a priamky YT a AX sú rovnobežné, tak $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle TYB| = \alpha/2$. Z trojuholníka YTB potom máme, že $|\sphericalangle YTB| = \pi - \alpha/2 - \beta$. Zrejme uhly YTB a STB majú rovnakú veľkosť, a teda platí aj $|\sphericalangle TSC_1| = \pi - \alpha/2 - \beta$. Uhol YSC_1 je doplnkový k uhlu TSC_1, takže $|\sphericalangle YSC_1| = \alpha/2 + \beta$. Z trojuholníka YSC_1 ľahko dorátame $|\sphericalangle SC_1Y| = \pi - \alpha - \beta$. To, že $|\sphericalangle ACB| = \pi - \alpha - \beta$, je jasné, a tak sme dokázali, že $|\sphericalangle AC_1B_1| = |\sphericalangle ACB|$. Hotovo.

<u>Iné riešenie:</u>
Úloha sa dá riešiť aj elegantnejšie. Myslím, že obrázok hovorí sám za seba a prezrádza celé riešenie `:)`. Najskôr zostrojme bod S' ako obraz bodu S v osovej súmernosti podľa osi AI. Potom $S'T$ bude priemer kružnice k (ak toto pochopíte, mali by ste z obrázka vedieť dokončiť riešenie aj sami). Zostrojme aj dotyčnicu ku kružnici k v bode S' a jej priesečníky so stranami AC a AB označme ako C' a B'. Opäť je zrejmé, že trojuholník $AB'C'$ je osovo súmerný s trojuholníkom AB_1C_1 podľa osi AI. Takže tieto trojuholníky sú zhodné. Kedže priamky $B'C'$ a BC sú obe kolmé na priamku $S'T$, tak $B'C' \parallel BC$. Preto trojuholníky ABC a $AB'C'$ sú podobné. Teda aj trojuholníky AB_1C_1 a ABC sú podobné. Hotovo.

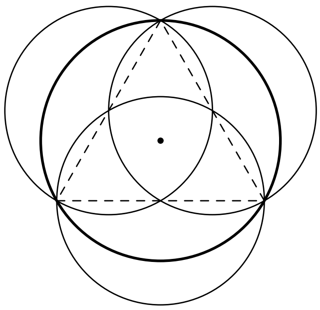


<u>Poznámka:</u> Všimnite si úlohu číslo päť. Spolu tieto dve úlohy vlastne hovoria, že $DE \parallel B_1C_1$. Vieme toto tvrdenie dokázať priamo, teda bez využitia podobností spomínaných vo vzorových riešeniach týchto úloh?
Vráťme sa ešte k štvoruholníku BCB_1C_1. Tento štvoruholník má vpísanú kružnicu so stredom I a má aj opísanú kružnicu (prečo?), označme jej stred O. Nech P priesečník jeho uhlopriečok. Takéto štvoruholníky majú veľa pekných vlastností. Napríklad body O, I, P ležia na priamke (narysujte, skontrolujte, skúste dokázať `:)`). A jeho obsah sa dá pekne vyjadriť pomocou dĺžok strán. Skúste objaviť ďalšie zaujímavé vlastnosti takýchto štvoruholníkov. (O vaše zistenia sa môžete podeliť s nami, napíšte na `j.mazak@gmail.com`.)

<u>**Úloha č. 9:**</u> *V priestore je daný valec s výškou* 1 *Ym a s polomerom podstavy* 1 *Ym. Nájdite najmenší počet lôpt (gúľ) s polomerom* 1 *Ym potrebných na pokrytie tohto valca.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Rasťo)
Najprv si vysvetlíme, čo znamená *pokrytie množiny bodov guľami.* Majme v priestore danú množinu bodov M, v našom prípade je to valec zo zadania. Nájsť pokrytie množiny M znamená to, že nájdeme množinu gúľ $\mathcal{G}$ takú, že každý bod množiny M patrí do aspoň jednej gule z množiny $\mathcal{G}$. Rozmyslite si to. Pojem pokrytia sa dá rozšíriť aj na iné situácie: danú množinu reálnych čísel môžeme pokrývať otvorenými či uzavretými intervalmi (predstavte si to na číselnej osi) a body v rovine môžeme pokrývať kruhmi. Skúste si to; pokryte množinu $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ piatimi uzavretými intervalmi tak, aby tieto intervaly mali v súčte čo najmenšiu dĺžku. (Dajú sa také intervaly nájsť?)
Vráťme sa k úlohe. Mohli ste začať skúšať pokrývať valcovú oblasť postupne od použitia jednej gule (takto vlastne hľadáme minimálny počet gúľ). Na druhej strane, keďže pokrývanie priestoru guľami sa zle predstavuje, dalo sa to skúsiť s kockami vpísanými do týchto gúľ. Takýmto spôsobom sa dalo zistiť, že štyri gule postačujú. (Ak ste to nespravili, skúste si to.) Tento počet sa dá ešte zlepšiť na tri. Vyhovujúce pokrytie je napríklad také, že stredy gúľ umiestnime do roviny prechádzajúcej stredom valca rovnobežnej s podstavami tak, aby tvorili vrcholy rovnostranného trojuholníka a aby boli vzdialené od stredu valca 1/2 Ym.[3]

[3] V ďalšom texte už jednotky uvádzať nebudeme `:)`



Overiť, že takéto rozmiestnenie gúľ pokrýva celý valec, môžeme tak, že sa pozrieme na rovinu hornej podstavy (zrejme to isté bude platiť aj pre dolnú). V tejto rovine budú všetky gule vyzerať ako kruhy s polomerom $\sqrt{3}/2$ (veľkosť polomeru sme vypočítali z Pytagorovej vety) a valec ako kruh s polomerom jedna. Ak nám „guľové" kruhy zakrývajú „valcový" kruh, tak naše pokrytie funguje, pretože medzi hornou podstavou a strednou rovinou valca sú polomery guľových kruhov ešte väčšie. V rovine hornej podstavy naše pokrytie funguje. Môžete si to overiť tak, že si nakreslíte vlastný obrázok a vypočítate všetky vzdialenosti, ktoré vás zaujímajú a presvedčia o správnosti. Trojuholník vyznačený na obrázku čiarkovane je rovnostranný so stranou veľkosti $\sqrt{3}$ a jemu opísaná kružnica (s polomerom 1) je totožná s hornou podstavou valca. Stredy strán tohto trojuholníka sú priemety stredov gúľ do hornej podstavy valca.

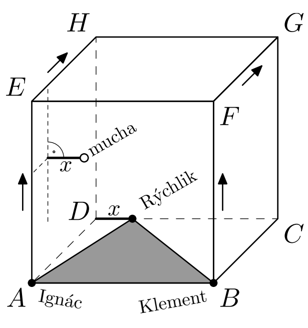
Túto časť väčšina z vás zvládla veľmi dobre, oveľa väčší problém vám robil dôkaz, že dve gule nestačia. Takmer každý postup bol úplne iný; nakoniec som sa rozhodol vybrať riešenie, ktoré obsahuje viacero užitočných úvah. Budeme si všímať roviny rovnobežné s podstavou valca. Rez valca takouto rovinou predstavuje kruh K s polomerom jedna. Rezy gúľ predstavujú tiež kruhy, označme si ich K_1 a K_2 a ich polomery postupne r_1 a r_2. Budeme sa snažiť pokryť kruhmi K_1 a K_2 kruh K. Vieme, že r_1, $r_2 \leq 1$ a navyše rovnosť nastáva iba v tom reze, kde sa nachádza ich stred. (Vo všeobecnosti to samozrejme môžu byť rôzne rezy.) Zoberme si rovinu, ktorá neobsahuje stredy gúľ. V nej sú polomery oba polomery r_1 a r_2 menšie ako 1. Nech k, k_1 a k_2 sú postupne okrajové kružnice kruhov K, K_1 a K_2. Môžu nastať dva prípady. Ak kružnice k a k_1 nemajú spoločný bod, alebo sa len dotýkajú, tak sme pomocou kruhu K_1 pokryli najviac jeden bod kružnice k. Potom na kružnici k existuje priemer, ktorého oba krajné body sú nepokryté (kružnicou k_1) a kružnicou k_2 vieme pokryť najviac jeden z nich. (Nemalo by vám robiť ťažkosti rozmyslieť si, prečo je to tak.) Ak majú kružnice k a k_1 dva priesečníky, tak kruh K_1 pokrýva menej než polovicu obvodu kružnice k (toto je trochu ťažšia verzia úvahy, ktorú ste použili pred chvíľou) a preto opäť existuje priemer, ktorého krajné body sú nepokryté a zároveň ich nevieme pokryť kruhom K_2. V tejto rovine preto ostane nepokrytý bod a preto nám dve gule na pokrytie valcovej oblasti nestačia. (Všimnime si, že tieto úvahy platia pre *skoro všetky* roviny rovnobežné so základňou valca.)

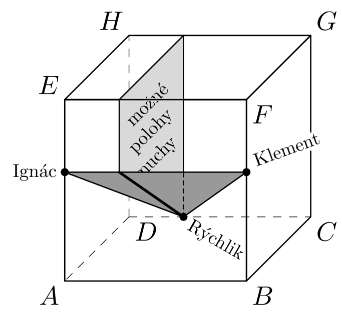
<u>**Úloha č. 10:**</u> *Po hranách kocky lozia traja pavúci a v jej vnútri lieta mucha. Pavúci tvoria vrcholy trojuholníkovej siete a snažia sa ňou chytiť muchu. Maximálna rýchlosť aspoň jedného z nich je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Pavúci muchu chytia, ak sa nachádza vnútri stiete, alebo na jej okraji. Zistite, či sa pavúkom vždy podarí muchu chytiť.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Maťo a Erika)

Po tom, ako sme si viackrát prečítali zadanie úlohy a uvedomili si, čo je v ňom napísané, môžeme sa pustiť do riešenia. Nazvime našich troch pavúkov Ignác, Klement a Rýchlik. Nech Rýchlik je najrýchlejší z nich. Vieme, že jeho maximálna rýchlosť je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Okrem toho sa aj Ignác, aj Klement vedia hýbať, keďže v zadaní je napísané, že všetci traja pavúci lozia. No a keďže ich maximálne rýchlosti sú na základe predchádzajúcej vety nenulové, vedia sa v konečnom čase dostať, kam chcú. Pavúci sa snažia chytiť muchu do trojuholníkovej siete, ktorú v každom okamihu svojou polohou určujú. Niekedy môžu pavúci tvoriť degenerovaný trojuholník. To nastáva napríklad keď splývajú, alebo keď stoja na jednej priamke. Takéto situácie nám nebudú prekážať.

Ako by mohli pavúci chytiť muchu do siete? Napríklad tak, že ju touto sieťou pritlačia na niektorú stenu, alebo že ju pripučia v rohu. My ukážeme, že ju vedia pritlačiť o stenu. Označme kocku klasicky $ABCDEFGH$ a umiestnime ju do karteziánskej sústavy tak, že bod A je bod $(0,0,0)$ a body B, D a E ležia v poradí na x-ovej, y-ovej a z-ovej osi. Pavúci Ignác a Klement dolezú do vrcholov A a B. Pavúk Rýchlik dolezie na hranu CD tak, aby jeho x-ová súradnica bola taká istá ako x-ová súradnica muchy. V istom okamihu toto môže dosiahnuť tak, že sa vydá z bodu C do bodu D. Niekedy na tejto ceste bude mať tú istú x-ovú súradnicu ako mucha. Bude to vtedy, keď sa kolmý priemet pohybu muchy na hranu CD stretne s pohybom pavúka. V okamihu, keď budú mať rovnaké x-ové súradnice, pavúk Rýchlik začne kopírovať pohyb muchy tak, aby zhodnosť x-ovej súradnice bola stále zachovaná.





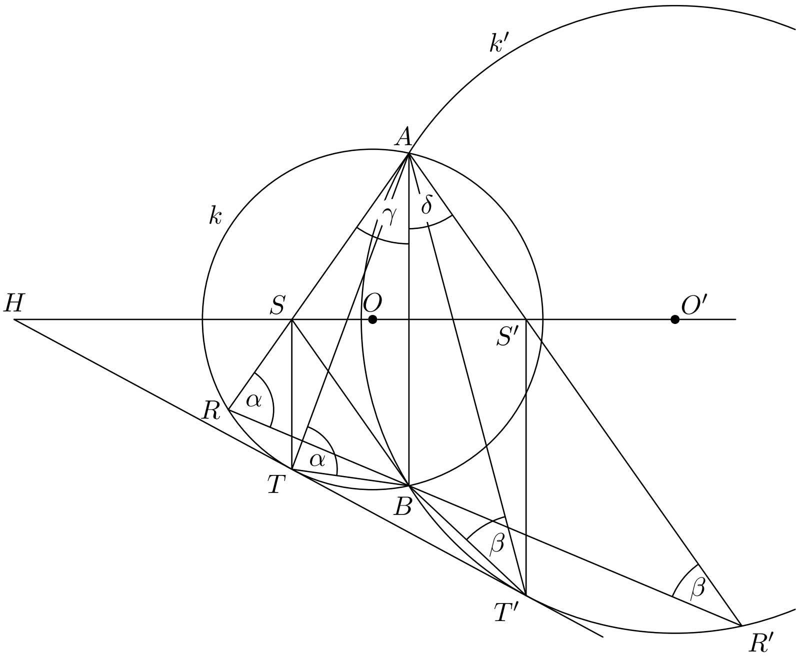
Keď už Rýchlik kopíruje pohyb muchy, môžu sa Ignác s Klementom vydať na cestu. Začnú sa naraz hýbať z bodov A, B rovnakou rýchlosťou (teda maximálnou rýchlosťou pomalšieho z nich). Ignác pôjde z vrcholu A do vrcholu H

cez E. Klement pôjde z vrcholu B do G cez vrchol F. Zamerajme sa teraz na muchu. Ak ešte nie je chytená, musí sa nachádzať nad rovinou trojuholníka tvoreného pavúkmi. Teda lieta niekde v polpriestore určenom pavúkmi a vrcholom G. Naviac vieme, že Rýchlik a mucha majú stále rovnakú x-ovú súradnicu. Do opačného polpriestoru sa mucha dostať nemôže, pretože nemôže preletieť rovinou, v ktorej je sieť. Pri pokuse o prelet na sieť narazí, lebo v okamihu prelietania má Rýchlik tú istú x-ovú súradnicu ako mucha. A keďže všetky body výšky trojuholníka, ktorý pavúky tvoria (spustenej z vrcholu, v ktorom je Rýchlik), majú tú istú x-ovú súradnicu a ležia v sieti, chytí sa mucha do siete (premyslite si to).
Takto sa životný priestor muchy stále zmenšuje. Vo chvíli, keď Ignác a Klement dorazia do vrcholov G, H, je mucha chytená. Vtedy je trojuholníková sieť časťou steny $DCGH$ a mucha leží niekde na výške trojuholníka tvoreného vrcholmi G, H a miestom, kde stojí Rýchlik (uvažujeme samozrejme výšku na stranu GH).
Keďže sme na začiatku neuvažovali žiadnu špeciálnu polohu muchy, je náš postup univerzálny. Teda pavúkom sa naozaj vždy podarí chytiť muchu.

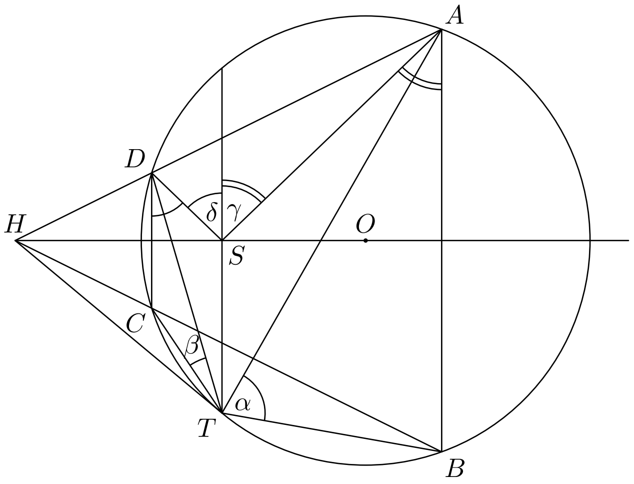
Poznámka: Existuje aj spôsob, ako chytiť muchu do rohu. Skúste ho vymyslieť. A nevzdávajte sa, naozaj sa to dá.

Úloha č. 11: *Kružnice so stredmi O a O' sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka TT' sa dotýka prvej kružnice v bode T a druhej v bode T'. Päty kolmíc spustených z bodov T a T' na priamku OO' označme S a S'. Polpriamka AS pretína prvú kružnicu znova v bode R a polpriamka AS' druhú kružnicu znova v bode R'. Dokážte, že body R, B a R' ležia na jednej priamke.*

Riešenie: (opravoval Mazo)



Prečítali sme si zadanie, nakreslili pekný obrázok a pochopili zadanie. Čo ďalej? Okrem iného sme zistili, že nezáleží na tom, na ktorú stranu kreslíme spoločnú dotyčnicu, pretože podstatné sú iba priemety S, S' dotykových bodov T, T' na os OO', podľa ktorej sú obe kružnice symetrické. Ak majú kružnice rovnaký polomer, body S, O (resp. S', O') splynú a tvrdenie platí, lebo uhly nad priemermi pri bode B sú pravé (čitateľ si nadšene nakreslí obrázok a overí to). Inak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že kružnica k má menší polomer ako kružnica k'.
Čo vlastne máme dokázať? Že body R, B, R' ležia na priamke. Vieme toto nejako prístupnejšie sformulovať? Áno: Uhol RBR' je priamy. Nech veľkosti uhlov ARB, $AR'B$, RAB, $R'AB$ sú po rade α, β, γ, δ. Prečo sme označili práve tieto uhly? Uhly γ a δ vyjadrujú polohu bodov S, S' vnútri jednotlivých kružníc a uhly α a β zase hovoria, pod akým uhlom vidíme zo zodpovedajúcich kružníc úsečku AB. Preto tieto uhly popisujú celú situáciu. Dokazované tvrdenie je ekvivalentné s tým, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Uhly vyjadrované pomocou α, β, γ, δ teda predstavujú akúsi spoločnú reč pre predpoklady a dokazované tvrdenie a stojí za pokus označiť ich práve takto.
Z tetivových štvoruholníkov $ABRT$ a $ABR'T'$ vieme vyjadriť $|\sphericalangle ATB| = \alpha$, $|\sphericalangle AT'B| = \beta$. Týmto sme sa zbavili bodov R, R', na dôkaz tvrdenia $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$ ich nepotrebujeme. Starajme sa radšej o to, ako si situáciu ďalej zjednodušiť. Máme tam stále veľa priamok a dve kružnice. Ale tie kružnice sú rovnoľahlé podľa bodu H, ktorý je priesečníkom osi OO' a spoločnej dotyčnice TT'. Obe spomenuté priamky sú v našej situácii podstatné, preto tento smer úvah vyzerá sľubne. Zobrazme v tejto rovnoľahlosti kružnicu k' na k. (Rovnako by sme to mohli naopak, ale potom by nám tam zostali čiarkované body, takto ostanú nečiarkované.) Bod B sa zobrazí do nejakého bodu C, bod A do bodu D, bod S' do bodu S, bod T' do T. Uhol $AT'B$ sa zobrazí do DTC a oba teda majú rovnakú veľkosť β. Kružnice k' sme sa zbavili, môžeme si nakresliť nový obrázok, kde už nebude.



Pozrieme sa na vec v novom svetle a zistíme niekoľko zaujímavostí. Priamky AB, CD, ST sú rovnobežné. Preto uhol ASD má veľkosť $\gamma + \delta$. Veľkosť uhla ADB je rovnaká ako veľkosť uhla ATB, teda α. Veľkosť uhla DAC je rovnaká ako veľkosť uhla DTC, teda β. Čo s bodom O? Skôr, než ho zahodíme, pozrime sa, či nie je na niečo užitočný. Priamka OT je kolmá na dotyčnicu HT. Navyše vieme zistiť veľkosť uhla AOD, je to $180° - \alpha - \beta$ (skúste to sami, nakreslite si k tomu nový obrázok a využite, že O je stred kružnice). Ale toto znamená veľa, dokazované tvrdenie platí práve vtedy, keď štvoruholník $ASOD$ je tetivový (potom ASD a AOD majú rovnakú veľkosť).

Poznámka: Nech P je priesečník uhlopriečok. Uhol APD má tiež veľkosť $180° - \alpha - \beta$. To by znamenalo, že body S, P, O ležia na kružnici nad tetivou AD. Tieto body však ležia na priamke. To znamená, že dva z nich by boli totožné. Keďže O a S aj O a P sú vo všeobecnosti rôzne, musia to byť body S a P. Z toho vyplýva toto tvrdenie: Nech k je kružnica a H bod mimo nej. Vezmime nejaké dve sečnice kružnice k prechádzajúce bodom H tak, aby vznikol rovnoramenný lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice. Potom priesečník uhlopriečok tohto lichobežníka je pevný bod nezávislý od voľby sečníc. (A my už vieme, že je to bod S z našej úlohy.)

Pokračovanie riešenia: Ostáva nám dokázať, že štvoruholník $ADSO$ je tetivový. (Nakreslite si ďalší obrázok, kde bude len tento štvoruholník a objekty, pomocou ktorých je určený, teda kružnica k, priamky HT a AD a body S a O.) To je ekvivalentné s tým, že $HD \cdot HA = HS \cdot HO$ (mocnosť bodu ku kružnici). Zrejme $HS \cdot HO = HT^2$ z Euklidovej vety v pravouhlom trojuholníku HTO a $HD \cdot HA = HT^2$ z mocnosti bodu H ku kružnici k. A sme hotoví. Ešte raz si prejdeme celý postup a overíme, že nepotrebujeme žiaden ďalší rozbor prípadov okrem toho v úvode.

Poznámka: V poslednej časti dôkazu sme akosi odskočili od počítania uhlov. Spravili sme to kvôli stručnosti a tiež pre ilustráciu využitia mocnosti bodu ku kružnici. Neznamená to však, že riešenie sa počítaním uhlov nedá dokončiť. Ale je to zdĺhavejšie a poznám len jediné takéto riešenie, ktoré využíva priesečník uhlopriečok a jeho vlastnosti spomínané v predošlej poznámke. Skúste takéto riešenie cez počítanie uhlov nájsť.

Tetivovosť štvoruholníka $ADSO$ sa dá dokázať aj inými spôsobmi. Sú však náročnejšie z pohľadu použitých poznatkov. Napríklad v kružnicovej inverzii so stredom O podľa kružnice k sa body H a S zobrazia na seba. Body A, D sú samodružné. Obrazom priamky prechádzajúcej bodmi H, D, A je kružnica, prechádzajúca obrazmi týchto bodov a navyše stredom O. Tými obrazmi sú body S, D, A a sme hotoví.

Iné riešenie:

Obrázky sme si nakreslili, zadanie pochopili, uhly označili, ale nikam sme sa nedorátali. Nič to, stávajú sa aj horšie veci. Ale čo ďalej s príkladom? Všimnime si predošlé riešenie. Skladá sa z niekoľkých krokov. Preto nevidno súvis medzi predpokladmi a dokazovaným tvrdením, nevieme, ako začať, ani ktorým smerom sa uberať. Pomohlo by nám, keby sme vedeli úlohu rozložiť na niekoľko jednoduchších častí. To sa dá dosiahnuť tak, že nejaký medzikrok uhádneme. Ako? Narysujeme si veľký presný obrázok. A potom skúšame hádať, čo platí. Napríklad zostrojíme kružnicu cez tri body. Neleží na nej nejaký použiteľný štvrtý? Nie sú nejaké priamky rovnobežné? Možno je niečo vhodne symetrické? A tamten trojuholník, prečo vyzerá tak rovnoramenne? Nakreslíme si ďalší obrázok, odlišný od prvého. Zase ten trojuholník vyzerá rovnoramenne? Alebo pravouhlo? Ležia nejaké trojice bodov na priamke? Čo keby sme si tam dokreslili nejakú ďalšiu priamku? Kružnicu? Predĺžili úsečku? Takto získame niekoľko hypotéz, ktoré potom otestujeme na ďalšom presnom obrázku.

Keď uvedený postup vyskúšame na tejto úlohe, môžeme si všimnúť toto: Body R, B, R' ležia na priamke. A nielen to, táto priamka navyše prechádza bodom H (stred rovnoľahlosti kružníc). Priamky AS a BS' sú rovnobežné. Aj priamky AS' a BS sú rovnobežné. Trojuholník $SS'A$ je rovnoramenný. Štvoruholník $ASBS'$ je kosoštvorec. Štvoruholník $RSOB$ je tetivový (aj ďalšie tri štvoruholníky tohto typu). Na ľubovoľnom z týchto pozorovaní už vieme vybudovať riešenie.

Budeme používať rovnaké označenie ako v predošlom riešení. Nech AR a BS' sú rovnobežné. Z tejto rovnobežnosti vyplýva, že tieto priamky sú rovnoľahlé podľa bodu H v rovnoľahlosti, ktorá zobrazí kružnicu k na kružnicu k'. (Pretože bod S' je obrazom S.) V tejto rovnoľahlosti sa R zobrazí na B, preto body R, B, H ležia na priamke. Priamky BR, AS' sú tiež rovnobežné (lebo situácia je symetrická podľa osi OO'), preto aj body R', B, H ležia na priamke. Zostáva dokázať rovnobežnosť priamok AR a BS'. Keďže bod B je obrazom bodu A v osovej súmernosti podľa osi OO', je to ekvivalentné s rovnoramennosťou trojuholníka $SS'A$ (poriadne to uvážte). Toto sa dá dokázať výpočtom využívajúcim podobnosť trojuholníkov a Pytagorovu vetu pre množstvo pravouhlých trojuholníkov na obrázku, ako mnohí z vás aj urobili. *Jaro Knebl* však našiel elegantné geometrické zdôvodnenie. Priamka AB je chordálou kružníc k a k', preto pretína úsek TT' na spoločnej dotyčnici v jeho strede M (z mocnosti bodu M k daným kružniciam máme $MT^2 = MA \cdot MB = MT'^2$). Keď si to kolmo premietneme na priamku OO', tak priesečník priamky AB s OO' je stredom úsečky SS'. Hotovo.

Komentár: Všimnite si, že druhé riešenie (t. j. posledný odstavec) je stručnejšie ako prvé. Približne takto si predstavujeme riešenie, ktoré pošlete. Obrázok, popis označenia (tu je samozrejme len odkaz na predošlé riešenie), a potom reťaz tvrdení, pričom ďalšie vyplývajú z predošlých a je pri nich spomenuté, prečo vyplývajú. Netreba opisovať, ako ste si nakreslili 42 obrázkov a všimli si, že nejaké priamky sú rovnobežné. Stačí napísať, že rovnobežné sú a dôkaz tohto tvrdenia.
Ešte raz by som na záver pripomenul, že kresliť si obrázky nie je hanba. Ja som si ich nakreslil pri rátaní tejto úlohy vyše dvadsať. Kreslite si nový obrázok zakaždým, keď chcete niečo zistiť, ale prekážajú vám v už nakreslených obrázkoch nepodstatné veci, ktoré nesúvisia s vašim aktuálnym problémom. Píšte si jasne, čo idete dokazovať, overiť, zistiť.

Úloha č. 12: *Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu*

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x),$$

kde x, y, z sú reálne čísla.

Prémiová úloha za (bezvýznamný) plusový bodík: Viete zistiť (a poriadne dokázať), či daný výraz nadobúda všetky hodnoty medzi minimom a maximom?

Riešenie: (opravoval Buggo)
Máme pred sebou výraz s tromi premennými x, y, z. Tie vystupujú ako argumenty goniometrických funkcií. Náš výraz nie je symetrický: jeho hodnota sa môže zmeniť, keď zameníme niektoré dve premenné. Tiež si môžeme všimnúť, že ak budeme ľubovoľné dve premenné považovať za nemenné (teda ich budeme vnímať ako konštanty), tak z nášho výrazu dostaneme periodickú funkciu v tretej premennej.
Našou úlohou je nájsť maximum a minimum tejto funkcie. Tu nás môže napadnúť viacero možných prístupov k riešeniu problému. Môžeme vyskúšať tipnúť si tieto hodnoty (extrémy) a potom dokázať zodpovedajúce nerovnosti a zistiť, či rovnosť môže nastať. Je otázne, ako ľahko by sa nám robil takýto dôkaz bez ďalšieho skúmania výrazu. Ďalej si môžeme pomocou počítača vykresliť graf tejto funkcie (keďže je to funkcia troch premenných, tak grafom by mohla byť akási pekná animácia) a z grafu odpozorovať niečo zaujímavé, napríklad konvexnosť, intervaly, na ktorých je funkcia rastúca v niektorej premennej, lokálne extrémy… Tieto informácie by nám mohli pomôcť pri dôkaze. Boli by to však skôr akési vodítka, nakoľko obrázok nám vytvorí dobrú predstavu, ale ako dôkaz ho použiť nemôžeme .
Ďalšou možnosťou je využiť mašinériu derivácií. Tu však máme problém, že funkcia, ktorú skúmame, je funkciou troch premenných a derivovanie takýchto funkcií je zložitejšie ako funkcií jednej premennej. Výrazy, ktoré by sme po zderivovaní stretli, by nás mohli veľmi rýchlo vydesiť a vziať nám chuť pre ďalšie riešenie príkladu. Tento prístup v sebe tiež ukrýva mnohé zákerné pasce (spomeňte si na úlohu 12 z prvej série). Preto by mal byť aplikovaný len človekom, ktorý naozaj dôverne pozná derivovanie funkcií viacerých premenných a plne rozumie používaným metódam.
Tiež sa môžeme pokúsiť daný výraz zhora odhadnúť nejakým iným výrazom. Následne sa pokúsiť nájsť maximum väčšieho výrazu a zistiť, či náš výraz toto maximum niekedy nadobúda. Tu môžeme použiť niektoré zo známych nerovností (*AG nerovnosť, Cauchyho-Schwarzova nerovnosť, nerovnosť prerovnania (rearrangement inequality), Bernoulliho nerovnosť…*). Alebo môžeme zhora odhadnúť jednotlivé členy výrazu a súčet týchto odhadov dať na druhú stranu nerovnosti.
My sa vyberieme poslednou cestou, podobne ako viacerí z vás.
Pokúsme sa odhadnúť každý zo súčinov. Vieme, že funkcie sin aj cos nadobúdajú hodnoty od -1 po 1. Dostávame teda (všimnite si nové označenie)

$$V = \sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x) \leq 3.$$

Môže náš výraz niekedy nadobúdať hodnotu 3? Môže byť každý zo súčinov rovný jednej? Ak by to tak bolo, tak by muselo platiť $\sin x = \cos y = \pm 1$. To by potom znamenalo, že $\sin y = 0$ a teda druhý výraz $\sin y \cos(2z)$ by bol rovný nule, čo nechceme. Musíme preto nájsť lepší odhad.
Skúsme si výraz rozdeliť na dve časti v_1, v_2 a odhadnime ich jednotlivo (rozdelení je viac, treba skúšať).

$$\underbrace{\sin x \cos y + \sin y \cos(2z)}_{v_1} + \underbrace{\sin z \cos(4x)}_{v_2}$$

Vieme, že

$$\sin x \cos y \leq |\sin x||\cos y| \leq |\cos y|$$

a analogicky dostávame

$$\sin y \cos(2z) \leq |\sin y|.$$

Teraz môžeme napísať odhady pre v_1 a v_2.

$$\begin{aligned} v_1 &\leq |\cos y| + |\sin y| \\ v_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Výraz $v_3 = |\cos y| + |\sin y|$ vyzerá tak, že by sa dal zhora pekne odhadnúť. Tento odhad sa dá urobiť viacerými spôsobmi. Pokúste sa oň sami. Tu uvádzame jeden zo spôsobov s využitím úpravy na štvorec, iná možnosť je využiť, že výraz v_3 má názornú geometrickú interpretáciu súvisiacu s jednotkovou kružnicou. Namiesto hľadania maxima nezáporného výrazu v_3 môžeme hľadať maximum výrazu v_3^2. (Dobrý dôvod na toto je znalosť vzťahu $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$.)

$$v_3^2 = (|\sin y| + |\cos y|)^2 = \sin^2 y + \cos^2 y + 2|\sin y||\cos y| = 1 + |2\sin y\cos y| = 1 + |\sin 2y| \le 2.$$

Takže maximum výrazu v_3 je $\sqrt{2}$. Rovnosť nastáva pre $|\sin 2y| = 1$, nájdite takéto y. Keby rovnosť nenastávala, tak náš odhad nestačí, lebo sa nedosahuje pre žiadne y, potom ani odhad pre celý skúmaný výraz V nebude tesný (získame síce horné ohraničenie výrazu V, ale nebude to maximum). Pozor: keďže sme náš výraz rozdelili na dve časti, musíme potom overiť, či rovnosť pre jednotlivé časti môže nastať súčasne. Toto si poriadne rozmyslite, napríklad obe časti výrazu $x^2 + (1-x)^2$ vieme odhadnúť zdola číslom 0, ale pritom minimum skúmaného výrazu nie je 0 (overte).
Z uvedeného vyplýva, že

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x) \le 1 + \sqrt{2}.$$

Poďme teraz zistiť, či nastáva rovnosť. Po dlhšom alebo kratšom hľadaní zistíme, že rovnosť nastáva napríklad pre $x = \pi/2$, $y = -\pi/4$ a $z = \pi/2$. Hľadanie vieme urýchliť tým, že sa pozrieme, kedy nastáva rovnosť v odhadoch výrazov v_1, v_2, v_3. Maximálna hodnota výrazu V zo zadania je teda číslo $1 + \sqrt{2}$.
Ako to vyzerá s minimom? Nie je náhodou pravda, že minimum bude $-(1+\sqrt{2})$? Pokúsme sa to nejako dokázať. Chceli by sme ukázať, že ak náš výraz nadobúda pre nejaké x, y, z hodnotu q, tak pre nejaké iné x', y', z' nadobúda hodnotu $-q$. Po krátkom zamyslení sa nad vlastnosťami goniometrických funkcií si uvedomíme, že niečo také naozaj platí a stačí položiť $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$. To znamená, že $-1-\sqrt{2}$ je naozaj minimom nášho výrazu.
A ako to bude s nadobúdaním všetkých hodnôt medzi maximom a minimom? Na pomoc si zavoláme spojitosť. Označme si $F(x, y, z)$ funkciu prislúchajúcu výrazu zo zadania. Chceli by sme postupne po spojitých funkciách „precestovať" z maxima do minima. Urobíme to tak, že najprv si zmeníme x, potom y a nakoniec z. Túto cestu nám budú realizovať tri funkcie, medzi ktorými budeme „prestupovať":

$$\begin{aligned} f(t) &= F\left(t,\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right) \\ g(t) &= F\left(-\frac{\pi}{2},\ t,\ \frac{\pi}{2}\right) \\ h(t) &= F\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4},\ t\right) \end{aligned}$$

Keďže všetky tri funkcie sú spojité a v „prestupových bodoch" majú rovnakú hodnotu, pri ceste z maxima do minima prejdeme cez všetky hodnoty. Teda výraz nadobúda všetky hodnoty medzi maximom a minimom.

Poznámka: Všimnime si výraz $1/x^2$, kde x je nenulové reálne číslo. Viete zistiť, aké má maximum a minimum? Keďže výraz je zhora neohraničený, o maxime nemôže byť ani reči. Hodnota 0 je zrejme najlepším dolným ohraničením, aké vieme získať, ako si iste s radosťou rozmyslíte. (Nezabudnite na dôkaz.) Nie je to však minimum, pretože daný výraz túto hodnotu nikdy nenadobúda. Vyriešením predchádzajúcej úlohy sme teda dokázali, že výraz zo zadania má maximum aj minimum. Táto poznámka zase hovorí, že túto vlastnosť nemá každý výraz.

Úloha č. 13: *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ také, že pre všetky kladné celé čísla m, n je číslo $(m^2+n)^2$ deliteľné číslom $f(m^2) + f(n)$.*

Riešenie: (opravovala Janka)
(Podľa *Ondra Budáča*.)
Naším cieľom je nájsť všetky také funkcie f, ktoré spĺňajú podmienku v zadaní. Skúsme o hľadaných funkciách zistiť niečo viac, najjednoduchšie asi bude zistiť funkčné hodnoty pre konkrétne čísla. Dosaďme naprv za m^2 aj za n číslo jedna. Dostávame, že $f(1) \mid 2$, takže $f(1) \in \{1, 2\}$. Ak podobným spôsobom dosadíme za m^2 aj za n číslo štyri, zistíme, že $f(4) \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Navyše ak skúsime $m^2 = 4$ a $n = 1$, uvidíme, že $f(1) + f(4) \in \{5, 25\}$. Jediné hodnoty tomu vyhovujúce sú $f(1) = 1$ a $f(4) = 4$.
Tieto zistenia nám nenápadne podsúvajú hypotézu, že riešením je práve funkcia $f(n) = n$. Táto funkcia vyhovuje zadaniu, ale ešte stále nevieme, či je jediná. Skúsme dosadzovať ďalej, ale teraz už všeobecnejšie. Využime, že už poznáme hodnotu $f(1)$ a že ak p je prvočíslo, tak p^2 má len troch deliteľov. Položme $m^2 = 1$ a $n = p-1$. Dostávame, že $(f(p-1)+1) \mid p^2$, teda $f(p-1) \in \{p-1, p^2-1\}$. Už vieme, že predpoklad $f(p-1) = p-1$ nevedie k sporu. Skúsme sa teda venovať druhej možnosti a ukážme, že nemôže nastať. Dosaďme $m^2 = 4$, $n = p-1$. Máme $(p^2+3) \mid (p+3)^2$, čo môžeme prepísať ako

$$\frac{(p+3)^2}{p^2+3} = 1 + \frac{6p+6}{p^2+3} \in \mathbb{Z}^+.$$

Pre $p \ge 7$ je druhý z uvedených zlomkov kladný a menší ako jedna, pričom však má byť aj celým číslom, čo je spor.

Skúsme teraz využiť nový poznatok $f(p-1)=p-1$ pre prvočíslo $p\geq 7$. Môžeme $p-1$ dosadiť za n a dostávame

$$\frac{(m^2+p-1)^2}{f(m^2)+p-1}\in\mathbb{Z}^+.$$

Uvedený výraz skúsme upraviť tak, sme v čitateli získali rozdiel $m^2-f(m^2)$. Tak dostávame

$$2m^2-f(m^2)+p-1+\frac{(m^2-f(m^2))^2}{f(m^2)+p-1}.$$

Všimnime si, že pre $p>(m^2-f(m^2))^2-f(m^2)$ je nezáporný zlomok v predchádzajúcom výraze menší ako jedna. Keďže je zároveň celým číslom, je rovný nule a $f(m^2)=m^2$ pre všetky $m\in\mathbb{Z}^+$.
Teraz už konečne môžeme zistovať niečo aj priamo o $f(n)$. Podobne ako v predchádzajúcom kroku, má platiť

$$\frac{(m^2+n)^2}{m^2+f(n)}\in\mathbb{Z}^+.$$

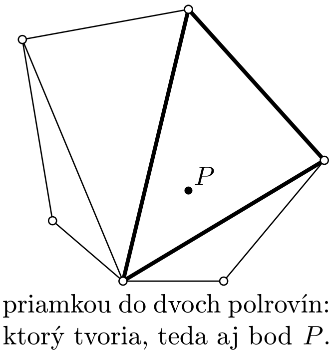
Keď uvedený výraz, podobne ako pred chvíľou, upravíme do tvaru

$$m^2-f(n)+2n+\frac{(n-f(n))^2}{m^2+f(n)},$$

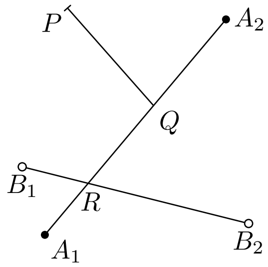
opäť nahliadneme, že pre $m^2>(n-f(n))^2-f(n)$ je nezáporný zlomok v predchádzajúcom výraze menší ako jedna. Keďže je zároveň celým číslom, musí platiť $f(n)=n$ pre každé $n\in\mathbb{Z}^+$.

Úloha č. 14: *V rovine sú dané dve konečné množiny bodov A, B. Pre každú množinu C štyroch navzájom rôznych bodov z množiny $(A\cup B)$ existuje priamka, ktorá oddelí množinu $(C\cap A)$ od množiny $(C\cap B)$ (priamka oddeľuje dve množiny bodov práve vtedy, ak sa body jednej z týchto množín nachádzajú vnútri jednej z polrovín určených touto priamkou a body druhej množiny sa nachádzajú vnútri tej druhej polroviny). Dokážte, že existuje priamka, ktorá oddeľuje množiny A a B.*

Riešenie: (opravoval PeťoN)
Pre jednoduchšie vyjadrovanie nazývajme body množiny A *čierne* a body množiny B *biele*. Ďalej o dvoch množinách bodov (t. j. o nejakých rovinných útvaroch) povieme, že sa *prenikajú*, ak majú aspoň jeden spoločný bod. A ešte sa dohodnime, že ak povieme, že nejaký bod leží *v*, resp. *na* nejakom útvare, myslíme tým, že je prvkom toho útvaru, t. j. môže byť aj na hranici. Máme ukázať, že čierne a biele body vieme oddeliť priamkou. Keď si predstavíme nejaké dve konečné množiny bodov, ktoré sú oddelené priamkou, uvedomíme si, že aj ich *konvexné obaly* sú oddelené tou istou priamkou.
Pripomeňme si, že konvexný obal konečnej množiny bodov je mnohouholník (prípadne úsečka či bod), ktorý dostaneme, keď pospájame všetky body množiny úsečkami a vyfarbíme všetky vzniknuté trojuholníky. Iná možnosť je natiahnuť okolo všetkých bodov gumičku a potom ju sťahovať, kým to ide. Pre všeobecnú množinu sa konvexný obal definuje ako prienik všetkých konvexných množín, ktoré danú množinu obsahujú. Možností, ako ho definovať, je viacero. Pre potreby nášho riešenia pod konvexným obalom *konečnej* množiny bodov M rozumieme konvexný mnohouholník O_M, ktorého vrcholy sú z množiny M a ktorý obsahuje (vnútri a na obvode) všetky body z M. Pritom ak všetky body množiny M ležia na jednej priamke, pod O_M rozumieme úsečku, ktorej krajnými bodmi sú dva najvzdialenejšie body z M a ak M obsahuje iba jeden bod, tak $O_M=M$ (v oboch týchto prípadoch budeme hovoriť o O_M, že je *degenerovaný*). Uvedomme si, že keby sme chceli byť dôslední, mali by sme dokázať, že taký útvar O_M vždy existuje. Premyslite si, ako by ste ho pre ľubovoľnú konečnú množinu M konštruovali.
Pokúsme sa úlohu vyriešiť tak, že najprv dokážeme, že O_A a O_B sa neprenikajú a potom ukážeme, že existuje priamka, ktorá oddeľuje O_A a O_B. Keďže $A\subset O_A$ a $B\subset O_B$, budú touto priamkou oddelené aj množiny A a B a úloha bude vyriešená.

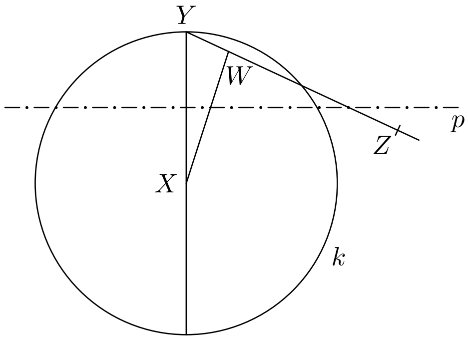


Predpokladajme sporom, že O_A a O_B sa prenikajú. Teda existuje nejaký bod P, ktorý leží v oboch konvexných obaloch. Zrejme musíme nejako využiť predpoklady zo zadania o množine C. Bod P je prvkom O_B, takže určite leží v niektorom trojuholníku, ktorého vrcholy sú biele. (Pretože O_B vieme vždy rozdeliť na trojuholníky, ktoré nemajú spoločné vnútorné body a ktorých vrcholy sú vrcholmi O_B. Takéto rozdelenie sa volá *triangulácia* mnohouholníka. Ak je O_B degenerovaný, budú aj trojuholníky degenerované.)
Ak je bod P priamo jedným z prvkov množiny A, t. j. ak je čierny, potom máme trojuholník s bielymi vrcholmi, v ktorom je čierny bod. Tu už máme spor so zadaním, lebo keď dáme do množiny C tieto tri biele vrcholy a čierny bod P, nevieme ich oddeliť priamkou do dvoch polrovín: akonáhle budú v nejakej polrovine tie tri biele vrcholy, bude tam aj celý trojuholník, ktorý tvoria, teda aj bod P. Takže P nemôže byť čierny. Rovnako sa dá ukázať, že nemôže byť ani biely.

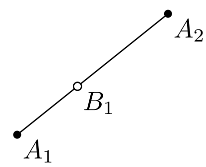


Vyberme sa z bodu P na prechádzku po polpriamke ľubovoľným smerom. Zrejme v nejakom okamihu opustíme ako prvý jeden z obalov O_A alebo O_B. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že najprv opustíme O_A (nevadí, ak opustíme oba obaly naraz). Označme Q bod, v ktorom sa to stalo. Bod Q je ešte stále aj v O_A aj v O_B, nie je teda ani čierny, ani biely (z rovnakých dôvodov ako P). Avšak Q leží na obvode O_A, leží teda na úsečke, ktorá má čierne krajné body, označme ich A_1 a A_2. Zmeňme smer našej prechádzky a pokračujme z Q ďalej po úsečke QA_1. Keďže A_1 je čierny, nemôže ležať v O_B (inak by sme ho mohli zobrať na začiatku za bod P, o tom sme ale ukázali, že nie je čierny). Preto v istom okamihu kráčania po QA_1 opustíme v nejakom bode R obal O_B. Bod R leží na obvode O_B, teda na nejakej úsečke B_1B_2 s bielymi krajnými bodmi. Zároveň ale leží aj na úsečke A_1A_2. Takže úsečky B_1B_2 a A_1A_2 sa prenikajú. Keď teraz dáme do množiny C čierne body A_1, A_2 a biele body B_1, B_2, nevieme ich oddeliť priamkou do dvoch polrovín. Totiž akonáhle sú v nejakej polrovine body A_1 a A_2, je v nej aj celá úsečka A_1A_2 s bodom R, čiže nie celá úsečka B_1B_2 je v opačnej polrovine, z čoho vyplýva, že aspoň jeden z bodov B_1, B_2 nie je v opačnej polrovine. Dostali sme tak spor so zadaním.

Ukázali sme, že O_A a O_B sa neprenikajú. Zostáva nájsť priamku p, ktorá ich oddeľuje. Dobrou myšlienkou je zobrať dva body $X \in O_A$ a $Y \in O_B$ také, že dĺžka úsečky XY je najmenšia možná. Priamkou p potom bude os úsečky XY. Pred tým, ako ukážeme, že priamka p oddeľuje dané obaly, si uvedomme, že taká úsečka XY naozaj existuje. Pre všeobecné množiny O_A a O_B to nie je vždy tak, napríklad ak by množina O_A bola vnútro jedného štvorca a množina O_B vnútro druhého štvorca, ktorý sa s O_A nepreniká, tak takú úsečku XY nenájdeme. Ku každej totiž vieme nájsť kratšiu. V našej situácii sú však O_A a O_B neprenikajúce sa konvexné mnohouholníky (v prípade degenerovaných obalov úsečky či body). Pre ne vieme najkratšiu úsečku XY skonštruovať tak, že nájdeme minimálnu vzdialenosť d spomedzi všetkých vzdialeností medzi dvoma vrcholmi z O_A a O_B a spomedzi všetkých vzdialeností medzi vrcholom jedného a stranou druhého obalu (keďže týchto vzdialeností je konečný počet, minimum spomedzi nich určiť vieme). Ak je úsečik s minimálnou dĺžkou viac, vyberieme ľubovoľnú z nich. Takto nájdená úsečka XY dĺžky d bude najkratšou možnou úsečkou medzi bodom z O_A a bodom z O_B, skúste si sami uvedomiť, prečo je to tak.



Majme teda úsečku XY takú, že $X \in O_A$, $Y \in O_B$ a pre ľubovoľné body $X' \in O_A$, $Y' \in O_B$ platí $|X'Y'| \geq |XY|$. Keďže obaly sa neprenikajú, sú body X a Y rôzne. Os úsečky XY označme p. Tvrdíme, že p oddeľuje O_A od O_B. Predpokladajme sporom, že to neplatí. Bez ujmy na všeobecnosti nech v polrovine určenej priamkou p, v ktorej je bod X, leží nejaký bod Z z obalu O_B. Kvôli konvexnosti množiny O_B celá úsečka YZ leží v O_B. Z obrázka vidno, že úsečka YZ je sečnicou kružnice k so stredom X a polomerom $|XY|$ (YZ má s k spoločný bod Y, pritom nie je dotyčnicou, preto je nutne sečnicou), teda na nej ležia body W, pre ktoré platí $|XW| < |XY|$. Našli sme teda body $Y' = W \in O_B$, $X' = X \in O_A$ také, že $|X'Y'| < |XY|$, čo je v spore s výberom bodov X a Y. Takže p naozaj oddeľuje dané konvexné obaly. Tým je úloha vyriešená.



Poznámka: Napriek tomu, že sme práve úlohu vyriešili, tvrdenie zo zadania *neplatí*! Zoberme dvojprvkovú množinu bodov $A = \{A_1, A_2\}$ a jednoprvkovú $B = \{B_1\}$ takú, že B_1 leží vnútri úsečky A_1A_2. Žiadna množina C *štyroch* navzájom rôznych bodov z množiny $(A \cup B)$ neexistuje. Takže množiny A a B spĺňajú predpoklady zadania, zrejme sa však nedajú žiadnou priamkou oddeliť. Porozmýšľajte, ako treba upraviť zadanie, aby tvrdenie platilo. A skúste nájsť miesto v riešení, kde sme spravili chybnú úvahu.

Úloha sa dala vyriešiť aj bez použitia konvexných obalov. Stačilo uvažovať minimálnu vzdialenosť medzi bodmi (resp. medzi bodom a úsečkou) z množín A a B. Pre danú najkratšiu vzdialenosť a úsečku, ktorá ju realizuje, sa rovina rozpadne na niekoľko sektorov. Potom už stačí rozobrať, aké body môžu byť v jednotlivých sektoroch. Takto úlohu riešil *Ondrej Budáč*.

Komentár: Viacerí ste sformulovali dobré tvrdenia, ale neunúvali ste sa s ich dôkazmi. To, že obaly O_A a O_B sa neprenikajú, vôbec nie je zrejmé. Nestačí to odbaviť nakreslením jedného obrázka. Takisto treba zdôvodniť, že neprenikajúce sa obaly sa dajú oddeliť priamkou. Napríklad keby v zadaní nebola podmienka konečnosti množín A, B, tvrdenie by neplatilo.