Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série letného semestra 2006/2007

Úloha č. 1: *Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré sú deliteľné číslom 41 a majú presne 41 kladných deliteľov.*

Riešenie: (opravovala Ajka)

V riešení budeme často používať rozklad na prvočísla. Preto si na príklade zopakujeme, čo to vlastne je: prvočíselný rozklad čísla 60 je $2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Najskôr skúsime vyriešiť jednoduchšiu úlohu, možno si niečo užitočné všimneme. Nájdime každú mocninu prvočísla, ktorá má 41 deliteľov a je deliteľná 41. Jediné prvočíslo, ktoré prichádza do úvahy, je 41, ináč by jeho mocnina nebola deliteľná 41. Takže skúsme číslo tvaru 41^k. Jeho deliteľmi sú čísla $1, 41, 41^2, \ldots, 41^k$ a ako si ľahko spočítame, je ich $k+1$. My potrebujeme, aby ich bolo 41, takže k bude 40 a hľadané číslo bude 41^{40}.

Teraz sa pozrieme na čísla, ktoré sú deliteľné aj čímsi iným ako 41-kou a vyhovujú zadaniu.

Máme číslo n deliteľné 41, takže sa dá napísať v tvare $n = 41^a \cdot b$, kde b už nie je deliteľné 41. Skúsme zistiť počet deliteľov v konkrétnom prípade. Majme $41^2 \cdot b$, kde b bude $3^2 \cdot 7$. Ako vyzerajú delitele nášho čísla? V prvom rade je deliteľom čísla n každý deliteľ čísla b a potom 41-násobky a 41^2-násobky deliteľov čísla b. Všetky delitele sú vypísané v nasledujúcej tabuľke.

$$\begin{array}{rrrrrr}
1, & 3, & 7, & 3\cdot 3, & 3\cdot 7, & 3^2\cdot 7\\
41\cdot 1, & 41\cdot 3, & 41\cdot 7, & 41\cdot 3\cdot 3, & 41\cdot 3\cdot 7, & 41\cdot 3^2\cdot 7\\
41^2\cdot 1, & 41^2\cdot 3, & 41^2\cdot 7, & 41^2\cdot 3\cdot 3, & 41^2\cdot 3\cdot 7, & 41^2\cdot 3^2\cdot 7
\end{array}$$

Každý deliteľ čísla n je v tabuľke aspoň raz. Čísla v riadku sú vždy rôzne. A čísla z rôznych riadkov tiež nemôžu byť rovnaké, lebo sú vždy násobkom inej mocniny čísla 41 (využili sme, že b nie je deliteľné 41). Takže každý deliteľ je v tabuľke jediný raz.

Celkový počet deliteľov je počet deliteľov čísla b (teda počet čísel v jednom riadku) krát počet rôznych mocnín čísla 41 (počet riadkov); v príklade uvedenom hore je to $6 \cdot 3 = 18$.

Vráťme sa k všeobecnému prípadu $n = 41^a \cdot b$. Nech $b > 1$, takže b má aspoň dvoch deliteľov (jednotku a samo seba).

Tu ale nastáva problém. Číslo a by malo byť aspoň 1, lebo n má byť deliteľné 41. Ale tiež by malo byť menej ako 40. Keby bolo aspoň 40, tak číslo n by malo aspoň 42 deliteľov, konkrétne $41^0, 41^2, \ldots, 41^{40}$ a aj b, lebo je to deliteľ n a nenachádza sa medzi už vymenovanými (prečo?).

Počet riadkov v tabuľke, ktorú by sme získali vypísaním všetkých deliteľov čísla n ako v príklade hore, je rovný $a+1$. Teda bude medzi 2 a 40. Potom celkový počet deliteľov bude násobkom tohto čísla. Ale 41 je prvočíslo, nemôže byť násobkom ničoho iného ako jednotky a seba samého. Takže číslo tvaru $41^a \cdot b$ môže vyhovovať len v prípade $b = 1$. Ten sme už preskúmali v úvode. Jediným riešením je $n = 41^{40}$.

Úloha č. 2: *Štvorec so stranou n vyfarbíme tak, že ho rozdelíme na n^2 jednotkových štvorčekov a každý z týchto štvorčekov vyfarbíme práve jednou z farieb červená, zelená alebo modrá. Nájdite najmenšie n také, že pri ľubovoľnom zafarbení štvorca so stranou n vieme nájsť riadok alebo stĺpec obsahujúci aspoň tri štvorčeky rovnakej farby.*

Riešenie: (opravovala Zuzka)

V tejto úlohe sa zaoberáme štvorcami, ktoré nijako nie je možné ofarbiť tak, aby v žiadnom riadku ani stĺpci neboli tri štvorčeky rovnakej farby. (Presnejšie, hľadáme najmenší taký štvorec.) Nuž, vyzerá to, že keď začíname od štvorca 1×1, vieme ho takto ofarbiť, rovnako aj štvorec 2×2… takto pokračujeme, kým nepríde… zázračný zlom! Odrazu sa objaví štvorec, pre ktorý to už nejde. Ako ho ale nájsť? Nuž, pozrime sa na to z tejto stránky. Predstavme si štvorec, ktorý sa dá ofarbiť tak, že v žiadnom jeho riadku ani stĺpci nie sú tri štvorčeky rovnakej farby a pokúsme sa o ňom čosi zistiť. Vieme, že k dispozícii máme tri farby. Ak v žiadnom riadku ani stĺpci nie sú tri štvorčeky rovnakej farby, znamená to, že sú tam z každej farby najviac dva štvorčeky. To znamená, že strana takéhoto štvorca môže byť najviac 6. Pre štvorec so stranou dĺžky 7 už teda musíme mať v riadku aspoň tri štvorčeky rovnakej farby. Toto pomerne jednoduché pozorovanie sa pre všeobecnejšie prípady zvykne nazývať Dirichletov princíp.

Fajn. Už sme ukázali, že pre $n = 7$ sa nám nikdy nepodarí ofarbiť štvorec tak, aby v žiadnom riadku alebo stĺpci neboli tri políčka rovnakej farby. Vytvorili sme si tak hypotézu: Žeby to naše hľadané n bola práve sedmička? Na to, aby sme to mohli smelo vyhlásiť, potrebujeme ešte ukázať, že je to skutočne to najmenšie n s danou vlastnosťou. A to znamená ukázať, že všetky menšie prirodzené čísla túto vlastnosť nemajú. Takže náš nový cieľ je pre $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nájsť nejaké ofarbenie, pri ktorom v žiadnom riadku ani stĺpci nemáme tri políčka rovnakej farby. Ak také nájdeme, neplatí, že pre *ľubovoľné* ofarbenie máme vždy v nejakom riadku alebo stĺpci tri štvorčeky rovnakej farby, čo je presne to, čo chceme. To je už jednoduchá úloha, aha:

Č	Č	Z	Z	M	M
Č	Č	Z	Z	M	M
Z	Z	M	M	Č	Č
Z	Z	M	M	Č	Č
M	M	Č	Č	Z	Z
M	M	Č	Č	Z	Z

Pre $n = 6$ sme našli vhodné ofarbenie. Pre všetky menšie n nám potom stačí „vyseknúť" z tohto štvorca menší štvorec s rozmermi $n \times n$ a máme vhodné ofarbenie aj preň.
Tým sme teda ukázali, že pre všetky n menšie ako 7 vieme nájsť také ofarbenie, že v žiadnom riadku ani stĺpci nie sú tri políčka rovnakej farby a zároveň, že pre $n = 7$ takéto ofarbenie nenájdeme, čo by sme sa aj potrhali. Hľadané n je teda skutočne $n = 7$.

Úloha č. 3: *Ajka a Bebe hrajú kartovú hru s balíčkom 32 kariet. Začína Ajka, potom sa hráči na ťahu striedajú. V jednom ťahu môže hráč z balíčka zobrať jednu kartu alebo prvočíselný počet kariet. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ťah. Ktorý z hráčov má v tejto hre víťaznú stratégiu? Popíšte ju.*
Poznámka: Víťazná stratégia pre hráča je popis, ako má tento hráč ťahať tak, aby určite vždy vyhral bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper. Samozrejme, takáto stratégia môže závisieť od súperových ťahov. Zvyčajne ťahy víťaznej stratégie popisujeme spôsobom „ak súper potiahne sem, potom urobím takýto ťah, inak. . . ".
Riešenie: (opravovala Zuska)

Načrtneme si dva možné postupy, ktoré vedú k riešeniu tejto úlohy. Keďže hráči môžu zobrať aj jednu kartu, vyhráva ten, kto nenechá na kope ani jednu kartu. Okrem toho môže v hre nastať 32 situácií, podľa toho, koľko kariet ostalo na kope. Pokúsme sa o čo najviac situáciách rozhodnúť, či sú *vyhrávajúce* (hráč, ktorý je v takejto situácii na ťahu, určite dokáže vyhrať) alebo *prehrávajúce* (hráč, ktorý je v takejto situácii na ťahu, nemôže vyhrať, ak súper nie je úplné trdlo). To, čo zistíme, zaznačíme do prvej tabuľky.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	V	V	V	P	V		V			
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
V		V				V				
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	V						V		V	

Všetky situácie, v ktorých je na kope prvočíselný počet kariet alebo jedna karta (aby sme sa toľko nenapísali, dohodnime sa, že budeme ďalej aj jednotku rátať k prvočíslam), sú určite *vyhrávajúce*, pretože hráč môže zobrať všetky karty a vyhral. Naopak, situácia 4, čiže situácia, v ktorej na kope ostali štyri karty, je iste *prehrávajúca*. Hráč nemôže vziať všetky štyri karty, no nech vezme hocijaký iný počet, ktorý môže (1, 2 alebo 3 karty), ostane na kope prvočíselný počet kariet, a teda protihráč je vo *vyhrávajúcej* pozícii.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	V	V	V	P	V	V	V		V	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
V		V		V		V		V		V
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	V				V		V		V	

To však znamená, že ak vieme protihráča donútiť ťahať z kopy štyroch kariet, vyhrali sme. Za vyhrávajúce teda môžeme označiť všetky pozície, z ktorých keď potiahneme prvočíselný počet kariet, ostanú štyri karty.

Najmenšia neoznačená situácia je 8. Z nej vieme potiahnuť 1, 2, 3, 5 alebo 7 kariet, teda len na *vyhrávajúce* pozície, z čoho vyplýva, že 8 je *prehrávajúca* pozícia. Takýmto spôsobom môžeme pokračovať, až kým nevyplníme celú tabuľku.
Vidíme, že 32 je *prehrávajúca* pozícia, teda ak bude druhý hráč Bebe hrať poriadne a vždy potiahne na *vyhrávajúcu* pozíciu (čo sa určite dá, vzhľadom na to, ako sme vytvorili tabuľku), určite vyhrá.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	V	V	V	P	V	V	V	P	V	V
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
V	P	V	V	V	P	V	V	V	P	V
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
V	V	P	V	V	V	P	V	V	V	P

Iné riešenie:
Druhý postup je vlastne zjednodušením toho prvého, navyše pomocou neho vymyslíme pre Bebeho oveľa jednoduchšiu stratégiu. Pozrime sa na vyššie vyplnenú tabuľku. Nie je podozrivé, že *prehrávajúce* sú práve situácie s počtom kariet deliteľným číslom štyri? Keďže štyri nie je prvočíslo, nemôžeme z 32 (ani žiadneho iného počtu deliteľného štyrmi) odobrať toľko kariet, aby sme dostali číslo deliteľné štyrmi. Po Ajkinom prvom ťahu je teda na stole počet kariet, ktorý po delení 4 dáva zvyšok jeden, dva alebo tri. Bebe však môže potiahnuť jednu, dve alebo tri karty tak, aby Ajke na kope ostal opäť počet kariet deliteľný 4. Ak bude Bebe takto ťahať stále, Ajke sa nikdy nepodarí potiahnuť tak, aby na kope ostal počet kariet deliteľný 4, teda ani 0. Keďže počet kariet na kope sa stále znižuje, skôr alebo neskôr po Bebeho ťahu na kope neostane žiadna karta. Ak bude Bebe vždy ťahať tak, aby po jeho ťahu ostal na kope počet kariet deliteľný 4, určite vyhrá.

Komentár: Ako vidíte, úloha sa dala vyriešiť celkom jednoducho, stačilo si uvedomiť niekoľko logických súvislostí. Napriek tomu ju drvivá väčšina z vás riešila prácnym vypisovaním. Ak ste na nič nezabudli, máte to za 9 bodov. Nabudúce ale vyskúšajte nad úlohou najprv trochu popremýšľať. Ušetríte si kopu práce, najmä ak bude v balíku pre zmenu 3200 kariet.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Máme nejaké podmnožiny množiny $M = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Vieme o nich, že žiadne dve z nich nemajú rovnaký počet prvkov a žiadna z nich nie je podmnožinou inej. Koľko najviac takých podmnožín môžeme mať?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Zuzk:a) a Rasťo)

Množina M má dvanásť prvkov, a preto jej podmnožiny majú najmenej nula a najviac dvanásť prvkov. Vyberáme takú kombináciu podmnožín, aby každá z nich mala rôzny počet prvkov, a preto ich môžeme dostať najviac trinásť. Výsledkom je teda číslo n medzi nula a trinásť. Skupinu podmnožín množiny M budeme nazývať *dobrou*, ak spĺňajú podmienku zo zadania. Na vyriešenie úlohy by sme potrebovali nájsť n dobrých podmnožín a ukázať, že viac sa nedá dosiahnuť. Jednoduchým vyskúšaním vieme vytvoriť napríklad takéto 3 podmnožiny: $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Takže n bude aspoň 3.

Teraz začneme znižovať hornú hranicu. Jediná 0-prvková podmnožina je prázdna. Prázdna množina je podmožinou ľubovoľnej množiny, a preto by sme spoločne s ňou už nemohli vybrať žiadnu inú podmnožinu. Ak chceme dosiahnuť n viac ako jedna, tak nemôžeme mať vo výbere prázdnu množinu. Podobne je to s 12-prvkovou podmnožinou. Tá je tiež jediná a je rovná M. Preto ľubovoľná ďalšia vybratá podmnožina je jej podmnožinou. Preto v tomto momente už vieme, že n je najviac 11.

Skúsime nájsť jedenásť dobrých podmnožín. Musia mať rôzne veľkosti a nemôžu mať nula a ani dvanásť prvkov. Máme preto práve jednu podmnožinu pre každú z veľkostí od jedna po jedenásť. Nech jednoprvková podmnožina obsahuje číslo x. Potom jedenásťprvková musí obsahovať všetky ostatné čísla, lebo to nemôže byť jej nadmnožina. Keď však chceme vytvoriť ďalšiu podmnožinu, tak do nej nemôžeme dať x, lebo by tá jedno-prvková bola jej podmnožinou. Keď do nej nedáme x, tak potom je podmnožinou tej jedenásťprvkovej. Preto, ak by sme mali v našom výbere jedno a aj jedenásť prvkovú podmožinu, tak k nim už nevieme vybrať ďalšie. Z toho dostávame, že n je najviac desať.

Pre počet 10 by sme sa márne snažili dokázať, že to nejde. Dá sa totiž vybrať napríklad nasledujúcich 10 podmnožín.

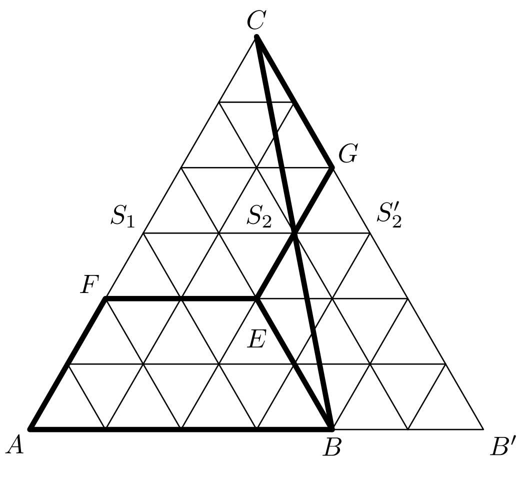
$$M_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$$
$$M_2 = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$$
$$M_3 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12\}$$
$$M_4 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12\}$$
$$M_5 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 11,\ 12\}$$
$$M_6 = \{2,\ 3,\ 6,\ 8,\ 11,\ 12\}$$
$$M_7 = \{2,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12\}$$
$$M_8 = \{2,\ 9,\ 11,\ 12\}$$
$$M_9 = \{2,\ 10,\ 12\}$$
$$M_{10} = \{1,\ 12\}$$

Našli sme desať podmnožín spĺňajúcich podmienky a ukázali sme, že ich viac ako 10 nevieme nájsť. Tým je naša úloha vyriešená.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Uhol pri vrchole A trojuholníka ABC má 60 stupňov, jeho strana AB má dĺžku 4 cm a strana AC má dĺžku 6 cm. Rozrežte tento trojuholník na tri časti tak, aby sa z nich dal bezo zvyšku a bez prekrývania zložiť pravidelný šesťuholník.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Lenka a Katka)

Máme trojuholník rozdeliť tak, aby sme z neho vedeli dostať nejaký útvar. Čo keby sme najprv rozdelili tento trojuholník na nejaké malinké časti? Vedeli by sme potom nejako pomocou týchto malinkých častí poskladať šesťuholník? Skúsme.



Náš trojuholník však nie je nijako pravidelný (nie je rovnostranný a zrejme ani rovnoramenný). A z nejakých malých nepravidelných častí by sa nám asi ťažko skladal pravidelný šesťuholník. Ten má vnútorné uhly veľkosti 120 stupňov. Uhol pri vrchole A je 60 stupňov. Tak by sme nejako mohli nakresliť malé rovnostranné trojuholníky. Priložením dvoch rovnostrannýh trojuholníkov totiž vieme „vyrobiť“ 120 stupňov. Ak by sme si nakreslili sieť rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1 cm, dal by sa tam celkom pekne napasovať náš trojuholník ABC (viď obrázok) a možno aj náš budúci šesťuholník.

Keď sa lepšie pozrieme na obrázok, zistíme, že trojuholník ABC je tiež súčasťou nejakého rovnostranného trojuholníka (trojuholník $AB'C$). Nech S_1 je stred úsečky AC, S_2 stred BC a S_2' stred $B'C$. (Na obrázku sú označené ešte body E a F. Tie použijeme v neskorších úvahách.) Z obrázka sa dá odpozorovať niekoľko skutočností.

Bod B je v dvoch tretinách strany AB'.

Úsečka S_1S_2' je stredná priečka trojuholníka $AB'C$. Preto je trojuholník $S_1S_2'C$ podobný s trojuholníkom $AB'C$. Rovnako aj trojuholník S_1S_2C je podobný s trojuholníkom ABC. Preto S_2 je tiež v dvoch tretinách strany S_1S_2'. Takže CB sa pretne s S_1S_2' v mrežovom bode S_2.

Trojuholník S_2EB je zhodný s trojuholníkom S_2GC.

Ak by sme preložili trojuholník S_2EB na miesto trojuholníka S_2GC, vznikli by nám zrazu dva rovnaké lichobežníky $ABEF$ a $FEGC$. Oba s tromi stranami dĺžky 2 cm a jednou základňou dĺžky 4 cm. Ak priložíme lichobežníky $ABEF$ a $FEGC$ k sebe dlhšími základňami, dostaneme pravidelný šesťuholník.
Ak sa pozrieme ešte raz pozorne, tak sme prekladali iba tri časti trojuholníka ABC. Boli to $ABEF$, trojuholník S_2EB a štvoruholník FES_2C. Toto sme chceli – z troch častí trojuholníka ABC zložiť šesťuholník.

Úloha č. 6: *V rovine máme danú úsečku AB a tiež máme zadanú dĺžku h. Uvažujme všetky možné body C také, že v trojuholníku ABC bude mať výška na stranu AB veľkosť h. Pre ktorý z týchto bodov C je súčin veľkostí výšok trojuholníka ABC najväčší?*

Riešenie: (opravovali Ondáč, Kačička, Drak)
Ďalšia geometria za nami. Niektorí ste si s ňou poradili lepšie, iní sa zas zamotali v kope výpočtov, či v nepresných úvahách, za ktoré si veľa bodov nevyslúžili. Hneď však uvidíte, že to vôbec nebolo také ťažké.
V trojuholníku ABC máme danú dĺžku strany AB označenú c a aj výšku na túto stranu, ktorej veľkosť je h. Poznáme stranu a výšku, preto vieme vypočítať obsah S trojuholníka ABC; $S = ch/2$. Obsah S je tým pádom rovnaký pre všetky možné trojuholníky ABC. Ďalej si predstavme, že už máme nakreslené body A a B. Bod C bude ležať na priamke p rovnobežnej s AB, ktorej vzdialenosť od AB je h. A čo to máme vlastne zistiť? Kedy je súčin výšok čo najväčší? Označme si v_a a v_b veľkosti výšok na strany a a b. Súčin výšok hv_av_b je najmenší vtedy, keď je najmenšie v_av_b (lebo h sa nemení).
Teraz už nič očividné nevidíme a tak je čas, aby sme vytiahli všetky možné vzorčeky a skúsili výraz v_av_b upraviť na niečo, čo by nám v tejto situácii viacej pomohlo. Keď sme tu už mali ten obsah, skúsme to s ním znovu. Plocha S sa dá vyjadriť aj ako $S = av_a/2$ alebo $S = bv_b/2$. Ak si z týchto vzťahov vyjadríme výšky, dostávame $v_a = 2S/a$ a $v_b = 2S/b$. Pre súčin výšok platí $v_av_b = S^2/4ab$. Keďže $S^2/4$ je pre všetky trojuholníky ABC rovnaké, je zrejmé, že čím väčší je súčin v_av_b, tým menší je súčin ab a naopak. Teda namiesto hľadania najväčšieho v_av_b stačí hľadať najmenší súčin ab. Možno sme si veľmi nepomohli, ale súčin strán sa predstavuje jednoduchšie ako súčin výšok.
To, že sa obsah nemení, sa už ukázalo ako užitočné, tak čo by sme to nepoužili znovu. Stačí si spomenúť na ďalšiu možnosť, ako ho vyjadriť. Označme γ uhol strán a a b. Platí $S = (ab \sin\gamma)/2$, čiže $ab = 2S/\sin\gamma$. Všimnime si, že zase tu máme nejakú nepriamu úmeru. Čím menšie je ab, tým väčší je $\sin\gamma$ a naopak. Teda ab je minimálne práve vtedy, keď $\sin\gamma$ je maximálny. Namiesto najmenšieho súčinu výšok nám stačí nájsť taký bod C, aby bol $\sin\gamma$ čo najväčší. Ak nič iné, aspoň sme sa zbavili súčinu. Ako vyzerá funkcia $\sin x$? Samozrejme zaujíma nás len pre x, ktoré môžu byť uhlami trojuholníka, teda $x \in (0, \pi)$. Z grafu ľahko vyčítame, že na intervale $(0, \pi/2\rangle$ rastie od 0 ku 1, čo je maximum, a na intervale $\langle\pi/2, \pi)$ klesá naspäť na nulu.
Môže sa nám stať, že existuje taký bod C, pre ktorý $\gamma = |\sphericalangle ABC| = \pi/2$, teda trojuholník ABC by bol pravouhlý s pravým uhlom pri C. Vtedy C leží na Tálesovej kružnici nad polomerom AB. Toto môže nastať len vtedy, ak $h \le c/2$, lebo len vtedy má p prienik s tou kružnicou. (Premyslite si to.) Potom máme maximálny $\sin\gamma = 1$ a teda aj maximálny súčin výšok.
Zostal nám prípad keď $h > c/2$. Vtedy p leží úplne mimo Tálesovej kružnice nad AB a teda všetky možné uhly γ sú menšie ako $\pi/2$. Vieme už, že $\sin x$ je na intervale $(0, \pi/2\rangle$ rastúca. Aby bol najväčší $\sin\gamma$, musí byť čo najväčší uhol γ (v tomto prípade je uhol γ ostrý, premyslite si dôvod). Po nakreslení mnohí z vás usúdia, že to bude vtedy, keď trojuholník ABC bude rovnoramenný. Naozaj to tak je a zdôvodnenie je jednoduché. Označme si C_0 ten z bodov na priamke p, ktorý leží aj na osi AB, teda trojuholník ABC_0 je rovnoramenný. Nech k je kružnica opísaná trojuholníku ABC_0. Sami sa presvedčte, že táto kružnica sa dotýka priamky p. Pre každý bod D z dlhšieho oblúka AB kružnice k platí, že $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AC_0B| = \gamma$ (obvodové uhly). A pre každý bod C, čo leží mimo kruhu ohraničeného k v polrovine ABC_0, platí $|\sphericalangle ACB| < |\sphericalangle AC_0B|$.[1] Keďže všetky body priamky p okrem C_0 sú mimo spomínaného kruhu, bod C_0 má najväčší uhol γ a to je to, čo sme chceli.
Odpoveď je teda jednoduchá, pre $h \le c/2$ je hľadaný trojuholník pravouhlý s pravým uhlom pri C a inak je rovnoramenný so základňou AB.

Iné riešenie:
Dalo sa postupovať aj pomocou veľkosti polomeru opísanej kružnice. Vieme, že platí

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{abc}{4R},$$

kde R je polomer opísanej kružnice. Využitím prvých troch rovností dostávame $hv_av_b = 8S^3/abc$. Do toho dosadíme abc z poslednej rovnosti a máme $hv_av_b = 2S^2/R = h^2c^2/2R$. Teda veľkosť súčinu výšok závisí len od R, lebo h a c sú konštanty. Keď sa snažíme dostať minimálne R, dospejeme k rovnakému výsledku.

Komentár: Tento príklad bol ťažký akurát v tom, že vyšli dva rôzne prípady. Na tom si vylámal zuby nejeden z tých, ktorí riešili analyticky. Našli sa aj veľmi pekné riešenia podobné či rovnaké ako vzorové riešenie. Tí, ktorí sa exaktne nedopracovali k nejakému výsledku, sa nás snažili presvedčiť o ich pravde, no práve oni si väčšinou vybrali len jeden z tých prípadov (pravouhlý či rovnoramenný) a druhý ani nespomenuli. Máme ešte jednu malú radu do života – keď už máte riešenie a vidíte, že je správne, nemusíte písať dve strany o tom, ako ste na to prišli a podobne. Stačí to, čo je nutné. Na druhej strane, ak rátate analyticky, skúste písať všetky úpravy, nech je pre nás vedúcich ľahšie nájsť vám chybu alebo riešenie odfajknúť a dať vám 9 bodov.

[1] Dôkaz tohto známeho faktu je vo vašich silách. Ako to súvisí s obvodovými uhlami? A čo vieme povedať o vnútorných bodoch kruhu ohraničeného kružnicou k?

<u>**Úloha č. 7:**</u> *Predstavme si nekonečnú štvorčekovú sieť. Do každého štvorčeka vpíšeme jedno z čísel* 1, 2, 3, 4. *Toto číslo bude udávať počet rôznych čísel vpísaných do susedných štvorčekov. (Štvorčeky sú susedné práve vtedy, ak majú spoločnú stranu.) Napríklad okolo štvorčeka, v ktorom je napísané číslo* 1, *musia byť všetky štyri čísla rovnaké. Zistite, či sa dá naša štvorčeková sieť vyplniť tak, aby sme každé z čísel* 1, 2, 3, 4 *použili aspoň raz.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ivka a Kenny)

Po chvíli vpisovania čísel do štvorčekovej siete môžeme nadobudnúť presvedčenie, že sa asi podľa zadania vyplniť nedá. Skúsime preto úlohu vyriešiť sporom – budeme predpokladať, že existuje riešenie (vyplnenie nekonečnej siete podľa zadania) a ukážeme, že niekde nastáva spor. Tým ukážeme, že neexistuje žiadne vyplnenie siete tak, aby sme každé z čísel použili aspoň raz.

	1	2	3	4	5
A		4			
B	4	1	4		
C		4			
D		4			
E					

Máme vyplnenú štvorčekovú sieť. Nájdeme si v nej nejakú štvorku. Zo zadania vieme, že pri štvorke je určite aj jednotka. Navyše okolo jednotky sú všetky čísla rovnaké, máme teda jednotku a okolo nej štvorky, ako na obrázku. Štvorka susediaca so štvorkou na políčku C2 musí byť na políčku D2, pretože ak by bola na C1 alebo C3, susedila by s dvoma štvorkami, čo by bol spor s tým, že štvorka má susediť so štyrmi rôznymi číslami.

	1	2	3	4	5
A		4			4
B	4	1	4	4	1
C		4	3		4
D		4			4
E	4	1	4	4	4

Podobnou úvahou zistíme, že jednotka susediaca s políčkom D2 musí byť na políčku E2. Keď to takto pekne budeme „rozširovať“, prídeme až k tomu, že naša sieť musí obsahovať „mriežku“ z jednotiek a štvoriek. Časť z nej máme na obrázku vedľa. Ďalej vieme, že každé číslo treba použiť aspoň raz. Preto niekde musíme mať číslo 3. Nech je na políčku C3 (mriežka je symetrická, tak je to vlastne jedno). Čo môže byť na políčku C4? Ani jednotka ani štvorka to byť nemôže, pretože štvorka na B4 už susedí aj s jednotkou aj so štvorkou. Ak by tam bola dvojka, na D4 musí nutne byť trojka. Potom ale políčko D3 susedí s dvomi rôznymi číslami, čo nás núti dať na toto políčko dvojku. Trojka na C3 potrebuje susediť s tromi rôznymi číslami, no susedí len s dvomi, čo je hľadaný spor. Teda na C4 nemôže byť dvojka, bude tam trojka. Na políčku D3 musí byť dvojka (aby trojka na C3 susedila s tromi rôznymi číslami), potom na D4 musí byť trojka. (Kvôli dvojke na D3.) Teraz už máme spor, pretože trojka na C4 susedí len s dvomi rôznymi číslami. Štvorčeková sieť sa nedá vyplniť podľa zadania.

<u>Komentár:</u> Väčšina z vás úlohu vyriešila dobre, mnohí ale zabudli odôvodniť, prečo v štvorčekoch 2×2, ktoré nám ostali po vyplnení mriežky zo štvoriek a jednotiek, nemôže byť už žiadna jednotka alebo štvorka. Je to síce ľahké, no napísať to treba.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Každý bod trojrozmerného priestoru je zafarbený jednou z piatich farieb. Každá farba je použitá na zafarbenie aspoň jedného bodu. Dokážte, že existujú štyri body navzájom rôznej farby ležiace v jednej rovine.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Peťo G.)

Skúsme tvrdenie z úlohy dokázať sporom. Predpokladajme, že v celom priestore zafarbenom podľa zadania neexistuje žiadna štvorica rôznofarebných bodov ležiacich v jednej rovine. Poďme sa pozrieť, ako tento náš zafarbený priestor vyzerá a odvodiť niektoré zákonitosti, ktoré v ňom musia platiť.

Zadanie nám garantuje, že každou farbou je zafarbený aspoň jeden bod priestoru. Označme si teda farby číslami 1 až 5 a nech A_1 až A_5 sú nejaké body zafarbené postupne týmito farbami, každý tou, ktorej číslo nesie v názve. Z nášho predpokladu v úvode vyplýva, že každá rovina obsahuje body najviac troch rôznych farieb, teda napríklad rovina určená bodmi $A_1A_2A_3$ obsahuje len body farby 1, 2 alebo 3.

Pozrime sa teraz na ľubovoľnú priamku p v našom priestore. Ak by obsahovala tri rôzne zafarbené body, stačilo by k nim pridať ľubovoľný bod priestoru, ktorý je inej farby a tieto štyri rôznofarebné body by určite ležali v jednej rovine (obsahujúcej priamku p). Preto každá priamka môže obsahovať najviac dve rôzne farby. Napríklad priamka A_4A_5 obsahuje iba farby 4 a 5. To znamená, že priamka A_4A_5 nemôže mať žiaden priesečník s rovinou $A_1A_2A_3$, pretože by sme ho nemali ako zafarbiť. Musí byť teda s touto rovinou rovnobežná.

Keďže by sme radi došli k nejakému sporu, potrebujeme preskúmať vlastnosti objektov, na ktoré sa vzťahuje čo najviac z nami odvodených pravidiel. Potom stačí dúfať, že nebude možné splniť všetky naraz a vytúžený spor je na svete. Pozrime sa teda na kolmý priemet priamky A_4A_5 do roviny $A_1A_2A_3$.[2] Označme si túto priamku q. Keďže leží v rovine $A_1A_2A_3$, zjavne obsahuje iba body farieb 1, 2 a 3. Priamky q a A_4A_5 sú však rovnobežné, preto určujú rovinu. Ak chceme, aby táto rovina obsahovala najviac tri farby, môže priamka q obsahovať najviac jednu z farieb 1, 2, 3, priamka A_4A_5 totiž zjavne obsahuje farby 4 aj 5. Preto priamka q musí byť jednofarebná. Keďže farby 1, 2 a 3 sú zatiaľ v našich úvahách rovnocenné, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že q má farbu 1.

Teraz to už stačí len doklepnúť. Priamka q sa nemôže pretínať s priamkou A_2A_3, pretože tá neobsahuje žiaden bod farby 1. Obe tieto priamky ležia v rovine $A_1A_2A_3$, musia teda byť rovnobežné. Preto aj priamka A_2A_3 je rovnobežná s priamkou A_4A_5. To však znamená, že tieto dve priamky ležia v jednej rovine. Táto rovina potom obsahuje štyri rôznofarebné body A_2, A_3, A_4 a A_5, čo je hľadaný spor.

<u>Iné riešenie:</u>

Podľa Katky Turekovej. Uvažujme 10 priamok, ktoré dostaneme pospájaním každej dvojice bodov z množiny $\{A_1, \dots, A_5\}$. Nech ϱ je rovina, ktorá všetky tieto priamky pretína. (Rozmyslite si, prečo taká existuje.) Ak ϱ obsahuje najviac tri farby, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sú to farby 1, 2 a 3. Potom však

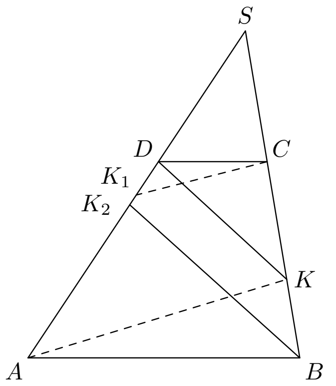
[2] Skúste si premyslieť, že by nám stačila ľubovoľná priamka v rovine $A_1A_2A_3$ rovnobežná s A_4A_5.

nemáme ako zafarbiť priesečník ϱ a priamky A_4A_5, pretože ako vieme z prvého riešenia, každá priamka je najviac dvojfarebná. Tým pádom sme našli spor a môžeme ísť na zmrzlinu.

Iné riešenie:
Due to Maja Alif. To make our considerations clearer, let us call the colours "purple", "creamy", "strawberry red", "chocolate brown" and "deepsky blue". The rest of the solution is similar to the previous ones. :)

Úloha č. 9: *Je daný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Vnútri strany BC leží bod K. Z bodov C, B zostrojme rovnobežky s priamkami KA, KD (v tomto poradí). Dokážte, že sa tieto rovnobežky pretnú na priamke AD.*

Riešenie: (opravoval Bus)



Dostal som skvelý nápad – prečítam si riešenia, ktoré ste poslali, vyberiem z nich to najkrajšie a to sem pekne opíšem. Ale čuduj sa svete, po prvom prelistovaní som nenašiel ani jedno pekné riešenie, všade sa to hemžilo zlomkami a rovnicami. Nakoniec som si však všimol jedno nenápadné zahraničné riešenie od *Maje Alif*, našej momentálne jedinej slovinskej riešiteľky, ktoré bolo ako-tak stručné, tak ho tu teda odprezentujem.
Zostrojené rovnobežky s priamkami KA a KD určite niekde pretnú priamku AD – nech je to v bodoch K_1 a K_2. Stačí dokázať, že body K_1 a K_2 sú totožné. (Toto si premyslite, často sa takáto alebo podobná úvaha využíva v dôkazoch.)
Zo zadania vieme, že strana AB je dlhšia ako strana CD, preto sa priamky BC a AD pretínajú niekde „za“ stranou CD. Označme si ich priesečník S a všimnime si niekoľko dvojíc podobných trojuholníkov: $SDC \sim SAB$, $SK_1C \sim SAK$, $SDK \sim SK_2B$. Z týchto podobností vyplývajú rovnosti pomerov

$$\frac{|SD|}{|SA|} = \frac{|SC|}{|SB|}, \quad \frac{|SK_1|}{|SA|} = \frac{|SC|}{|SK|}, \quad \frac{|SD|}{|SK_2|} = \frac{|SK|}{|SB|}. \tag{1}$$

Aby ste nemuseli príliš premýšľať, nasledujúci výpočet rozpíšem pekne krok za krokom.

$$\frac{|SK_1|}{|SK_2|} = \frac{|SK_1|}{|SA|}\frac{|SA|}{|SK_2|} = \frac{|SC|}{|SK|}\frac{|SA|}{|SK_2|} = \frac{|SC|}{|SB|}\frac{|SB|}{|SK|}\frac{|SA|}{|SK_2|} = \frac{|SD|}{|SA|}\frac{|SB|}{|SK|}\frac{|SA|}{|SK_2|} = \frac{|SD|}{|SK_2|}\frac{|SB|}{|SK|} = \frac{|SK|}{|SB|}\frac{|SB|}{|SK|} = 1$$

To znamená, že $|SK_1| = |SK_2|$. Keďže body K_1 a K_2 ležia na tej istej polpriamke určenej bodom S, sú totožné. Dôkaz je hotový.
Asi je vám jasné, že ten posledný uvedený výpočet je výsledkom dlhšie trvajúcej snahy a niekoľkých možno neúspešných pokusov o využívanie vzťahov (1). Vyzerá trocha umelo, dá sa však ľahko skontrolovať. Skúste si pred odoslaním prečítať vaše vlastné riešenia a odstrániť z nich zbytočné časti, nie však na úkor zrozumiteľnosti a presnosti.

Iné riešenie:
Toto riešenie je len pre drsné povahy, za následky jeho prečítania zodpovedáte sami. Boli ste varovaní.
Položme celú situáciu do komplexnej roviny; nech $O = 0 + 0i$ je priesečník priamok AD a BC (prečo existuje?). Nech L je priesečník rovnobežky s AK prechádzajúcej bodom C. Nech ω_1 je (nenulové) komplexné číslo také, že $K = \omega_1 A$.[3] Potom $C = \omega_1 L$. Nech ω_2 je komplexné číslo také, že $D = \omega_2 K$. Potom $D = \omega_2\omega_1 A$. Zobrazenie zodpovedajúce násobeniu číslom $\omega_1\omega_2$ je teda rovnoľahlosť zobrazujúca bod A do bodu D. Táto rovnoľahlosť zobrazí bod B do bodu C, preto $C = \omega_1\omega_2 B$.
Čo chceme dokázať? Rovnobežnosť priamok KD a BL, teda platnosť vzťahu $L = \omega_2 B$. Toto je ekvivalentné s $\omega_1 L = \omega_1\omega_2 B$. Keďže $\omega_1 L = C$, sme hotoví.

Úloha č. 10: *Čísla $1, 2, \ldots, n$ sú v tomto poradí napísané na obvode kruhu. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla a, b nahradiť číslami $(a+b)/2$, $(a+b)/2$. Je možné dosiahnuť po konečnom počte krokov, aby všetky napísané čísla boli rovnaké?*

Riešenie: (opravoval Škrečok)
(Podľa Tomáša Kocáka.) Vyskúšajme sa najprv pohrať s malými n. Pre $n = 1$ nie je čo riešiť, pre $n = 2$ nám stačí spriemerovať 1 a 2 (v celom riešení budeme pod „spriemerovaním“ čísel a a b rozumieť ich nahradenie číslami $(a + b)/2$, $(a + b)/2$). Pre $n = 3$ nám opäť stačí jedno spriemerovanie čísel 1 a 3 (ich priemer je 2). Pre $n = 4$ sa nám to takisto ľahko podarí – spriemerujeme 2 s 3 a 1 so 4 (susedia v kruhu), čím dostaneme namiesto všetkých čísel 5/2.
Pre vyššie n to už tak ľahko nepôjde a pokiaľ skúšame dosť dlho, asi nám v hlave skrsne nápad, že pre väčšie n to nepôjde vôbec. Ako to ale dokázať… Pri bystrom pohľade na nakreslené kruhy čísel si možno všimnúť, že ak si vezmeme minimálne a maximálne číslo v kruhu (v prípade, že ich je viac, vezmeme ľubovoľné z nich), tak postupnosť čísel od minima k maximu oboma smermi je neklesajúca. Inak povedané, ak ideme od minima k maximu, tak sa

[3]Násobenie komplexným číslom sa dá geometricky interpretovať ako špirálová podobnosť, t. j. zloženie otočenia a rovnoľahlosti s rovnakým stredom.

nestane, aby sme prišli k nižšiemu číslu než bolo to predchádzajúce. Platí to pre postupnosť v smere hodinových ručičiek aj pre postupnosť v smere opačnom.
Skúsme túto odvážnu myšlienku dokázať. Budeme postupovať tak trochu induktívne – na začiatku je postupnosť od minimálneho čísla 1 k maximálnemu n oboma smermi neklesajúca (jedna z postupností má len dva členy). Teraz nám stačí ukázať, že spriemerovanie hocakých dvoch susedných čísel z kruhu nám túto vlastnosť neporuší. Ak chceme spriemerovať dve ľubovoľné čísla $a < b$ rôzne od minima a maxima, tak zrejme je a bližšie k minimu než b (uvedomte si, že priemerovať dve rovnaké čísla nemá zmysel). Označme si ešte ich susedov x, y, pričom

$$x \leq a < b \leq y.$$

Po spriemerovaní z toho dostaneme

$$x < \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} < y,$$

teda naša vlastnosť sa nepokazila. (Predchádzajúce nerovnosti platia kvôli tomu, že $2x \leq 2a < a+b < 2b \leq 2y$.)
Čo sa ale stane, ak je jedno z čísel $a < b$ minimom či maximom? Dokážeme iba jeden prípad, kedy si za a vezmeme minimum. Ostatné prípady (prípad b je maximum a prípad, že a je minimum a zároveň b maximum) sa dokážu podobne, prenechávame to na šikovného čitateľa. Ak teda vezmeme za a minimum a za b jedno jeho susedné číslo, tak druhé susedné číslo z môže byť väčšie ako priemer a a b. Potom po spriemerovaní a ostane minimom, aj keď neostrým, čo však našej vlastnosti neprekáža. V opačnom prípade, ak z nie je väčšie ako priemer a a b, sa z stáva novým minimom a naša vlastnosť – neklesajúcosť od minima k maximu – sa opäť nepokazí. Takže naša odvážna myšlienka bola správna.
Pozrime sa teraz na situáciu odzadu (v takýchto úlohách, kde treba dosiahnuť nejaký stav, je to často veľmi užitočné). Na konci sú všetky čísla rovnaké a sú rovné $(n+1)/2$ (dá sa na to prísť veľmi jednoducho, stačí si všimnúť, že pri priemerovaní sa nemení súčet čísel v kruhu). Jeden ťah pred koncom museli byť *vedľa seba* dve čísla, z ktorých jedno malo hodnotu $(n+1)/2 - k$ a druhé $(n+1)/2 + k$ pre vhodné $k > 0$, aby ich priemer bol $(n+1)/2$. Navyše je $k \neq 0$, aby sme týmto spätným ťahom vyrobili iný stav. Predposledným ťahom sme získali dvojicu rovnakých čísel $(n+1)/2, (n+1)/2$, lebo v kruhu nie sú žiadne iné rovnaké susedné čísla. Preto dva ťahy pred koncom museli existovať dve *susedné čísla*, ktoré mali hodnotu $(n+1)/2 - l$ a $(n+1)/2 + l$ pre vhodné $l > 0$. V kruhu nám navyše ostalo aspoň jedno číslo s hodnotou $(n+1)/2$ vďaka tomu, že $n \geq 5$.
Bez ujmy na všeobecnosti nech je $k \geq l$. Potom je v kruhu (dva ťahy pred koncom) číslo $(n+1)/2 - k$ minimom a $(n+1)/2 + k$ maximom. Keďže sú tieto dve čísla vedľa seba, musia byť vďaka našej dokázanej vlastnosti všetky čísla usporiadané vzostupne od minima k maximu. Musia byť teda v poradí

$$\frac{n+1}{2} - k,\ \frac{n+1}{2} - l,\ \frac{n+1}{2},\ \dots,\ \frac{n+1}{2}, \dots,\ \frac{n+1}{2} + l,\ \frac{n+1}{2} + k.$$

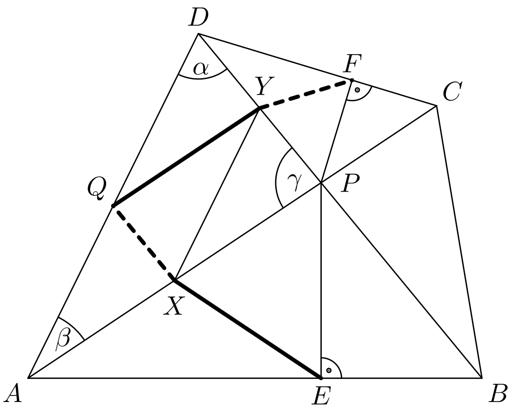
A máme spor, veď čísla $(n+1)/2 - l$ a $(n+1)/2 + l$ by mali byť susedné. Dokázali sme, že pre $n \geq 5$ sa požadovaný stav dosiahnuť nedá. Dobre vidno aj to, prečo nám to pre malé čísla ešte fungovalo.

Iné riešenie:
Ešte náznak iného riešenia pre tých, ktorých to zaujíma. Je o čosi fintovejšie – na začiatku si od všetkých čísel v kruhu odrátame ich priemer, teda $(n+1)/2$. Takže máme kruh s číslami $(-n+1)/2$ až $(n-1)/2$ a naším cieľom je dostať v kruhu samé nuly (keďže $(n+1)/2$ je to, čo sme chceli dostať na konci pred odrátaním). Rozmyslite si, ako sa môže pri priemerovaní meniť počet núl v kruhu a ako sa dá toto riešenie dokončiť.

Komentár: Gratulujem všetkým, ktorým sa podarilo získať viac ako tri body. Nebolo ich bohužiaľ veľa. Čo sa týka nesprávnych riešení, často sa opakovala jedna chyba. Ak rozdelíme čísla 1 až n na polovicu, v jednej polovici je nižší priemer než potrebujeme, v druhej vyšší než potrebujeme. Z toho prehlásime, že potrebujeme urobiť ťah „medzi" týmito polovicami, teda spriemerovať trebárs 1 s n, a že potom to už nejde. Ale čo ak si najprv urobíme nejaké priemery vnútri polovíc a až potom budeme priemerovať „medzi" polovicami? Uvažovali ste teda iba o jednej konkrétnej situácia. (Aj keď sa vám to možno zdalo dostatočne hodnoverné ako všeobecný dôkaz.)

Úloha č. 11: *Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Označme E, F po rade päty kolmíc z bodu P na priamky AB, CD. Dokážte, že os úsečky EF rozpoľuje úsečky BC a DA.*

Riešenie: (opravovala Katka Kvak)
(Podľa Miša Szabadosa.) Pooznačujeme si najprv body a uhly, ktoré budeme pri riešení používať. Body Q, X, Y sú po rade stredmi úsečiek AD, AP a DP a uhly α, β, γ sú vnútornými uhlami trojuholníka DAP pri vrcholoch D, A, P (pozri obrázok).
Zadanie úlohy si trochu pozmeníme. Nebudeme ukazovať, že os úsečky EF rozpoľuje strany AD a BC, ale ekvivalentné tvrdenie, že trojuholník EFQ je rovnoramenný so základňou EF (premyslite si, že týmto vyriešime aj pôvodnú úlohu).
Úsečky XY, QY a QX sú stredné priečky v trojuholníku DAF, preto ho rozdeľujú na štyri zhodné trojuholníky s ním podobné. Z podobnosti týchto trojuholníkov vieme čosi povedať o veľkostiach uhlov, konkrétne sa nám hodí $|\sphericalangle PXQ| = \alpha + \beta = |\sphericalangle PYQ|$.



Pozrime sa teraz na trojuholníky AEP a DFP. Štvoruholník $ABCD$ je tetivový, a preto sú veľkosti uhlov PDF a PAE rovnaké (obvodové uhly nad tetivou BC). Okrem toho uhly PEA a PFD sú pravé, preto trouholníky PAE a PDF sú podobné podľa vety *uu*. Potom však aj trojuholníky PXE a PYF sú podobné, lebo majú rovnaké uhly pri vrchole P a sú rovnoramenné ($|XP| = |XE| = |XA|$ a $|YP| = |YF| = |YD|$). Z tejto podobnosti sa nám zíde, že $|\sphericalangle EXP| = |\sphericalangle PYF|$. Vyplýva z toho, že

$$|\sphericalangle EXQ| = |\sphericalangle PXQ| + |\sphericalangle EXP| = |\sphericalangle PYF| + |\sphericalangle QYP| = |\sphericalangle QYF|.$$

Všimnime si, že z Tálesovej vety a z vlastností stredných priečok $|EX| = |AX| = |QY|$, podobne $|FY| = |DY| = |QX|$. Preto trojuholníky EXQ a QYF sú zhodné podľa vety *sus*. To však znamená, že $|EQ| = |FQ|$. Trojuholník EFQ je rovnoramenný so základňou EF, a preto os úsečky EF prechádza bodom Q. Analogicky sa dá ukázať, že os prechádza aj stredom úsečky BC.

Ešte je vhodné sa zamyslieť, či sme vyriešili úlohu pre všetky možné polohy bodov E a F. Ak by bol uhol ACD (teda aj uhol ABD) tupý, body E a F by ležali mimo úsečiek AB a CD. Pri riešení by sa nám však úvahy a výpočty nezmenili. Ak by bol uhol ACD pravý, postup by sa nám značne zjednodušil, lebo bod E by nám splynul s bodom D a bod F s bodom A (samotný postup v tomto prípade už necháme na vás).

V čom spočíva podstata riešenia? V uvažovaní o stredoch úsečiek AP a DP. Stred úsečky AD sa (aj keď trocha nepriamo) spomína v zadaní, takže nás neprekvapí, že s ním pracujeme. Videli sme, že stred prepony v pravouhlom trojuholníku je zároveň stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku, čo umožňuje ľahko počítať uhly pri ňom. A stredné priečky sú tiež nie na zahodenie. Vidíme, že body X a Y nám nespadli z neba – vopred sa dá tušiť, že na niečo sa môžu hodiť.

<u>Iné riešenie:</u>

Veľmi stručne si načrtneme iný prístup k úlohe. Všimnime si trojuholník APD. Nad jeho stranami máme podobné pravouhlé trojuholníky AEP a DFP. Chceme dokázať, že $|QF| = |QE|$. Bod Q je stredom strany AD, vyskúšajme celú situáciu zobraziť v stredovej súmernosti so stredom Q (takýto trik bežne pomáha, keď máme čosi robiť s ťažnicou QP). Nech P' je obraz bodu P v spomínanej súmernosti. Útvar $APDP'$ je rovnobežník, ktorému sú opísané dva obdĺžniky (trocha ich treba dokresliť, protiľahlými rohmi jedného z nich sú bod F a jeho obraz v súmernosti). Chceme dokázať, že tieto dva obdĺžniky majú rovnako dlhú uhlopriečku (premyslite si, že chceme naozaj toto). Ktorý predpoklad sme ešte nevyužili? Podobnosť trojuholníkov AEP a DFP. Sú pravouhlé, takže ich strany vieme pomocou uhlov vypočítať ľahko. Ostáva technická časť dôkazu: vyjadriť dĺžky uhlopriečok pomocou nejakých základných prvkov určujúcich situáciu a porovnať vyjadrené dĺžky. To prenechávame vám, milí čitatelia.

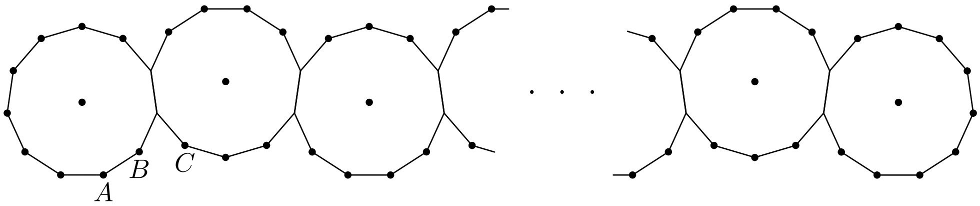
<u>Komentár:</u> Úloha nebola jednoduchá, len málo z vás sa s ňou úspešne popasovalo. Niektorí tušili, akými cestičkami sa vybrať, len sa im to nepodarilo dotiahnuť do konca. Nabudúce vám prajem veľa trpezlivosti a možno aj viac šťastia pri hľadaní spásonosnej myšlienky.

<u>Úloha č. 12:</u> *Rozhodnite, či existuje útvar U, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2, ale nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1. Úlohu riešte pre nasledovné útvary U:*
a) pravouholník,
b) mnohouholník,
c) konvexný mnohouholník.
Poznámka: Za úlohy a) a b) je spolu 7 bodov, za úlohu c) body navyše.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Erika)

a) Našou úlohou je zistiť, či existuje taký pravouholník, ktorý sa dá pokryť 25-timi kruhmi s priemerom 2 cm a nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1 cm. Ukážeme, že neexistuje. Rozdeľme preto obdĺžnik strednými priečkami na štyri zhodné obdĺžniky. Tieto menšie štvoruholníky sú podobné s pôvodným štvoruholníkom s koeficientom 1/2. Vieme, že pôvodný obdĺžnik pokryjeme 25-timi kruhmi s priemerom 2 cm. To znamená, že menšie obdĺžniky vieme pokryť (vďaka podobnosti) 25-timi kruhmi s polovičnými priemermi. Dokopy teda štyri menšie obdĺžniky pokryjeme 100 kruhmi s priemerom 1 cm.

b) Ak ukážeme, že existuje mnohouholník U, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2 cm a je v ňom niekoľko vybraných bodov, ktoré sa nedajú pokryť 100 kruhmi s priemerom 1 cm, tak sme skončili a útvar spĺňajúci podmienky zadania existuje. Vpíšme do kruhu s priemerom 2 cm pravidelný 11-uholník a skúsme zodpovedať otázku, koľko najviac význačných bodov (vrcholov, resp. stredov) tohto 11-uholníka vie pokryť jeden kruh s priemerom 1 cm. Po chvíľke zistíme, že najviac dva (rozmyslite si to). Pospájajme 25 takýchto pravidelných 11-uholníkov tak, ako vidno na obrázku. Kvôli jednoduchosti vezmime za vybrané body, ktoré sa budeme snažiť pokrývať, vyznačené body z obrázka – teda všetky vrcholy a stredy 11-uholníkov bez množiny vrcholov, v ktorých sa susedné 11-uholníky stretávajú. Ľahko zistíme, že vybraných bodov je dokopy 204.



Aj pre takto pospájané 11-uholníky platí, že kruh s priemerom 1 cm pokryje nanajvýš dva vybrané body (dokážte sami, že trojicu bodov A, B, C vyznačených na obrázku kruh s priemerom 1 cm nepokryje). Dokopy máme 204 izolovaných bodov, ktoré sa snažíme pokryť. Každým zo 100 kruhov s priemerom 1 cm vieme pokryť nanajvýš dva body, teda dokopy vieme pokryť najviac 200 bodov. Čiže existuje bod mnohouholníka U, ktorý nie je pokrytý. Útvar U, ktorý sme vytvorili, sa teda dá pokryť 25-timi kruhmi s priemerom 2 cm a nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1 cm.

Komentár: Viacerí ste prišli na to, že stačí zvoliť n-uholník dostatočne „blízky" útvaru V tvorenému 25-timi kruhmi s priemerom 2 cm, ktorých stredy sú kolineárne a susedné kruhy sa dotýkajú. No v tomto prípade sa nestačí odvolať na to, že keďže sa limitný útvar V nedá pokryť, tak sa ani blízky útvar nedá pokryť. Keď sa odvolávate na limity, tak nestačí intuitívna predstava. Limity sú podstatne rozsiahlejšia kapitola matematiky, a pokiaľ sa chcete na ne odvolávať, tak treba použiť silnejší aparát ako intuíciu.[4] V skratke uvádzame náčrt, ako si predstavujeme možné exaktné riešenie cez limity (bez dôkazov jednotlivých bodov):

1) Dokážeme, že v mnohouholníku blízkom útvaru V pokrytom niekoľkými kruhmi s priemermi 1 cm existuje bod A ležiaci v troch kruhoch s priemerom 1 cm (stačí aj na hranici).

2) Pre prieniky dvojíc týchto troch kruhov so spoločným bodom máme, že maximálny z obsahov týchto prienikov je zdola ohraničený kladným číslom L (toto číslo je spoločné pre všetky polohy troch pretínajúcich sa kruhov). Na základe toho vieme, že nech sa akokoľvek snažíme, nikdy 100 kruhmi s priemerom 1 cm nepokryjeme útvar blízky útvaru V, ktorého plocha je $S(V) - L$ (pričom $S(V)$ je obsah útvaru V).

3) Teraz môžeme s čistým svedomím skonštruovať limitný mnohouholník, ktorý sa dá vpísať do V a jeho plocha je väčšia ako $S(V) - L$.

Úloha č. 13: *Nech $n \geq 3$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú dané kladné reálne čísla. Označme $x_{n+1} = x_1$ a $x_{n+2} = x_2$. Dokážte, že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \qquad \textit{alebo} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{n}{2}.$$

Riešenie: (opravovali Ondráč, Kačička, Drak)
Na tomto príklade je netradičné, že máme dokázať platnosť aspoň jednej z dvoch nerovností. Ak ste si vraveli, že to vás chceme len zmiasť a pustili sa do dokazovania jednej z tých inak veľmi podobných nerovností, skončili ste v slepej uličke. Nejaké zaujímavosti o jednotlivých nerovnostiach sa môžete dočítať na konci tohto vzoráku.
Vidíme, že obe sú cyklické, no nie sú symetrické a jednu vieme na druhú previesť tým, že spermutujeme indexy (namiesto x_k dosadíme x_{n+1-k}). Teraz potrebujeme nejakú myšlienku. Ako sa len dá dokázať, že aspoň jedna z nerovností platí? Jednoducho; sčítame ich a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq n.$$

Ak dokážeme, že táto nerovnosť platí, musí platiť aspoň jedna z pôvodných (premyslite si to). Navyše táto nová nerovnosť je symetrická. Máme ukázať, že súčet nejakých zlomkov je aspoň n. To by sa dokazovalo oveľa ľahšie, ak by čitatele aj menovatele zlomkov boli rovnaké, potom by sme napríklad mohli použiť, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n,$$

čo dostaneme použitím AG nerovnosti na ľavú stranu.
Skrátka a dobre, bolo by fajn trochu si tú nerovnosť ešte poupraviť. Možno nie prirodzený, ale asi najjednoduchší spôsob je nasledovný. Ku každému členu tej sumy umelo pričítame a odčítame jednotku, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} - 1 \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} + \frac{x_{i+2} + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \right] - n.$$

[4] Možno tomu ešte neveríte, ale intuícia niekedy zlyháva. Matematici sa o tom presvedčili pred asi 150 rokmi. Viete si predstaviť funkciu, ktorá je spojitá (dá sa nakresliť jednou súvislou čiarou), ale nikde nemá deriváciu (nikde nie je hladká)? Ale existuje, beštia. Ak sa o nej chcete dozvedieť viac, pozrite si niečo o Weierstrassovi.

Využitím tohto v nerovnosti dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right]-n\geq n$$

alebo

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq 2n.$$

A už to je, či nie? Obe tie sumy, čo sme dostali, sú presne takého typu, ako sme už spomínali, čitatele aj menovatele sú tvaru x_i+x_{i+1}, ale sú navzájom posunuté. Preto

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq n \qquad \text{aj} \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq n$$

a teda ich súčet je aspoň $2n$, čo sme chceli.

Vráťme sa späť k nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq\frac{n}{2}.$$

Nazýva sa Shapirova (podľa H. Shapira) a je to jedna z veľmi nevďačných ľahko vyzerajúcich cyklických nerovností. Kto by sa odvážil tvrdiť, že taká oku lahodiaca nerovnosť bude platiť len pre párne $n\leq 12$ a nepárne $n\leq 23$? Ukrajinský matematik Vladimir Drinfeľd však tento výsledok ešte zlepšil. Dokázal, že pre všetky n platí

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq\gamma\frac{n}{2},$$

kde $\gamma\approx 0.9891\ldots$, alebo presnejšie: je to $\psi(0)/2$, kde ψ je konvexný obal funkcií $f(x)=e^{-x}$ a $g(x)=2/(e^x+e^{x/2})$. Netuším, prečo to platí a nerozumiem tomu poriadne, no ak vás to zaujalo, určite si o tom niečo prečítajte, na internete je toho veľa.

Úloha č. 14: *Riešime rovnicu $a^3+b^5+c^7+d^{11}=e^{13}$ v kladných celých číslach.*
a) Dokážte, že táto rovnica má aspoň jedno riešenie.
b) Zistite, či má táto rovnica konečne veľa riešení.

Riešenie: (opravoval Mazo)
Máme dokázať, že tá rovnica má riešenie. Skúsime nejaké malé uhádnuť. Nič. Vyskúšame kopu čísel na počítači. Nič. V poriadku, asi by nám to nedali dokázať, keby to bolo také trápne. Skúsme vyriešiť jednoduchšiu úlohu, $a^3=e^{13}$. (Vyriešte.) No, dosť jednoduchá. Našli sme všetky riešenia, sú v tvare $(a,e)=(m^{13},m^3)$. Už toto napovedá čosi k pôvodnej úlohe, ale ešte to tam tak dobre nevidno.
Tak skúsme trebárs $a^3+b^5=f^4$. Fuj. Ani rozložiť na súčin, ani skúmanie zvyškov nedáva veľa. Prečo sa to nedá rozložiť na súčin? Lebo sú rôzne aj *základy*, aj *exponenty*. Keby sme mali rovnaký základ, vieme to rozložiť, napríklad $a^4+a^7=a^4(a^3+1)$. Keby sme mali rovnaký exponent, tiež vieme niečo rozložiť, napr. $a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1})$.
Exponenty sú pevné (3, 4 a 5), zmeniť ich nevieme, ostanú rôzne. Ale vieme zmeniť základ tak, aby bol rovnaký pri všetkých mocninách. Nechceme úplne vyriešiť tú rovnicu, predbežne postačí, keď nájdeme jedno riešenie. Nech teda $a=m^x, b=m^y, f=m^z$ pre nejaké prirodzené číslo m. Dostaneme rovnicu $m^{3x}+m^{5y}=m^{4z}$, v ktorej už čosi na súčin rozložiť vieme. Nech trebárs $3x\geq 5y$. Potom

$$m^{5y}(m^{3x-5y}+1)=m^{4z}, \qquad \text{teda} \qquad m^{3x-5y}+1=m^{4z-5y}.$$

Zrejme $m\geq 2$ a $4z-5y\geq 1$. Preto pravá strana je deliteľná číslom m. Ak $3x>5y$, bude ľavá strana po delení m dávať zvyšok 1, a to je spor. Preto $3x=5y$. Navyše z našej rovnice teraz vieme zistiť, že $m=2$ a $4z-5y=1$. Hľadáme teda trojicu $(x,y,z)=(5y/3,y,(1+5y)/4)$. Pre $y=12k+3$ dostaneme[5] nekonečne veľa takýchto trojíc a týmto trojiciam zodpovedá nekonečne veľa riešení našej rovnice.
Tak, ľahšiu úlohu sme vyriešili, a metóda sa poľahky dá použiť na zadanú úlohu. Držíme vám pri tom palce, milí čitatelia.

[5]Ako sme našli toto číslo? Dá sa uhádnuť. Ale dá sa tiež zistiť pomocou čínskej zvyškovej vety. Ak ju nepoznáte, skúste sa po nej obzrieť a pridať si ju do repertoáru poznatkov, ktoré viete používať. Napríklad `http://en.wikipedia.org/wiki/Chinese_remainder_theorem`.