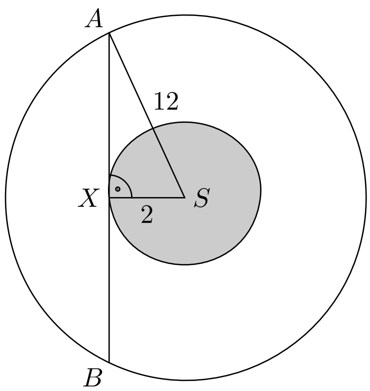
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série letného semestra 2006/2007

Úloha č. 1: *Atol Tortus je jedným z najkrajších koralových ostrovov v Tichom oceáne. Aj to je jeden z dôvodov, prečo sa vedúci KMS rozhodli zorganizovať najbližšie sústredenie práve na ňom. Miki s Peťom dostali zodpovednú úlohu pripraviť celodenný výlet a teraz hľadajú na mape atolu najvhodnejšiu trasu. Všimli si už, že Tortus má tvar kruhu s polomerom dvanásť kilometrov a presne v jeho strede leží kruhové jazero s polomerom dva kilometre. Miki aj Peťo chcú, aby bol výlet čo najdlhší, no zároveň sa na základe svojich predchádzajúcich skúseností s orientáciou v teréne rozhodli, že jeho trasa musí byť rovná čiara (čiže úsečka) neprechádzajúca morom ani jazerom. Aká najdlhšia trasa sa dá za takýchto podmienok naplánovať?*

Riešenie: (opravoval Škrečok)

Pri riešení geometrickej úlohy nesmie chýbať pekný obrázok, preto si aj my jeden nakreslíme.



Prvou vecou, ktorú si musíme ujasniť je to, ktorá úsečka bude našou hľadanou trasou. Po chvíľke rozmýšľania nám určite napadne, že to bude taká, ktorá sa dotýka jazera a konce má na brehoch ostrova. Na našom obrázku je to napríklad úsečka AB. (Môže byť hocijako otočená.)

Ešte predtým, než vypočítame, akú dĺžku bude táto trasa mať, musíme všetkých neveriacich presvedčiť, že je naozaj najdlhšia. Inak povedané, chceme zdôvodniť, že každá dlhšia úsečka musí prejsť cez jazero. Budeme „skúmať" iba také úsečky, ktoré majú konce pri vode – inak by sa určite dali predĺžiť až k vode a boli by tak dlhšie.

Každá úsečka dlhšia než AB musí mať svoje dva konce pri mori, nemôže mať jeden koniec pri mori a druhý na brehu jazera[1]. (Dokreslite si takú úsečku do obrázka.) Navyše ak máme úsečku dlhšiu než AB, ktorá má dva konce pri mori, musí byť bližšie k stredu kružnice než AB. To ale znamená, že musí jazero pretnúť, keďže úsečka AB sa jazera dotýka.

Teraz nám už všetci veria a preto môžeme vypočítať dĺžku najdlhšej trasy, teda dĺžku úsečky AB. Do obrázka sme dokreslili bod S – spoločný stred jazera a ostrova, a bod X, v ktorom sa naša trasa dotýka jazera. Potom je uhol ASX pravý a bod X delí úsečku AB na polovicu. (Poriadne si premyslite prečo.) Teda polovicu dĺžky úsečky AB vieme pomocou *Pytagorovej vety* vyrátať ako

$$\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2 = |SA|^2 - |XS|^2,$$

pričom poznáme $|XS| = 2\,\mathrm{km}$, čo je polomer jazera, aj $|SA| = 12\,\mathrm{km}$ – to je zase polomer ostrova. Dosadíme do našej rovnice, dostávame

$$\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2 = 12^2 - 2^2 = 144 - 4 = 140\,\mathrm{km},$$

z čoho po odmocnení a vynásobení dvomi dostaneme $|AB| = 2 \cdot \sqrt{140}\,\mathrm{km}$, a to je naša hľadaná dĺžka najdlhšej trasy. Ešte sa výsledok dá trošku poupraviť na $4 \cdot \sqrt{35}$, to však nebolo nutné.

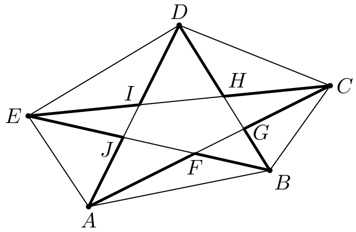
Komentár: Bohužiaľ skoro všetci ste iba nakreslili obrázok, na ktorom rovno vyznačili trasu a začali počítať jej dĺžku. Treba ale zdôvodniť, prečo je práve takáto trasa najdlhšia. (Aj keď sa vám to môže zdať jasné – veď okrem toho sa od vás v tejto úlohe chcela iba jedna rovnica.) Kvôli tomu ste stratili pár bodíkov, no nabudúce budete múdrejší…

Úloha č. 2: *Keď už si vedúci pri vymýšľaní úloh do tohtoročnej prvej série KMS nevedeli dať rady, rozhodli sa nakresliť na koberec magický pentagram a požiadať o pomoc temné matematické sily. Magický pentagram je vlastne ľubovoľný konvexný päťuholník, ktorého obvod sa kreslí bielou kriedou a jeho uhlopriečky (spojnice vrcholov, ktoré nie sú spojené stranou) sú namaľované… ehm, červeným potravinárskym farbivom, hej, presne tak. Vedúci by radi pri kreslení pentagramu minuli čo najmenej svojho červeného farbiva a tak ich zaujíma, aká bude celková dĺžka uhlopriečok v porovnaní s obvodom pentagramu. Vaša úloha je však jednoduchšia: dokážte, že súčet dĺžok uhlopriečok magického pentagramu je vždy väčší ako súčet dĺžok jeho strán.*

Riešenie: (opravoval Buggo)

Ako prvý si nakreslíme obrázok. Rýchlo si môžeme všimnúť, že uhlopriečky „nad" každou stranou sú v súčte väčšie ako daná strana. (Vyplýva to z trojuholníkovej nerovnosti.) Teda napríklad $|AD| + |BD| > |AB|$. Toto pozorovanie nám však na dôkaz nestačí. (Skúste si premyslieť prečo.)

[1] Skúste si ako bonusovú úlohu vyrátať najväčšiu dĺžku takej úsečky, ktorá ma jeden koniec pri mori a druhý na brehu jazera.



Môžeme si tiež všimnúť, že trojuholníková nerovnosť sa dá použiť aj inde, napríklad v trojuholníkoch ABF, BCG, …, EAJ. Pre ne dostávame nerovnosti

$$\begin{aligned} |AF| + |BF| &> |AB| \\ |BG| + |CG| &> |BC| \\ |CH| + |DH| &> |CD| \\ |DI| + |EI| &> |DE| \\ |EJ| + |AJ| &> |EA| \end{aligned}$$

Po ich sčítaní dostaneme novú nerovnosť ktorá nám hovorí, že obvod *hviezdičky* $AFBGCHDIEJ$ (na obrázku hrubšou čiarou) je väčší ako obvod päťuholníka. Uvedomme si, že všetky strany hviezdičky ležia uhlopriečkach magického pentagramu. Nakoľko súčet dĺžok uhlopriečok je ešte väčší ako obvod hviezdičky, je naše tvrdenie dokázané.

Úloha č. 3: *Bus sa pri opravovaní poslednej série rozhodol, že zo sto riešiteľov, ktorí poslali jeho úlohu, udelí plný počet bodov práve trom. Aby týchto troch šťastlivcov nevyberal úplne náhodne, očísloval riešenia číslami* $1, 2, \dots, 100$ *a rozhodol sa, že tieto tri riešenia vyberie tak, aby číslo jedného z nich bolo aritmetickým priemerom čísel zvyšných dvoch. Koľkými spôsobmi môže Bus vybrať riešenia, ktoré dostanú plný počet bodov?*

Riešenie: (opravovala Baja)
Označme si vybraté čísla a, b, c a nech c je priemerom zvyšných dvoch. Potom platí $(a + b)/2 = c$. Aby bolo c celé číslo, súčet $a + b$ musí byť deliteľný dvomi, preto buď sú a a b obe párne, alebo obe nepárne.
Ďalej môžeme postupovať viacerými spôsobmi, ukážeme si dva z nich.

1. Budeme vyberať podľa „dĺžky medzery“, ktorá vznikne medzi priemerom a krajnými číslami.
Môžeme vybrať tri čísla „vedľa seba“

$$1, 2, 3 \quad | \quad 2, 3, 4 \quad | \quad \dots \quad | \quad 98, 99, 100,$$

takýchto možností je 98. Vidíme, že vždy prostredné číslo je aritmetický priemer dvoch krajných.
Potom môžeme vybrať čísla „ob jedno“

$$1, 3, 5 \quad | \quad 2, 4, 6 \quad | \quad \dots \quad | \quad 96, 98, 100,$$

takýchto možností je 96.
Takto môžeme pokračovať ďalej (skúste si to), až kým nedôjdeme k „najväčšej dĺžke medzery“ – vynecháme 48 čísel. (Rozmyslite si, prečo je to najdlhšia medzera.) V tomto prípade dostávame možnosti

$$1, 50, 99 \quad | \quad 2, 51, 100$$

takéto možnosti sú dve.
Teda všetkých možností je:

$$98 + 96 + 94 + \cdots + 4 + 2 = 100 \cdot 24 + 50 = 2450$$

Určite žiadnu možnosť nezarátame viackrát, lebo dĺžkou medzery a najmenším prvkom sa všetky trojice od seba navzájom líšia.

2. Tento spôsob bude pre tých, ktorí poznajú kombinačné čísla.
Nech a je najmenšie z trojice a b je najväčšie z trojice. Každú trojicu potom môžeme určiť tak, že vyberieme dve čísla a a b spomedzi všetkých sto čísel. Do úvahy pripadajú dve možnosti. Buď sú a a b párne, alebo nepárne. Ak a, b sú párne, existuje $\binom{50}{2} = 1225$ možností, pretože vyberáme 2 čísla z 50 párnych. Podobne pre a, b nepárne existuje 1225 možností, čo je spolu 2450.

Úloha č. 4: *Koniec školského roka sa pomaly blíži a Rasťo by potreboval čo najrýchlejšie dokončiť svoju bakalársku prácu na tému teória hier. Vybral sa preto opäť do záhrady*[2] *vyskúšať svoju najnovšiu hru. Vyryl tam do hliny štvorcovú tabuľku veľkosti* 9×9 *štvorčekov a teraz sa ju pokúša vyplniť navzájom rôznymi číslami od* 1 *po* 81 *tak, aby bol súčin čísel v* k*-tom riadku vždy rovnaký ako súčin čísel v* k*-tom stĺpci pre* $k = 1, 2, \dots, 9$. *Dokážte, že Rasťova tabuľka sa podľa týchto pravidiel nedá vyplniť.*

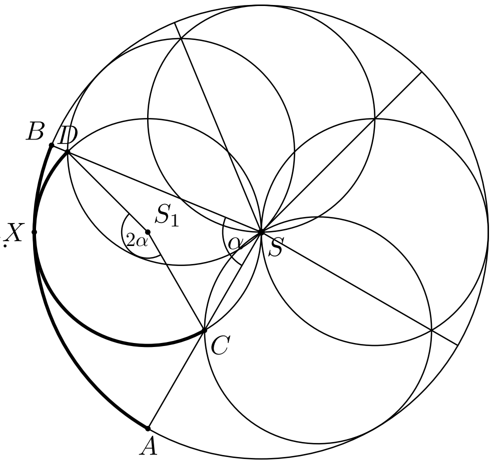
Riešenie: (opravovala Čolka)
Na úvod je dobré si zhrnúť pár jasných informácií zo zadania. Rasťo by rád vyplnil tabuľku 9×9 navzájom rôznymi číslami od 1 po 81, takže každé z nich tam bude práve raz. Taktiež k-ty stĺpec a k-ty riadok budú mať práve jedno číslo spoločné a ostatné navzájom rôzne. Ich súčiny však majú byť rovnaké. Tak sa pozrime na „stavebné“ časti týchto súčinov a to na ich rozklady na prvočísla. Najviac nás budú zaujímať tie, ktoré sa budú v rozklade vyskytovať iba raz, tie najväčšie. (Dvojka sa napríklad vyskytuje v rozklade často a preto nás zaujímať nebude.) Tieto prvočísla budeme volať *zriedkavé*. Práve zriedkavé prvočísla zohrajú dôležitú úlohu, pretože ich v súčine (riadku alebo stĺpca tabuľky) nemôžeme dostať súčinom iných čísel.
Preto ak chceme zriedkavé prvočíslo umiestniť do tabuľky, aby bolo v súčine k-teho riadku aj k-teho stĺpca, musí byť jednoznačne na ich spoločnej pozícii. (Na hlavnej diagonále[3].) To musí platiť pre všetky zriedkavé prvočísla.

[2] Pozri tretiu sériu zimnej časti, úloha č. 9.
[3] Tá, ktorá ide z ľavého horného do pravého dolného rohu.

Pozrime sa, ktoré prvočísla sú vlastne zriedkavé. Vypisaním od najväčšieho sú to 79, 73, 71, 67, 61, 59, 53, 47, 43, 41. Tu sme skončili, pretože ďalej nasledujúce 37 sa už nachádza v rozklade čísla 74. Suma sumárov – zriedkavých prvočísel je desať, ale voľných miest na diagonále je len deväť. Jedno zriedkavé prvočíslo na nej ležať nebude. To znamená, že jedno zriedkavé prvočíslo nebude na hlavnej diagonále, ale niekde inde v tabuľke. Preto v tabuľke budeme vedieť nájsť taký riadok a k nemu prislúchajúci stĺpec, že ich súčiny nebudú rovnaké. (V riadku bude desiate zriedkavé prvočíslo a v stĺpci nebude.) Teraz môžeme povedať, že Rasťo túto tabuľku nebude vedieť vhodne vyplniť.

Úloha č. 5: *Minule si Kubo listoval jednou ruskou základoškolskou učebnicou matematiky a našiel v nej zaujímavú úlohu. Keď sa ju jemu ani ostatným vedúcim nepodarilo vyriešiť, povedal si, že do alfy bude tak akurát. Tu je teda jej zadanie: Majme kružnicu s polomerom R a stredom S. Zvnútra do nej vpíšeme ďalších päť kružníc k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, pričom každá z nich prechádza bodom S, má polomer $R/2$ a dotýka sa pôvodnej veľkej kružnice. Navyše k_1 a k_4 sú stredovo súmerné podľa bodu S – celú situáciu možno lepšie vidieť na obrázku. Úlohou je dokázať, že obvod vyznačeného útvaru je rovnaký, ako dĺžka veľkej kružnice. (Čiže obvod veľkého kruhu.)*

Riešenie: (opravovala Erika)



Nech k je kružnica s polomerom R. Kružnicu k rozdelíme na 5 päť úsekov tak, aby dokopy dávali celú kružnicu k a každý z nich bol rovnako dlhý ako niektorý z oblúkov vyznačeného útvaru. Jedno z možných vhodných rozdelení vidíme na obrázku. Ukážme, že dĺžka jedného oblúka kružnice k je rovnaká ako dĺžka oblúka menšej kružnice ležiaceho v tom istom kruhovom výseku. Stačí, keď to ukážeme pre jeden kruhový výsek, konkrétne vezmeme kruhový výsek ASB z obrázka.
Nech bod X je bod dotyku veľkej a malej kružnice. Označme $|\sphericalangle ASB| = \alpha$. Potom vieme, že dĺžka kružnicového oblúka AXB je

$$2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}.$$

Dĺžka oblúka CXD je

$$2\pi \frac{R}{2} \cdot \frac{|\sphericalangle CS_1D|}{360^\circ},$$

kde $\frac{R}{2}$ je polomer menšej kružnice. Uhol CS_1D je stredový uhol k uhlu CSD v malej kružnici. Teda $|\sphericalangle CS_1D| = 2\alpha$. Potom dĺžka oblúka CXD je

$$2\pi \frac{R}{2} \cdot \frac{|\sphericalangle CS_1D|}{360^\circ} = 2\pi \frac{R}{2} \cdot \frac{2\alpha}{360^\circ} = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}.$$

Po porovnaní dĺžok oblúkov AXB a CXD zistíme, že sú rovnaké, čo sme chceli ukázať. Podobná rovnosť platí aj pre ostatné výseky. Teda obvod kružnice k sa naozaj rovná obvodu zvýrazneného útvaru.

Komentár: Časť riešenia úlohy je založená na stredových uhloch. Ak ste sa s nimi ešte nestretli, tak sa nezľaknite toho honosného názvu. Rovnosť $|\sphericalangle CS_1D| = 2\alpha$ sa dá nahliadnuť aj tak, že ukážeme rovnosť $\alpha = |\sphericalangle S_1CS| + |\sphericalangle SDS_1|$. Potom v štvoruholníku $CSDS_1$ máme

$$|\sphericalangle DS_1C| = 360^\circ - |\sphericalangle CSD| - (|\sphericalangle S_1CS| + |\sphericalangle SDS_1|) = 360^\circ - 2\alpha,$$

Z čoho už vyplýva rovnosť $|\sphericalangle CS_1D| = 2\alpha$.

Úloha č. 6: *Keďže sústredenie KMS bude na ďalekom tichomorskom ostrove, Lucy potrebuje zájsť do trezoru KMS a vybrať z neho dosť peňazí na zaplatenie zálohy za ostrov. (To pre prípad, že by ho účastníci počas sústredenia rozbili.) Nanešťastie si však kombináciu od zámku dnes ráno zmyla zo svojej ľavej ruky, na ktorej ju má obvykle napísanú perom. Pamätá si iba toľko, že je ňou trojciferné číslo w také, že obe z čísel w^2 a $(3w-2)^2$ majú rovnaké posledné trojčíslie. Ktoré všetky trojciferné čísla bude musieť Lucy vyskúšať?*

Riešenie: (opravovali Ondráč, Kačka, Krysa)
Viacerí z Vás zhodnotili, že Lucy má asi nejaké vážne problémy, keď si pamätá také veci. Nič sa však nedá robiť a z prekérnej situácie jej treba pomôcť. Čo vieme o čísle w? Je trojciferné a teda $100 \le w \le 999$. Ďalej w^2 a $(3w-2)^2$ majú rovnaké posledné trojčíslie. Už od začiatku sa dá postupovať dvoma rôznymi smermi. Najprv si ukážeme ten rýchly a elegantný.
Prvé riešenie: Označme si posledné trojčíslie w^2 ako x $(0 \le x \le 999)$. Potom ale $w^2 - x$ má posledné tri cifry nuly a teda je deliteľné 1000. Rovnako však aj $(3w-2)^2 - x$ je deliteľné 1000. Teraz si môžeme všimnúť, že rozdiel týchto čísel, teda $(3w-2)^2 - x - (w^2 - x) = (3w-2)^2 - w^2$ tiež musí byť deliteľný 1000. To sa dalo povedať aj hneď na začiatku. Keď čísla $(3w-2)^2$ a w^2 od seba odčítame, cifry na posledných troch miestach sa vynulujú a cifry vyšších rádov (tisícky, desaťtisícky, ...) sa do toho nemiešajú. Čo sme to dostali? Výraz $(3w-2)^2 - w^2$ má byť deliteľný 1000. Rozdiel dvoch štvorcov priam bije do očí, tak prečo nepoužiť známy vzorček

$$(3w-2)^2 - w^2 = (3w-2-w)(3w-2+w) = 4(w-1)(2w-1).$$

Tento súčin má byť deliteľný 1000 a teda existuje také celé číslo k, že $4(w-1)(2w-1) = 1000k$ a po predelení štyrmi $(w-1)(2w-1) = 250k = 2 \cdot 5^3 k$. Na oboch stranách vzťahu $(w-1)(2w-1) = 2.5^3 k$ máme súčiny, takže sa poďme hrať s deliteľnosťou. Člen $2w-1$ je vždy nepárny, teda aby ľavá strana bola párna, musí 2 deliť $w-1$, čiže w musí byť nepárne. Skúsme teraz deliteľnosť 5. Ak by ňou bol deliteľný výraz $w-1$, tak $w = 5l+1$ pre nejaké l. Potom $2w-1 = 2(5l+1)-1 = 10l+1$, čo nie je deliteľné 5. Preto nemôže nastať prípad, že by aj $w-1$ aj $2w-1$ boli deliteľné 5. To z nich, ktoré je deliteľné päťkou musí byť deliteľné aj $5^3 = 125$. (Aby boli prvočíselné rozklady ľavej a pravej strany rovnaký.) Máme dve možnosti

a) Číslo 125 delí $w-1$ a w je nepárne. (Ukázali sme si vyššie.) Teda existuje nejaké celé číslo m, že $w-1 = 125m$. Aby w bolo nepárne, musí byť m párne. Potom $w = 125m+1$. Dostávame $w = 2\cdot125+1 = 251$, $w = 4\cdot125+1 = 501$, $w = 6 \cdot 125 + 1 = 751$. Pre iné párne m už nevýdu trojciferné čísla.

b) Číslo 125 delí $2w-1$ a w je nepárne. Teda existuje nejaké celé číslo m, že $2w-1 = 125m$. Ľavá strana je nepárna, tak aj m musí byť nepárne. Dosadíme zaň $m = 2k+1$. Dostávame $2w-1 = 125(2k+1) = 250k+125$. Číslo w vieme vyjadriť ako $w = 125k+63$. Aby bolo w nepárne, musí byť k párne. (Zamyslite sa.) Trojciferné čísla dostaneme pre $k = 2, 4, 6$ a to $w = 313$, $w = 563$ a $w = 813$.

Druhé riešenie: Podobne sa to snažila riešiť väčšina z vás, a tak uvádzam v skratke aj toto, nie práve najrýchlejšie riešenie. Medzi expertmi na posledné cifry je známe, že posledná cifra w^2 závisí len od poslednej cifry w, teda napríklad $2^2, 12^2, 1892^2$ majú všetky rovnakú poslednú cifru. Takisto posledné dve cifry w^2 závisia len od posledných dvoch cifier w a tak 12^2, 512^2, či 7812^2 majú rovnaké posledné dve cifry. Ale pozor, to neznamená, že keď napríklad 312 a 288 nemajú posledné dve cifry rovnaké, že 312^2 a 288^2 ich tiež nebudú mať rovnaké. Podobne je to aj s poslednými troma, štyroma, … poslednými ciframi. S takouto výzbrojou sa môžeme z výšky vrhnúť na príklad. Keď vieme akou cifrou končí w, vieme zrátať aj poslednú cifru $3w-2$ a potom aj porovnať posledné cifry w^2 a $(3w-2)^2$. Vyskúšaním všetkých desiatich možností dostávame, že posledná cifra w môže byť len 1, 3, 6 alebo 8. Ku každej z týchto cifier skúsime pridávať predposlednú cifru. Keď ju máme danú, vieme určiť aj posledné dve cifry $3w-2$ a opäť porovnáme posledné dve cifry w^2 a $(3w-2)^2$. Po overení všetkých 40 možností zistíme, že jediné možné posledné dvojčíslia w sú 01, 51, 13, 63, 26, 76, 38 a 88. Znova zopakujeme ten istý postup. V každom z ôsmych možných prípadov vyskúšame všetkých deväť možných cifier na mieste stoviek v čísle w a dostaneme tak riešenia: 251, 313, 501, 563, 751 a 813.

Komentár: Podstata tejto úlohy bola buď prísť na pekný nápad ako v prvom riešení, alebo sa snažiť čo najrýchlejšie rozobrať haldy možností. Uvedomte si, že ak sa vyberiete tým druhým spôsobom, nejde o to napísať mi ako ste asi postupovali a nakoniec dať tých 6 riešení, ale vaša úloha je presvedčiť ma, že ste naozaj preverili všetky možnosti a podľa potreby to zdokumentovať. Preto ak niekto rozoberal jeden prípad na stranu a ostatné tri prípady uzavrel tým, že vraj idú podobne, nemilosrdne som stŕhal nejaké body.

Úloha č. 7: *Ak vás zaujíma, odkiaľ vzalo KMS trezor plný peňazí, prezradíme vám tajomstvo. Mazo s Erikou si cez leto našli prácu, v ktorej sa točia skutočne veľké peniaze – brigádovali v kremnickej mincovni. Okrem toho, že obaja zarobili slušný balík peňazí, zažili aj niekoľko zaujímavých príhod. Jedného dňa napríklad Mazo len tak zo zvedavosti vyrobil $N \geq 5$ mincí, z ktorých dve boli falošné. Obe falošné mince mali rovnakú hmotnosť menšiu ako je hmotnosť pravej mince. Mazo sa s mincami pochválil Erike, no tej len jeho slovo nestačí. Uverila mu už, že falošné sú práve dve mince a že obe majú rovnakú hmotnosť, nevie však, či sú ľahšie alebo ťažšie než pravé mince a ani to, ktoré dve z tých N to sú. Mazo by jej rád ukázal falošné mince pomocou rovnoramenných váh, ktoré v mincovni majú, čochvíľa však bude končiť pracovná doba a tak to Mazo musí stihnúť len pomocou dvoch vážení. Podarí sa mu Eriku presvedčiť o tom, ktoré mince sú falošné? Svoju odpoveď zdôvodnite.*

Riešenie: (opravoval Škrečok)

Ukážeme si dve riešenia tejto neľahkej úlohy. Toto prvé bude viac priamočiare, to druhé zase viac fintové. Základom oboch z nich je poriadne si prečítať zadanie a skúšať vážiť dovtedy, kým nezistíme, o čo sa budeme snažiť – či hľadať váženia pre všetky n, alebo dokazovať, že to nejde pre žiadne, alebo niečo iné. V tomto prípade je správna prvá možnosť, Mazo to dokáže pre všetky n. Poďme to dokázať. . .

(Podľa *Judity Vancákovej*.)

Rozdelíme si počty mincí $n \geq 5$ na tri skupiny podľa toho, aký zvyšok dávajú po delení 3 a vymyslíme pre nich osobitné váženia.

Preskúmajme najprv najľahšiu možnosť $n = 3k+2$, teda keď dá počet (všetkých) mincí po delení tromi zvyšok 2. Z $(3k+2)$ mincí je $3k$ pravých, Mazo ich rozdelí na tri časti po k pravých mincí. V prvom vážení pováži dve takéto k-mincové časti – váhy zrejme ukážu rovnosť. Erika z toho usúdi, že na oboch stranách váh je rovnako veľa falošných mincí – buď žiadna alebo jedna.

Mazo teraz potrebuje Erike vyvrátiť, že je tam po jednej falošnej minci na oboch stranách. V druhom vážení pováži jednu z k-mincových častí, ktoré už vážil, s tou časťou, ktorú ešte vôbec nevážil. Keďže všetky mince na váhach sú pravé, opäť ukážu rovnosť. Čo z toho má Erika? No opäť to, že buď je na oboch stranách váh po jednej falošnej minci alebo tam nie je žiadna. Ak by tam ale bolo po jednej falošnej minci, muselo byť aj v prvom vážení po jednej falošnej minci na oboch stranách. To by ale znamenalo, že falošné mince sú tri. Erika ale vie, že sú len dve, teda tejto možnosti veriť nebude. Ostala jej druhá možnosť, a síce tá, že všetkých $3k$ vážených mincí je pravých, takže falošné musia byť podľa Eriky tie, ktoré Mazo vôbec nevážil. Pre $n = 3k+2$ to teda Mazo na dve váženia vie dosiahnuť.

Poďme na ďalší prípad $n = 3k$, teda počet všetkých mincí je deliteľný tromi. Mazo bude postupovať podobne ako

v prvom prípade. Rozdelí $3k$ mincí na tri časti po $(k-1)$ pravých mincí, bokom mu ostane jedna pravá a dve falošné mince. V prvom vážení pováži dve $(k-1)$-mincové časti. Váhy ukážu rovnosť, pretože všetky vážené mince sú pravé.
Mazo ide vážiť druhýkrát – na ľavej miske nechá všetky mince z prvého váženia a ešte k nim pridá jednu z pravej misky. Bude tam teda mať presne k pravých mincí. Pravú misku vyprázdni a dá tam všetky pravé mince, ktoré neboli vážené v prvom vážení, teda jednu $(k-1)$-mincovú časť a jednu pravú mincu, ktorá nám ostala bokom. Aj na tejto strane budeme mať presne k pravých mincí a váhy ukážu rovnosť.
Pozrime sa na to z pohľadu Eriky. V oboch váženiach bolo na oboch stranách rovnako veľa falošných mincí – buď jedna alebo žiadna. Čo sa teda stalo? Ak bolo v prvom vážení po jednej falošnej minci na oboch stranách, potom musela byť v druhom vážení na ľavej strane určite aspoň jedna falošná minca, kým na pravej strane boli istotne samé pravé mince. (Prečítajte si ešte raz, ako sme ich prekladali.) V tomto prípade by ale musela v druhom vážení nastať nerovnosť strán, čo nie je pravda. Teda v prvom a nutne aj v druhom vážení Mazo musel vážiť samé pravé mince. Takže falošné musia byť tie dve zvyšné, ktoré Mazo nevážil ani raz. Mazo vie Eriku presvedčiť na dve váženia aj pre $n = 3k$ o tom, ktoré mince sú falošné.

Ostal nám posledný prípad pre počet mincí, ktorý po delení tromi dáva zvyšok jedna, teda v tvare $n = 3k+1$. Mazo bude postupovať skoro rovnako – rozdelí mince na tri $(k-1)$-mincové časti ako v predchádzajúcom prípade s tým rozdielom, že bokom mu namiesto jednej pravej ostanú dve pravé mince. (A samozrejme aj dve falošné.) Takže po prvom vážení preloží z pravej strany na ľavú až dve pravé mince. Na pravú stranu dá jednu $(k-1)$-mincovú časť a dve pravé mince, ktoré boli bokom. Tento postup ale má jeden háčik – nefunguje pre $n = 7$. Rozmyslite si, prečo je tomu tak a skúste popremýšľať, ako to ide pre tento počet mincí.

Poznámka: Samozrejme nemusíme rozoberať zvyšok počtu mincí po delení 3, dá sa skúmať napríklad aj párnosť n, prípadne zvyšok n po delení 4. V prípade skúmania zvyšku po delení 3 však vieme pekne vyrobiť riešenia pre $n = 3k$ a $n = 3k+1$ z riešenia pre najľahší prípad $n = 3k+2$.

Iné riešenie:
(Podľa *Michala Szabadosa*.) Ako sme sľúbili na začiatku, bude fintovejšie. Mazo má $n \geq 5$ mincí a vyberie z nich obe falošné a tri ľubovoľné pravé mince. Má tak 5 mincí, označme si falošné mince ako A, B a pravé ako C, D, E. (Všimnite si, že je to v poriadku aj pre najmenšie $n = 5$.) Mazo v prvom vážení pováži B a C, Erika vidí, že $B < C$. Teraz prichádza finta – Mazo povie Erike, nech si myslene pridá na obe strany tohto váženia mincu A. Nič sa tým nemôže porušiť, lebo akokeby sa na obe strany váh pridal rovnako ťažký predmet. Erika má teda z prvého váženia nerovnosť $A + B < A + C$.
Mazo teraz v druhom vážení pováži na ľavej strane váh mince A a C, na pravej strane mince D a E. Keďže na ľavej strane je jedna falošná minca, kým na pravej žiadna, váhy Erike ukážu, že $A + C < D + E$.
Ak si teraz Erika dá obe váženia dohromady, dostane z nich dve nerovnosti

$$A + B < A + C < D + E.$$

To znamená, že každá dvojica mincí z A, B a A, C a D, E má rôzny charakter – v jednej dvojici musia byť dve pravé mince, v jednej dvojici jedna pravá a jedna falošná a v poslednej musia byť dve falošné mince. „Prostredná“ dvojica A, C je nutne taká, že je v nej jedna pravá a jedna falošná minca. (Premyslite si prečo.) Erika teda potrebuje vylúčiť iba jeden prípad – že D, E sú falošné a A, B pravé. Ten sa ale vylúči ľahko, ako sme vyššie povedali, jedna z „prostredných“ mincí je pravá, druhá falošná. To znamená, že A alebo C je falošná a medzi mincami by tak boli až tri falošné mince. (Mince D, E a jedna z dvojice A, C.) Erika ale vie, že sú len dve. Preto jej ostal iba jeden prípad, ktorému musí veriť – že mince A, B sú falošné a D, E naopak pravé. (V „prostrednej“ dvojici je A falošná a C pravá.)
Mazo teda pre všetky $n \geq 5$ dosiahol to čo chcel, Erika už vie, že zo všetkých mincí (nielen z tých piatich, čo Mazo na začiatku vybral) sú falošné mince A a B.

Komentár: Podľa poradia vidno, že táto úloha nedopadla najslávnejšie, pokúsime sa zhrnúť prečo. Viacerí nepochopili kľúčovú časť zadania – že *Mazo vie*, ktoré mince sú falošné, ďalej to, že sú iba dve a vie, že sú ľahšie. Preto Mazo vopred vie, ako ktoré váženie dopadne. Chce iba urobiť také dve váženia, z ktorých bude Erike nadovšetko jasné, ktoré mince sú falošné. Preto môže Mazo dávať mince na váhy veľmi sofistikovane. (Ako ste to videli v riešení.)
Druhou pomerne častou „chybou“ bolo, že riešenie využívalo to, že rovnoramenné váhy ukazujú aj odchýlku – teda *ako veľmi* je jedna vec ťažšia od druhej. (Z toho sa potom dalo ľahko zistiť, že sú falošné mince ľahšie.) Bohužiaľ to nie je pravda – rovnoramenné váhy sa vždy na doraz, maximálne vychýlia na ťažšiu stranu. (Prípadne sa váhy nevychýlia u rovnako ťažkých vecí.) Takže vieme zistiť iba to, ktorá vec je ťažšia, nevieme zistiť, ako veľmi. Mimochodom, takto fungujú nielen „matematické“ rovnoramenné váhy, ale aj tie naozajstné (ak sú dobre namazané)…

Úloha č. 8: *Hanka má doma vo vitrínke množinu S obsahujúcu racionálne čísla, medzi nimi aj $1/2$. Navyše vieme, že ak číslo x patrí do množiny S, tak aj čísla*

$$\frac{1}{x+1} \quad \text{a} \quad \frac{x}{x+1}$$

patria do množiny S. Zistite, či S obsahuje všetky racionálne čísla z intervalu $(0,1)$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie: (opravoval Mišo T.)

Na začiatok sa oplatí tipnúť si výsledok tejto úlohy. Preto si vypíšeme niekoľko čísel, ktoré patria do Hankinej množiny. Keď do množiny patrí číslo $1/2$, tak tam podľa zadania patria aj čísla $2/3$, $1/3$. Keď dosadíme tieto dve čísla do vzorcov zo zadania, tak nám vyjde, že do Hankinej množiny patria aj $3/5$, $2/5$, $3/4$, $1/4$. Číslo $2/4 = 1/2$ už do našej množiny patrí. Vidíme, že Hankina množina už obsahuje všetky čísla z intervalu $(0,1)$, ktoré majú menovatele menšie ako 5. Pritom sme urobili len pár dosadení. Takto môžeme pokračovať aj ďalej a keď už získame dojem, že tam budú patriť všetky čísla z intervalu $(0,1)$, tak hor sa do dokazovania.

Uvažujme nejaké racionálne číslo p/q z intervalu $(0,1)$, kde p, $q \in \mathbb{N}$, $p < q$. Vieme, že zlomok $1/2$ do Hankinej množiny patrí, teda môžeme predpokladať, že $p/q \neq 1/2$. Chceme ukázať, že číslo p/q patrí do Hankinej množiny. Pokúsime sa pozrieť, z akého zlomku toto číslo mohlo vzniknúť. Pokúsime sa nájsť nejakú spätnú postupnosť zlomkov z intervalu $(0,1)$ takú, aby sme skončili pri zlomku $1/2$. Skúsme sa pozrieť, z akého zlomku z intervalu $(0,1)$ zlomok p/q mohol vzniknúť. Nech by vznikol z nejakého čísla x. Máme dve možnosti,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{p}{q} \text{ alebo } \frac{x}{1+x} = \frac{p}{q}\,,$$

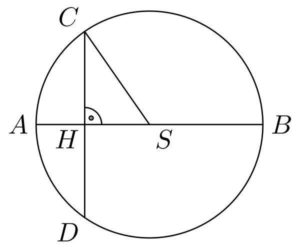
z toho máme:

$$x = \frac{q-p}{p} \text{ alebo } x = \frac{p}{q-p}\,.$$

Nemôže sa stať, že $q - p = p$, lebo potom by $q = 2p$, zlomok p/q by bol rovný $1/2$ a povedali sme, že takýto zlomok nebudeme uvažovať. Zlomky $(q-p)/p$, $p/(q-p)$ sú kladné čísla, keďže $q > p$. Keďže sú to navzájom prevrátené zlomky, tak jeden z nich musí byť väčší ako 1 a jeden menší ako 1. Preto zlomok p/q mohol vzniknúť z toho menšieho. Či už vznikol zo zlomku $(q-p)/p$ alebo $p/(q-p)$, tak každý z týchto zlomkov má menovateľa menšieho ako zlomok p/q. A teraz zisťujeme ďalej, z akého zlomku mohol vzniknúť predchodca zlomku p/q. To znamená, že vieme vytvoriť postupnosť zlomkov z intervalu $(0,1)$, pričom menovatele zlomkov sa stále zmenšujú. Kedy skončíme? Vtedy, keď už nenájdeme číslo z tohto intervalu majúce menšieho menovateľa. Číslo s najmenším možným menovateľom patriace do intervalu $(0,1)$ je číslo $1/2$. Skúste si premyslieť, prečo to skutočne skončí pri tomto zlomku. Vieme, že číslo $1/2$ patrí do Hankinej množiny. Teraz prejdeme našu postupnosť presne v opačnom smere, čo znamená, že každé z čísel postupnosti patrí do Hankinej množiny. Teda tam patrí aj zlomok p/q. Keďže tento zlomok bol zvolený všeobecne, tak do Hankinej množiny patrí ľubovoľné číslo z intervalu $(0,1)$, čo bolo treba dokázať.

Úloha č. 9: *V kružnici k je daný priemer AB so stredom S. Tetiva CD je kolmá na AB a prechádza jej vnútorným bodom H. Dĺžky úsečiek AB a CD sú dvojciferné prirodzené čísla líšiace sa len poradím cifier. Navyše vieme, že dĺžka úsečky SH je racionálne číslo. Aká dlhá môže byť úsečka AB?*

Riešenie: (opravoval Peťo)



Dĺžka úsečky AB je dvojciferné číslo – môžeme ho zapísať v tvare $10a + b$, pričom a, b sú cifry. Potom $|CD| = 10b + a$. Keďže očividne $|AB| \geq |CD|$ a obe uvedené čísla sú dvojciferné, platí $1 \leq b \leq a \leq 9$. Bod H leží v strede tetivy CD a $|SC| = \frac{1}{2}|AB|$, z pravouhlého trojuholníka SCH teda podľa Pytagorovej vety dostávame

$$\frac{|AB|^2}{4} = \frac{|CD|^2}{4} + |SH|^2,$$

čiže

$$|SH| = \sqrt{\tfrac{|AB|^2}{4} - \tfrac{|CD|^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(10a+b)^2 - (10b+a)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{99a^2 - 99b^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{11(a+b)(a-b)}.$$

(Uvedené vyjadrenie platí aj pre prípad, keď $H = S$, napriek tomu, že SCH vtedy nie je trojuholník.) Dĺžka úsečky SH je preto racionálne číslo práve vtedy, keď je racionálny výraz $V = \sqrt{11(a+b)(a-b)} = \frac{2}{3}|SH|$. Pritom V je odmocninou z celého čísla. Odmocnina z celého (nezáporného) čísla je buď iracionálne číslo, alebo celé číslo. (Premyslite si, prečo.) Aby V bol racionálny, nutne teda $11(a+b)(a-b)$ musí byť štvorcom celého čísla. Odtiaľ je zrejmé, že $11 \mid (a+b)(a-b)$, pričom 11 je prvočíslo, takže $11 \mid a+b$ alebo $11 \mid a-b$. Z ohraničenia pre cifry a, b uvedeného na začiatku však máme $0 \leq a-b \leq 8$ a $2 \leq a+b \leq 18$. Do úvahy tak prichádzajú iba dve možnosti.

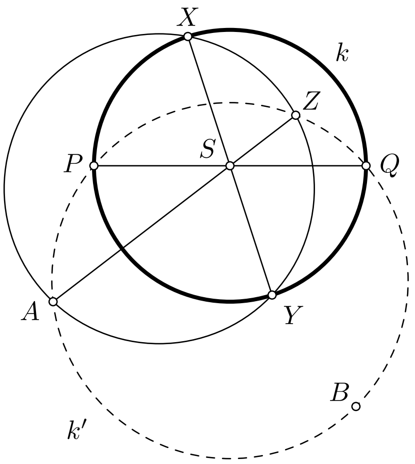
Ak $a - b = 0$, tak $a = b$, t. j. $|SH| = 0$. Vtedy CD je priemerom kružnice k. Dĺžka úsečky AB teda môže byť ľubovoľné číslo z množiny $\{11, 22, 33, \ldots, 99\}$.

Ak $a + b = 11$, tak dvojicou (a,b) môže byť na základe ohraničenia pre cifry a, b len jedna z dvojíc $(9,2)$, $(8,3)$, $(7,4)$, $(6,5)$. Ľahko overíme, že $11(a+b)(a-b)$ je štvorcom len pre štvrtú dvojicu $a = 6$, $b = 5$. Vtedy sú všetky podmienky úlohy splnené a $|AB| = 65$.

Komentár: Riešenia v tvare $a = b$ by sme mohli na základe zadania vylúčiť, možno totiž polemizovať o tom, či sa napr. dvojciferné čísla 11 a 11 *líšia* len poradím cifier. Navyše v zadaní bolo, že dĺžka *úsečky* SH je racionálne číslo. V prípade, že $S = H$, však SH nie je úsečka. Ale aj v prípade, že takúto situáciu neberieme do úvahy, treba to niekde v riešení spomenúť.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Daná je kružnica k so stredom S a dva jej vonkajšie body A, B. (Body A, B, S neležia na jednej priamke.) Zostrojte kružnicu k', ktorá prechádza bodmi A, B a rozdelí kružnicu k na dva rovnako dlhé oblúky.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mazo)
Daná je kružnica, zostrojiť máme kružnicu. Preto by nás nemalo prekvapiť, že v riešeniach budeme využívať mocnosť bodu ku kružnici. Inou možnosťou bolo skúsiť to hrubou silou. (Analyticky alebo výpočtom cez goniometrické funkcie.) Taktiež sa dal využiť výsledok úlohy 5 z domáceho kola MO kat. A.
Najprv uvedieme jedno pekné z vašich riešení. Potom ďalšie, ktoré je síce dlhšie, ale poučné a využiteľné pre široký okruh úloh (napríklad úlohu 13). A nakoniec tretie riešenie, v ktorom sme mocnosť z druhého riešenia skryli do chordál.



<u>Riešenie:</u>
(Podľa *Martina Melicherčíka.*) Nech Z je priesečník priamky AS s kružnicou k' rôzny od A. Mocnosť bodu S ku kružniciam k a k' je rovnaká a je rovná $|SP| \cdot |SQ|$. Zvoľme si za úsečku XY ľubovoľný priemer kružnice k, ktorý neleží na priamke AS. Vyjadríme niekoľkými spôsobmi mocnosť bodu S a dostaneme

$$|SX| \cdot |SY| = |SP| \cdot |SQ| = |SA| \cdot |SZ|.$$

To však znamená, že body A, Y, Z, X ležia na kružnici. (Toto si dokážte.) Preto bod Z leží na kružnici opísanej trojuholníku AXY. Navyše Z leží na AS. (Tak sme ho zvolili.) Keďže bod S je vnútorným bodom úsečky XY, bod Z je jednoznačne určený a vždy existuje práve jeden.
Na kružnici k' ležia body A, B a Z. Všetky tri už poznáme, takže ju môžeme smelo zostrojiť. Úloha má práve jedno riešenie.

<u>Iné riešenie:</u>
Označme P a Q priesečníky kružnice k' s kružnicou k. Nakreslite si toľko vlastných obrázkov, koľko potrebujete; už teraz je čas na prvý z nich. Snažíme sa zostrojiť úsečku PQ ako priemer kružnice k. Táto úsečka je určená priamkou, na ktorej leží, a táto priamka prechádza bodom S. Na jej úplné určenie stačí poznať ďalší bod, ktorým prechádza. Nech M je priesečník priamok PQ a AB. (Ten neexistuje len v prípade $AB \parallel PQ$, v ktorom úsečku PQ zostrojíme ľahko.) Predpokladajme, že bod M neleží v kruhu určenom kružnicou k. (Ak leží, nasledujúce úvahy treba troška pozmeniť; premyslite si to.) Nech r je polomer kružnice k. Čo vieme povedať o mocnosti bodu M ku kružnici k? Je rovná

$$|MP| \cdot |MQ| = |MS|^2 - r^2. \tag{1}$$

Body P a Q však oba ležia aj na kružnici k', preto

$$|MP| \cdot |MQ| = |MA| \cdot |MB| = |MT|^2 - a^2, \tag{2}$$

kde T je stred úsečky AB a $a = |AB|/2$. Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostávame

$$|MS|^2 - |MT|^2 = r^2 - a^2. \tag{3}$$

Body S, T a hodnoty r, a sú pevné, preto vzťah (3) určuje istú množinu bodov M. Nech N je päta kolmice z bodu M na priamku ST. Z Pytagorovej vety pre trojuholníky MNS a MNT platí

$$|MN|^2 = |MS|^2 - |NS|^2 = |MT|^2 - |NT|^2,$$

preto $|NS|^2 - |NT|^2 = |MS|^2 - |MT|^2 = r^2 - a^2$. Takýto bod N je na priamke ST jediný, čo znamená, že všetky body M z množiny určenej vzťahom (3) ležia na kolmici p na priamku ST prechádzajúcej bodom N. Ľahko sa dá ukázať, že každý bod priamky p spĺňa vzťah (3). Priesečníkom tejto priamky s priamkou AB je hľadaný bod M, z ktorého už vieme zostrojiť aj kružnicu k'. Keďže priamku ST poznáme, stačí jediný bod priamky p a vieme ju tiež zostrojiť. Nad jeho skonštruovaním podumajte sami.
Úloha má vždy práve jedno riešenie, pretože priamka p nie je rovnobežná s priamkou AB. (Lebo A, B, S podľa zadania neležia na priamke.)

<u>Iné riešenie:</u>
(Podľa *Maje Alif.*) Nech m je ľubovoľná kružnica prechádzajúca bodmi A a B. Nech E je priesečník chordály kružníc k' a m (priamka AB) s chordálou kružníc k a m. Chordála q kružníc k' a k musí tiež prechádzať bodom E, lebo bod E má rovnakú mocnosť ku kružniciam k, k' a m. Navyše priamka q prechádza bodom S. Jej priesečníky P, Q s kružnicou k sú koncovými bodmi priemeru, ktorý sme chceli na zostrojenie kružnice k'. Môže sa stať, že bod E neexistuje, premyslite si, čo potom spravíme.

Úloha č. 11: *Nech x, y, z sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah*

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2.$$

Dokážte, že $8xyz \leq 1$.

Riešenie: (opravoval Bus)

Milí riešitelia, keďže písanie vzorových riešení je omnoho dôležitejšie ako opravovanie, určite budete mať pochopenie pre fakt, že som si vaše riešenia ešte nestihol prečítať. Zároveň sa ospravedlňujem všetkým tým, ktorí netrpezlivo čakali, či sa ich meno náhodou neobjaví ako príklad vzorového riešiteľa tejto úlohy a sú teraz spravodlivo sklamaní. Poďme však k samotnému riešeniu.

Prvá vec, ktorá sa nám v tejto úlohe ponúka, je upraviť ľavú stranu rovnosti zo zadania[4] na spoločného menovateľa a vynásobiť obe strany menovateľom výsledného zlomku.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z} &= 2\\
(1+y)(1+z)+(1+x)(1+z)+(1+x)(1+y) &= 2(1+x)(1+y)(1+z)\\
3+2x+2y+2z+xy+yz+xz &= 2+2x+2y+2z+2xy+2xz+2yz+2xyz\\
1 &= xy+xz+yz+2xyz
\end{aligned}$$

Keby som už mal prečítané vaše riešenia, bol by som tu určite napísal, že potiaľto sa dostala väčšina z vás. Čo však ďalej? Pozrime sa na dokazované tvrdenie. Hovorí niečo o hornom odhade výrazu $8xyz$. Prečo by tento výraz nemohol byť veľký? Nech je veľký (presnejšie $8xyz > 1$), skúsme zistiť, kde dostaneme spor. No niekde v tej upravenej väzbe, kde inde? Známa AG-nerovnosť hovorí, že $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Inak povedané, súčet vieme zdola odhadnúť súčinom. Vyskúšame to aj v našom prípade.

$$xy+yz+xz \geq 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot xz} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} > 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

Takže $xy+yz+zx+2xyz > 3/4+1/4 = 1$ a to je hľadaný spor.

Úloha č. 12: *Nech p, q sú dve rôzne nesúdeliteľné prirodzené čísla. Množinu všetkých kladných celých čísel rozdelíme na tri podmnožiny také, že pre každé celé číslo z každá z týchto podmnožín obsahuje práve jedno z čísel z, $z+p$, $z+q$. Dokážte, že takéto rozdelenie existuje práve vtedy, keď číslo $p+q$ je deliteľné tromi.*

Riešenie: (opravoval Mazo)

(Podľa *Miša Szabadosa.*) Ak je $p+q$ deliteľné tromi a p a q sú nesúdeliteľné, musí jedno z nich dávať zvyšok 1 a druhé zvyšok 2 po delení tromi. Preto rozdelíme prirodzené čísla do troch množín podľa zvyšku po delení tromi. Tým je jedna implikácia dokázaná.

z	$z+p$	$z+q$
$z+p$	$z+2p$	$z+p+q$
$z+q$	$z+p+q$	$z+2q$

Predpokladajme, že existuje rozklad množiny prirodzených čísel na tri množiny podľa zadania a pritom $p+q$ nie je deliteľné tromi. Všimnime si tabuľku. V riadkoch aj stĺpcoch sú uvedené trojice čísel, ktoré musia byť v rôznych množinách. Vidíme, že číslo $z+p+q$ musí byť v tej istej množine ako z, lebo nemôže byť ani v tej, kde je $z+p$, ani v tej, kde je $z+q$. Táto úvaha funguje pre každé z, čo znamená, že čísla líšiace sa o $p+q$ ležia v rovnakých množinách. Podobne z tabuľky vidno, že $z+p$ a $z+2q$ musia byť v rovnakých množinách. Takže čísla líšiace sa o $2q-p$ musia ležať v rovnakých množinách. A nakoniec aj čísla líšiace sa o $2p-q$ ležia v rovnakých množinách.

Číslo $2p-q$ je BUNV kladné. Nájdeme Euklidovým algoritmom najväčšieho spoločného deliteľa čísel $p+q$ a $2p-q$.

$$(p+q,2p-q)=(p+q,3p-p-q)=(p+q,3p)\overset{3\nmid p+q}{=}(p+q,p)=(q,p)=1$$

Nech $p+q$ patrí do množiny M nášho rozkladu. Podľa už povedaného do tejto množiny potom patria všetky násobky čísla $p+q$. Ukážeme, že každé $z$bude patriť do M, čo je zjavný spor. Čísla

$$z,\ z+(2p-q),\ z+2(2p-q),\ \ldots,\ z+k(2p-q),\ \ldots$$

ležia v jednej množine, stačí teda ukázať, že jedno z nich patrí do množiny M. Inak povedané, dokazujeme, že existuje k s vlastnosťou

$$z+k(2p-q)\equiv 0 \pmod{p+q}.$$

Lineárna kongruencia $ax+b\equiv 0 \pmod{n}$ s neznámou x má v prípade $(a,n)=1$ vždy riešenie: stačí si uvedomiť, že čísla $a+b, 2a+b, 3a+b, \ldots, na+b$ dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení n, takže medzi týmito n zvyškami musí byť aj zvyšok 0. Toto je však práve to, čo chceme: $(p+q,2q-p)=1$ a teda vhodné k vždy existuje.

[4]Takáto rovnosť sa pri nerovnostiach nazýva *väzba*, lebo „zväzuje“ hodnoty premenných – nie každá trojica x, y, z vyhovuje väzbe.

<u>**Úloha č. 13:**</u> *Daný je trojuholník ABC taký, že $|AB| \neq |AC|$. Označme v ňom stred vpísanej kružnice I, stred opísanej kružnice O a dotykový bod vpísanej kružnice so stranou BC nech je D. Predpokladajme, že priamky IO a AD sú na seba kolmé. Dokážte, že priamka AD je obrazom ťažnice na stranu BC v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla BAC.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mazo)
Ako Feldo vraví: čo nejde silou, ide ešte väčšou silou. Tak poďme. Toto riešenie je poučné kvôli množstvu drobných trikov, ktoré sa môžu hodiť aj inokedy.
Kvôli prehľadnosti budeme dĺžku úsečky zapisovať bez absolútnej hodnoty. Symbol (XYZ) označuje kružnicu opísanú trojuholníku XYZ. Nech $AB = c, BC = a, CA = b$. Nech E je päta kolmice z I na AC a nech S je stred strany BC.
Najprv podmienku $AD \perp OI$ prevedieme na ekvivalentný vzťah medzi stranami trojuholníka ABC. Je známe, že $AD \perp OI$ práve vtedy, keď $AO^2 - DO^2 = AI^2 - DI^2$.

$$\begin{aligned} AO^2 - DO^2 &= BO^2 - DO^2 = BS^2 - SD^2 = a^2/4 - (c-b)^2/4 \\ AI^2 - DI^2 &= AI^2 - EI^2 = AE^2 = (b+c-a)^2/4 \end{aligned}$$

Z toho všetkého dostaneme, že $AD \perp OI$ práve vtedy, keď

$$a(b+c) = b^2 + c^2. \tag{4}$$

Teraz by sme dokazované tvrdenie radi previedli na vzťah medzi stranami trojuholníka ABC. Napríklad vieme, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. Pre trojuholník SAD z tohto už vieme sformulovať dokazované tvrdenie, ale pre veľmi škaredé výrazy. (Napr. dĺžka AD vyjadrená pomocou strán trojuholníka ABC.)
Vyskúšame štandardný trik pre ťažnice. Zobrazme si situáciu v stredovej súmernosti podľa bodu S. Nech A' je obraz bodu A a nech N je priesečník priamok CA' a AM. Chceme dokázať, že uhly BAS a CAD sú rovnako veľké. To je práve vtedy, keď CAD a $CA'A$ sú rovnako veľké. A to je práve vtedy, keď sa priamka CA dotýka kružnice opísanej trojuholníku ADA'. (Úsekový uhol.) Takže chceme dokázať, že $CA^2 = CN \cdot CA'$. (Mocnosť bodu C ku (ADA').) Po dosadení dĺžok úsečiek $CA = b$, $CA' = c$ vidíme, že chceme dokázať, že $CN = b^2/c$. Toto platí práve vtedy, keď $A'N/CN = (c^2 - b^2)/b^2$.
Veľkosť pomeru $A'N/CN$ určíme z Menelaovej vety pre trojuholník SCA' a priamku AD. Platí

$$\frac{CD}{SD} \cdot \frac{SA}{A'A} \cdot \frac{A'N}{CN} = 1.$$

Z toho
$$\frac{A'N}{CN} = \frac{SD}{CD} \cdot \frac{A'A}{SA} = \frac{\frac{1}{2}(c-b)}{\frac{1}{2}(a+b-c)} \cdot 2 = \frac{2(c^2-b^2)}{a(b+c)+b^2-c^2} \overset{(4)}{=} \frac{2(c^2-b^2)}{b^2+c^2+b^2-c^2} = \frac{c^2-b^2}{b^2},$$

ako sme chceli dokázať. Hotovo. Ani to netrvalo dlho. :)
<u>Iné riešenie:</u> (Feráč)
Skúsime si vhodne zvoliť súradnicovú sústavu a utĺcť to hrubou silou. Samozrejme, trocha šikovnosti nezaškodí. V hre je stred vpísanej i stred opísanej kružnice; druhá mocnina ich vzdialenosti je $R(R-2r)$, kde R je polomer opísanej a r polomer vpísanej kružnice. Tvrdenia o uhloch treba preformulovať na tvrdenia o dĺžkach. Za osi súradnicovej sústavy vezmeme stranu BC a jej os.

<u>**Úloha č. 14:**</u> *Majme postupnosť zadanú rekurentne predpisom*

$$\begin{aligned} x_0 &= 5, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{x_n} \qquad \text{pre } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Nájdite x_{1000} s presnosťou na jedno desatinné miesto.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mazo, vzorák Feráč)
Skôr než začneme čokoľvek počítať, zamyslime sa nad tým, ako je naša postupnosť definovaná. Jediný spôsob, ako určiť hodnotu x_n, je pomocou x_{n-1}, preto je dosť ťažké predstaviť si nejaký postup, ktorým by sme dokázali vypočítať x_{1000} bez toho, aby sme zároveň nezískali rozumné odhady pre $x_0, x_1, \ldots, x_{999}$. Mali by sme sa teda pozrieť na to, ako sa naša postupnosť správa ako celok. Ako na to? Predstavte si, že by sme vedeli vyjadriť x_n nejakým jednoduchým vzorcom obsahujúcim len n. Takýto vzorec by stačilo uhádnuť, jeho platnosť by sme dokázali indukciou a nakoniec by sme len dosadili $n = 1000$. V čom je problém? Nikto žiadny taký vzorček nenašiel. My však nepotrebujeme presnú odpoveď. Stačil by nám výraz, ktorý by bol pre n približne rovný x_n. Inak povedané, hľadáme "peknú" funkciu f, pre ktorú je $f(n) \approx x_n$. Ukážame si dve metódy, ako takú funkciu nájsť.
Prvá metóda využíva počítač. Napriek tomu, že dôkazy pomocou počítačových programov sa všeobecne uznávajú len vtedy, keď viete s matematickou presnosťou dokázať ich funkčnosť (čo by v tomto prípade muselo zahŕňať aj odhady chýb spôsobených nedokonalou aritmetikou čísel s pohyblivou desatinnou čiarkou), nič nám nebráni použiť program na získanie lepšieho prehľadu o tom, ako sa naša postupnosť správa. Dnešné počítače dokážu v momente vypočítať hodnoty x_n pre n do stoviek miliónov, čo nám dáva naozaj ohromné množstvo dát. Treba len vedieť,

na čo sa má človek zamerať. Ako prvé môžeme sledovať napr. rýchlosť rastu x_n. Všimneme si, že ak pre veľké n zväčšíme n stonásobne, x_n sa zväčší desaťnásobne. To naznačuje, že x_n závisí od $\sqrt{n}$ približne lineárne. Pozrime sa teraz na $x_n/\sqrt{n}$. Pre veľké n sa táto hodnota blíži k $1,4142$, odkiaľ usudzujeme, že $x_n \approx \sqrt{2n}$. Tento vzorček nám už dáva veľmi dobré odhady pre veľké n, pre malé n je ale nepresný. Čo sa však stane, ak pridáme pod odmocninu nejakú konštantu? Hodnoty výrazu sa badateľne pomenia len pre malé n, a to je presne to, čo potrebujeme. Keďže $x_0 = 5$, položíme $f(n) = \sqrt{2n+25}$.

Čo robiť, ak nemáme zrovna po ruke počítač? Skúsme aplikovať trochu analýzy na funkciu f. My potrebujeme jej hodnoty len na prirodzených číslach, to však neznamená, že si ju nemôžeme vhodne dodefinovať na celých reálnych číslach. Predpokladajme teda, že f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ spĺňajúca

$$f(x+1) \approx f(x) + \frac{1}{f(x)}.$$

Ak navyše predpokladáme, že f ma spojitú deriváciu, tak pre malé h platí

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x).$$

To nám pre $h = 1$ spolu s prvou rovnicou dáva

$$f'(x) \approx \frac{1}{f(x)}.$$

Skúsme teraz nájsť všetky f také, pre ktoré nastáva v tomto výraze presná rovnosť. Riešime jednoduchú diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{f(x)} \\ 2f(x)f'(x) &= 2 \\ (f(x)^2)' &= 2 \\ f(x)^2 &= 2x + c \\ f(x) &= \sqrt{2x+c}, \end{aligned}$$

kde c je reálna konštanta. Keďže požadujeme $f(0) = 5$, zoberieme $c = 25$, čím dostávame rovnakú funkciu ako v prvom postupe.

Aj keď to už začína vyzerať sľubne, zatiaľ sme ešte vôbec nič nedokázali. Potrebujeme ukázať, že naša "uhádnutá" funkcia sa naozaj nelíši od x_n o viac než je povolené. Tu prichádza na rad indukcia. Dokážeme, že

$$\sqrt{2n+25} \le x_n < \sqrt{2n+25} + b,$$

kde b je kladná konštanta, ktorú určíme v priebehu dôkazu. Pre indukčný základ máme $x_0 = 5 = \sqrt{0+25}$. Predpokladajme, že indukčný predpoklad platí pre nejaké n. Zrejme $x_n \ge 5$ a funkcia $x + \frac{1}{x}$ je na tomto intervale rastúca (dokážte si!), preto

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \ge \sqrt{2n+25} + \frac{1}{\sqrt{2n+25}} = \frac{2n+26}{\sqrt{2n+25}} > \sqrt{2(n+1)+25},$$

keďže $2n + 26 > \sqrt{2n+25}\sqrt{2n+27} = \sqrt{(2n+26)^2 - 1}$.

Pre druhú stranu nerovnosti,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} < \sqrt{2n+25} + b + \frac{1}{\sqrt{2n+25}+b} < \sqrt{2(n+1)+25} + b$$

platí vtedy, keď $1/(\sqrt{2n+25} + b) < \sqrt{2n+27} - \sqrt{2n+25}$, čiže

$$b > \frac{1}{\sqrt{2n+27} - \sqrt{2n+25}} - \sqrt{2n+25} = \frac{\sqrt{2n+27} - \sqrt{2n+25}}{2}.$$

Napokon, funkcia $\sqrt{2n+27} - \sqrt{2n+25}$ je klesajúca, preto b bude vyhovovať tejto podmienke pre všetky n akonáhle

$$b > \frac{\sqrt{27} - \sqrt{25}}{2} \approx 0,098.$$

Môžeme teda položiť $b = 0,1$, čím je dôkaz indukciou hotový.

Dokázali sme, že $\sqrt{2n+25} \le x_n < \sqrt{2n+25} + 0,1$. Odtiaľ pre $n = 1000$ dostávame $45 \le x_{1000} < 45,1$, čo znamená $x_{1000} = 45,0\ldots$