Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série zimného semestra 2006/2007

Úloha č. 1: *Na plote sedia vrabce a holuby. Keď päť vrabcov odletí, na plote ostanú na každého vrabca dva holuby. Ak potom odletí ešte aj 25 holubov, ostanú na každého holuba tri vrabce. Nájdite pôvodný počet vrabcov a holubov.*

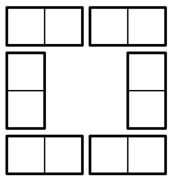
Riešenie: (opravovali Ika a Peťo)

Na plote máme niekoľko vrabcov a holubov. Aby sa nám lepšie počítalo, označme začiatočný počet holubov h a počet vrabcov v. Na začiatku odletelo päť vrabcov, na plote teda ostalo $v-5$ vrabcov. Holubov ostalo dvakrát toľko ako vrabcov, čiže $h = 2(v-5)$. Z toho ešte veľa nezistíme. Našťastie po chvíli odletelo 25 holubov. Na plote preto ostalo $h-25$ holubov a $v-5$ vrabcov. Vieme, že po tejto zmene bolo na plote trikrát toľko vrabcov ako holubov. Z toho dostaneme $v-5 = 3(h-25)$.

Máme teda sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Poďme sa pozrieť, ako to dopadne. Jednou z možností pri riešení sústavy je vyjadriť si z prvej rovnice h a toto vyjadrenie dosadiť do druhej rovnice. Dostaneme $v-5 = 3\big(2(v-5)-25\big)$. Z toho už ľahko vypočítame, že $v = 20$. Pomocou prvej rovnice hneď zistíme aj pôvodný počet holubov,

$h = 2(v-5) = 2(20-5) = 30$.

Na záver môžeme pre istotu vyskúšať, či 20 vrabcov a 30 holubov naozaj spĺňa podmienky zo zadania. Predsa sme sa len pri počítaní mohli pomýliť. Kedže však toto riešenie sedí, máme výsledok.



Úloha č. 2: *Na stole je položených šesť kusov domina tak ako na obrázku. Aký je najmenší možný počet bodiek na týchto dominách?*

Poznámka: Na každej polovici domina je umiestnených 0 až 6 bodiek, pričom na dvoch polovičiach toho istého kusu domina môžu byť aj rôzne počty bodiek. Každá sada domina obsahuje každý prípustný kúsok práve raz, to znamená, že obsahuje 28 kúskov domina.

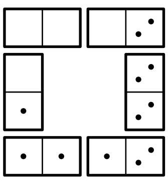
Riešenie: (opravovali Katka a Aďa)

Mnohí ste nám vo svojom riešení úlohy napísali, koľko najmenej bodiek môže byť na zadaných dominách a opísali ste, ako majú byť rozmiestnené. To však nie je len tak. Aby ste nás presvedčili o tom, že takýto počet bodiek je najmenší, musíte ešte ukázať, že menej bodiek na tých dominách byť nemôže. To sa dá urobiť viacerými spôsobmi. Napríklad môžete vypísať všetky možné rozmiestnenia domín a vybrať z nich to správne. To je však dosť zdĺhavé. Okrem toho sa môžete veľmi ľahko zamotať a na zopár možností zabudnúť. A čo keby bolo medzi zabudnutými možnosťami aj správne riešenie? Poďme preto vymyslieť niečo šikovnejšie a rýchlejšie.

Ako prvé skúsme zistiť, aký najmenší počet bodiek môže byť na šiestich dominových kockách. Potom budeme vedieť, že riešenie, ktoré hľadáme, nemôže byť od tohto počtu menšie. Ostane nám ešte zistiť, či vieme z týchto dominových kociek poskladať zadaný útvar. Prípadne zistíme, čo musíme na vybratých dominách zmeniť, aby sa útvar poskladať dal.

Vypíšme si šesť dominových kociek s najmenšími počtami bodiek: 0–0, 0–1, 1–1, 0–2, 1–2, 0–3. (Koľko bodiek by bolo na siedmej dominovej kocke?) Keby sme na skladanie obrazca použili tieto dominá, počet všetkých bodiek dokopy by bol 11. Menší počet bodiek nemôžeme dostať ani v zadanom obrazci. Dajú sa však tieto dominá poskladať do takého tvaru, ako je na obrázku?

Všimnime si, ako sú dominové kocky poskladané. Dve kocky sú k sebe priložené časťou s rovnakým počtom bodiek. To znamená, že počet polovíc dominových kociek s rovnakým počtom bodiek je vždy párny. (Poriadne si to premyslite.) Lenže medzi kockami domina, z ktorých chceme obrázok poskladať, je polovica s tromi bodkami len jedna a polovíc, na ktorých nie je žiadna bodka, je päť. Preto z týchto šiestich domín nevieme poskladať zadaný obrázok.



Počet bodiek 11 teda nie je možné dosiahnuť. Najbližší možný súčet je 12. Ten už vieme poskladať? Áno, napríklad tak, že kocku 0–3 vymeníme za kocku 2–2. Pozrite si obrázok. Je toto rozostavenie dominových kociek jediné, ktoré vyhovuje zadaniu? Ak nie, skúste nájsť všetky ostatné.

Úloha č. 3: *Keď bol Foto malý, dostal na Vianoce deväť kociek, na ktorých boli čísla $1, 2, \ldots, 9$. (Na každej kocke jedno, každé číslo na práve jednej.) Rúža bol vtedy ešte menší a preto kocku s číslom 8 zjedol. Fotovi neostalo nič iné, iba zo zvyšných kociek vytvárať dvojciferné prvočísla, vždy štyri naraz. Keď ich vytvoril, zapísal ich súčet voskovkou na stenu. Hral sa takto už asi pol dňa, keď si uvedomil, že je hladný a že už vytvoril všetky možné štvorice prvočísel. Zistite, aké čísla boli na stene napísané, keď sa Foto odišiel najesť.*

Poznámka: Rúža sa najesť neodišiel, pretože ráno zjedol kocku. A viete, aká tá kocka bola?

Riešenie: (opravovali Ivka a Peťo G.)
Väčšina z vás prišla na to, že žiadne dvojciferné prvočíslo nemôže končiť ciframi 2, 4, 5 a 6 (ani 8, tú zjedol Rúža), pretože ak končí cifrou 5, je deliteľné 5-kou, inak je deliteľné 2-kou. Keďže máme vytvárať štvorice dvojciferných prvočísel, tak cifry 2, 4, 5 a 6 nemôžu byť na mieste jednotiek. Preto všetky musia byť na mieste desiatok. To znamená, že cifry 1, 3, 7 a 9 musia byť na mieste jednotiek. Keď už o každej cifre vieme, či bude na pozícii jednotiek alebo desiatok, nezáleží na tom, ako tieto cifry skombinujeme, vždy nám hľadaný súčet vyjde rovnaký, a to $2 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 1 + 3 + 7 + 9 = 190$. Časť z vás túto fintu odhalila, tým ale riešenie nie je kompletné, lebo nezaručíme, že aspoň jedna takáto štvorica prvočísel existuje. Ak totiž neexistuje, znamená to, že Foto nechal stenu nedotknutú. Bolo teda potrebné aspoň jednu štvoricu nájsť – keďže vyhovujúce boli štyri, mohli ste si vybrať z možností 23-41-59-67, 23-47-59-61, 29-41-53-67, 29-47-53-61.

Poznámka: Úlohu ste mohli riešiť aj systematickým vypisovaním možností, ktoré tiež viedlo k riešeniam – ale iba v tom prípade, že ste to urobili bez chyby. Ak ste však nedokázali, že všetky potenciálne štvorice dávajú rovnaký súčet, vyžadovali sme, aby ste našli všetky riešenia. Čo ak by zanedbanie nejakej možnosti viedlo k inému číslu napísanému na stene?

Úloha č. 4: *Na vybratie vhodného šéfa KMS bola zostavená komisia pozostavajúca z deviatich členov. Mali vybrať z troch kandidátov. Volili nasledovným spôsobom: Každý člen komisie si zostaví poradie kandidátov, prvému dá tri body, druhému dva body a poslednému jeden bod. Keď boli body sčítané, zistilo sa, že každý kandidát získal iný počet bodov a teda poradie bolo jasne určené. Jeden člen komisie si však všimol, že keby každý člen komisie vybral iba jedného kandidáta, konečné poradie by bolo presne opačné. Koľko bodov získali jednotliví kandidáti?*

Riešenie: (opravovali ZuzkaM a Buggo)
Našou úlohou je určiť výsledok volieb. Posnažíme sa teda zistiť, ako mohli hlasovať jednotliví členovia komisie, aby boli splnené podmienky zo zadania.
Najskôr sa pokúsime pozrieť na náš hlasovací systém a odhaliť nejaké základné zákonitosti, ktoré v ňom platia. Každý z členov komisie udelí vždy šesť bodov (tri prvému, dva druhému a jeden tretiemu kandidátovi podľa svojich preferencií). Komisia spolu udelí vždy $6 \cdot 9 = 54$ bodov.
Pozrime sa teraz na víťaza volieb. Aby niekto mohol vyhrať, musí nutne dostať viac ako tretinu všetkých bodov. (Rozmyslite si, prečo je to tak.) Pre nás to znamená aspoň 19 bodov. Naopak kandidát, ktorý skončil na treťom mieste, mohol dostať najviac 17 ($= 54/3 - 1$) bodov. (Opäť si to rozmyslite. :))
Teraz sa pokúsime zistiť, čo by malo platiť, aby pri druhom type hlasovania dopadli voľby naopak.
Keby každý z členov komisie volil iba jedného kandidáta, komisia by spolu rozdelila deväť hlasov. Na výhru by bolo opäť potrebné získanie viac ako tretiny všetkých hlasov. V tomto prípade by víťaz potreboval aspoň štyri hlasy.
Označme si kandidáta, ktorý v skutočnosti vyhral, Adam, druhého Braňo, tretieho Cyril.
Keby každý člen komisie hlasoval iba za jedného človeka, zadanie hovorí, že poradie by bolo opačné a vyhral by Cyril. To znamená, že Cyril by z deväť hlasov dostal aspoň štyri. Čiže minimálne štyria členovia komisie by dali Cyrila na prvé miesto. Z toho vyplýva, že v skutočnosti získal Cyril najmenej $4 \cdot 3 + 5$ bodov (od štyroch členov po tri body a od ostatných piatich členov jeden bod za tretie miesto na zozname), t.j. 17 bodov. Viac získať nemohol, lebo ako ste určite zistili sami, ak by získal viac, už by nebol tretí.
Kandidáti Adam a Braňo si museli rozdeliť zvyšných $54 - 17 = 37$ bodov. Nakoľko bol Adam prvý, musel získať aspoň 19 bodov. Potom by Braňo získal 18 bodov (lebo $37 - 19 = 18$). Toto je zároveň aj jediné možné rozdelenie bodov medzi Adama a Braňa: keby mal Adam viac, Braňo by musel mať menej a tým pádom by nebol druhý (resp. poradie kandidátov by nebolo jednoznačne určené).
Dostali sme teda jediné riešenie: Víťaz získal 19 bodov, druhý v poradí mal 18 a tretí 17 bodov. Na záver by sa ešte patrilo ukázať, že takéto rozdelenie hlasov aj naozaj existuje. (Nájdite ho.)

Úloha č. 5:
a) Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $2^n - 1$ aj $2^n + 1$ sú prvočísla.
b) Nájdite všetky prvočísla p také, že $4p^2 + 1$ aj $6p^2 + 1$ sú prvočísla.

Riešenie: (opravovali Lenka, Mišáč, Kenny)
a) Prvočísla sa vyznačujú tým, že nemajú žiadnych deliteľov okrem seba a jednotky. Preto budeme skúmať deliteľov čísel $2^n - 1$ a $2^n + 1$. Vypíšeme si takéto dvojice pre niekoľko hodnôt n. Pre $n = 1, 2, 3, 4, 5$ to budú dvojice $(1, 3), (3, 5), (7, 9), (15, 17), (31, 33)$. Okrem iného si môžeme všimnúť, že vždy aspoň jedno z čísel vo dvojici je deliteľné tromi. Toto tvrdenie teraz dokážeme pre každé prirodzené číslo n. Pri tom využijeme, že $2^n - 1$ a $2^n + 1$ sú čísla skoro rovné 2^n, len jedno z nich je o jedna menšie a druhé o jedna väčšie.
Vezmime si čísla $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$. Vieme, že sú to tri po sebe idúce prirodzené čísla. Každé tretie prirodzené číslo je deliteľné tromi. To znamená, že práve jedno z čísel $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ musí byť deliteľné tromi. Číslo 2^n nie je deliteľné tromi, pretože je deliteľné len mocninami dvojky. Z toho vyplýva, že jedno z čísel $2^n - 1$, $2^n + 1$ je deliteľné tromi. Tieto čísla majú byť prvočísla. Jediné prvočíslo deliteľné tromi je číslo 3. Teda buď $2^n - 1$ alebo $2^n + 1$ musí byť 3. Ak $2^n - 1 = 3$, tak $n = 2$ a skutočne $2^n - 1$ aj $2^n + 1$ sú prvočísla. Ak $2^n + 1 = 3$, tak $n = 1$ a $2^n - 1$ nie je prvočíslo. Jediným riešením je preto $n = 2$.

b) Vidíme, že v predošlom prípade nám pomohla deliteľnosť číslom 3 Opäť máme skúmať prvočísla, nuž pri deliteľnosti zostaneme. Vypíšeme si čísla $4p^2+1$, $6p^2+1$ pre niekoľko prvých prvočísel p.

p	$4p^2+1$	$6p^2+1$
2	17	25
3	37	55
5	101	151
7	197	295
11	485	727
13	677	1015

Môžeme si všimnúť, že vždy je jedno z čísel $4p^2+1$, $6p^2+1$ deliteľné piatimi. (Až na prípad $p=5$.) Preto skúsme rozobrať deliteľnosť číslom 5 (v nasledujúcom $k \in \mathbb{N}_0$) :
Ak $p=5k$, tak p je prvočíslo jedine v prípade $p=5$. Pre $p=5$ ľahko overíme, že $4p^2+1$, $6p^2+1$ sú prvočísla.
Ak $p=5k+1$, tak $4p^2+1=100k^2+40k+5=5(20k^2+8k+1)$.
Ak $p=5k+2$, tak $6p^2+1=150k^2+120k+25=5(30k^2+24k+5)$.
Ak $p=5k+3$, tak $6p^2+1=150k^2+180k+55=5(30k^2+36k+11)$.
Ak $p=5k+4$, tak $4p^2+1=100k^2+160k+65=5(20k^2+32k+13)$.
Vidíme, že vo všetkých prípadoch okrem $p=5k$ je vždy jedno z čísel $4p^2+1$, $6p^2+1$ deliteľné piatimi. Ešte by sa mohlo stať, že jedno z čísel $4p^2+1$ alebo $6p^2+1$ bude 5. Ľahko však overíme, že takáto situácia nemôže nastať. Jediným riešením je $p=5$.

Úloha č. 6: *Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n+200$ aj $n-269$ sú tretie mocniny prirodzených čísel.*

Riešenie: (opravovali Čolka a Erika)
Našou úlohou je nájsť všetky také n, aby čísla $n-269$ a $n+200$ boli tretie mocniny nejakých prirodzených čísel. Mohli by sme si vypísať všetky n, vyrátať $n-269$, $n+200$ a skúšať, či sú tretími mocninami. No to by sme nezvládli, keďže prirodzených čísel je nekonečne veľa. Preto musíme uvažovať inak. Keď si spomenieme na druhé mocniny, vieme, že sú od seba čoraz viac vzdialené. S tretími mocninami je to podobne, preto vhodných n nebude veľa. Uvedieme dva spôsoby, ako sa dali nájsť vyhovujúce n.

1. riešenie:
Toto riešenie je intuitívne, no jeho korektné zdôvodnenie bude vyžadovať trochu námahy. Predpokladajme, že sme vhodné n našli, pričom $n-269=a^3$ a $n+200=b^3$, kde a, b sú prirodzené čísla. Potom vieme, že $b^3-a^3=469$. Postupujme spätne, teda budeme voliť a a dopočítavať b. Ak bude b prirodzené číslo, našli sme riešenie (vieme, že $b=\sqrt[3]{a^3+469}$). Po dosadení čísel $1, 2, 3, \ldots, 13$ za a nájdeme iba jedno riešenie, a to pre $a=12$. Vtedy má príslušné b hodnotu 13 a hľadané n je rovné $12^2+269=1997$. Ešte zostáva nájsť ďalšie riešenia alebo dokázať, že nájdené riešenie je jediné.
Pri rátaní hodnôt a^3 sme si všimli, že vzdialenosti medzi nimi boli čoraz väčšie (pričom vzdialenosť chápeme ako rozdiel čísel). Pre $a=12$ platí $(a+1)^3-a^3=469$. Chceli by sme ukázať, že už neexistuje žiadna iná dvojica a, b tak, aby platilo $b^3-a^3=469$. Dokážme, že neexistuje žiadna iná dvojica dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel y a $y+1$, pre ktorú platí $(y+1)^3-y^3=469$. Pre $y<12$ sme to overili, pre $y=12$ nastáva rovnosť, ostávajú $y>12$. Dokážme, že pre ľubovoľné $y>12$ platí $(y+1)^3-y^3>469$. Ľahko možno nahliadnuť, že pre ľubovoľné tri po sebe idúce prirodzené čísla $x-1$, x, $x+1$ platí

$$x^3-(x-1)^3<(x+1)^3-x^3$$

(t. j. číslo $(x-1)^3$ je k číslu x^3 bližšie ako číslo $(x+1)^3$), pretože táto nerovnosť je po úprave ekvivalentná s nerovnosťou

$$3x^2-3x+1<3x^2+3x+1.$$

Po ďalšej ekvivalentnej úprave dostaneme $0<6x$, a teda nerovnosť naozaj platí pre všetky kladné čísla x. Z toho vyplýva, že rozdiely tretích mocnín susedných čísel sa zväčšujú. Týmto sme dokázali, že pre žiadnu dvojicu x, $x+1$ po sebe idúcich prirodzených čísel (rôznych od 12, 13) neplatí $(x+1)^3-x^3=469$. Ostáva ukázať, že nemôžeme mať riešenie medzi číslami, ktoré nie sú po sebe idúce. Zrejme nemá zmysel voliť $a>13$. (Rozmyslite si, prečo je to tak; využite pri tom dokázanú nerovnosť.) A čísla a menšie ako 13 sme všetky overili na začiatku riešenia.
Úloha má jediné riešenie, a to $n=1997$.

2. riešenie:
Označme $n-269=a^3$ a $n+200=b^3$. Potom vieme, že $b^3-a^3=469$, čiže

$$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)=469.$$

Keďže a, b sú prirodzené čísla, pričom $a<b$, tak aj výrazy $b-a$, b^2+ab+a^2 sú prirodzené čísla. Číslo 469 sa teda rovná súčinu dvoch prirodzených čísel. Z rozkladu čísla 469 na prvočísla zistíme, že sú len štyri možnosti, ako ho rozložiť na súčin dvoch prirodzených čísel. (V podstate sú možnosti len dve, ale treba ešte prihliadnuť na poradie čísel v súčine.)

1) $b-a=1$ a súčasne $b^2+ab+a^2=469$;

2) $b - a = 7$ a súčasne $b^2 + ab + a^2 = 67$;

3) $b - a = 67$ a súčasne $b^2 + ab + a^2 = 7$;

4) $b - a = 469$ a súčasne $b^2 + ab + a^2 = 1$.

Možnosti 2), 3), 4) nevedú k riešeniu v prirodzených číslach. (Prečo?) Po dosadení $b = a + 1$ do druhého výrazu v možnosti 1) dostávame kvadratickú rovnicu, ktorej riešením je $b = 13$ a $b = -12$. Keďže b je prirodzené číslo, zostáva iba možnosť $b = 13$, následne $a = 12$ a $n = 1997$.

Úloha č. 7: *Na sústredení bolo 33 účastníkov. Každý účastník odpovedal na dve otázky: „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým krstným menom?" a „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým priezviskom?". Medzi odpoveďami sa každé z čísel* 0 *až* 10 *vyskytovalo aspoň raz. Ukážte, že na sústredení museli byť dvaja účastníci s rovnakým krstným menom aj priezviskom.*

Riešenie: (opravovali Ondrík, Hanka a Miťo)
Čo znamená, keď niekto na otázku: „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým krstným menom ako ty?" odpovie nejaké číslo m? Keďže nik z nich neklame, to isté meno ako on má ešte ďalších m ľudí, a teda tiež odpovedia m. Pre otázku s priezviskom platí to isté. Teda ak vieme, že zaznelo číslo m, tak zaznelo aspoň $(m+1)$-krát. Dôležité je uvedomiť si, že číslo m mohlo zaznieť aj viackrát. Napríklad v situácii, keď máme troch Mišov a troch Ferov (vtedy by číslo 2 zaznelo aspoň šesťkrát).
Ďalšou podmienkou v zadaní je, že každé z čísel nula až desať zaznelo medzi odpoveďami aspoň raz. Teda, ako sme si už ukázali, budeme mať aspoň jedenkrát odpoveď nula, aspoň dvakrát odpoveď jeden, ..., aspoň jedenásťkrát odpoveď desať. Takže už poznáme $1+2+3+\cdots+11 = 66$ odpovedí, ktoré zazneli. Teraz nás už len zaujíma, koľko odpovedí zaznelo celkovo. Každý účastník odpovedal na dve otázky a to je $33 \cdot 2 = 66$ odpovedí. Takže z celkového počtu 66 odpovedí už presne poznáme 66. A preto nemohla zaznieť žiadna iná odpoveď, čiže odpoveď nula padla práve raz, jeden práve dva razy, ..., desať práve jedenásť ráz. Uvedomme si, že tých $m + 1$ ľudí, čo odpovedalo na jednu z otázok číslo m, museli odpovedať na tú istú otázku a musia mať spoločné meno, resp. priezvisko. Takto dostávame jedenásť rôznych skupín ľudí s rovnakým menom, resp. priezviskom s počtami členov $1, 2, \ldots, 11$. V tomto momente sme už na dobrej ceste k vyriešeniu tejto úlohy. Existuje viacero spôsobov, ako postupovať.
Hlavnou myšlienkou prvého z nich je uvedomiť si, že máme skupinu jedenástich ľudí s rovnakým menom (priezviskom). Aby sa každý z nich volal ináč, musí mať každý z nich iné priezvisko (meno). To sa však nedá, pretože máme už len desať zvyšných skupín a teda najviac desať rôznych priezvisk (mien). Preto nejakí dvaja z 11-člennej skupinky majú rovnaké meno aj priezvisko.
V druhom spôsobe sa zamyslíme nad tým, koľko rôznych kombinácií meno-priezvisko vieme vôbec z tých 11 skupín vytvoriť. Nech na prvú otázku zaznelo a rôznych odpovedí, čiže máme a rôznych druhov mien, a teda $11 - a$ rôznych druhov priezvisk. Teda vieme vytvoriť maximálne $a(11 - a)$ rôznych „celých" mien (rôznych dvojíc meno-priezvisko). Vyskúšajte si, aké čísla vám vyjdú, keď dosadíte $a = 0, 1, 2, \ldots, 11$. Dôležité je to, že to bude vždy menej ako 33, a preto medzi nimi museli byť dvaja ľudia s rovnakým menom aj priezviskom.

Iné riešenie:
K správnemu riešeniu sa dalo dopracovať aj bez znalosti presného počtu mien (priezvisk). Poďme na to sporom. Predpokladajme, že nemáme žiadnu dvojicu ľudí s rovnakým menom aj priezviskom. Vieme, že zazneli odpovede 7, 8, 9, 10 a teda máme skupinky po 8, 9, 10 a 11 ľudí, ktorí majú spoločné meno alebo priezvisko. Označme si tie skupinky A, B, C, D. Chceme ich „rozhodiť" medzi mená a priezviská. Ako to môže vyzerať? Niektoré z nich (povedzme, že ich bude n) sa budú týkať mien. Ostatné (zrejme ich bude $4 - n$) sa budú týkať priezvisk. Položme si otázku, koľko najviac účastníkov patrí do dvoch z týchto skupín? Keďže predpokladáme, že žiadni dvaja nemajú rovnaké meno aj priezvisko, je ich najviac $n(4-n) \leq 4$. (Rozmyslite si, prečo. A nasledujúcu vetu si čítajte dovtedy, kým ju nepochopíte. :)) Keď si zrátame veľkosti všetkých štyroch skupiniek, teda $11 + 10 + 9 + 8 = 38$, a okrem toho vieme, že maximálne štyria sú v dvoch skupinkách, tak najviac štyroch účastníkov sme zarátali dvakrát. Z toho nám vyplýva, že na sústredení je aspoň 34 účastníkov, čo je spor. Teda existujú dvaja, ktorí sa volajú úplne rovnako.

Komentár: Asi najťažšie na tomto príklade bolo správne si utriediť myšlienky a zrozumiteľne sa vyjadrovať (aj pre nás :)). Toto bolo problematické hlavne pri dôkaze toho, že odpovede nula až desať odzneli práve 1 až 11−krát. Zvyšok úlohy už nebol až tak náročný na správnu formuláciu, skôr na dobrý nápad. Zaujímavé na tomto príklade je ešte fakt, že priraďovanie odpovedí k prvej a druhej otázke vás skôr zmiatlo ako pomohlo príklad vyriešiť. Mnohí z vás sa stratili v rozoberaní možností a dobré úvahy, ktoré platili všeobecne, používali len na konkrétne prípady. Jazykové okienko: priezvisko a nie priezvysko. A ešte by sme vás chceli pochváliť za krásny tvar „Zúzok".

Úloha č. 8: *V zástupe je $2n$ bielych a $2n$ čiernych lôpt. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sú usporiadané, je vždy možné nájsť $2n$ za sebou idúcich lôpt, z ktorých práve n je bielych.*

Riešenie: (opravovali Miki a Ajka)
Najprv sa dohodnime, že $2n$-ticu lôpt, ktorá začína prvou loptou a končí $2n$-tou loptou, budeme nazývať *prvou* $2n$-ticou. *Druhá* $2n$-tica bude začínať druhou loptou a končiť $(2n + 1)$-vou loptou. A tak ďalej, až *posledná* $2n$-tica bude od $(2n + 1)$-vej lopty po $4n$-tú loptu. Nech je v prvej $2n$-tici x bielych lôpt. Potom vieme, že v poslednej $2n$-tici bude $2n - x$ bielych lôpt, pretože všetkých bielych lôpt je spolu $2n$ a prvá a posledná $2n$-tica spolu obsahujú všetky lopty. Máme tri možnosti, akú hodnotu môže x nadobúdať:

1) Ak $x = n$, tak aj $2n - x = n$. V tomto prípade máme hneď v prvej $2n$-tici n bielych lôpt, takže úloha je splnená.

2) Ak $x > n$, tak $2n - x < n$. Najskôr sa pozrieme na prvých $2n$ lôpt. Medzi nimi je x bielych. Teraz zistíme, koľko bielych lôpt môže byť v druhej $2n$-tici. Ako sa zmení počet bielych lôpt pri prechode z prvej do druhej $2n$-tice? Druhá $2n$-tica obsahuje tie isté prvky ako prvá, až na to, že sa prvá lopta nahradí $(2n + 1)$-vou loptou. Pritom sa môže (ale nemusí) zmeniť počet bielych lôpt. Ak nahradíme bielu loptu bielou, alebo čiernu čiernou, tak sa počet bielych lôpt nezmení. Keď nahradíme bielu loptu čiernou, počet bielych lôpt o jednu klesne. A keď nahradíme čiernu loptu bielou, počet bielych lôpt o jednu stúpne. Vždy sa ale zmení najviac o jedna. V prvej $2n$-tici je počet bielych menší ako n a v poslednej je tento počet väčší ako n. Takže potrebujeme zväčšiť počet bielych lôpt. To ale vieme vždy najviac o jedna. A to znamená, že keď začneme v prvej a postupne prechádzame až do poslednej, určite musíme prejsť cez $2n$-ticu, v ktorej bude n bielych lôpt, pretože $x > n > 2n - x$.

3) Ak $x < n$, tak $2n - x > n$. Tu budeme postupovať v podstate rovnako ako v predchádzajúcom prípade. Na začiatku máme $x < n$ lôpt. Na konci $2n - x > n$ lôpt. To ale znamená, že keď sa budeme posúvať od prvej $2n$-tice po poslednú, musíme prejsť cez hodnotu $x = n$. (Z rovnakého dôvodu ako predtým – lebo pri presune z jednej $2n$-tice do druhej zväčšujeme počet bielych lôpt najviac o jedna.)

Vo všetkých troch prípadoch sme dokázali, že existuje $2n$-tica, ktorá obsahuje n bielych lôpt. Tým sme splnili úlohu. Ešte možno niekoho trápi, ako sa na takéto niečo dá dôjsť... Odpoveď je, že to nie je také jednoduché, ako to vyzerá z hotového riešenia, ale po chvíli snahy o nakreslenie takého radu lôpt, kde táto vlastnosť neplatí, to už začne byť podozrivé, priam až intuitívne jasné. A potom si treba už len všímať, kde to nesedí a prečo to vlastne nejde a poriadne to vysvetliť.

Úloha č. 9: *Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z také, že platí*

$$2^x + 3^y = z^2.$$

Riešenie: (opravovali Zuska a Miško)
Keby sme mali rovnicu riešiť v reálnych číslach, stačí zvoliť čísla x, y a dorátať z. To sa vždy dá, lebo ľavá strana rovnice je kladné číslo.
Ale my navyše požadujeme, aby číslo z bolo celé. Skúsme dosadiť trebárs $x = y = 1$. Potom $5 = z^2$. Ale celé číslo z spĺňajúce poslednú rovnosť neexistuje. Skúsme sa pozrieť na úlohu takto: pre ktoré x, y bude ľavá strana druhou mocninou prirodzeného čísla? Takto sme sa vlastne zbavili jednej neznámej. (To neznamená, že sa k nej nemôžeme vrátiť. Spravíme to, kedykoľvek bude potrebné.) Skúsime odvodiť nejaké nutné podmienky, ktoré musia čísla x a y spĺňať.
Najprv vybavíme záporné čísla. Všimnime si, že ak je riešením rovnice trojica x, y, z, tak je riešením aj trojica $x, y, (-z)$. Taktiež je jasné, že x a y nemôžu byť záporné, pretože potom by súčet zlomkov na ľavej strane rovnice nikdy nebol celé číslo. (Rozmyslite si, prečo.) Čiže v ďalšom nám stačí zaoberať sa len nezápornými trojicami x, y, z (všimnime si, že z nikdy nebude rovné 0, pretože na ľavej strane rovnice je súčet dvoch kladných čísel).
Predpokladajme preto, že $x > 0$ a $y > 0$. Ako sme povedali, ideme odvodiť nejaké podmienky pre x a y. Čím sa vyznačujú druhé mocniny? Napríklad nemôžu končiť na hocijakú cifru. (Vyskúšajte si to; na akú cifru môže končiť druhá mocnina prirodzeného čísla v desiatkovej sústave?) Posledná úloha bola o skúmaní zvyškov po delení desiatimi. V našom prípade skúsime zvyšky, ktoré sa nám budú ľahko rátať. Z pohľadu na ľavú stranu rovnice je jasné, že to budú zvyšky po delení mocninami dvojky či trojky. Toto je plán, ktorý skúsime realizovať. Osvedčili sa zvyšky delení po 3 a 4 (zo zvyškov po delení dvomi vieme len to, že z je nepárne, čo je primálo).
Člen 2^x dáva po delení troma zvyšok 1 pre x párne a zvyšok 2 pre x nepárne. Člen 3^y dáva po delení troma zvyšok 0. No a z^2 dáva zvyšky 0, 1 (0 pre z deliteľné troma, 1 pre ostatné). Z toho ale vyplýva, že x musí byť párne. (Keby nebolo, potom by 2^x dávalo zvyšok 2 a nijako by sme nevedeli dostať rovnosť.)
Všímajme si teraz zvyšky po delení štyrmi. Člen 2^x dáva zvyšok 2 a 0 (2 pre $x = 1$, 0 pre ostatné kladné čísla). Člen 3^y dáva pre párne y zvyšok 1 a pre nepárne 3. Nakoniec z^2 dáva zvyšky 0 a 1 (0 pre párne, 1 pre nepárne). Keďže už vieme, že x je párne, môžeme prípad $x = 1$ vylúčiť a teda 2^x nám dáva zvyšok 0. Z toho však vieme, že y musí byť párne, lebo inak by sme na pravej strane rovnice nedostali zvyšok 0 alebo 1.
Môžeme teda našu rovnicu prepísať do tvaru

$$2^{2k} + 3^{2l} = z^2, \tag{1}$$

a upraviť na

$$3^{2l} = (z - 2^k)(z + 2^k).$$

(Pritom sme použili, že $x = 2k$ a $y = 2l$.) Ľavá strana v poslednej rovnici je mocnina trojky, teda aj pravá strana musí byť mocnina trojky. To znamená, že obidva činitele na pravej strane sú mocninami trojky. Ak by $(z - 2^k)$ bolo rôzne od 1, potom by muselo byť $(z + 2^k) - (z - 2^k) = 2 \cdot 2^k$ deliteľné troma (odčítavame od seba dve mocniny trojky), čo nemôže byť. Preto $z - 2^k = 1$ (alebo $z = 2^k + 1$). Čiže rovnicu (1) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} 2^{2k} + 3^{2l} &= (2^k + 1)^2, \\ 3^{2l} &= (2^k + 1 - 2^k)(2^k + 1 + 2^k), \\ 3^{2l} &= 2 \cdot 2^k + 1, \\ (3^l - 1)(3^l + 1) &= 2^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Sme v podobnej situácii ako pred chvíľou. Na pravej strane máme mocninu dvojky, teda aj na ľavej strane musí byť mocnina čísla 2. Čiže obidva činitele na ľavej strane sú mocninami dvojky. Zjavne $3^l - 1 \neq 1$ a pre $l > 1$ nemôžu byť súčasne $3^l - 1$ aj $3^l + 1$ mocninami dvojky. (Medzi mocninami dvojky je rozdiel 2 len v prípade $2^2 - 2^1$, čo ale nie je náš prípad, lebo $l > 1$.) Ostal nám teda prípad $l = 1$, kde dostávame riešenie $x = 4$, $y = 2$, $z = 5$ (resp. $z = -5$).

Nakoniec nám ostalo vyriešiť, čo ak $x = 0$ alebo $y = 0$. Ak $x = 0$, dostávame postupne

$$1 + 3^y = z^2$$

$$3^y = (z - 1)(z + 1).$$

Z toho podobnou analýzou ako v predchádzajúcom dostaneme riešenia $z = 2$ (resp. $z = -2$) a $y = 1$. Ak $y = 0$, tak dostaneme $2^x = (z - 1)(z + 1)$, z čoho dostaneme riešenie $x = 3$ a $z = 3$ (resp. $z = -3$).

Všetky riešenia tejto rovnice teda sú $(0, 1, 2), (0, 1, -2), (3, 0, 3), (3, 0, -3), (4, 2, 5), (4, 2, -5)$.

Poznámka: Pri riešení rovnice (1) môžeme postupovať aj inak. Naša rovnica je v tvare $a^2 + b^2 = c^2$. Trojice (a, b, c), ktoré sú riešením tejto rovnice, sa nazývajú *pytagorejské* (prečo asi?). Je známe[1], že takéto trojice sú v tvare $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ pre nejaké prirodzené čísla m, n s vlastnosťou $m > n$. Z tohto sa dá rýchlo dorobiť riešenie našej rovnice: číslo $2mn$ zodpovedá jednému z členov na ľavej strane, a nakoľko je to číslo párne, musí to byť člen 2^x. Z toho máme, že čísla m, n sú mocninami dvojky. Zvyšok prenechávame čitateľovi.

Úloha č. 10: *Numizmatik Kristián Príslovka má 241 mincí s celkovou hodnotou 360 toliarov. (Hodnota každej mince v toliaroch je prirodzené číslo.) Môže si byť Kristián Príslovka istý, že vie tieto svoje mince rozdeliť na tri kôpky s rovnakou hodnotou?*

Riešenie: (opravovali Bebe a Rasťo)

Všetky vaše správne riešenia boli podobné v tom, že ste vymysleli spôsob, ako to urobiť pre ľubovoľnú sadu mincí a dokázali, že je to naozaj správne. Kristián Príslovka si preto môže byť istý. Pri tom ste väčšinou potrebovali nasledujúce dve základné veci: Akú najväčšiu hodnotu môže mať niektorá z mincí? Aké je minimálne množstvo jednotoliarových mincí?

Odpoveď na prvú otázku je 120. Ak by sme mali mincu, ktorá by mala väčšiu hodnotu, tak zvyšných 240 mincí by nám k súčtu prispelo hodnotou aspoň 240, a preto by sme spolu mali mince v hodnote viac ako 360, čo je v spore so zadaním.

Intuitívne sa zdá, že najmenej jednotoliarových mincí bude práve vtedy, keď ostatné mince budú dvojtoliarové (teda budú čo najmenšie). V takom prípade nám vyjde 122 jednotoliarových mincí. A naozaj. Ak by sme ich chceli mať k ($k < 122$), tak by spolu so zvyšnými $241 - k$ mincami, z ktorých každá má hodnotu aspoň dva, dávali súčet aspoň $k + 2 \cdot (241 - k) = 482 - k$, čo je pre $k < 122$ väčšie ako 360 a teda znovu dostávame spor so zadaním.

Našli ste viacero pekných spôsobov. Ukážeme si dva z nich.

V prvom prípade budeme kôpky tvoriť nasledovne. Na prvú dáme 120 jednotoliaroviek. Na druhú a tretiu kôpku dáme mince rovnomerne a to tak, aby sa pri presune aspoň jednej mince z tretej kôpky na druhú, alebo z druhej na tretiu vymenila nerovnosť medzi hodnotami kôpok na opačnú (ak bola väčšia druhá, bude väčšia tretia a naopak). Ak je teraz na oboch kôpkach 120 toliarov, tak sme našli to správne rozostavenie. Ak nie, tak z väčšej kôpky vezmeme mincu v hodnote x, ktorá nám menila nerovnosť. Tým druhá a aj tretia kôpka budú menšie alebo rovné ako 120. Túto zobratú mincu dáme na prvú kôpku a z prvej kôpky vezmeme x jednotoliaroviek (to všetko môžeme spraviť, lebo každá minca má hodnotu menšiu alebo rovnú ako 120 a na prvej kôpke máme 120 jednotoliaroviek) a tie už podľa potreby rozdelíme medzi druhú a tretiu kôpku, aby na každej bolo 120.

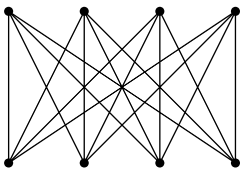
Druhý spôsob je zaujímavý v tom, že dokazuje zároveň silnejšie tvrdenie. Kristián by vedel rozdeliť 241 mincí v hodnote 360 dokonca tak, že na jednej kôpke by boli len jednotoliarovky. Začnime tým, že prvých 120 jednotiek dáme na prvú kôpku. Ostalo nám 121 mincí v hodnote 240 toliarov. Teraz použijeme trik, ktorý je veľmi užitočné poznať, lebo sa dá často použiť. Označme si naše mince postupne a_1, a_2, … a_{121}. Ďalej si postupne súčty označme takto: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, … $s_{121} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{121}$. Potom súčet mincí medzi i-tou a j-tou mincou vrátane je $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = s_j - s_{i-1}$. Máme 121 súčtov, pre ktoré platí $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{121}$ a zároveň z Dirichletovho princípu existujú aspoň dva z nich, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení 120. Keďže sú navyše rôzne a v rozpätí menšom ako 240, tak majú rozdiel presne 120. Označme si ich s_z a s_k ($s_z < s_k$). Zoberieme teraz mince a_{z+1}, a_{z+2}, … a_k. Majú súčet $s_k - s_z = 120$, a preto ich môžeme dať na druhú kôpku. Na tretiu nám potom ostali zvyšné mince. (Tiež v hodnote 120 toliarov.)

Úloha č. 11: *Na ostrove žije n domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden*

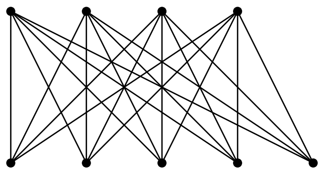
[1] napr. `http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple`

kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.
a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Riešenie: (opravovali Bus a Škrečok)
V tejto úlohe sa pracovalo s ostrovom, na ktorom žije n domorodcov, z ktorých niektorí sa priatelia a niektorí nie. Ako si väčšina z vás všimla, takáto situácia sa dá jednoducho znázorniť na papieri. A to napríklad tak, že si nakreslíme obrázok s n vrcholmi (body, krúžky), ktoré predstavujú domorodcov, a spojíme úsečkami práve tých domorodcov, ktorí sa priatelia. V matematickej reči sa takémuto obrázku zvykne hovoriť graf (pozor, nie je to to isté čo graf funkcie). Úsečky medzi vrcholmi sa nazývajú hrany. Takéto znázornenie budeme používať aj vo zvyšku vzorového riešenia. Všimnite si, že pojmy použité na označovanie častí grafu vychádzajú z pojmov používaných pre mnohosteny. Skúste si nakresliť kocku či štvorsten. Ako kreslíte vrcholy, hrany, steny?
Poďme teraz k samotnému riešeniu úlohy.
a) Prvá časť bola veľmi jednoduchá, čo aj niekoľkých z vás zmiatlo a snažili ste sa tu nájsť nejaký chyták. Odpoveďou je, že domorodci môžu skutočne vždy splniť náčelníkov rozkaz. Stačí, ak si každí dvaja domorodci, ktorí sa priatelia, navlečú na náhrdelník kamienok rovnakej farby, ale taký, aký už žiadni iní domorodci nemajú. Takto budú mať dvaja domorodci, čo sa priatelia, vždy aspoň jeden rovnaký kamienok, ale dvaja, ktorí sa nepriatelia, rovnaké kamienky mať nebudú.
b) Skôr ako sa pustíme do riešenia druhej časti úlohy, skúsme si sformulovať naše zadanie v reči teórie grafov. Už sme si povedali, ako sa znázornia domorodci a ich priateľstvá. V úlohe však ešte vystupujú náhrdelníky s farebnými kamienkami. Najjednoduchším spôsobom, ako to zaznačit do obrázka, je ofarbiť každý vrchol všetkými tými farbami, ktoré má príslušný domorodec na svojom náhrdelníku. (Jeden vrchol teda bude ofarbený aj viacerými farbami.) Aby ofarbenie vyhovovalo náčelníkovmu rozkazu, musia byť každé dva vrcholy, ktoré sú spojené hranou, ofarbené aspoň jednou spoločnou farbou, ale vrcholy, medzi ktorými hrana nie je, už žiadne dve rovnaké farby mať nemôžu.
Všimnime si teraz, že podobne ako vrcholy sa dajú ofarbiť aj hrany. Každú hranu grafu ofarbíme všetkými tými farbami, ktoré majú jej koncové vrcholy spoločné. Takto sa nám môže stať, že niektoré hrany budú ofarbené aj viacerými farbami. Dôležité však je, že každá hrana bude ofarbená aspoň jednou farbou, keďže každí dvaja domorodci spojení hranou musia mať aspoň jeden kamienok spoločnej farby.
Budeme ofarbovať vrcholy a hrany grafu tak, ako sme si tu ukázali. Začnime s riešením. Prvá vec, ktorá asi každého z vás napadla, je začať si kresliť rôzne grafy a ofarbovať ich čo najmenším počtom farieb. Ak ste mali dostatok šťastia, trpezlivosti alebo intuície, podarilo sa vám nájsť nasledujúce rozostavenie:



$n = 8$



$n = 9$

obr. 1

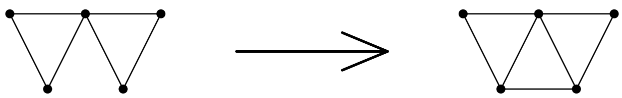
Všetci domorodci sú rozdelení na dve veľké skupiny, v rámci ktorých sa nikto s nikým nekamaráti, zato ale každý domorodec z jednej skupiny sa priatelí s každým domorodcom zo skupiny druhej.[2] Nazvime si tieto skupiny „sekty“ – pre párne n sú obe sekty rovnako veľké, pre nepárne n je v jednej z nich o jedného domorodca viac.[3]
Skúsme zistiť, aký najmenší počet farieb nám na ofarbenie tohto grafu bude stačiť. Môže sa stať, že niektoré dve hrany budú ofarbené tou istou farbou, napríklad oranžovou? Ak by boli, znamenalo by to že aj ich koncové vrcholy sú ofarbené oranžovou farbou. Tieto koncové vrcholy sú aspoň tri (normálne sú štyri, ale ak majú hrany spoločný vrchol, budú iba tri). Sekty na našom ostrove sú však iba dve, preto aspoň dva z týchto oranžových vrcholov musia byť v tej istej sekte. To je však spor, pretože v rámci sekty sa žiadne dva vrcholy nepriatelia.
Z toho vyplýva, že všetky hrany musia byť ofarbené rôznymi farbami. Počet hrán je $n^2/4$ resp. $(n^2-1)/4$ pre párne resp. nepárne n. Každá hrana je inej farby, čo znamená, že aj farieb budeme potrebovať aspoň toľko, ako hrán.
Zaujímavé na tomto konkrétnom príklade je, že počet farieb, ktorý sme takto dostali, nám už bude stačiť aj pre *ľubovoľný iný* graf s n vrcholmi. Toto ste aj mnohí vo svojom riešení napísali. Ale chýbal vám dôkaz. O ten sa viacerí z vás pokúsili – tých by sme chceli pochváliť, niektorí ste mali svoje dôkazy naozaj veľmi dobre prepracované – avšak u každého sa našla nejaká chyba. Niektoré z nich by sme vám tu radi trochu objasnili.
Veľa ľudí sa napríklad vo svojom riešení pokúšalo nájsť „najhorší“ prípad, čiže taký, v ktorom budeme musieť použiť čo najviac farieb. To samozrejme nie je chyba, veď predchádzajúcich niekoľko odsekov sme sa tu práve takémuto prípadu venovali. Problém je však v tom, že to, či je konkrétna situácia skutočne najhoršia, býva obvykle

[2] Takýto graf sa nazýva úplný bipartitný graf – bipartitný preto, lebo vrcholy sú rozdelené na dve také skupiny, že každá hrana vedie iba z jednej skupiny do druhej, nikdy nie do tej istej; úplný bipartitný zas preto, lebo z týchto „bipartitných“ hrán sa v ňom nachádza každá možná.

[3] V bipartitnom grafe vo všeobecnosti nemusia byť sekty rovnako veľké, nám sa však bude hodiť taký bipartitný graf, ktorý má čo najviac hrán. Môžete si skúsiť ukázať, že to bude práve tento.

takmer nemožné dokázať, obzvlášť pri takej zložitej situácii ako je všeobecný graf s n vrcholmi. Ako sa dá tomuto problému vyhnúť si ukážeme neskôr.

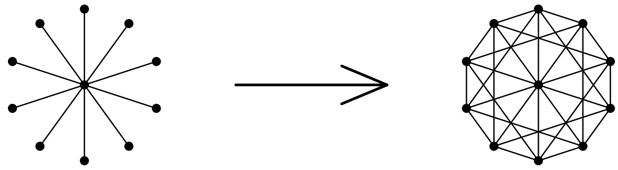
Väčšina z vás pri svojom riešení využívala nasledujúce tvrdenie: graf, v ktorom sa nachádzajú tri vrcholy všetky navzájom pospájané hranami („trojuholník“) nás nemusí zaujímať, pretože počet farieb potrebný na jeho ofarbenie určite nie je najhorší možný. Odôvodňovali ste to napríklad tým, že ak z takéhoto trojuholníka uberieme jednu hranu, počet farieb potrebných na ofarbenie nového grafu stúpne. (Prípadne naopak, pridaním hrany, ktorá vytvorí trojuholník, počet farieb potrebných na ofarbenie grafu klesne.) Zabudli ste však rozobrať všetky možné polohy ostatných hrán a tu je hneď aj jednoduchý protipríklad:



stačia dve farby treba tri farby

obr. 2

Pôvodný graf sa dal ofarbiť dvoma farbami, pridaním hrany do trojuholníka potrebný počet farieb stúpol na tri. Pre tých, ktorí by chceli namietať, že pôvodný graf už obsahoval na začiatku nejaké trojuholníky, je tu ďalšia ukážka. Majme graf ako na obrázku dole, jeden vrchol v strede spojený hranami s desiatimi vrcholmi okolo neho:



stačí 10 farieb treba 12 farieb

obr. 3

Na ofarbenie tohoto grafu nám treba desať farieb. Všimnite si, že nech pridáme hranu kamkoľvek, vznikne nám vždy nejaký trojuholník. Napravo je ten istý graf potom, ako sme k nemu pridali kopu hrán a vytvorili ešte väčšiu kopu trojuholníkov. Na upresnenie, každý vrchol na obvode je spojený s vrcholom v strede, s oboma svojimi susedmi, s vrcholmi o tri naľavo a o tri napravo, a ešte aj s vrcholom, ktorý je presne oproti nemu (aj keď túto hranu na obrázku nie je vidno, pretože splýva s hranami, ktoré vedú do stredu). Tento nový graf neobsahuje žiadne štyri vrcholy, ktoré by boli všetky navzájom pospájané hranami, preto žiadni štyria domorodci nemôžu byť ofarbení rovnakou farbou. Jednou farbou teda môžu byť vždy ofarbené najviac tri rôzne hrany (a to tiež len vtedy, ak tvoria trojuholník), hrán je tu však 35, preto budeme určite potrebovať aspoň dvanásť farieb.

Z týchto príkladov ešte nevyplýva, či treba naozaj rátať aj s tými grafmi, ktoré obsahujú trojuholníky, alebo netreba. Vidíme však minimálne toľko, že rozoberať všetky špeciálne prípady by mohlo byť v úplne korektnom dôkaze dosť namáhavé. Nám však netreba vedieť, ktorý je najhorší prípad alebo či obsahuje trojuholníky. My by sme len radi zistili, koľko farieb nám stačí na jeho ofarbenie. Vyberieme sa preto celkom odlišnou cestou, pri ktorej nám nič z toho nebude treba – cestou, ktorá býva obvykle jednoduchšia ako priamy dôkaz. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na počet vrcholov grafu. (Dala by sa použiť aj indukcia vzhľadom na počet hrán?)

Pre jednoduchosť dokážeme tvrdenie len pre nepárne n, čiže dokážeme, že pomocou $(n^2-1)/4$ farieb vieme ofarbiť ľubovoľný graf s n vrcholmi, ak je toto n nepárne. Dôkaz pre párne n je takmer rovnaký a každý z vás by ho mal po prečítaní zvyšku vzorového riešenia zvládnuť aj sám.

1° Nech $n = 1$. Chceme dokázať, že graf s jedným vrcholom vieme ofarbiť 0 farbami. Keďže v grafe s jediným vrcholom nemôžu byť žiadne hrany, nula farieb nám skutočne bude stačiť.

2° Nech sa *ľubovoľný* graf s $n = 2k + 1$ vrcholmi dá ofarbiť použitím najviac $(n^2-1)/4$ farieb. Vezmime si *ľubovoľný* graf s $n + 2$ vrcholmi a dokážme, že nám na jeho ofarbenie bude stačiť $((n+2)^2-1)/4$ farieb.

Pokiaľ tento graf neobsahuje žiadne hrany, netreba nám ani jednu farbu a teda $((n+2)^2-1)/4$ bude určite stačiť. Ak graf nejaké hrany obsahuje, vezmime si ľubovoľné dva vrcholy spojené hranou. Predstavme si na chvíľu, že tieto dva vrcholy aj spolu so všetkými hranami, ktoré z nich vychádzajú, sme z grafu vygumovali. Ostal nám graf s n vrcholmi, ktorý teraz môžeme (podľa indukčného predpokladu) ofarbiť najviac $(n^2-1)/4$ rôznymi farbami.

Primyslime si vygumované vrcholy naspäť. Zatiaľ nie sú ofarbené žiadnou farbou, čo evidentne nie je dobre, pretože ich napríklad spája jedna spoločná hrana. Tiež je celkom možné, že z nich vychádzajú aj ďalšie hrany do zvyšku grafu, ktoré zatiaľ nie sú ofarbené. Z oboch vrcholov môže vychádzať do už ofarbenej časti grafu najviac po n hrán, plus jedna spoločná hrana ich ešte spája. Najjednoduchším riešením by bolo ofarbiť každú z týchto (najviac) $2n+1$ hrán rôznou farbou – to je však príliš veľa, nevyšiel by nám indukčný krok. (Môžete si to vyskúšať.)

Treba si preto všimnúť, že nepotrebujeme ofarbiť každú hranu rôznou farbou. Ak totiž majú oba naše vygumované vrcholy spoločného priateľa, môžeme tomuto spoločnému priateľovi a obom „vygumovancom“ dať kamienok tej istej farby, čiže ofarbiť dve hrany jednou farbou. Inak povedané, každému vrcholu v už ofarbenom grafe pridáme jednu novú farbu. Túto novú farbu dáme zároveň jednému, druhému, obom alebo ani jednému z dvoch vygumovaných vrcholov podľa toho, s ktorými z nich sa priatelí a s ktorými nie. Tým vyrobíme len n nových farieb, pritom sa nám podarí ofarbiť nimi všetky hrany idúce z už predtým ofarbenej časti do vygumovaných vrcholov. Nakoniec ešte budeme potrebovať jednu ďalšiu farbu na ofarbenie hrany medzi samotnými vygumovanými vrcholmi (ktorú treba len v prípade, že títo dvaja nemali žiadneho spoločného priateľa – ale aj to sa môže stať).

Poďme to teda všetko zrátať:

$$\frac{n^2-1}{4}+n+1=\frac{n^2+4n+3}{4}=\frac{(n+2)^2-1}{4}$$

Podarilo sa nám graf s n+2 vrcholmi ofarbiť $((n+2)^2-1)/4$ farbami. To znamená, že druhý indukčný krok je hotový.

Na záver bonusová úloha. Viete dokázať, že graf, ktorý obsahuje trojuholníky, sa dá vždy ofarbiť aj menším počtom farieb, ako maximum, ktoré sme našli?

Úlohy 12 a 14 nikto nevyriešil. Keďže vás nechceme obrať o radosť z ich úspešného vyriešenia, tieto úlohy ostávajú do tretej série kategórie GAMA.

Úloha č. 12: *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech T je stred kružnice opísanej trojuholníku AOC. Bod M je stredom strany AC. Body D a E ležia po rade na priamkach AB a CB tak, že uhly MDB a MEB sú rovnako veľké ako uhol ABC. Dokážte, že priamky BT a DE sú na seba kolmé.*

Úloha č. 13: *Priamka prechádzajúca ťažiskom T trojuholníka ABC pretína stranu AB v bode P a stranu CA v bode Q. Dokážte, že*

$$4 \cdot PB \cdot QC \leq PA \cdot QA.$$

Riešenie: (opravoval Jakub)
Tvrdenie sa dalo dokázať viacerými rôznymi spôsobmi: analyticky, vhodným viacnásobným využitím sínusovej vety (takto to dokázal *Tomáš Kocák*), využitím Menelaovej vety alebo cez obsahy trojuholníkov. Pri ďalšom čítaní vzorového riešenia odporúčame kresliť si priebežne obrázky.
Nech $V = |QA|/|QC| \cdot |PA|/|PB|$. Chceme vlastne dokázať, že V je aspoň 4. Ešte treba ošetriť špeciálne prípady, keď $|QC| = 0$ alebo $|PB| = 0$ (to znamená, že PQ je ťažnicou na jednu zo strán b, c). Vtedy dokazované tvrdenie triviálne platí. (Overte to.) Ďalej budeme predpokladať, že PQ nie je ťažnicou ani na jednu zo strán b, c. Ak je priamka PQ rovnobežná s priamkou BC, tak v dokazovanom tvrdení nastáva rovnosť. Inak priamka PQ nie je rovnobežná s priamkou BC, držme sa toho.
Pozrieme sa na obrázok a všimneme si, čo máme dané a mohli by sme to nejako využiť. Napríklad vidno, že T je ťažisko, teda delí ťažnicu AS, kde S je stred BC, v pomere $2:1$. (Prečo práve túto ťažnicu? Lebo situácia je symetrická vzhľadom na zámenu vrcholov B a C. Takže ťažnica z vrchola A je špeciálna. Vhodné je celú situáciu si takto nakresliť, teda trojuholník ABC nakreslíme ako BCA.) Skúsme využiť tento pomer. Čo o pomeroch a trojuholníkoch poznáme?[4]
Označme priesečník priamok PQ a BC písmenom R. Z Menelaovej vety pre trojuholník ACS a priamku PT dostávame

$$\frac{|RB|}{|RS|} \cdot \frac{|TS|}{|TA|} \cdot \frac{|PA|}{|PB|} = 1.$$

Odtiaľ vyjadríme, že $|PA|/|PB| = 2 \cdot |RS|/|RB|$. Podobne z Menelaovej vety pre trojuholník ACS a priamku QT dostávame

$$\frac{|RC|}{|RS|} \cdot \frac{|TS|}{|TA|} \cdot \frac{|QA|}{|QC|} = 1.$$

Odtiaľ vyjadríme, že $|QA|/|QC| = 2 \cdot |RS|/|RC|$. (V predchádzajúcich rovnostiach sme využili, že všetky dĺžky v menovateľoch sú nenulové.)
Takže

$$V = \frac{4 \cdot |RS|^2}{|RB| \cdot |RC|}.$$

Už si stačí iba uvedomiť, že bod R leží na priamke BC, ale nie na úsečke BC. Preto

$$|RB| \cdot |RC| = (|RS| + |SB|) \cdot (|RS| - |SB|) = |RS|^2 - |SB|^2.$$

Odkiaľ vyplýva, že $V > 4$.

Iné riešenie:
Pomery úzko súvisia s obsahmi. Napríklad Menelaova a Cevova veta sa dajú ľahko dokázať cez obsahy[5]. Preto skúsime uvažovať o obsahoch. Pre jednoduchosť budeme symbolom $[XYZ]$ označovať obsah trojuholníka XYZ a veľkosti úsečiek budeme písať bez absolútnej hodnoty.
Pomer PA/PB poznáme práve vtedy, keď poznáme pomer PA/AB. Pritom AB je strana pevného trojuholníka ABC, bod P sa pohybuje. Stojí za pokus vyjadriť pomer PA/PB pomocou pomeru AP/AB. Okrem toho nás zaujíma pomer AQ/AC. Ako to súvisí s obsahmi? Nuž, pomer obsahov trojuholníkov APQ a ABC obsahuje vo svojom vyjadrení oba skúmané pomery (toto vyjadrenie získame z toho, že obsah trojuholníka je polovica súčinu dvoch strán a sínusu uhla nimi zovretého). Preto sa naň pozrieme podrobnejšie.
Aký je obsah trojuholníka APQ? Tento trojuholník je vlastne odrezkom uhla CAB určeným priamkou PQ prechádzajúcou pevným bodom T. Môže byť obsah takto určeného trojuholníka ľubovoľne veľký? A ľubovoľne malý? Zo všetkých zistení o tomto obsahu použijeme to, ktoré je užitočné pre pôvodný problém.
(Teraz nasleduje chvíľa práce, ktorej cieľ sme popísali v predchádzajúcich odsekoch. Ďalšie odseky zhŕňajú získané výsledky.)
Najprv dokážeme, že $[APQ]/[ABC] \geq 4/9$. Pre ostrouhlý trojuholník ABC označme E, F priesečníky strán AC, AB s rovnobežkou so stranou BC prechádzajúcou bodom T. Nech P leží vnútri BF. Potom priemet bodu P

[4] Malo by vám napadnúť čosi takéto: Cevova veta, Menelaova veta, sínusová veta, v akom pomere delí os uhla protiľahlú stranu trojuholníka?, podobnosť, obsahy, ...

[5] `http://www.math.uci.edu/~mathcirc/math194/lectures/advanced3/node2.html`

na priamku FE leží od T ďalej než F. Na druhej strane Q leží vnútri AE, preto priemet bodu Q na priamku FE je bližšie k T než E. Trojuholníky TFP a TEQ majú rovnako dlhé základne a pritom TFP má väčšiu výšku (prečo?). Takže $[APQ] > [AFE]$. Tupouhlý trojuholník ABC prenechávame na čitateľa. Trojuholníky AFE a ABC sú podobné s koeficientom $2/3$, preto pomer ich obsahov je $4/9$.

Nech
$$\frac{QC}{QA} \cdot \frac{PB}{PA} > \frac{1}{4}.$$
Z predchádzajúceho odseku vieme, že
$$\frac{AB}{AP} \cdot \frac{AC}{AQ} \leq \frac{9}{4}.$$
Vyjadríme
$$\frac{AB}{AP} = 1 + \frac{PB}{PA} \qquad \text{a} \qquad \frac{AC}{AQ} = 1 + \frac{QC}{QA}.$$
Označme $PB/PA = x$, $QC/QA = y$ a dosaďme posledné vyjadrenie do nerovnosti. Po roznásobení a odčítaní jednotky od oboch strán dostaneme
$$x + y + xy \leq 5/4.$$
Predpokladali sme, že $xy > 1/4$, preto $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 1$, takže $x + y + xy > 1/4 + 1 = 5/4$. To je spor. Ostáva prezrieť si celý postup a doriešiť niekoľko špeciálnych polôh bodov P a Q.

Poznámka: Úlohu ste väčšinou riešili využitím analytickej geometrie. Tvrdenie sa dalo aj takto dokázať bez väčších problémov. Avšak pri tomto spôsobe riešenia musíte okrem iného dávať pozor na všetky menovatele zlomkov (a aj iné „zlé“ výrazy), aby náhodou neboli 0, prípadne ak môžu byť 0, tak treba tento špeciálny prípad vyriešiť samostatne.

Úloha č. 14: *Prirodzené čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$.*
a) Dokážte, že x je deliteľné piatimi.
b) Existujú celé čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Cibiček Jozef	4.	GJH BA	6	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Herencsár Albert	2.	Gmaď GA	4	0	9	9	9	9	9				45	45
1.	Kuncová Alexandra	2.	GAlej KE	5	0	9	9	9	9	9	2			45	45
1.	Tureková Katarína	3.	GJGT BB	8	2		9	9	9	9	9			45	45
5.	Podolák Martin	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9		9	7		43	43
5.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	3	0	9	9	9	9		7			43	43
7.	Alif Maja	3.	GCelje	3	0	9	6	9	9	9				42	42
7.	Bzdušek Tomáš	4.	GPdC PN	8	2		9	9	9	8	7	5		42	42
9.	Haas Emil	2.	Gamča BA	5	0	9	8	9	9		6			41	41
9.	Hapák Samuel	3.	Gamča BA	6	4			9	9	9	7	7		41	41
9.	Szabados Michal	4.	ŠPMNDG BA	8	5			9	9	9	9	5		41	41
12.	Hojčka Michal	2.	GKom PE	4	1		9	9	9	1	9	4		40	40
13.	Biskupičová Lívia	2.	GŠkol PB	4	0	9	9	9	9	2				38	38
13.	Paulovský Michal	3.	Gamča BA	5	0	9	8	9	9	3				38	38
13.	Vancáková Judita	4.	GPoš KE	6	1		8	9	9		9	3		38	38
16.	Derňár Marek	4.	GAlej KE	6	0	9	9	9	9		1			37	37
16.	Kubina Filip	3.	GPOH DK	5	0	9	6	9	9	1	3	4		37	37
16.	Polačko Martin	2.	GAlej KE	5	0	9	7	9	9		3			37	37
16.	Simanová Lucia	3.	Gamča BA	6	0	8	6	7	9	7				37	37
16.	Vendel Dávid	2.	GPoš KE	4	0	8	9	9	9	1	2			37	37
16.	Špesová Nikola	3.	GK2 PO	7	2		6	5	9	9	8	2		37	37
22.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	7	2		5	9	9		9	4		36	36
22.	Čevorová Kristína	4.	ŠPMNDG BA	8	2		7	9	9		8	3		36	36
22.	Hollá Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	7	9	7		4			36	36
22.	Juríková Katarína	3.	GJGT BB	5	0	9	9	9			9			36	36
22.	Kočiský Tomáš	3.	Gamča BA	4	1		9	9	9	8	1			36	36

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
22.	Melo Matej	2.	GsvFA ZA	4	0	9	9	9	9	0				36	36
22.	Starovská Mária	3.	Gamča BA	8	2		9	9	9	9				36	36
29.	Petrucha Michal	2.	GMet BA	4	0	8	7	9	9		2			35	35
30.	Kovalčíková Kristína	4.	GVar ZA	10	2		6	9	9		6	4		34	34
30.	Kuzma Tomáš	2.	GAlej KE	5	0	9	7		9	7		2		34	34
30.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	10	5			9	9	9	3	4		34	34
33.	Boža Vladimír	3.	GDT PP	6	3			9	9	9	4	2		33	33
33.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	3	0	9	4	9	9		2			33	33
33.	Jursa Jakub	2.	GAlej KE	5	0	9	5	8	9	2				33	33
33.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE	6	1		8	9	9		3	4		33	33
33.	Szabadosová Emília	3.	ŠPMNDG BA	6	0	8	9	9	4	3	1			33	33
33.	Šagát Marián	3.	GŠkol PB	5	0	8	9	7		9				33	33
39.	Roháľ Branislav	3.	GŠkol PB	5	0	9	8	9	4	2	1	2		32	32
39.	Ujházi Vladislav	3.	GPJŠ RO	7	5			9	9	9		5		32	32
41.	Fekiač Jozef	2.	Gamča BA	4	0	9	7	7	5		3			31	31
41.	Jakubík Jozef	3.	GKom PE	6	1		9	9	9			4		31	31
41.	Kuklišová Nina	2.	GMet BA	5	0	8	4	9	9	0	1			31	31
44.	Hodásová Judita	2.	Gamča BA	4	0	8	4	9	9		0			30	30
45.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	2	0	8	9	9	1	2	1			29	29
45.	Hudec Vladimír	2.	GVar ZA	4	0	9	9	7	4					29	29
45.	Melicherčík Martin	3.	GPár NR	8	2		9	9	9			2		29	29
45.	Živčáková Andrea	3.	GJGT BB	4	0	8	9	9		3				29	29
49.	Hojčková Martina	4.	GJH BA	8	2		7	6	9		4	2		28	28
49.	Jablonická Kristína	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	7	9			1	2		28	28
49.	Liščinský Miroslav	2.	GAlej KE	5	0	9	7	9	1	2				28	28
49.	Lukačišin Martin	3.	GJFR LE	3	0	9	5	9	3	1	2	2		28	28
49.	Magyarová Katarína	4.	GBST LC	8	1		6	8	9	2	3	2		28	28
49.	Vdovičenko Martin	3.	GPár NR	7	2		9	9	9		1			28	28
55.	Godány Martin	4.	ŠPMNDG BA	7	1		8	9	8	2				27	27
55.	Matejovičová Lenka	3.	Gamča BA	8	2		9	9	1	4		4		27	27
57.	Dvoranová Mária	2.	G Šurany	4	0	7	7	9	1	1	2			26	26
57.	Rizman Tomáš	2.	GVar ZA	4	0	7	7	9	0	3				26	26
57.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3	0	8	8	9				1		26	26
60.	Birčák Erik	4.	ŠPMNDG BA	4	0	8	5	3	9					25	25
60.	Košinárová Alena	3.	Gamča BA	8	3				9	7	9			25	25
62.	Hajdin Michal	2.	GJH BA	4	0	7	6	9		0	2			24	24
63.	Dlabaja Petr	4.	Holešov ČR	4	0	8	4	9						21	21
63.	Vrbovská Mária	3.	GJGT BB	5	0	9	7		1	2	0	2		21	21
65.	Csiba Peter	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	1				1		20	20
65.	Dvoranová Veronika	3.	G Šurany	6	1		9	9		2				20	20
65.	Kobza Vladimír	3.	GJGT BB	5	0	5	5	8	1	0	1			20	20
65.	Žemlička Martin	4.	GLS BJ	4	0	7	7	5		1	0			20	20
69.	Bogár Ondrej	4.	GĽŠ TN	4	0	6	7	6						19	19
69.	Brída Radoslav	3.	Gamča BA	4	0	9	7		0	0		3		19	19
69.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3	0	4	9	6	0					19	19
72.	Minárik Marián	3.	GPár NR	5	1		6	7	5					18	18
72.	Šiagi Miroslav	3.	GJGT BB	4	0	4	9	5						18	18
74.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	2	0	1	7	9		0				17	17
74.	Janíková Karolína	4.	GVar ZA	6	0		5	9	0	1		2		17	17
74.	Kotrlová Katarína	2.	GVPT MT	4	0	4	7	3	3	0	0			17	17
74.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3	0	6	4	7		0	0			17	17
78.	Nemec Juraj	3.	GJGT BB	4	0	8	7		1	0				16	16
79.	Alberty Roman	3.	GJGT BB	4	0	9	5							14	14
80.	Kucbel Maroš	3.	GJGT BB	4	0	7	5							12	12
80.	Rakovská Elena	4.	GBil BA	4	0	2	0	1	4	0	3	2		12	12
82.	Szabo Martin	3.	GJGT BB	4	0	6	3			0				9	9
83.	Slovík Lukáš	3.	GJGT BB	4	0		4	3			0			7	7

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
84.	Šrámek Martin	3.	GTilg BA	4	0		6							6	6
85.	Konôpková Júlia	2.	GJGT BB	3	0	5					0			5	5
86.	Minďášová Katarína	1.	GJGT BB	2	0					0	0			0	0
86.	Nerer Juraj	3.	GJGT BB	4	0									0	0
86.	Zubnárová Katarína	3.	GJGT BB	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Rudolfová Barbora	1.	GMet BA	1	9	9	9	9	9	7	9		45
2.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	2	9	9	9	9	1	7	9		43
2.	Karásková Natália	1.	Gamča BA	2		5	9	9	9	7	9		43
4.	Firbas Karol	1.	Gamča BA	2		9	9	7	8	9	7		42
5.	Belan Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	8	9		7			41
5.	Hagara Michal	1.	GJH BA	1	9	9	9		9	5			41
5.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	3			9	5	9	9	9		41
8.	Hašík Juraj	1.	Gamča BA	2		9	9	9	8	5			40
8.	Konečný Jakub	1.	Gamča BA	2		9	6	5	9	7	9		40
8.	Peitl Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	7	8	8	4			40
11.	Magula Mário	1.	Gamča BA	1		9	9	8	8	3			37
11.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3			7	5	8	8	9		37
13.	Formánek Michal	2.	ŠPMNDG BA	3			4	8	8	7	9		36
14.	Zajac Anton	1.	Gamča BA	2		8	7	7	9	4			35
15.	Křemenová Lucie	1.	GMet BA	1	9	5	9	5	6				34
16.	Buchholcerová Anna	1.	GBil BA	2		6	7	6	8	4	5		32
17.	Mieresová Ľubomíra	1.	GJH BA	2	9	9	6		9	7			31
18.	Matulová Daniela	1.	GVaz BA	1	9	4	9	3	1	5			30
19.	Vaškovičová Michaela	1.	1SG BA	1	8	9	6	5	0				28

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Konečný Lukáš	3.	GPdC PN	3			9	9	8	9	8		43
2.	Péder Mário	1.	GMRŠ Šamorín	1	9	8	9	8	8				42
3.	Bogár Ján	1.	GĽŠ TN	1	9	4	9		9	6			37
4.	Bošanská Eva	2.	GĽŠ TN	2		9	9	8	2	7			35
5.	Repková Lucia	1.	GPár NR	1		9	7	8		6	0		30
6.	Baxová Katarína	2.	GĽŠ TN	2		4	9	2	9		2		26
6.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	2					8	9	9		26
6.	Tomašovič Juraj	1.	GPdC PN	1	9	2	6	5	1	3	3		26
9.	Šimková Mária	1.	GJF Šaľa	1	9	4	5	3	2	4	2		25
10.	Šimora Peter	2.	GVBN PD	2		8	4	4	1	5	1		22
11.	Baxová Jana	1.	GĽŠ TN	1		4	6	3					13
12.	Babiarová Dana	2.	GJab MY	3									0

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	1.	GVO ZA	2		9	9	9	9	9	9		45
1.	Tvarůžková Jarmila	1.	GŠkol PB	1	9	9	9	9		7	9		45
3.	Lauková Ivana	1.	GJL MT	1	9	9	9	5	8	7	9		44
4.	Štyráková Kamila	1.	GPOH DK	1	9	9	9	8			8		43
5.	Porembová Alexandra	1.	BiG Sučany	1	9	8	9	7	8	5	8		42
5.	Ľubušký Peter	1.	GAK BS	1	8	9	8	9	8	6	5		42

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
7.	Jagoš Ľubomír	1.	GVO ZA	2		9	9	9	6	6	8		41
8.	Ziman Michal	1.	GBST LC	1	9	7	9	3		6	9		40
9.	Majdiš Mojmír	1.	GPOH DK	1	9	5	9	9		7			39
10.	Michal Maixner	2.	GVar ZA	2		8	0	9		8	9		34
10.	Rošťáková Zuzana	1.	GMMH LM	1	9	5	9	3	2	6	5		34
12.	Kredatus Ivan	1.	SPŠJM BB	1	9	5	9	4	0	6	0		33
13.	Kieferová Marika	2.	GsvFA ZA	3			9	6	6	7	4		32
14.	Perešíniová Michaela	1.	OA BB	1	9	7	9	3					28
15.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3			5	3	4	9	6		27
16.	Fajčíková Patrícia	1.	GBST LC	1	3	4	7	9	2				25
16.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3			4	4	6	4	7		25
18.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	1	6	9		5	0		1		21
19.	Vajdová Zlatica	1.	GJGT BB	2			9	4		7			20
20.	Selečéni Miloš	1.	GJGT BB	2		1	4		2	3			10
21.	Valenčíková Romana	2.	GJGT BB	3			7				1		8
22.	Kapustová Katarína	2.	GJGT BB	3		5	6	1	0				7
22.	Minďášová Katarína	1.	GJGT BB	2			7						7
24.	Konôpková Júlia	2.	GJGT BB	3					5				5
25.	Mlynáriková Michaela	2.	GJGT BB	3			4						4

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Mitro Juraj	1.	GJAR PO	1	9	9	9	5	9	7	9		45
2.	Popovič Viktor	1.	GJAR PO	2	9	9	9	7	9	8	9		44
3.	Bačo Ladislav	1.	GPoš KE	2		9	9	9	9	5			41
4.	Lukačišin Martin	3.	GJFR LE	3			9	8	9	5	9		40
5.	Cocuľová Zuzana	1.	GPoš KE	2		9	9	7	3	6	8		39
6.	Kičová Kristína	1.	GPoš KE	1	9	7	9	6	0	6	7		38
7.	Rigdová Emília	1.	GKuk PP	1	8	3	6	5		7	9		35
8.	Baranová Jana	1.	GAlej KE	2		4	9	5	9	7			34
9.	Hudák Adam	1.	GMRŠ KE	1	9	4	6	7	4	7	4		33
10.	Vaľková Monika	1.	GAlej KE	2		5	9	8		7	2		31
11.	Zatrochová Zuzana	1.	GAlej KE	2		4	9	5	7	5			30
12.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	3					9	4	9		22
13.	Görcsösová Andrea	1.	GAlej KE	2		4	9		1	5			19
14.	Dobranský Marián	2.	GPoš KE	3			6	1	2	3	1		13

kategória ALFA, mimo SR

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Matúš Kopf	1.	GMen OP	1	9	4	9	8	3	6	9		41

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	Meno	Roč.	škola	10	11	12	13	14	p	$\sum$
1.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	9	4		0			13
2.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE	3	4		7			14
3.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	3	4		1			8
4.	Podolák Martin	4.	Gamča BA	9	7		4			20
5.	Ujházi Vladislav	3.	GPJŠ RO		5		5			10