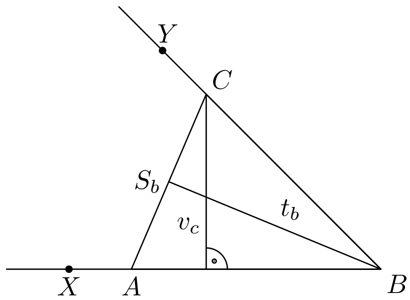
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série zimného semestra

Úloha č. 1: *Nájdite a popíšte spôsob, ako zostrojiť trojuholník ABC, ak je daná dĺžka ťažnice na stranu AC, výšky na stranu AB a veľkosť uhla pri vrchole B.*

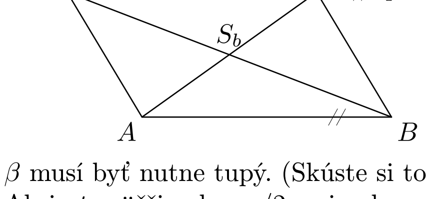
Riešenie: (opravovali Zuzka C., Lenka)

Nakreslime si na začiatok pekný obrázok. (Ako inak sa dá začať geometrická úloha?) Poznáme veľkosť ťažnice t_b, výšky v_c a uhla β. Začať môžeme konštrukciou ktoréhokoľvek z týchto útvarov, otázka je, či potom budeme vedieť v konštrukcii aj pokračovať :).



Začnime napríklad uhlom β. O dĺžkach strán trojuholníka nevieme nič, vieme ale narysovať dve polpriamky zvierajúce uhol β. Označme ich BX, BY (ako na obrázku). Aby sme riešenie zbytočne nekomplikovali, dohodnime sa na tom, že úlohu najskôr vyriešime len v polrovine danej polpriamkou BX, v ktorej leží polpriamka BY. V opačnej polrovine potom dostaneme ďalšie riešenie zobrazením nášho trojuholníka v osovej súmernosti podľa osi BX.
Zatiaľ teda máme bod B. Niekde na polpriamke BX budeme hľadať bod A, na polpriamke BY bod C. Vzdialenosť bodu C od strany AB (a teda aj od polpriamky BX) je v_c (keďže veľkosť výšky je vzdialenosťou vrchola od protiľahlej strany). Musí teda nutne ležať na priamke (označme ju p) rovnobežnej s BX, o ktorej platí $|p, BX| = v_c$. Máme teda $C = p \cap \overrightarrow{BY}$ Ako nájdeme bod A? Nevyužili sme ešte ťažnicu t_b. Tá nám síce nič nepovie o bode A, no vieme, že vedie do stredu strany AC (ten si označíme S_b). Ak sa nám podarí zostrojiť S_b, bod A už nájdeme ľahko. Platí, že $|S_b, B| = t_b$. Množina všetkých bodov vzdialených od B o vzdialenosť t_b je kružnica $k(B, t_b)$. Bod S_b teda leží niekde na tejto kružnici. Okrem toho je to stred strany, teda leží aj na strednej priečke trojuholníka ABC. Z vlastností stredných priečok vieme, že každá z nich je rovnobežná s jednou zo strán trojuholníka a jej vzdialenosť od tejto strany je rovnaká ako jej vzdialenosť od vrcholu, ktorý nepatrí tejto strane. Zostrojme preto priamku (označme ju q), na ktorej leží stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná so stranou AB. Takto sme našli bod S_b, $S_b = q \cap k$. Vieme, že je to bod ležiaci na strane AC. Ak ho teda spojíme s bodom C, dostaneme priamku, na ktorej táto strana leží (a teda na nej musí ležať aj bod A). To je už super, lebo bod A okrem toho leží aj na polpriamke BX, preto $A = BX \cap CS_b$. Tralalááá, a máme trojuholník ABC! :)

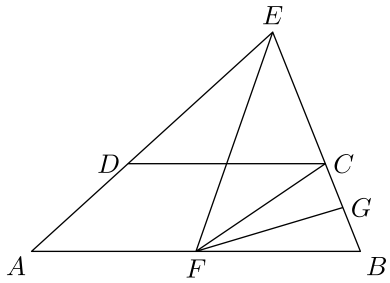
Iný prístup je v náčrte si dokresliť trojuholník ABC na rovnobežník $ABCD$. Ako? Predstavme si, že trojuholník ABC už máme hotový. Bod B zobrazíme v stredovej súmernosti podľa S_b a tak dostaneme bod D. Z tohto kroku je jasné, že dĺžka uhlopriečky BD je $2t_b$. Ďalej vieme, že uhlopriečky v rovnobežníku sa rozpoľujú, preto stred BD je zároveň stredom AC, čiže naším bodom S_b. To je super, lebo presne tento bod potrebujeme! Všimnite si, že tu v náčrte trocha čarujeme s dokresľovaním obrázku. Priamo pri konštrukcii potom začneme pomocným útvarom (rovnobežník) a cez neho sa dostaneme k vytúženému trojuholníku. Rovnako ako v prvom prípade najprv zostrojíme uhol β. Potom rovnobežku p vo vzdialenosti v_c od BX, aby sme našli bod C. Na tejto rovnobežke bude ležať aj strana CD. Kružnicovým oblúkom $k(B, 2t_b)$ poľahky nájdeme bod D. Tak možno zostrojiť uhlopriečku BD a nájsť jej stred S_b. Ten spojíme s bodom C... hotovo. Iná možnosť je jednoducho viesť rovnobežku z bodu D s BC, aby sme našli bod A. A máme trojuholník ABC.



Diskusia:
Počet riešení úlohy závisí od dĺžky t_b, v_c a uhla β. Pozrime sa na to, ako:
Ak je dĺžka t_b menšia ako polovica v_c, kružnica k a priamka q sa nepretnú, preto nikde nedostaneme bod S_b. Úloha teda v tomto prípade nemá riešenie.
Ak je $t_b = v_c/2$, priamka q a kružnica k sa pretnú v jedinom bode, a to priamo nad bodom B. Čo to znamená pre uhol β? Aby mala úloha riešenie, β musí byť nutne tupý. (Skúste si to nakresliť.)
Ak je t_b väčšie ako $v_c/2$, priamka q a kružnica k sa pretnú v dvoch bodoch, ale keďže uhol β je daný, vždy nám vyhovuje len jedno z nich. Ak je uhol β pravý, vyhovujú nám obe riešenia.
Pri konštrukcii cez rovnobežník je to to isté, akurát sa pozeráme na dĺžku $2t_b$ a na to, ako sa pretína s p (pri rôznych uhloch β).

Úloha č. 2: *Dĺžky základní lichobežníka $ABCD$ sú $|AB| = 15$ cm a $|CD| = 9$ cm a jeho výška je 4 cm. Keď predĺžime strany AD a BC, tak sa pretnú v bode E. Bod F je stredom strany AB, bod G je stredom strany BC. Zistite obsah trojuholníka FGE.*

Riešenie: (opravovali ZuzkaM a Rasťo)
Obsah nami hľadaného trojuholníka S_{FGE} nevieme priamo z údajov zo zadania vypočítať. Naša stratégia by mohla byť, že si skúsime uvedomiť, čo všetko vieme hneď zo zadania, prípadne, či si nevieme niečo jednoducho odvodiť. A následne z týchto známych vecí skúsime vyskladať aj S_{FGE}. Z údajov v zadaní vieme hneď vypočítať obsah lichobežníka $ABCD$. Čo sa tiež dá po nakreslení obrázku všimnúť je, že trojuholníky ABE a DCE vyzerajú podobne. Naozaj sú podobné, lebo majú všetky tri uhly rovnaké. Uhol pri vrchole E majú spoločný a zvyšné dva sú súhlasné uhly, pretože AB je rovnobežné s CD. Možno by sa nám vďaka tejto podobnosti podarilo vypočítať obsahy aj týchto dvoch trojuholníkov. Tieto obsahy by nám mohli veľmi pomôcť. Úsečka EF je ťažnicou trojuholníka ABE, to znamená, že ho delí na dva trojuholníky (AFE a FBE) s rovnakým obsahom (majú rovnakú výšku a polovičnú základňu). Od obsahu trojuholníka FBE potom už len odpočítame obsah trojuholníka FBG a dostaneme obsah nami hľadaného trojuholníka FGE.
Skúsime preto začať s obsahom trojuholníka ABE. Dĺžka jednej jeho základne AB je 15. Na výpočet obsahu potrebujeme zistiť ešte výšku na túto stranu. Označme ju v_1. Využijeme podobnosť trojuholníkov ABE a DCE. Preto, že sú tieto trojuholníky podobné, tak majú dĺžky všetkých svojich strán a aj výšok v rovnakom pomere. Označme výšku na stranu DC v trojuholníku DCE ako v_2. Zároveň $v_1 = v_2 + 4$ (výška trojuholníka ABE sa rovná súčtu výšky trojuholníka DCE a výšky lichobežníka $ABCD$), a preto



$$\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{4 + v_2}{v_2}.$$

Dosadíme za $|AB|$, $|DC|$ a vypočítame v_2

$$\begin{aligned} \frac{15}{9} &= \frac{4 + v_2}{v_2}, \\ 15v_2 &= 36 + 9v_2, \\ v_2 &= 6\,\text{cm}. \end{aligned}$$

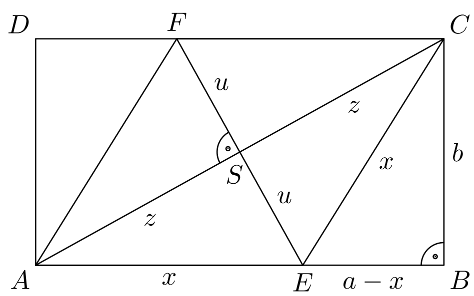
Potom $v_1 = v_2 + 4 = 6 + 4 = 10\,\text{cm}$ a už vieme vypočítať aj S_{ABE}.

$$S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot v_1}{2} = \frac{15 \cdot 10}{2} = 75\,\text{cm}^2.$$

Pokračujme obsahom trojuholníka FBE. Už skôr sme si povedali, že jeho obsah je rovnaký, ako obsah trojuholníka AFB. Tieto dva spolu tvoria trojuholník ABE, preto je obsah trojuholníka FBE je polovica z obsahu trojuholníka ABE, čiže $37,5\,\text{cm}^2$.
Na záver už potrebujeme len odpočítať od obsahu trojuholníka FBE obsah trojuholníka FBG. Podobne ako v predchádzajúcom prípade využijeme, že bod G leží v strede strany BC. Pri pohľade na obrázok vidíme, že úsečka FG je ťažnicou v trojuholníku FBC, preto obsah trojuholníka FBG bude polovicou obsahu trojuholníka FBC. K základni FB, ktorá má dĺžku $7,5$ (pretože je to polovica strany AB) prislúcha výška, ktorá je rovnaká ako výška lichobežníka $ABCD$, čiže 4. Preto $S_{FBC} = (7,5 \cdot 4)/2 = 15\,\text{cm}^2$ a $S_{FBG} = S_{FBC}/2 = 7,5\,\text{cm}^2$. Keď tento obsah odpočítame od S_{FBE}, dostaneme, že $S_{FGE} = 37,5 - 7,5 = 30\,\text{cm}^2$.

Úloha č. 3: *Na stranách AB a DC obdĺžnika $ABCD$ sú body F a E zvolené tak, že $AFCE$ je kosoštvorec. Zistite dĺžku úsečky EF, ak viete, že $|AB| = a$ a $|BC| = b$.*

Riešenie: (opravovali Baja a Buggo)



Ako prvý si nakreslíme dobrý obrázok. To znamená náčrt, ktorý je dostatočne veľký a prehľadný. Teraz si na obrázku pooznačujeme dĺžky a iné užitočné informácie, ktoré poznáme alebo potrebujeme zistiť. Využijeme pri tom základné vlastnosti kosoštvorca (strany majú rovnakú dĺžku, uhlopriečky sa rozpoľujú a sú na seba kolmé). Teraz sa na náš obrázok môžeme pozrieť poriadne :).
Vidíme, že chceme vyjadriť $|EF| = 2u$. Pokúsme sa preto skúmať, vzťahy medzi písmenkami a útvarmi, ktoré tieto písmenká predstavujú. Na obrázku vidíme kosoštvorec, niekoľko trojuholníkov a obdĺžnik. Vidíme, že neznáma dĺžka u je súčasťou viacerých útvarov.
Úlohu budeme riešiť tak, že sa pokúsime dĺžku u vyjadriť viacerými spôsobmi (rovnicami) a ich skombinovaním získať riešenie úlohy.
Keď sa na obrázok pozrieme poriadne, uvidíme viacero možností, ako zistiť dĺžku u pomocou a a b.

- Pôjdeme na to cez podobnosť. Všimnime si, že trojuholníky ABC a ASE sú podobné (podľa uu). To znamená, že $z/a = u/b$. Teda $u = b \cdot z/a$. Teraz je náš jediný problém neznáma z. Ten však hravo vyriešime a použitím Pytagorovej vety pre trojuholník ABC dostaneme $z = \sqrt{a^2 + b^2}/2$. Po dosadení dostávame

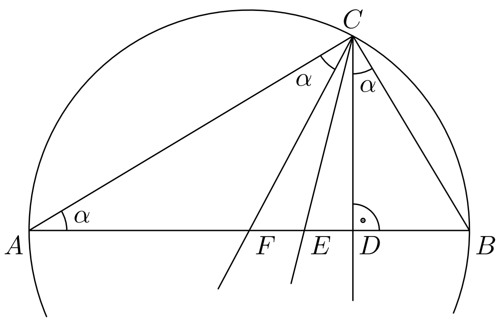
$$|EF| = 2u = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

- Zamerajme sa na trojuholníky ESC, ABC a EBC. Všetky sú pravouhlé a preto pre ne platí Pytagorova veta. Ak si z trojuholníkov EBC, ABC vyjadríme postupne x, z, tak z ESC už môžeme poľahky vyjadriť u a následne $|FE|$ v požadovanom tvare.
- Všimneme si trojuholník AES. Dokreslíme si výšku na stranu AE a jej pätu si označíme W. Potom pre úsečky WE a WS dostaneme $|WE| = x - a/2$ a $|WS| = b/2$. Použitím Euklidovej (alebo Euklidovej a Pytagorovej) vety pre vhodné trojuholníky (zistite ktoré!) dostaneme hľadané riešenie.
- Vezmime si trojuholník AEF. Doplňme výšku na stranu AE. Ďalej postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade. (Vyskúšajte si.)
- Využijeme vzťahy pre výpočet obsahu. Obsah kosoštvorca možno vyjadriť dvoma spôsobmi. $S = x \cdot b$ (základňa krát výška) alebo $S = uz/2$ (súčin uhlopriečok delený dvoma). Po vzájomnom (a správnom :)) dosadení dostaneme opäť chcený výsledok.

Komentár: Môžeme vidieť, že úlohu bolo možné riešiť viacerými spôsobmi. (Dokážete nájsť ďalšie?) My sme si zvolili ten prvý. S príkladom ste väčšinou nemali problémy, sem tam niekto zabudol zistené u vynásobiť dvoma :).

Úloha č. 4: *Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech CD je výška na stranu AB, CF je ťažnica na stranu AB a CE je os uhla BCA. (Body D, E aj F ležia na prepone AB.)*

Riešenie: (opravovali Ika a Hanka)



Prvým krokom k úspešnému vyriešeniu geometrickej úlohy (a to nielen tejto), je dostatočne veľký obrázok. Tak si ho nakreslime a poďme sa naň pozrieť lepšie. Ešte predtým si však skúsme ujasniť, čo vlastne by sme si na obrázku mali všímať. Máme dokázať rovnosť uhlov, takže naša pozornosť by mala byť zameraná predovšetkým na ne, ďalej na všetky kolmice, rovnobežky, osi uhlov, rovnoramenné trojuholníky a podobne. (Čo vás ešte napadá?)

Označme si uhol BAC písmenkom α. Potom $|\sphericalangle ABC| = 90° - \alpha$, lebo súčet uhlov v trojuholníku ABC je $180°$.

Všímajme si postupne body D, E a F, ktoré sme „pridali" k „obyčajnému" pravouhlému trojuholníku ABC. Úsečka CF je ťažnica, preto F je stred strany AB. Keďže AB je prepona pravouhlého trojuholníka, bod F je zároveň stred tálesovej kružnice. To ale znamená, že $|FA| = |FB| = |FC|$ a trojuholník ACF je rovnoramenný. Preto $\alpha = |\sphericalangle FAC| = |\sphericalangle FCA|$.

Teraz sa poďme zaoberať bodom D. Je to päta výšky z bodu C, preto $|\sphericalangle CDB| = 90°$. Trojuholník BCD je pravouhlý a my už poznáme veľkosť uhla CBD. Súčet uhlov v trojuholníku BCD je presne tak, ako v každom inom $180°$, preto $|\sphericalangle BCD| = \alpha$.

Už nám ostal len bod E. Ten leží na osi uhla ACB, preto $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle BCE| = 90°/2 = 45°$.

Už si len ujasniť, na čo sme vlastne prišli. Vyjadrime si veľkosť uhlov DCE a ECF.

$$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle BCE| - |\sphericalangle BCD| = 45° - \alpha$$

$$|\sphericalangle ECF| = |\sphericalangle ECA| - |\sphericalangle FCA| = 45° - \alpha$$

Tým sme ukázali, že tieto dva uhly sa rovnajú.

Komentár: Alebo skôr ak ste sa dočítali až sem, skúste sa ešte zamyslieť aj nad týmto :)Musia byť body D, E a F vždy v takom poradí, ako sme uviedli vo vzorovom riešení? Nemôžu byť napríklad v opačnom? A nemôže byť v strede bod F? Skúste nad tým porozmýšľať a do budúcnosti pri riešení podobných úloh tieto možnosti preverte. Môžu tvoriť podstatnú časť riešenia danej úlohy.

Úloha č. 5: *Dĺžky strán trojuholníka sú tri za sebou idúce prirodzené čísla. Vieme, že v tomto trojuholníku je os uhla kolmá na ťažnicu. Nájdite dĺžky strán tohto trojuholníka.*

Riešenie: (opravovali Ajka a Miťo)

Zo všetkého najskôr si nakreslíme pekný obrázok. Miesto pre obrázok sme tu nechali, teraz sa dohodneme, čo všetko si tam nakreslíte. Trojuholník zo zadania si označíme ABC. Os uhla môže vychádzať napríklad z bodu A a ťažnica z bodu C, ich priesečník označíme X.[1] Ťažnica rozdelí úsečku AB v bode S na dve rovnako dlhé úsečky. Môžete začať kresliť :).

Poďme teraz do obrázku dopĺňať údaje zo zadania. Vieme, že os uhla a ťažnica sú na seba kolmé, preto platí $|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle AXS| = 90°$. Tiež vieme, že $|\sphericalangle XAS| = |\sphericalangle XAC|$. Posledná informácia zo zadania, ktorú sme zatiaľ nepoužili je, že dĺžky strán trojuholníka sú tri za sebou idúce prirodzené[2] čísla. Mohli by sme teda označiť dĺžky strán trojuholníka napríklad ako n, $n+1$ a $n+2$, alebo ako $n-1$, n a $n+1$. Skúsme sa teraz zamyslieť nad tým, ktorú stranu označíme n. Jednu zo strán pri vrchole s osou uhla? Alebo stranu oproti tomuto vrcholu? Zrejme treba

[1] Rozmyslite si, prečo ťažnica a os uhla nemôžu vychádzať z jedného vrchola a zároveň byť na seba kolmé. Keď si to rozmyslíte, dokážte to. Naozaj.

[2] Slovo prirodzené budeme vo zvyšku vzorového riešenia vynechávať.

rozobrať obe tieto možnosti.[3] Rozvetvenie riešenia na šesť možností by v takejto skorej fáze mohlo byť pomerne nevýhodné – nechajme si preto toto označenie na neskôr, keď už o našom trojuholníku zistíme aj niečo viac.
Dobre, použili sme teda všetky údaje zo zadania, ktoré sme uznali za vhodné. To znamená, že teraz už musíme niečo naozaj objaviť alebo dokázať. V našom trojuholníku vieme veľkosti niektorých uhlov; dĺžky strán nepoznáme žiadne. Preto je prirodzené zamerať sa na uhly, tam sa máme čoho chytiť. Keď si všimneme menšie trojuholníky, v ktorých niektoré uhly poznáme, rýchlo si uvedomíme, že vieme dopočítať aj nejaké ďalšie. Konkrétne zisťujeme, že $|\sphericalangle XSA| = |\sphericalangle XCA|$. (Rozmyslite si.) To ale znamená, že trojuholník ASC je rovnoramenný s ramenami AS a AC. A keďže S nie je iba hociaký bod, ale stred strany AB, tak platí aj $|AS| = |SB|$. Zistili sme teda niečo aj o dĺžkach – konkrétne to, že úsečky AS a AC sú rovnako dlhé. To je výborné, pretože sme o krok bližšie k tomu, aby sme mohli využiť zvyšné informácie zo zadania.
Poďme si to pekne zhrnúť a pozrieť sa na to, ako ďaleko vlastne sme. Z informácií, ktoré sme zistili o dĺžkach strán vyplýva, že strana AB je dvakrát taká dlhá ako strana AC. Zrejme nie je ťažké uveriť, že tento poznatok je dosť dobrý na to, aby nám umožnil príklad priamočiaro doriešiť. (Totiž táto podmienka je spolu s tým, že strany sú tri po sebe idúce čísla, veľmi silná.)
Je niekoľko spôsobov, ako pokračovať a nájsť všetky možné dĺžky strán; my si ukážeme dva, ktoré sa nám páčia.

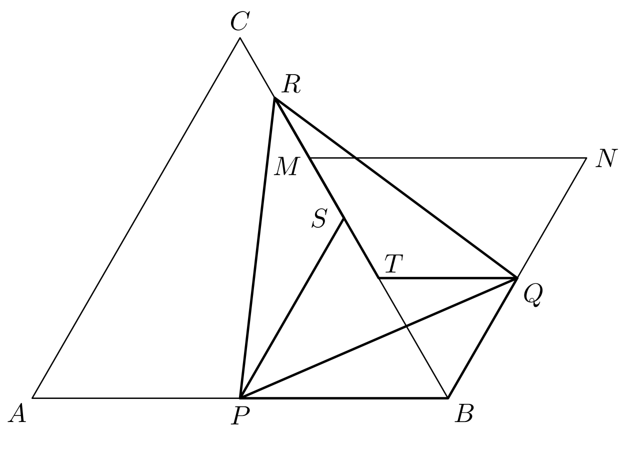
Prvý spôsob: Hľadáme tri po sebe idúce čísla, z ktorých jedno je dvojnásobkom druhého. Isto si hneď všimneme dvojice jedna a dva a potom aj dva a štyri. Keď tieto doplníme na postupnosť troch po sebe idúcich čísel, dostávame $1, 2, 3$ a $2, 3, 4$. Máme teda dve riešenia. Ak skúsime nájsť ďalšiu dvojicu, prvým kandidátom sú čísla tri a šesť. Avšak tie sa nedajú doplniť na tri po sebe idúce čísla, pretože sú od seba príliš ďaleko. Ak pokračujeme v hľadaní, čísla v nasledujúcich dvojiciach sa od seba vzďaľujú stále viac a viac. Poďme to preto dokázať, nie je to vôbec ťažké. Ak vezmeme číslo väčšie ako dva, jeho dvojnásobok je od neho vzdialený o viac ako dva. Jednotlivé čísla v trojici za sebou idúcich čísel sú od seba vzdialené najviac dva. Preto strana AC nemôže byť dlhšia ako dva. Hotovo.

Druhý spôsob: Poďme označiť dĺžky strán trojuholníka tromi za sebou idúcimi číslami, ako sme mali pôvodne v pláne. Zrejme je strana AC kratšia ako AB a to buď o jedna, alebo o dva.[4] Ak označíme dĺžku strany AC písmenom n, dostávame buď $|AB| = n + 1$ alebo $|AB| = n + 2$. Zároveň však platí $|AB| = 2|AC|$, preto buď $n + 1 = 2n$ alebo $n + 2 = 2n$. Vyriešením týchto dvoch rovníc dostávame v prvom prípade $n = 2$ a v druhom $n = 1$. Preto $|AB| = 2n$ je štyri, respektíve dva. Doplnením týchto dvojíc na trojice po sebe idúcich čísel opäť dostávame riešenia $2, 3, 4$ a $1, 2, 3$. (Pritom sme si potichu rozmysleli, prečo dvojicu $1, 2$ doplníme na $1, 2, 3$ a nie na $0, 1, 2$ – – pretože ak $|AC| = n$ a $|AB| = n + 1$, tak $|BC|$ môže byť aj $n - 1$.)

Komentár: Pár slov k bodovaniu. Príklad bol pomerne ľahký a väčšinou ste ho zvládli veľmi dobre – v podstate všetci ste si všimli, že trojuholník ASC je rovnoramenný. Občas bol však problém v tom, že ste podcenili dôkaz tohto tvrdenia a rovnoramennosť ste nezdôvodnili. Ešte častejšie sa stávalo, že ste nevysvetlili, prečo ak hľadáme dve čísla, z ktorých je jedno dvojnásobkom druhého a musia byť v za sebou idúcej trojici, tak jedinými možnými sú tie z riešenia. Toto vôbec nie je zrejmé a aj keď samotný dôkaz je pomerne ľahký, určite to treba vysvetliť. O to viac, že na tom v podstate stojí celé riešenie. Bodovanie bolo pomerne benevolentné a preto sa za každú z týchto nepozorností dalo prísť o dva body. Jeden bod sa dal stratiť za to, že ste si nevšimli, že riešenie $1, 2, 3$ nevyhovuje, tak ako my vo „vzorovom“ riešení. Dôvod je, že tieto tri čísla nespĺňajú trojuholníkovú nerovnosť a teda netvoria trojuholník.

Úloha č. 6: *Bod M leží vnútri strany BC rovnostranného trojuholníka ABC. Nech N je taký bod ležiaci vnútri polroviny určenej priamkou BC neobsahujúcej bod A, že trojuholník BMN je tiež rovnostranný. Nech P, Q, R sú stredy úsečiek AB, BN, CM. Dokážte, že aj trojuholník PQR je rovnostranný.*

Riešenie: (opravovali Mišo K. a Jakub)



Vyskytlo sa veľa rôznych a pekných riešení. Väčšinou ste úlohu riešili hrubou silou, a to buď pomocou analytickej geometrie alebo kosínusovej vety. V tomto prípade to takmer vždy viedlo k správnemu riešeniu, aj keď to tak nemusí byť vždy. Ale vyskytli sa aj riešenia cez podobné alebo zhodné trojuholníky, alebo použitím otočenia alebo rovnoľahlosti. Ďalej uvádzame jedno veľmi pekné a názorné riešenie pomocou troch zhodných trojuholníkov.
Označíme si $|AP| = a$, $|BQ| = b$. Nech stredy úsečiek BC a BM sú postupne S a T.
Potom $|PB| = |PS| = |BS| = a$, lebo PS je stredná priečka trojuholníka ABC. Podobne $|BQ| = |TQ| = |BT| = b$, lebo TQ je stredná priečka trojuholníka BMN. Ďalej postupne

[3] A ešte niekoľko ďalších, ktoré vzniknú označením aj tretej strany.

[4] Dá sa postupovať aj tak, že vyskúšame všetky kombinácie čísel $n, n + 1$ a $n + 2$. Pritom si môžeme ušetriť trochu práce tým, že si uvedomíme, že AC je kratšia ako AB a podľa toho aj musíme označiť ich dĺžky. Teda jediný rozdiel by bol v tom, že takto by sme rozoberali tri možnosti, v rámci nich by sme však postupovali v podstate rovnako.

vyrátame dĺžky TR a SR

$$\begin{aligned}
|BM| &= 2b,\\
|MC| &= 2a-2b,\\
|CR| &= a-b,\\
|TR| = |BC| - |CR| - |BT| &= 2a-a+b-b = a,\\
|SR| = |BC| - |CR| - |BS| &= 2a-a+b-a = b.
\end{aligned}$$

Veľkosť uhla PBQ je $120°$, lebo $|\sphericalangle ABC| = 60°$ a $|\sphericalangle MBN| = 60°$. Veľkosť uhla PTC je $120°$, lebo je to susedný uhol k uhlu PSB, ktorého veľkosť je $60°$, pretože je súhlasný s uhlom ACB.
Veľkosť uhla MTQ je $120°$, lebo je to susedný uhol k uhlu QTB, ktorého veľkosť je $60°$. (Je súhlasný s uhlom BMN.) Teraz sa pozrieme na trojuholníky PBQ, RTQ a PTR. Platí v nich $|PB| = |RT| = |PT| = a$, $|BQ| = |TQ| = |RS| = b$ a $|\sphericalangle PTC| = |\sphericalangle PBQ| = |\sphericalangle MTQ| = 120°$. Podľa vety *sus* sú tieto trojuholníky zhodné a preto $|PQ| = |QR| = |RP|$ a trojuholník PQR je rovnostranný.

Poznámka: Nakoniec by sme vás ešte radi upozornili na oveľa všeobecnejšie tvrdenie, ktoré si môžete overiť a dokázať. Totiž poloha trojuholníkov ABC a BMN nemusí byť vôbec taká špeciálna ako bola v tomto zadaní. Platí tvrdenie: Nech ABC a DEF sú dva ľubovoľné rovnostranné trojuholníky (v jednej rovine), pričom ichvrcholy sú značené v poradí proti smeru hodinových ručičiek. Nech P, Q, R sú postupne stredy úsečiek AD, BE, CF. Potom trojuholník PQR je rovnostranný.

Úloha č. 7: *Daný je trojuholník ABC. Bod B' je obraz bodu B v stredovej súmernosti so stredom C, bod C' je obraz bodu C v stredovej súmernosti so stredom A a bod A' je obraz bodu A v stredovej súmernosti so stredom B.*
a) Zistite pomer obsahov trojuholníkov $AC'A'$ a ABC.
b) Zmažeme body A, B, C a ostanú len body A', B', C'. Dá sa z týchto troch bodov zrekonštruovať trojuholník ABC? Svoju odpoveď úplne zdôvodnite.

Riešenie: (opravovali Ivka a Kenny, vzorové riešenie napísal Mazo)
a) Porovnávame obsahy trojuholníkov. Obsah trojuholníka môžeme určiť ako polovicu súčinu výšky a základne. Pomer obsahov môžeme určiť, ak poznáme pomery zodpovedajúcich základní a výšok. Nuž, narysujeme, odmeriame, vypočítame. Vyjde pomer $1,87$. (Nie, nevnucujeme toto konkrétne číslo :).) Nový obrázok, $2,03$. Spriemerujeme, odhadneme, asi je to presne 2. Vieme to dokázať?
V našom prípade je najvýhodnejšie zvoliť základne na priamke AB, spoločnej stranám AB a AA' skúmaných trojuholníkov.
Nech bod C má od priamky AB vzdialenosť v. Nech V je päta kolmice z bodu C na priamku AB, úsečka CV určuje vzdialenosť v. Obraz tejto úsečky v stredovej súmernosti so stredom A určuje zase vzdialenosť bodu C' od priamky AB. Táto je však tiež rovná v, lebo stredová súmernosť je zhodné zobrazenie, teda zachováva vzdialenosti. Túto vlastnosť si môžete ľahko dokázať s využitím zhodných trojuholníkov.
Výšky trojuholníkov ABC a $AA'C'$ sú teda rovnaké. Základňa trojuholníka $AA'C'$ je dvakrát dlhšia ako základňa trojuholníka ABC. (Prečo?) Preto má trojuholník $AA'C'$ dvakrát väčší obsah ako trojuholník ABC.

Poznámka: Niekedy nestačí rátať obsah trojuholníka tak ako teraz, napríklad ak nepoznáme výšku. Čo potom? Pozrite si v tabuľkách niekoľko ďalších vzorcov, pomocou ktorých vieme vypočítať obsah trojuholníka. Viete ich odvodiť? Alebo inak skontrolovať ich správnosť? Dajú sa použiť na niečo iné ako na výpočet obsahu? b) Najprv

si to narysujeme, aby sme mali presný obrázok a mohli skúsiť niečo uhádnuť. Čo vieme o situácii? Napríklad vieme výsledok z časti a). Skúsme preto pouvažovať o obsahoch. Keď trocha zjemníme úvahu, ktorou sme k tomuto výsledku prišli, dostaneme, že trojuholníky ABC' a $A'BC'$ majú rovnaký obsah ako trojuholník ABC (rovnaká základňa, rovnaká výška). Zopakovaním tejto úvahy pre iné trojuholníky dostaneme, že aj trojuholníky BCA', $B'CA'$, ACB', $AC'B'$ majú rovnaký obsah ako trojuholník ABC. Označme tento obsah S.
Máme daný trojuholník s vrcholmi A', B', C'. Tento trojuholník má obsah $7S$. Ako nájdeme bod A v jeho vnútri? Bod A leží na priesečníku priamok $C'A$ a $A'A$. Tieto priamky síce nepoznáme, ale vieme, že obsah trojuholníka $C'A'A$ je dve sedminy obsahu trojuholníka $A'B'C'$. Keďže tieto dva trojuholníky majú spoločnú základňu $C'A'$, poznáme pomer ich výšok. A keďže poznáme veľkosť výšky trojuholníka $A'B'C'$ na stranu $A'C'$, poznáme aj vzdialenosť bodu A od priamky $A'C'$. Preto bod A leží na rovnobežke s priamkou $A'C'$ vo vhodnej vzdialenosti. Tým istým spôsobom určíme vzdialenosť bodu A od priamky $A'B'$, vyjdú štyri sedminy výšky trojuholníka $A'B'C'$ na stranu $A'B'$. Rovnobežky s priamkami $A'B'$ a $A'C'$, ktoré použijeme v konštrukcii, majú vždy práve jeden priesečník. (Prečo?) Analogicky ako bod A zostrojíme body B, C. Netreba zabudnúť na dôkaz správnosti konštrukcie, prenechávame ho na vás.

Iné riešenie:
Narysovali sme presný obrázok. Myšlienka skúmať obsahy sa nám však vytrvalo vyhýba. Čo ideme hľadať na tom obrázku? Čosi, čo súvisí so stredovou súmernosťou. Bod A je stredom úsečky CC'. Podobne B je stredom AA' a C je stredom BB'. Načo sú stredy strán v trojuholníku? Áno, ťažnice a stredné priečky. Ťažnice sa delia v pomere $1:2$. Nejaké pomery. No, pohľadáme. (Šťastnejší či pozornejší si ten správny pomer všimnú, mne sa to nepodarilo.) Tak teda tie stredné priečky, kdeže sú? Zatiaľ tam nie sú, treba čosi dokresliť. A to tak, aby sme využili to, čo máme. Bod A je stredom úsečky CC'. Preto by týmto bodom mala prechádzať stredná priečka

nejakého trojuholníka. Tá je rovnobežná so základňou tohto trojuholníka. Máme dve možnosti; bodom C' totiž prechádzajú dve priamky – kandidáti na základne. Nech D je bod na priamke $A'C'$ taký, že priamky AD a BC sú rovnobežné. Nech E je priesečník priamok BC a $A'C'$. Úsečka AD je strednou priečkou v trojuholníku $C'CE$, preto $|C'D| = |DE|$. Úsečka BE je strednou priečkou v trojuholníku $A'AD$, preto $|DE| = |EA'|$. Dokopy máme, že body D, E delia úsečku $C'A'$ na tri rovnaké časti. Preto tieto body vieme zostrojiť. Rovnako rozdelíme na tretiny aj ostatné strany trojuholníka $A'B'C'$, potom dostaneme body A, B, C ako priesečníky vhodných priamok. (Ktorých?) Dôkaz správnosti konštrukcie a diskusiu si už spravíte aj sami.
Toto riešenie je krátke, ale objaviť ho môže trvať aj niekoľko dní. Ak sa nám pri riešení nedarí nič objaviť, treba sa na to vyspať a skúsiť niečo nové. (Takto sa matematika naozaj robí, čo myslíte, na koľko nových objavov príde matematik za svoj život?) Môžeme skúsiť aj zavrhnutý prístup, ktorý sme skúšali predtým, ak vieme, prečo to predtým nefungovalo a vidíme v starom prístupe nejakú novú nádej.

Poznámka: Vidíme, že obsahy, pomery a podobnosť navzájom súvisia. Skúste získané poznatky uplatniť pri riešení nasledujúcich úloh.
1. Strany trojuholníka zväčšíme päťkrát. Koľkokrát sa zväčší obsah?
2. Kocka K má hranu $\sqrt{2}$-krát dlhšiu ako kocka L. Koľkokrát má kocka K väčší objem ako kocka L? Koľkokrát má kocka K väčší povrch?
3. Trojuholník ABC má ťažnice s dĺžkami x, y, z. Dá sa z úsečiek dĺžok x, y, z zostaviť trojuholník? Ak áno, aký má obsah vzhľadom na obsah trojuholníka ABC?
4. Zostrojte trojuholník, ak sú dané dĺžky jeho ťažníc.
5. V akom pomere delí os uhla protiľahlú stranu? Narysujte, odmerajte, uhádnite a skúste dokázať.
6. Dokážte, že ťažnice delia trojuholník na šesť častí s rovnakým obsahom.
Uvedomte si, že na dôkaz prvej časti tvrdenia (presne šesť častí) potrebujeme dokázať, že ťažnice sa pretínajú v jednom bode. Pri dôkaze tohto tvrdenia by mohli pomôcť práve obsahy. Čo je ťažnica? Ako rozdeľuje trojuholník?
7. Vyjadrite polomer kružnice vpísanej do trojuholníka pomocou dĺžok jeho strán.

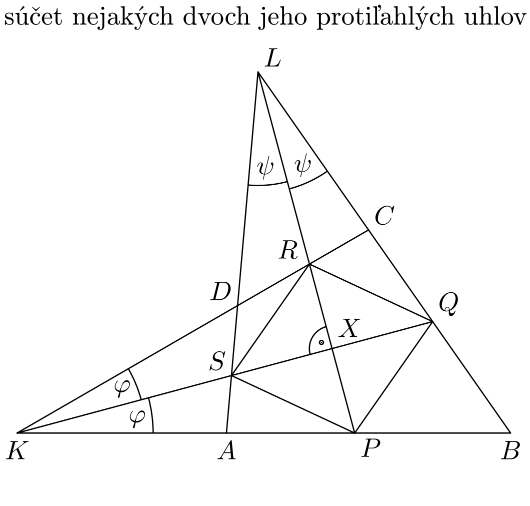
Nedajte sa odradiť, ak sa vám úlohy nepodarí hneď vyriešiť. Vráťte sa k nim na druhý deň. Radi vám pri ich riešení poradíme (`mazo@kms.sk`).

Úloha č. 8: *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Priamky AB, CD sa pretínajú v bode K, priamky BC, AD sa pretínajú v bode L. Os uhla AKD pretína priamky BC, AD po poradí v bodoch Q, S, os uhla ALB pretína priamky AB, CD po poradí v bodoch P, R. Štvoruholník $PQRS$ je konvexný. Dokážte, že $PQRS$ je kosoštvorec práve vtedy, keď sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica.*

Riešenie: (opravovali Bebe a Škrečok)
Najprv si musíme poriadne uvedomiť, čo chceme dokazovať – $PQRS$ je kosoštvorec *práve vtedy*, keď sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica. Potrebujeme teda ukázať dve tvrdenia (implikácie):

1. Ak je $PQRS$ kosoštvorec, potom sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica.
2. Ak sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica, potom je $PQRS$ kosoštvorec.

Viacerí z vás si toto žiaľ neuvedomili a zbytočne prišli o nemálo bodov. Pritom, ako o chvíľu uvidíte, dôkazy týchto dvoch tvrdení sú porovnateľne ťažké (a pokiaľ ste jeden z nich mali, bolo ľahké urobiť aj ten druhý).
V celom riešení si priesečník osí uhlov AKD a ALB označíme X. Najprv budeme dokazovať prvé tvrdenie. Predpokladajme, že $PQRS$ je kosoštvorec, takže jeho uhlopriečky PR a QS sú na seba kolmé a rozpoľujú sa. Navyše zo zadania vieme, že $|\sphericalangle AKS| = |\sphericalangle SKD| = \varphi$ (čítaj [fí:]), a $|\sphericalangle ALP| = |\sphericalangle PLB| = \psi$ (čítaj [psí:]). (Priamky KS a LP sú totiž osi príslušných uhlov.)
Z týchto vzťahov sa snažíme dostať, že štvoruholníku $ABCD$ sa dá opísať kružnica. Stačí nám preto ukázať, že súčet nejakých dvoch jeho protiľahlých uhlov je 180°, konkrétne to dokážeme pre dvojicu uhlov DAB a BCD.



Pohrajme sa trochu s obrázkom a vyjadrujme si veľkosti jednotlivých uhlov. Ak si čítate toto, napíšte na debatu KMS odkaz obsahujúci slovo „brutálne“. Okolo bodu X sú pravé uhly, preto môžeme písať

$$|\sphericalangle XPK| = |\sphericalangle XRK| = 90° - \varphi \quad \text{a} \quad |\sphericalangle XSL| = |\sphericalangle XQL| = 90° - \psi.$$

Teraz sa pozrime na štvoruholník $APXS$. Poznáme v ňom tri uhly, takže si môžeme dopočítať štvrtý:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle SAP| &= 360° - |\sphericalangle APX| - |\sphericalangle PXS| - |\sphericalangle XSA| \\ &= 360° - (90° - \varphi) - 90° - (90° - \psi) \\ &= 90° + \varphi + \psi. \end{aligned}$$

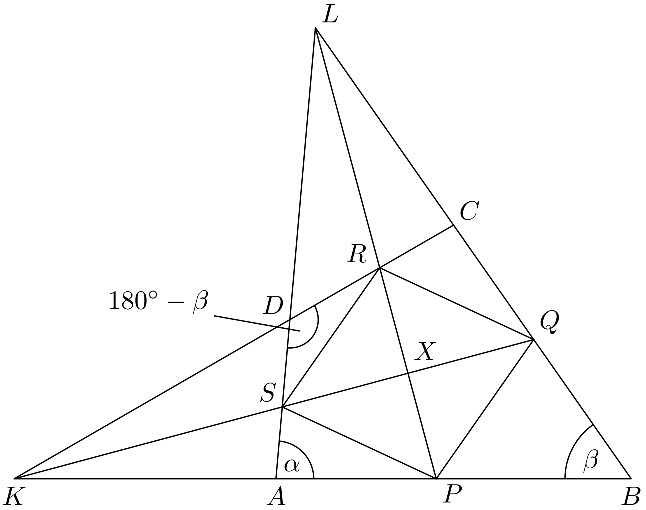
Ďalej uhly CRX a XQC sú susedné k uhlom XRK, resp. XQL, teda vo štvoruholníku $CRXQ$ platí vzťah

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle QCR| &= 360^\circ - |\sphericalangle CRX| - |\sphericalangle RXQ| - |\sphericalangle XQC| \\ &= 360^\circ - (90^\circ + \varphi) - 90^\circ - (90^\circ + \psi) \\ &= 90^\circ - \varphi - \psi.\end{aligned}$$

Ako ale bystré oko vidí, to je presne to, čo sme chceli dokázať, lebo

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = (90^\circ + \varphi + \psi) + (90^\circ - \varphi - \psi) = 180^\circ.$$

Teda platí naše prvé tvrdenie, že ak je $PQRS$ kosoštvorec, potom sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica.



Poďme sa pustiť do druhého tvrdenia. Predpokladajme, že štvoruholníku $ABCD$ sa dá opísať kružnica. Preto môžeme označiť veľkosti jeho uhlov pri vrcholoch A, B, C, D postupne ako $\alpha, \beta, (180^\circ - \alpha), (180^\circ - \beta)$. Vpisujte si označenia ďalších uhlov do obrázka, nechali sme vám tam miesto. Pokračujme ale ďalej… Veľkosť uhla ALP si môžeme vyjadriť ako

$$|\sphericalangle ALP| = 90^\circ - \frac{|\sphericalangle LAB|}{2} - \frac{|\sphericalangle ABL|}{2} = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2},$$

pretože LP je osou uhla ALB. Podobne určíme aj

$$|\sphericalangle BKQ| = 90^\circ - \frac{\sphericalangle KBQ|}{2} - \frac{|\sphericalangle BCK|}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

keďže KQ je osou uhla BKC. V trojuholníku APL poznáme dva uhly, poďme si dopočítať tretí:

$$|\sphericalangle APX| = 180^\circ - |\sphericalangle DAB| - |\sphericalangle ALP| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Už sa len poriadne zahľaďme na trojuholník PXK. Súčet jeho dvoch uhlov je

$$|\sphericalangle APX| + |\sphericalangle BKQ| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = 90^\circ.$$

To ale znamená, že jeho tretí uhol PXK je pravý. Hurá, máme čo sme potrebovali. Vo štvoruholníku $PQRS$ sú uhlopriečky na seba kolmé. Aby to bol kosoštvorec, stačí už len dokázať, že sa rozpoľujú. To ale nie je ťažké – osi uhlov PKR a QLS sú kolmé na protiľahlé strany v príslušných trojuholníkoch, tie sú potom rovnoramenné,[5] čo nám už stačí. (Premyslite si, prečo.)

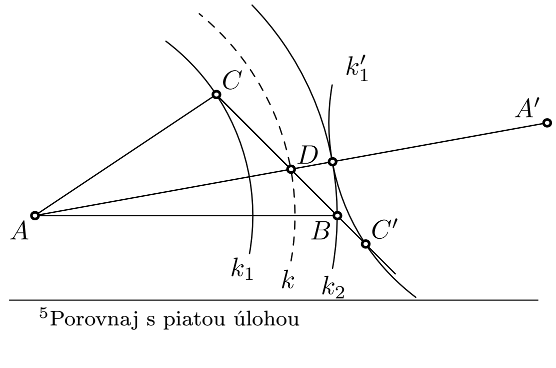
$PQRS$ je naozaj kosoštvorec, preto sme hotoví aj s dôkazom druhého tvrdenia.

Poznámka: Ešte malý (nebodovaný) detail. Nakreslili sme si totiž obrázok pre jednu konkrétnu situáciu – napríklad bod K je v tej istej polrovine určenej priamkou AB ako bod C („hore"). Pre iné situácie sa úloha rieši rovnako, zmení sa nám len označenie niektorých uhlov. Je celkom dobré zmieniť sa o tom jednou vetou v riešení, inokedy by vás to mohlo stať nejaké body.

Úloha č. 9: *Majme trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole C a bod D na strane BC taký, že $|AC| + |AB| = 2|AD|$. Ťažnica CM pretína priamku AD v bode N. Dokážte, že $|AN| \le 2|ND|$.*

Riešenie: (opravovali Katka Kvak a Jaro)

V riešení budeme používať štandardné označenie a, b, c pre dĺžky strán trojuholníka ABC a t_a, t_b, t_c pre dĺžky jeho ťažníc. Označme stred úsečky BC písmenom L. Úsečka AL je ťažnica a ťažnica CM ju delí v pomere $2 : 1$. Náš pomer $|AN| : |ND|$ má byť menší. To asi bude platiť, ak bod D bude bližšie k B než k C. Skúsime si narysovať aspoň jeden presný obrázok, aby sme si overili, kde leží bod D. Ako sme zostrojili bod D? Leží na kružnici k so stredom A a s polomerom $(b + c)/2$. Zostrojme ešte kružnicu k_1 so stredom A a polomerom b a kružnicu k_2 so stredom A a polomerom c.

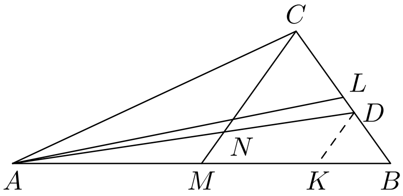


Zobrazme situáciu v stredovej súmernosti podľa bodu D (prvý obrázok). Kružnica k_1 sa zobrazí na $k_1'(A', b)$. Úsečka AA' má dĺžku $2|AD| = b+c$. To je však aj súčet veľkostí polomerov kružníc k_2 a k_1'. Keď je súčet polomerov dvoch kružníc rovný vzdialenosti ich stredov, tieto kružnice sa dotýkajú zvonku v bode ležiacom na úsečke spájajúcej ich stredy. Z toho je jasné, že žiaden bod na k_1' vnútri k_2. Preto tam neleží ani obraz C' bodu C.

Preto bod C' neleží na úsečke BC. Z to máme $|BD| \le |C'D| = |CD|$. A preto D leží na úsečke BL.

[5] Porovnaj s piatou úlohou

Pozrime sa na tvrdenie, ktoré máme dokázať. Hovorí niečo o nejakom pomere. Pomery zvyčajne vyjadrujú nejaké podobnosti alebo rovnoľahlosť. S pomermi sa dobre počíta, keď máme v obrázku nejaké rovnobežky. Máme? Nemáme. Dokreslíme. Na priamke AB máme bod M určený známym pomerom $|AM|/|BM| = 1$. Preto aj pomer $|AN|/|ND|$ vyjadríme pomocou pomerov na priamke AB.



Nech K je priesečník úsečky AB s rovnobežkou s priamkou CM vedenou bodom D. Potom

$$\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AM|}{|MK|} = \frac{|BM|}{|MK|} \overset{(*)}{=} \frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|CD| + |DB|}{|CD|} = 1 + \frac{|BD|}{|CD|} \le 1 + 1 = 2.$$

Premyslite si, ako rovnosť $(*)$ vyplýva z podobnosti trojuholníkov CMB a DKB.

Iné riešenie:

Pre záujemcov ponúkame niekoľko alternatívnych dôkazov toho, že bod D leží vnútri úsečky BL. Toto vyplýva z toho, že $|AD| \ge |AL|$. Dokážeme to sporom. Nech D leží vnútri úsečky CL. Uhol ADL je vonkajší uhol v trojuholníku ADC, teda $|\sphericalangle ADL| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle DAC| > |\sphericalangle ACB| > \pi/2$ je tupý uhol v trojuholníku ADL. V tupouhlom trojuholníku oproti tupému uhlu leží najdlhšia strana, čo v našom prípade znamenaná, že $|AL| \le |AD|$, čo je spor. Ostáva teda dokázať, že $t_a = |AL| \le |AD|$.

- Pre body A, M, L platí trojuholníková nerovnosť. Preto $|AL| \le |AM| + |ML|$ (uvedomte si, že toto platí, aj keď tieto body ležia na priamke). Vieme, že $|AM| = c/2$ a ML je stredná priečka, teda $|AL| \le |AM| + |ML| = c/2 + b/2 = |AD|$. Podobnú úvahu môžeme urobiť aj v dvakrát zväčšenej situácii, keď trojuholník ABC doplníme na rovnobežník.
- Ak ovládame vektory, máme stručné zdôvodnenie: $2t_a = 2|\vec{t_a}| = |\vec{c} + \vec{b}| \le |\vec{c}| + |\vec{b}| = 2|AD|$.
- Môžeme použiť známy vzorec na výpočet dĺžky ťažnice; $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. (Odvodiť ho môžeme z kosínusových viet pre trojuholníky ABC a ABL. Upravíme ich tak, aby sme sa zbavili $\cos\beta$).

  Začneme s trojuholníkovou nerovnosťou (overte si, že je to ona):

$$\begin{aligned} |b - c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - 2bc &< a^2 \\ \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 &< b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2 \\ \Rightarrow t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} &< \frac{1}{2}|b + c| = \frac{1}{2}(b + c). \end{aligned}$$

Iné riešenie:

A na záver alternatívne dôkazy toho, že ak bod D leží na úsečke BL, potom platí nerovnosť $|AN| \le 2|ND|$.

- Pomery vzdialeností sa dobre prevádzajú na pomery obsahov. Navyše obsahy sa dajú dobre sčítavať a odčítavať.

  Označme symbolmi S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 obsahy trojuholníkov AMN, MBD, ANC, NDC, MDN (nakreslite si obrázok, fakt to pomôže pri čítaní ďalšieho textu). Trojuholníky AMD a BMD aj AMC a BMC majú rovnaký obsah, lebo majú rovnako dlhú základňu aj prislúchajúcu výšku. Platí $S_1 + S_5 = S_2$ a $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 + S_5$. Z prvej rovnice vyjadríme S_2, dosadíme do druhej rovnice a dostaneme $S_3 = 2S_5 + S_4$. Keďže bod N nie je ďalej od bodu M ako ťažisko T, platí $2|NM| \le |NC|$. Z toho $2S_5 \le S_4$, lebo trojuholníky majú rovnakú výšku na stranu NM, resp. NC.

  Hľadaný pomer $|AN|/|ND|$ je rovný pomeru obsahov S_3/S_4. Vieme, že

$$S_3 = S_4 + 2S_5 \le S_4 + S_4 = 2S_4.$$

  A preto $S_3/S_4 \le 2$.

- Najprv si pozrite poznámku za komentárom. Vieme, že $x = |BD|/|DC| < 1$. Nech $K = \overline{AC} \cap \overrightarrow{BN}$. Z Cevovej vety pre trojuholník ABC máme $|AK|/|KC| = x$ (všimnite si, že $KD \parallel AB$). A z Van Aubelovej vety dostaneme $\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AM|}{|BM|} + \frac{|AK|}{|KC|} = 1 + x < 2$.

Komentár: Prehľadný obrázok je veľmi dobrým prostriedkom pre hľadanie možností, ako úlohu riešiť. Náčrt (aj narysovaný obrázok) však býva nepresný a nie všetko, čo na ňom „vidieť na prvý pohľad“ je pravda. Aj preto obrázok nemôžeme použiť ako dôkaz, pokiaľ nezdôvodníme, že všetko je na ňom nakreslené tak, ako to v skutočnosti je. Napríklad treba skúmať, či body ležia na priamkach/kružniciach v takom poradí, ako máme nakreslené.

Častá úvaha bola, čo bude, ak $D \equiv L$. Najprv treba overiť, či to vôbec môže nastať. Inak sú ďalšie úvahy o tejto situácii zbytočné. A nastať to nemôže, pretože body A, B, C neležia na priamke (premyslite si to).

Poznámka: Nech body X, Y, Z ležia vnútri strán AB, BC, CA trojuholníka ABC a priamky AY, BZ, CX sa pretínajú v bode P. Cevova veta hovorí, že

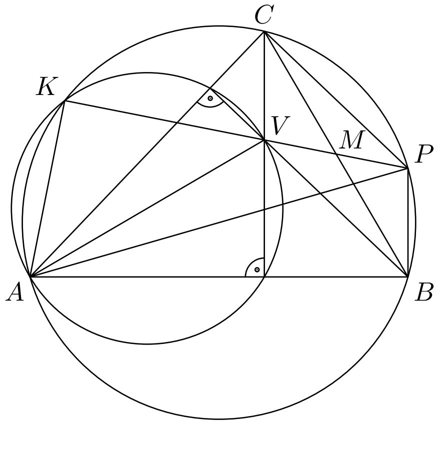
$$\frac{|AX|}{|BX|} \cdot \frac{|BY|}{|CY|} \cdot \frac{|CZ|}{|AZ|} = 1, \qquad \text{Van Aubelova veta zase vraví, že} \qquad \frac{|CP|}{|PX|} = \frac{|CY|}{|BY|} + \frac{|CZ|}{|AZ|}.$$

Keďže tieto vety hovoria ešte o čosi viac a často sa používajú, doporučujeme pozrieť si o nich niečo viac na internete (napríklad `planetmath.org/encyclopedia/VanAubelTheorem.html`), alebo sa obráťte na vedúcich seminára (`mazo@kms.sk`).

Úloha č. 10: *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Kružnica s priemerom AV pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A a K. Priamka KV pretína úsečku BC v bode M. Dokážte, že M je stredom úsečky BC.*

Riešenie: (opravovali Bus a Mišáč)

V tejto úlohe máme zadaný trojuholník, nejaké kružnice a priemery. Čo to pripomína? Akúsi hru s uhlami a Tálesovými kružnicami. Viacerí z vás počítali tento príklad analyticky. Takýto spôsob riešenia väčšinou nie je tá najlepšia cesta (najmä pri úlohách s kružnicami). Keď sme už presedeli nad príkladom mnoho upršaných večerov a múza nie a nie kopnúť, tak potom môžeme skúsiť úlohu riešiť analyticky. Ukážeme si dôkaz, ktorý vychádza len zo základných poznatkov.



Na začiatok si nakreslíme (podľa možností pekný) obrázok. Aby sme sa v ňom čo najlepšie orientovali, je vhodné pomenovať dôležité body. Priesečník priamky KV a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od K označíme P. Ďalej sa pohráme s (už spomínanými) pravými uhlami a Tálesovými kružnicami. Všimnime si, že bod K leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AV, preto uhol AKV je pravý. Platí $|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle AKV| = 90°$ a keďže bod K patrí kružnici opísanej trojuholníku ABC, tak úsečka AP musí byť jej priemerom. Bod B leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AP, teda $|\sphericalangle ABP| = 90°$. Inak povedané: úsečka PB je kolmá na stranu AB. Podobne úsečka CV je kolmá na stranu AB, keďže CV je časťou výšky na stranu AB. Hľa, dostali sme rovnobežnosť $PB \parallel CV$. Čo keby sa nám podarilo dokázať, že $CVBP$ je rovnobežník? Uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom rozpoľujú. Bod M je priesečníkom uhlopriečok v štvoruholníku $CVBP$. Teda ak $CVBP$ je rovnobežník, tak M je stredom jeho uhlopriečky BC. To vlastne chceme dokázať. Čiže ku šťastiu nám chýba už len ukázať, že $PC \parallel VB$ (potom je už $CVBP$ rovnobežníkom). To už hádam zvládnete.

Iné riešenie:

Ukážeme si ešte iný prístup k riešeniu tejto úlohy. Chceme dokázať, že M je stredom strany BC. Keď sa na to trochu inak pozrieme, tak chceme dokázať rovnosť $|MB| = |MC|$. To sa dá tak, že si dĺžky týchto úsečiek vyjadríme pomocou vzorcov. V Pytagorovej vete, kosínusovej vete a pod. sa často vyskytuje vyjadrenie dĺžok v druhej mocnine. Preto môže byť jednoduchšie dokázať, že $|MB|^2 = |MC|^2$. Nemusíme sa však nutne uchýliť k výpočtom, skúsme ešte porozmýšľať, či by sme nenašli geometrickú interpretáciu tejto rovnosti. Výraz $|MB|^2$ pripomína mocnosť bodu M k nejakej kružnici, pričom MB je dotyčnicou k tejto kružnici. Pohľadajme vhodnú kružnicu. Bod M je určený priamkou KV, preto skúsme opísať kružnicu trojuholníku BKV. Ak by sme dokázali, že MB je dotyčnicou ku tejto kružnici, tak z mocnosti by sme mali $|MB|^2 = |MV| \cdot |MK|$. Úsečka MB sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku BKV je tvrdenie ekvivalentné s tým, že $|\sphericalangle VKB| = |\sphericalangle VBM|$ (obvodový uhol sa rovná úsekovému). Našim cieľom bude teraz dokázať rovnosť týchto uhlov. Nie je ťažké overiť, že $|\sphericalangle VBM| = 90° - \gamma$, keďže VB je časťou výšky na stranu AC. Vyjadrime veľkosť uhla VKB.

$$|\sphericalangle VKB| = |\sphericalangle AKV| - |\sphericalangle AKB| = 90° - |\sphericalangle AKB| = 90° - |\sphericalangle ACB| = 90° - \gamma$$

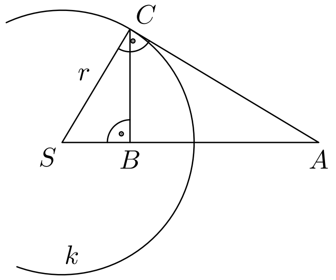
Situáciu, keď bude bod K na druhej strane od bodu A, si premyslite. Dokázali sme, že $|\sphericalangle VKB| = |\sphericalangle VBM|$, teda $|MB|^2 = |MV| \cdot |MK|$. Úplne analogicky môžeme opísať kružnicu trojuholníku KVC a dostaneme $|MC|^2 = |MV| \cdot |MK|$. Vidíme, že $|MB|^2 = |MC|^2$, čo sme chceli dokázať. Podobný postup sa dá často využiť v úlohách, keď máme overiť, že nejaké dve dĺžky sú rovnaké.

Úloha č. 11: *V rovine je daná kružnica $k(S, r)$ a bod A rôzny od bodu S. Zostrojte na polpriamke SA bod B taký, že $|SA| \cdot |SB| = r^2$. Pri konštrukcii môžete použiť iba kružidlo. Popíšte vašu konštrukciu pre každú polohu bodu A.*

Poznámka: *Pravítko* je nástroj, ktorý má jednu nekonečne dlhú hranu a na nej žiadne značky. Inak povedané, môžeme ním zostrojiť priamku prechádzajúcu dvoma danými bodmi. Nemá žiadnu rysku na rysovanie kolmíc. *Kružidlo* slúži na rysovanie kružníc s daným stredom a polomerom. Kružidlo, ako sa zvyčajne používa v škole, slúži aj na prenášanie vzdialeností (naberiem vzdialenosť do kružidla, zapichnem ho niekde inde a urobím kružnicu). To je pri prísnej definícii kružidla zakázané. Akonáhle vytiahnem ihlu kružidla z miesta, kde som ju zapichol, kružidlo sa zatvorí. V skutočnosti toto nie je dôležité obmedzenie, pretože prenášať vzdialenosti vieme pomocou niekoľkokrokovej konštrukcie.

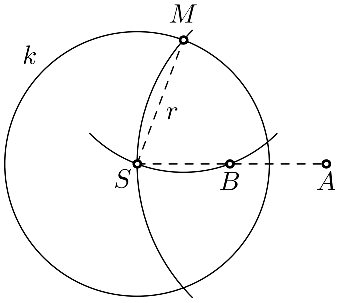
Riešenie: (opravovali Čolka a Mazo)

Našou úlohou je nájsť taký bod, aby platila zadaná rovnosť. Konštrukcia je však sťažená o to, že môžeme používať len kružidlo. Skúsme na úvod vyskúšať, ako by konštrukcia vyzerala s kružidlom a pravítkom. Aspoň zistíme, kde vlastne ten bod B leží. Z podmienok v zadaní vyplýva, že bod B je jediný bod na polpriamke SA, pre ktorý platí $|SB| = r^2/|SA|$.



Kde všade sa môže náš zadaný bod A nachádzať? Ak leží na kružnici k, priamo zo zadania vyplýva, že bod B je totožný s bodom A. Nemáme čo konštruovať. Pozrime sa na bod A vonku, teda $|SA| > r$. Zo vzťahu zo zadania vyplýva, že $|SB| < r$ a preto bod B leží vnútri kružnice k. Videli sme už niekedy vzťah podobný vzťahu $|SA| \cdot |SB| = r^2$? Áno, Euklidova veta pre nejaký pravouhlý trojuholník. V našom prípade by to bola Euklidova veta o odvesne s dĺžkou r. Keďže $|SA| > r > |SB|$, je preponou nášho trojuholníka úsečka SA a bod B je pätou výšky. Už vieme, ako dostaneme tretí vrchol nášho trojuholníka: leží na Tálesovej kružnici nad priemerom SA a tiež na kružnici k, pretože jeho vzdialenosť od bodu S je r. Keď zostrojíme tento bod, stačí z neho spraviť kolmicu na priamku SA a dostaneme hľadaný bod B ako pätu tejto kolmice. Situáciu s bodom A ležiacim vnútri kružnice si skúste vyriešiť sami.

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Máme k dispozícii iba kružidlo. Začíname s kružnicou k, jej stredom S a bodom A. Konštrukcia z predošlého odseku zlyhá hneď na začiatku. Aby fungovala, potrebujeme Tálesovu kružnicu s priemerom SA. A tú zostrojiť iba kružidlom nevieme, pretože zatiaľ nevieme spraviť stred úsečky. Takže buď budeme skúšať zostrojiť iba kružidlom stred danej úsečky (dá sa to), alebo to necháme tak a skúsime niečo iné.



Keď sa pozrieme hlbšie na podstatu Euklidovej vety, zistíme, že je to vlastne podobnosť. (Dokážte si Euklidovu vetu cez podobnosť a uvidíte to.) Podobnosť funguje aj vtedy, keď nemáme na obrázku nakreslené priamky a používame iba kružidlo. Preto náš vzťah zo zadania prepíšeme na rovnosť pomerov.

$$\frac{|SB|}{r} = \frac{r}{|SA|}$$

Nájdeme podobné trojuholníky, v ktorých sú tieto pomery pomermi dĺžok dvoch strán. Úsečku s dĺžkou $|SA|$ už na obrázku máme, k nej do trojuholníka treba tretí vrchol M. Jedna strana tohto trojuholníka má mať dĺžku r, preto zvolíme M na kružnici k. Teraz je v trojuholníku MSA pomer $r/|SA|$ pomerom dvoch strán zvierajúcich uhol s veľkosťou MSA. Ten druhý trojuholník podobný s trojuholníkom MSA má tiež uhol veľkosti MSA, položme ho teda tak, aby mali uhol MSA spoločný. Z rovnosti pomerov vyplýva, že týmto druhým trojuholníkom bude trojuholník BSM. (Overte, že je podobný s trojuholníkom MSA.)

Za bod M potrebujeme zvoliť bod, ktorý vieme zostrojiť. Hneď sa ponúka priesečník kružnice $\ell(A, |SA|)$ s kružnicou k. V tom prípade je trojuholník MSA rovnoramenný so základňou MS. Preto aj trojuholník BSM bude rovnoramenný so základňou BS. A preto vieme zostrojiť bod B: leží na kružnici $m(M, |MS|)$ a kružnici s ňou súmernej podľa priamky SA.

Uvedená úvaha o podobnosti trojuholníkov slúži ako dôkaz toho, že sme naozaj zostrojili bod B, ktorý spĺňa vzťah $|SA| \cdot |SB| = r^2$. Symetria podľa priamky SA zase zaručuje, že takto zostrojený bod B leží na polpriamke SA. Zo vzťahu $|SB| = r^2/|SA|$ vyplýva, že hľadaný bod je jediný.

Všetko by bolo fajn, keby naša konštrukcia fungovala pre každú možnú polohu bodu A. Potrebujeme však, aby kružnica $\ell(A, |SA|)$ mala dva priesečníky s kružnicou k. To nenastane pre $|SA| \le r/2$. V takom prípade máme napríklad tieto možnosti:

1. K danej úsečke vieme nájsť úsečku s dvojnásobnou dĺžkou (skúste, postupujeme ako pri konštrukcii pravidelného šesťuholníka). Zopakovaním tejto konštrukcie vieme k bodu A nájsť bod A' na polpriamke SA taký, že $|SA'| = n \cdot |SA|$. Pre dostatočne veľké prirodzené číslo n už bude $|SA'| > r/2$, preto použijeme známu konštrukciu a zostrojíme bod B' spĺňajúci vzťah $|SB'| \cdot |SA'| = r^2$. Preň platí

$$|SB'| = \frac{r^2}{|SA'|} = \frac{r^2}{n \cdot |SA|} = \frac{|SB|}{n}.$$

Takže na zostrojenie bodu B treba úsečku SB' zväčšiť n-krát. To vieme.

2. Skúsime upraviť konštrukciu s kružidlom a pravítkom tak, aby sme pravítko nepoužili. (Ešte ste tú konštrukciu nespravili? Tak teraz je ten správny čas.) Toto nie je práve najjednoduchšie, ale dá sa to realizovať pomocou niektorých z konštrukcií spomínaných v poznámke na záver. Vyskúšajte si pohrať sa s nimi.

Iné riešenie:

Dá sa uvažovať aj inak. Čo vlastne vieme v úvodnej situácii zostrojiť? Dve kružnice. Prvá z nich má stred S a polomer SA. Keďže je sústredná s kružnicou k, nedostaneme žiadne nové body ako priesečníky už zostrojených kružníc. Preto táto kružnica je momentálne úplne neužitočná. Druhá možnosť je zostrojiť kružnicu ℓ so stredom A a polomerom AS. Pri konštrukcii s kružidlom aj pravítkom sme potrebovali Tálesovu kružnicu. Mohla by byť kružnica ℓ touto Tálesovou kružnicou? Rozpracovaním tejto idey dospejeme k rovnakej konštrukcii ako v predošlom riešení.

Poznámka: Pri riešení ste objavili množstvo rôznych konštrukcií, ktoré sa dajú spraviť iba kružidlom. Tu sú niektoré z nich. Skúste sa pohrať a spravte si niektoré z nasledujúcich kružidlových konštrukcií.

1. Obraz bodu C v osovej súmernosti podľa priamky AB danej bodmi A, B.
2. Priesečník danej kružnice s priamkou danou dvoma bodmi.
3. Stred oblúka AB kružnice k; máme danú kružnicu k, jej stred S a body A, B ležiace na k.

4. Prenášanie vzdialenosti kružidlom. (Zostrojiť kružnicu s daným stredom S a polomerom rovným dĺžke úsečky AB danej bodmi A, B).
5. Priesečník danej kružnice $k(S, r)$ s priamkou SA danou bodmi S, A.
6. Úsečka s dĺžkou $r\sqrt{2}$, keď máme danú úsečku s dĺžkou r.
7. Stred danej úsečky, stred danej kružnice.
8. Úsečka s dĺžkou rovnou $(1/n)$-násobku dĺžky danej úsečky.
9. Kružnica opísaná trojuholníku s danými vrcholmi A, B, C.
10. Priesečník priamok AB, CD daných bodmi A, B a C, D.
11. Dotykové body spoločnej dotyčnice dvoch kružníc.

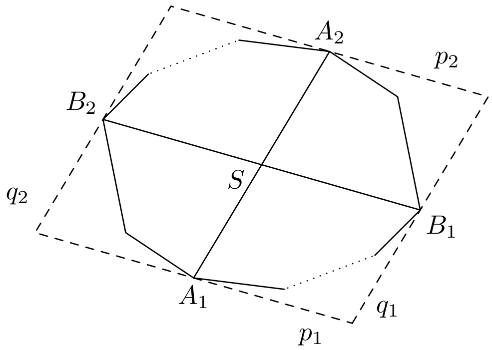
Komentár: Čítajte si poriadne zadanie. Ak sa tam spomína nejaká polpriamka SA, to neznamená, že je daná! Daná bola len kružnica k, jej stred S a bod A – prečítajte si prvú vetu. Polpriamka SA síce existuje a môžeme o nej hovoriť, ale nie je zostrojená. A kružidlom ju veru celú nezostrojíte, nanajvýš niekoľko bodov.

Riešenia úloh 12 a 13 zatiaľ nezverejňujeme, máte možnosť ich poslať spolu s treťou sériou.

Úloha č. 14: *Daný je stredovo súmerný mnohouholník M (nemusí byť konvexný). Dokážte, že existuje rovnobežník R taký, že stredy jeho strán ležia na obvode mnohouholníka M a pritom mnohouholník M je podmnožinou rovnobežníka R.*

Riešenie: (opravoval Mazo)

(Podľa *Martina Podoláka*.) Po nakreslení niekoľkých obrázkov si uvedomíme, že stačí uvažovať konvexné mnohouholníky $\mathcal{M}$. Rovnobežník $\mathcal{R}$ budeme hľadať taký, že stredy jeho strán budú ležať vo vrcholoch mnohouholníka $\mathcal{M}$ (to je tiež jasné z tých obrázkov).



Označme S stred súmernosti mnohouholníka $\mathcal{M}$. Predpokladajme, že sme pre mnohouholník $\mathcal{M}$ zostrojili rovnobežník $\mathcal{R}$ spĺňajúci podmienky zo zadania. Nech stredy jeho strán sú vo vrcholoch A_1, A_2, B_1, B_2 (obrázok). Žiaden bod mnohouholníka M neleží mimo pása určeného priamkami p_1, p_2 rovnobežnými s priamkou B_1B_2. Keď máme danú úsečku B_1B_2, tak priamky p_1, p_2 tvoria množinu bodov X takých, že trojuholník B_1B_2X má obsah S (pre pevné kladné reálne číslo S). Body X v spomínanom páse určujú trojuholník B_1B_2X s obsahom menším ako S, body X mimo pása zase určujú trojuholník s obsahom väčším ako S. Keďže žiaden vrchol mnohouholníka $\mathcal{M}$ neleží mimo spomínaného pásu, je A_1 takým vrcholom mnohouholníka $\mathcal{M}$, že obsah trojuholníka $B_1B_2A_1$ je maximálny.

Analogickú úvahu vieme spraviť pre pás určený priamkami q_1, q_2. Preto obsah trojuholníka $A_1A_2B_2$ je maximálny spomedzi obsahov trojuholníkov A_1A_2X, kde X je vrchol mnohouholníka $\mathcal{M}$. Z tohto už vieme, ako nájsť rovnobežník $\mathcal{R}$ pre daný mnohouholník $\mathcal{M}$.

Nech SA_1B_1 je trojuholník, ktorého obsah je najväčší spomedzi obsahov trojuholníkov SXY, kde X, Y sú vrcholy mnohouholníka M (ak máme viacero možností pre voľbu A_1, B_1, vezmeme hociktoré). Nech A_2, B_2 sú obrazy bodov A_1, B_1 v stredovej súmernosti so stredom S. Rovnobežník $\mathcal{R}$, ktorého stredy strán sú body A_1, B_1, A_2, B_2, spĺňa všetky požadované podmienky. Vyplýva to z uvedených úvah.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	$\mathbf{k}_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Tureková Katarína	3.	GJGT BB	8	2		9	9	9	4	9	9		45	90
2.	Herencsár Albert	2.	Gmaď GA	4	0	9	9	9	9	7				43	88
2.	Podolák Martin	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	9	9	9		45	88
4.	Bzdušek Tomáš	4.	GPdC PN	8	2		9	9	9	9	5	9		45	87
5.	Kuncová Alexandra	2.	GAlej KE	5	0	7	9	9	9	7				41	86
6.	Szabados Michal	4.	ŠPMNDG BA	8	5			9	9	8	9	9		44	85
7.	Derňár Marek	4.	GAlej KE	6	0	9	9	9	9	8	9	4		45	82
8.	Alif Maja	3.	GCelje	3	0	8	9	9	5			7		38	80
9.	Jursa Jakub	2.	GAlej KE	5	0	9	9	9	9			9		45	78
10.	Starovská Mária	3.	Gamča BA	8	2		9	9	4	9		9		40	76
10.	Ujházi Vladislav	3.	GPJŠ RO	7	5			9	9	8	9	9		44	76
12.	Juríková Katarína	3.	GJGT BB	5	0	9	9	8	9	4				39	75
12.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	10	5			9	9	9	7	7		41	75

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
12.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	3	0	9	9	2		3	9			32	75
12.	Šagát Marián	3.	GŠkol PB	5	0	9	9	9	9			6		42	75
16.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	7	2		9	9	9		1	9		37	73
16.	Boža Vladimír	3.	GDT PP	6	3			9	9	9	6	7		40	73
16.	Polačko Martin	2.	GAlej KE	5	0	9	9	9	9					36	73
19.	Špesová Nikola	3.	GK2 PO	7	2		9	9	9	2		6		35	72
20.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE	6	1		9	8	9	9	2			37	70
21.	Biskupičová Lívia	2.	GŠkol PB	4	0	8	9	3		5		6		31	69
21.	Hojčka Michal	2.	GKom PE	4	1		9	9	3		1	7		29	69
23.	Haas Emil	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9						27	68
23.	Melicherčík Martin	3.	GPár NR	8	2		9	9	9	6		6		39	68
23.	Rizman Tomáš	2.	GVar ZA	4	0	9	9	9	9	6				42	68
23.	Vancáková Judita	4.	GPoš KE	6	1		9	8	5	7		1		30	68
27.	Jakubík Jozef	3.	GKom PE	6	1		9	9	5	4	9			36	67
27.	Kovalčíková Kristína	4.	GVar ZA	10	2		9	9	8			5		31	67
27.	Simanová Lucia	3.	Gamča BA	6	0	7	9	9	5					30	67
30.	Kubina Filip	3.	GPOH DK	5	0	7	9	7	5			1		29	66
31.	Petrucha Michal	2.	GMet BA	4	0	7	9	4		1		9		30	65
32.	Hapák Samuel	3.	Gamča BA	6	4			4	3	3	8	5		23	64
32.	Paulovský Michal	3.	Gamča BA	5	0	7	9	8	1	1				26	64
34.	Kuzma Tomáš	2.	GAlej KE	5	0	8	8	8	5					29	63
35.	Kočiský Tomáš	3.	Gamča BA	4	1		9	9	8		0			26	62
35.	Szabadosová Emília	3.	ŠPMNDG BA	6	0	9	4	3	9	4	0			29	62
37.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	3	0	9	9		5	5				28	61
37.	Hollá Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	7	9	3	3	3				25	61
37.	Vendel Dávid	2.	GPoš KE	4	0	5	9	3	4	3				24	61
40.	Liščinský Miroslav	2.	GAlej KE	5	0	9	9	9	5					32	60
41.	Fekiač Jozef	2.	Gamča BA	4	0	9	9	9		1				28	59
41.	Konečný Lukáš	3.	GPdC PN	3	0	9	9	9	7	0				34	59
43.	Matejovičová Lenka	3.	Gamča BA	8	2		9	5	5	8		2		29	56
44.	Čevorová Kristína	4.	ŠPMNDG BA	8	2		9	9	0	1		0		19	55
45.	Hojčková Martina	4.	GJH BA	8	2		9	9	5		3	0		26	54
45.	Hudec Vladimír	2.	GVar ZA	4	0	8	9	3	4			1		25	54
47.	Vdovičenko Martin	3.	GPár NR	7	2		9	9				6		24	52
48.	Magyarová Katarína	4.	GBST LC	8	1		9	3	8	1		2		23	51
48.	Melo Matej	2.	GsvFA ZA	4	0	6	5	2		2				15	51
50.	Dlabaja Petr	4.	Holešov ČR	4	0	9	6	8	3	3				29	50
50.	Živčáková Andrea	3.	GJGT BB	4	0	9	9	3				0		21	50
52.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	2	0	6	9	3				2		20	49
52.	Csiba Peter	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	8	3					29	49
54.	Dvoranová Mária	2.	G Šurany	4	0	9	9	2				2		22	48
55.	Godány Martin	4.	ŠPMNDG BA	7	1		9	3	8	0		0		20	47
55.	Vrbovská Mária	3.	GJGT BB	5	0	9		9	3	5		0		26	47
57.	Cibiček Jozef	4.	GJH BA	6	1									0	45
57.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3	0	8	9	2						19	45
57.	Žemlička Martin	4.	GLS BJ	4	0	6	9	9		1		0		25	45
60.	Hodásová Judita	2.	Gamča BA	4	0	8	1	3		2	0	0		14	44
60.	Kobza Vladimír	3.	GJGT BB	5	0	9	5	7	1	1		2		24	44
62.	Kuklišová Nina	2.	GMet BA	5	0	9		3						12	43
63.	Jablonická Kristína	2.	ŠPMNDG BA	4	0	7	4	2						13	41
63.	Šiagi Miroslav	3.	GJGT BB	4	0		9	7	7			0		23	41
65.	Bogár Ondrej	4.	GĽŠ TN	4	0	6	9	3						18	37
65.	Brída Radoslav	3.	Gamča BA	4	0	6	8	4						18	37
67.	Janíková Karolína	4.	GVar ZA	6	0	6	9	3						18	35
68.	Hajdin Michal	2.	GJH BA	4	0	6	2	2						10	34
69.	Dvoranová Veronika	3.	G Šurany	6	1		9	2				2		13	33
70.	Roháľ Branislav	3.	GŠkol PB	5	0									0	32

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
71.	Kotrlová Katarína	2.	GVPT MT	4	0	7		4				2		13	30
72.	Lukačišin Martin	3.	GJFR LE	3	0									0	28
72.	Minárik Marián	3.	GPár NR	5	1			9	1					10	28
74.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	2	0	8		2						10	27
75.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3	0	4	2	1				0		7	26
75.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3	0	9								9	26
77.	Birčák Erik	4.	ŠPMNDG BA	4	0									0	25
77.	Košinárová Alena	3.	Gamča BA	8	3									0	25
77.	Sudolský Michal	4.	GJGT BB	9	6			7	8	5		5		25	25
80.	Halaga Jozef	4.	GAP SB	4	0	9	7							16	16
80.	Nemec Juraj	3.	GJGT BB	4	0									0	16
82.	Alberty Roman	3.	GJGT BB	4	0									0	14
82.	Slovík Lukáš	3.	GJGT BB	4	0	5		2				0		7	14
84.	Kucbel Maroš	3.	GJGT BB	4	0									0	12
84.	Rakovská Elena	4.	GBil BA	4	0									0	12
86.	Szabo Martin	3.	GJGT BB	4	0									0	9
87.	Valenčíková Romana	2.	GJGT BB	3	0	0			5					5	6
87.	Šrámek Martin	3.	GTilg BA	4	0									0	6
89.	Konôpková Júlia	2.	GJGT BB	3	0	0			0					0	5
89.	Pažický Martin	2.	GJH BA	2	0	2				0				2	5
91.	Minďášová Katarína	2.	GJGT BB	3	0	0		3	0					3	3
92.	Betka Matej	2.	GJGT BB	3	0	0			0					0	0
92.	Kapustová Katarína	2.	GJGT BB	3	0	0			0	0				0	0
92.	Nerer Juraj	3.	GJGT BB	4	0									0	0
92.	Zubnárová Katarína	3.	GJGT BB	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Karásková Natália	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9	9	3		88
2.	Hagara Michal	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9				86
3.	Rudolfová Barbora	1.	GMet BA	1	8	7	0	5	9	9	3		83
4.	Konečný Jakub	1.	Gamča BA	2		9	9	9	6	9	3		82
5.	Hašík Juraj	1.	Gamča BA	2		9	9	9	5	9			81
6.	Peitl Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	1	6	9	9	9	7		3		80
7.	Magula Mário	1.	Gamča BA	1		9	8	7	4	9	9		79
8.	Belan Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	1	6	9	8	7	7				78
9.	Firbas Karol	1.	Gamča BA	2		9	9	9			7		76
9.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	3			8	7	9	9	2		76
11.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	2		7	6	9	8		2		75
12.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3			7	9	8	9	2		72
13.	Zajac Anton	1.	Gamča BA	2		9	8	7	9		3		71
14.	Formánek Michal	2.	ŠPMNDG BA	3			7	9	7	6	3		68
15.	Buchholcerová Anna	1.	GBil BA	2		9	3	7	7	9	3		67
16.	Křemenová Lucie	1.	GMet BA	1	8	5	0		9	9			65
17.	Mieresová Ľubomíra	0.	GJH BA	1		3	9	8		2			62
18.	Vaškovičová Michaela	1.	1SG BA	1	7	9	6	5	6				61
19.	Matulová Daniela	1.	GVaz BA	1	8	5	5	2	2	1	3		53
20.	Pažický Martin	2.	GJH BA	2					2				5

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Konečný Lukáš	3.	GPdC PN	3			9	9	9	9	9		88
2.	Bogár Ján	1.	GĽŠ TN	1	9	9	9	7	9		3		80
3.	Péder Mário	1.	GMRŠ Šamorín	1	6	9	9	9					75

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
4.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	2	8	1	7	7	6	9	3		58
5.	Tomašovič Juraj	1.	GPdC PN	1	7	9	5	7		0	2		56
6.	Repková Lucia	1.	GPár NR	1		6	4		9		3		52
7.	Bošanská Eva	2.	GĽŠ TN	2		1	9	0			1		46
8.	Baxová Katarína	2.	GĽŠ TN	2				6	6				38
9.	Šimková Mária	1.	GJF Šaľa	1									25
10.	Šimora Peter	2.	GVBN PD	2									22
11.	Baxová Jana	1.	GĽŠ TN	1									13
12.	Babiarová Dana	2.	GJab MY	3									0

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	1.	GVO ZA	2		9	8	9	9	9	9		90
2.	Jagoš Ľubomír	1.	GVO ZA	2		9	9	9	9	9	8		86
3.	Tvarůžková Jarmila	1.	GŠkol PB	1	8	5	9	9	9				85
4.	Porembová Alexandra	1.	BiG Sučany	1	8	5	9	9	7		3		80
5.	Štyráková Kamila	1.	GPOH DK	1	8	5		9	7		5		77
6.	Rošťáková Zuzana	1.	GMMH LM	1	8	9	9	9	6	2	4		75
7.	Maixner Michal	2.	GVar ZA	2		3	9	9	9	9	3		73
8.	Lauková Ivana	1.	GJL MT	1	8		9	5	6				72
9.	Majdiš Mojmír	1.	GPOH DK	1	6	5		5	7		5		67
9.	Perešíniová Michaela	1.	OA BB	1	8	9	7	6	9				67
11.	Ziman Michal	1.	GBST LC	1	6	5		1	5	5	2		63
12.	Kredatus Ivan	1.	SPŠJM BB	1	6	3	8	0	2	2	2		54
13.	Kieferová Marika	2.	GsvFA ZA	3			3	3	8	2	3		51
14.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3			8	6	4	2	1		48
15.	Ľubušký Peter	1.	GAK BS	1									42
16.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3			7	0	9				41
17.	Selečéni Miloš	1.	GJGT BB	2		3	3	1		9			26
18.	Fajčíková Patrícia	1.	GBST LC	1									25
19.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	1									21
19.	Vajdová Zlatica	1.	GJGT BB	2		1	0	0					21
21.	Oravcová Zosia	2.	GJGT BB	3					8	9	3		20
22.	Minďášová Katarína	2.	GJGT BB	3			0	0	0		3		10
23.	Bene Daniel	3.	GBST LC	3							9		9
24.	Valenčíková Romana	2.	GJGT BB	3			0	0	0				8
25.	Kapustová Katarína	2.	GJGT BB	3			0	0	0				7
26.	Konôpková Júlia	2.	GJGT BB	3			0	0	0				5
26.	Mlynáriková Michaela	2.	GJGT BB	3			0	0	0		1		5
28.	Betka Matej	2.	GJGT BB	3			0	0	0				0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Popovič Viktor	1.	GJAR PO	2		9	9	9	9	9	3		89
2.	Bačo Ladislav	1.	GPoš KE	2		9	9	9	9	9	9		86
3.	Kičová Kristína	1.	GPoš KE	1	8	9	9	9	8	2			81
4.	Rigdová Emília	1.	GKuk PP	1	6	9	9	9	7	9	3		78
5.	Mitro Juraj	1.	GJAR PO	1	3	9	7		9		4		77
6.	Cocuľová Zuzana	1.	GPoš KE	2		9	9	9	6	1	3		75
7.	Baranová Jana	1.	GAlej KE	2		9	5	9	9				66
8.	Hudák Adam	1.	GMRŠ KE	1	8	6	9	9					65
9.	Vaľková Monika	1.	GAlej KE	2		9		9	9				58
10.	Dobranský Marián	2.	GPoš KE	3			9	9	7	9	4		51
11.	Lešková Andrea	1.	G Lipany	1	8	9	9	9	7		3		42

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
12.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	3					9	9			40
12.	Lukačišin Martin	3.	GJFR LE	3									40
14.	Lešková Katarína	1.	G Lipany	1	6	9		6	7		3		31
15.	Zatrochová Zuzana	1.	GAlej KE	2									30
16.	Görcsösová Andrea	1.	GAlej KE	2									19

kategória ALFA, mimo SR

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Matúš Kopf	1.	GMen OP	1	8	9	9	9	9				85

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	1	9			7		30
2.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE	2				2		18
3.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	7	7					22
4.	Podolák Martin	4.	Gamča BA	9	9			7		45
5.	Ujházi Vladislav	3.	GPJŠ RO	9	9					28