Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série zimného semestra

Úloha č. 1: *Keď bol Miťo ešte malý, rátaval na prstoch svojím vlastným spôsobom. Začínal 1 na palci, 2 a 3 na ukazováku, 4, 5 a 6 na prostredníku, 7 na prsteníku, 8 a 9 na malíčku. Potom pokračoval naspäť – 10, 11 a 12 na prsteníku, 13 na prostredníku, 14 a 15 na ukazováku, 16, 17 a 18 na palci, 19 na ukazováku atď. Na ktorom prste prišiel k číslu 2006?*

Riešenie: (opravovali Miško T. a Lucy)
Miťo začína počítať na palci prvé číslo, na ukazováku ďalšie dve čísla, na prostredníku ďalšie tri čísla, na prstenníku opäť len jedno číslo, na ďalšom prste dve čísla, na ďalšom tri čísla a tak ďalej. Všimnime si, že keď Miťo napočíta prvých šesť čísel, tak na to použije presne tri prsty. Ľahko si uvedomíme, že aj na každú ďalšiu šesticu čísel použije tri prsty.
Chceli by sme zistiť, koľko prstov Miťo „použije", kým sa dopočíta k číslu 2006. Vieme, že na šesticu čísel Miťo použije tri prsty, preto vypočítame $2006/6 = 334$ so zvyškom 2. To znamená, že Miťo 334-krát použije tri prsty a potom mu ostanú ešte dve čísla. Prvé z nich napočíta na jednom prste a to druhé spolu s tretím na tom ďalšom prste. (Uvedomme si, že na „treťom" prste ráta tri čísla.) Spolu teda použije $334\cdot3+2 = 1004$ prstov na napočítanie do 2006.
Teraz by sa nám hodilo zistiť, ako sa mu prsty opakujú. Idú v poradí: palec, ukazovák, prostredník, prsteník, malíček, prsteník, prostredník, ukazovák, ... Vidíme, že potom sa bude celá skupina znova opakovať. Teda po prejdení ôsmimi prstami bude Miťo pokračovať na tom istom prste ako začínal, konkrétne na palci. Keďže $1004/8 = 125$ a zvyšok je 4, tak Miťo musí prejsť 125 celých 8-prstových skupín a ešte štyri prsty navyše. Ako vieme, po skončení každej skupiny pokračuje na palci. Preto posledné štyri prsty budú palec, ukazovák, prostredník a prstenník. To znamená, že Miťo príde k číslu 2006 na prstenníku.

Úloha č. 2: *Raz mal Ondrej skvelý sen. Snívalo sa mu, že vyhral v tipovacej súťaži. Ako výhru mu dali vybrať jeden z dvoch kufríkov s peniazmi, ktorý si odnesie domov. Na týchto dvoch kufríkoch bola napísaná čiastka, ktorá sa v nich nachádzala:*

$$\frac{9999^{2006}+1}{9999^{2005}+1} \quad a \quad \frac{9999^{2007}+1}{9999^{2006}+1}.$$

Ondrej si samozrejme vybral kufrík, v ktorom bolo viac peňazí. Ktorý to bol?

Riešenie: (opravovali Ika a Jakub)
Úlohou bolo vlastne porovnať dva zlomky. To sa väčšinou dá spraviť tak, že ich dáme na spoločný menovateľ a porovnáme čitatele. Úpravou na spoločný menovateľ v prvom prípade dostaneme

$$\frac{9999^{2006}+1}{9999^{2005}+1}\cdot\frac{9999^{2006}+1}{9999^{2006}+1} = \frac{9999^{4012}+2\cdot9999^{2006}+1}{(9999^{2005}+1)\cdot(9999^{2006}+1)}$$

a v druhom prípade

$$\frac{9999^{2007}+1}{9999^{2006}+1}\cdot\frac{9999^{2005}+1}{9999^{2005}+1} = \frac{9999^{4012}+9999^{2007}+9999^{2005}+1}{(9999^{2005}+1)\cdot(9999^{2006}+1)}.$$

Zatiaľ ešte nie je zrejmé, ktorý čitateľ je väčší, preto ich upravíme tak, aby bolo jasne viditeľné, v ktorom člene sa líšia. Prvý čitateľ je rovný výrazu

$$9999^{4012}+1+9999^{2005}\cdot(2\cdot9999)$$

a druhý je rovný

$$9999^{4012}+1+9999^{2005}\cdot(9999^2+1).$$

A teraz už vidno, že druhý čitateľ je väčší ako prvý, keďže zrejme platí $2\cdot9999 < 9999^2+1$. Takže Ondro si vybral druhý kufrík.

Komentár: Tento príklad väčšina z vás zvládla vyriešiť naozaj pekne. Skúste sa zamyslieť ešte nad tým, o koľko viac peňazí bolo v druhom kufríku ako v prvom. (Koľko peňazí získal Ondro vďaka svojmu intelektu?)

Poznámka: Pri riešní príkladu vás možno napadlo, že samotné číslo 9999 nie je úplne dôležité a pritom je dlhé. A keďže lenivosti nie je nikdy dosť, namiesto čísla 9999 môžeme písať napríklad písmenko a. Podobne, na čísle 2006 zrejme nezáleží, prečo si teda namiesto neho nenapísať povedzme n? Ak napíšeme zlomky zo zadania s týmito písmenkami a potom ich upravíme ako vo vzorovom riešení, nakoniec sa dopracujeme k čitateľom, ktoré budú mať tvar $a^{2n}+1+a^{n-1}\cdot(2\cdot a)$, respektíve $a^{2n}+1+a^{n-1}\cdot(a^2+1)$. Ak zabudneme na rovnaké členy, ostane nám porovnať výrazy $2a$ a a^2+1. Keďže $(a-1)^2 \geq 0$, takže $a^2+1 \geq 2a$ pre akékoľvek reálne číslo a. Mohli by sme preto naše úvahy uzavrieť tvrdením, že ak sú množstvá peňazí v kufríkoch popísané takýmito vzťahmi, tak v druhom kufríku bude vždy aspoň toľko peňazí ako v prvom.[1] Avšak pozor, toto nie je celkom pravda, výraz a^{n-1} môže byť aj záporný a vtedy je to presne naopak. (Myslíme tým člen a^{n-1}, ktorý vystupuje pred zátvorkou v oboch čitateľoch.) Treba preto ešte trochu porozmýšľať nad znamienkami a máme pekné všeobecné riešenie.

Úloha č. 3: *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave*

$$\begin{aligned} x^2 - xy &= -12, \\ y^2 - xy &= 28. \end{aligned}$$

Riešenie: (opravovali Baja a Hanka)
Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. My vám ukážeme tri z nich.

Prvé riešenie: Ako prvé tu máme riešenie, ktoré sa nám zdalo najkrajšie. Určite sa každý z vás už stretol so vzorčekom $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ alebo $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Keď sa pozrieme na zadanú sústavu rovníc, ani jeden tam síce priamo nevystupuje, ale trošku sa to podobá, nie? Čo tak tieto rovnice sčítať alebo odčítať?
Keď ich sčítame, dostaneme $x^2 - 2xy + y^2 = 16$. A to už je spomínaný vzorček, preto máme $(x-y)^2 = 16$. Čomu sa môže rovnať hodnota výrazu $(x-y)$? Tu veľa z vás urobilo chybu a za jedinú možnosť prehlásilo $x - y = 4$. Ďalšou možnosťou však je aj $x - y = -4$. (Lebo ak si spomínate, ako vás to učili v škole, tak po odmocnení dostanete $|x-y| = 4$.) Máme teda dve možnosti pre y: buď $y_1 = x - 4$ alebo $y_2 = x + 4$. Po dosadení za y do prvej rovnice zistíme $x_1 = -3$ a $x_2 = 3$. Potom $y_1 = -7$ a $y_2 = 7$.
Ak si myslíte, že toto je celé riešenie, tak sa veľmi mýlite. Ako viete, že to, čo vám vyšlo, sú naozaj riešenia pôvodných rovníc? Keď ste najprv čosi sčítali či odčítali, tak nemôžete takto získané riešenia prehlásiť za správne. Najprv treba urobiť skúšku!

Druhé riešenie: Tentokrát nám stačí si všimnúť, že v prvej rovnici vieme vyňať x a v druhej y. Tak to teda skúsme a dostaneme $x(x-y) = -12$ a $y(y-x) = 28$. Vidíme, že výrazy v zátvorkách sa skoro rovnajú, stačí v prvej vyňať „mínus“ a naozaj sa budú. Preto si tento výraz môžeme z oboch rovníc vyjadriť, dostávame

$$y - x = \frac{12}{x} \qquad \text{a} \qquad y - x = \frac{28}{y}.$$

V týchto úpravách sme však delili neznámymi x a y, a teda sa musíme zamyslieť nad tým, či náhodou nemôžu byť nulové. Keď sa pozrieme na pôvodné rovnice vidíme, že nemôžu, lebo by sme dostali $0 + 0 = -12$ z prvej alebo $0 + 0 = 28$ z druhej rovnice. Preto môžeme uvažovať $x \neq 0$ a $y \neq 0$ a naše úpravy sú preto v poriadku. Všimnime si, že keď sa rovnajú ľavé strany, musia sa aj pravé, preto platí

$$\frac{12}{x} = \frac{28}{y}$$

a po úprave aj

$$y = \frac{7}{3}x.$$

Dosadíme toto y do prvej rovnice zo zadania a po drobných úpravách zisťujeme, že $x^2 = 9$. Po poučení o odmocňovaní z prvého riešenia vidíme, že pre x máme dve možnosti, konkrétne $x_1 = 3$ a $x_2 = -3$. Dorátať y_1 a y_2 už zvládne každý z vás. Nezabúdajme, že na záver treba ešte spraviť skúšku.

Tretie riešenie: Posledný spôsob, nazývaný aj *riešenie hrubou silou*, je myšlienkovo ešte menej náročný. Stačí si totiž uvedomiť, že riešime dve rovnice o dvoch neznámych. Keďže (ako sme už ukázali) $x \neq 0$, tak z prvej rovnice si môžeme vyjadriť

$$y = \frac{x^2+12}{x}.$$

Teraz môžeme takto vyjadrené y dosadiť do druhej rovnice a dostávame

$$\left(\frac{x^2+12}{x}\right)^2 - x\left(\frac{x^2+12}{x}\right) = 28,$$

čo je rovnica s jednou neznámou. Po úprave opäť dostaneme, že $x^2 = 9$. (No dobre, tie úpravy sú trochu dlhšie:). Skúste si to.) O ďalšom postupe už snáď všetko viete a môžete si ho teda vyskúšať sami. Aj tú skúšku, čo nasleduje hneď za tým si vyskúšajte:).

[1] Pričom aj vieme povedať, kedy v nich bude rovnako veľa peňazí a kedy bude v druhom viac – v našom výraze nastáva rovnosť iba pre $a = 1$.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Koľko prirodzených čísel x spĺňa rovnosť*

$$\left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{11} \right\rfloor + 1?$$

Poznámka: Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označujeme dolnú celú časť čísla x. Je to najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu x. Napríklad $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 6{,}9 \rfloor = 6$, $\lfloor -6{,}9 \rfloor = -7$, pretože -7 je najväčšie celé číslo menšie ako $-6{,}9$.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ivka a Miťo)
Keď si uvedomíme, čo s našimi výrazmi robí dolná celá časť, môžeme skúsiť „uhádnuť", ako budú vyzerať riešenia. Výraz $\lfloor x/10 \rfloor$ znamená, že z čísla x zahodíme poslednú cifru. S výrazom $\lfloor x/11 \rfloor$ je to už trochu zložitejšie, treba číslo x vydeliť jedenástimi a potom zobrať iba tú časť výsledku, ktorá je pred desatinnou čiarkou. Keď budeme skúšať za x postupne dosadzovať prirodzené čísla, nájdeme niekoľko riešení – najprv to vyskúšajte, až potom pokračujte v čítaní. Najprv ste teda našli 10, potom 20 a 21, ďalej $30, 31$ a $32\ldots$
Keď sa zamyslíme nad týmito číslami a nad zadanou rovnicou, možno si všimneme, prečo riešenia vyzerajú práve takto. Dôvod je ten, že číslo, ktoré je riešením rovnice zo zadania, musí „obsahovať" viac desiatok ako jedenástok. A také sú práve tie čísla, ktoré sú väčšie alebo rovné ako $10n$ a zároveň menšie ako $11n$.[2]
Týmto nerovnostiam vyhovujú skupiny čísel $40, 41, 42, 43$, ďalej $50, 51, \ldots, 54$ a zvyšné určite zvládnete vypísať sami. Všimnime si, že z nášho rozprávania o intervaloch a zadanej rovnici tiež vyplýva, že iné čísla byť riešením nemôžu. (Je to spôsobené tým, že takéto čísla pri celočíselnom delení desiatimi aj jedenástimi dávajú ten istý výsledok.)
Tento postup ale funguje iba pre $n < 11$ – vyskúšajte si napríklad $x = 120$. (Malo by byť riešením, keďže $10 \cdot 11 \leq$ $\leq x < 11 \cdot 11$, teda leží v intervale, aké sme popísali vyššie.) Problém je v tom, že naše intervaly sa začnú skracovať – v ich vnútri totiž ležia aj čísla tvaru $11 \cdot (n-1)$. Preto $\lfloor x/10 \rfloor$ bude aspoň o dva vačšia ako $\lfloor x/11 \rfloor$ a teda nemôže byť riešením. To znamená, že od čísla 100 vyššie naše skupiny vyzerajú postupne $110, \ldots, 119$, ďalšia je $121, \ldots, 129$, potom $132, \ldots, 139$ a zvyšné isto s nadšením vypíšete sami. Posledná z nich obsahuje iba číslo 209, potrebujeme preto porozmýšľať nad tým, čo sa deje pre väčšie čísla.
Aj keď nájsť všetkých spomínaných 110 riešení sa väčšine z vás podarilo, často ste zabúdali na dôkaz, že iné nemôžu existovať. Túto domnienku po chvíli skúšania (napr. pri čísle 1183) asi vysloví väčšina z nás; spôsobov, ako ju dokázať, je pomerne veľa. Napríklad platí, že ak $x/10 - x/11 > 2$, tak aj dolné celé časti týchto čísel sa budú líšiť aspoň o dva a teda rovnica nebude mať riešenie. Pekne si to rozmyslite. A kedy táto nerovnosť platí? To isto zvládnete zistiť aj sami. Ďalšou možnosťou je porozmýšľať nad tým, čo s rovnicou zo zadania spraví, ak sa x prehupne cez násobok 110, najmenší spoločný násobok menovateľov. Alebo sa dá využiť fakt, že $x/10$ rastie rýchlejšie ako $x/11$. Alebo…

… <u>Iné riešenie:</u>
Ukážeme si ešte jedno riešenie, síce je pre príklady s celými časťami typické (a preto si ho treba zapamätať), ale na prvý pohľad môže byť trochu nečakané. Začneme tým, že x zapíšeme ako $x = 11a + b$, kde $0 \leq b < 11$, teda b je zvyšok čísla x po (celočíselnom) delení číslom 11. Potom platí $\lfloor x/11 \rfloor = a$ a navyše $x/10 = (11a + b)/10 =$ $a + (a + b)/10$. Chceme, aby $\lfloor x/10 \rfloor$ bola presne $a + 1$, aby zadaná rovnosť platila. Preto musí byť $a + b \geq 10$ a zároveň $a + b < 20$. A koľko riešení má táto rovnica? To nie je ťažké, pre každé b od nula po desať vyhovuje práve desať rôznych čísel a. Všimnime si ešte, že najmenšie a, ktoré nevyhovuje dvom uvedeným nerovnostiam, je 20 a teda $x = 220$. Ako to súvisí so záverom predchádzajúceho riešenia?

<u>**Úloha č. 5:**</u> a) *Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je číslo $(n - 13)(n + 11)$ druhou mocninou prvočísla.*
b) *Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je číslo $(n - 4)^2 - 9$ treťou mocninou prvočísla.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Zuzka a Ondráčik)
a) Máme nájsť všetky celé čísla n, pre ktoré platí $(n - 13)(n + 11) = p^2$, kde p je nejaké prvočíslo. To znamená, že číslo p^2 vieme napísať ako súčin dvoch celých čísel $n - 13$ a $n + 11$. Sú to teda delitele čísla p^2. Keďže p je prvočíslo, je deliteľné iba číslami 1 a p, no v obore celých čísel aj číslami -1 a $-p$. Potom delitele p^2 sú nielen 1, p, p^2, ale aj -1, $-p$, $-p^2$. Napíšme si všetky možné rozklady čísla p^2 na dva činitele, tu sú:

$$\begin{aligned} p^2 &= p \cdot p, & p^2 &= 1 \cdot p^2, \\ p^2 &= (-p) \cdot (-p), & p^2 &= (-1) \cdot (-p^2). \end{aligned}$$

Čísla $n - 13$ a $n + 11$ musia byť v týchto rozkladoch a keďže očividne nie sú rovnaké ($n - 13 \neq n + 11$), možnosti $p^2 = p \cdot p$ a $p^2 = (-p) \cdot (-p)$ nemôžu nastať. Rozoberieme teda zvyšné dva prípady. Vieme, že $n + 11 > n - 13$ a zároveň $p^2 > 1$, preto stačí preskúmať možnosť $n - 13 = 1$ a $n + 11 = p^2$. Z prvej rovnice okamžite dostávame $n = 14$ a teda $p^2 = 14 + 11 = 25$, čé znamená, že prvočíslo $p = 5$ je naozaj riešením. Hurá, máme prvé riešenie. Ostáva nám možnosť $p^2 = (-1) \cdot (-p^2)$. Rovnakou úvahou ako v predošlom prípade dostaneme $n - 13 = -p^2$, $n + 11 = -1$. Z toho máme $n = -12$, $-p^2 = -12 - 13 = -25$, čiže $p = 5$. Rozobrali sme všetky možnosti, preto iné riešenia neexistujú. Môžeme smelo vyhlásiť, že $n \in \{-12, 14\}$.
b) Táto úloha je veľmi podobná časti a). Ľavú stranu rovnice vieme upraviť na tvar $(n-4)^2 - 9 = (n-4)^2 - 3^2 =$ $= (n - 4 - 3)(n - 4 + 3) = (n - 7)(n - 1)$. Opäť máme súčin dvoch celých čísel, ktorý sa má rovnať tretej mocnine

[2] Ak máme šťastie, niekedy teraz by nás mohlo napadnúť skúsiť čísla v týchto intervaloch zapísať v tvare $10n + c$ a tak vlastne objaviť podstatu druhého riešenia.

prvočísla. Prvočíslo si znova označme ako p a skúsme nájsť jeho rozklady. Deliteľmi p^3 sú čísla 1, p, p^2, p^3 a čísla k nim opačné. Príslušné rozklady potom vyzerajú takto:

$$\begin{aligned} p^3 &= p \cdot p^2, & p^3 &= 1 \cdot p^3, \\ p^3 &= (-p) \cdot (-p^2), & p^3 &= (-1) \cdot (-p^3). \end{aligned}$$

Teraz rozoberieme jednotlivé možnosti. Keďže pre prvočíslo p platia nerovnosti $p^2 > p$, $p^3 > 1$, $-p^2 < -p$ a $-p^3 < -1$ (rozmyslite si, prečo) a zároveň platí $n - 1 > n - 7$, stačí nám skúmať nasledujúce prípady.

- Platí $n - 1 = p^3$, $n - 7 = 1$. Ľahko dopočítame, že $n = 8$. Potom ale $p^3 = 7$, čo nespĺňa žiadne prvočíslo.
- Nech $n - 1 = -1$, $n - 7 = -p^3$. V tomto prípade $n = 0$, čo znamená, že $-p^3 = -7$. To je to isté ako v prvom prípade a teda ani teraz sme nepochodili.
- Majme $n - 1 = p^2$, $n - 7 = p$. Odčítaním týchto dvoch rovníc dostávame $6 = p^2 - p$, čo sa dá prepísať na tvar $p^2 - p - 6 = (p + 2)(p - 3) = 0$. Odtiaľ $p = -2$ alebo $p = 3$. Ale p je prvočíslo, preto ostáva len možnosť $p = 3$. Dosadením do pôvodných rovníc vypočítame $n = 10$. Overíme, či číslo 10 vyhovuje. Zrejme $(10 - 4)^2 - 9 = 36 - 9 = 27 = 3^3$. Poďme k poslednej možnosti.
- Ostáva $n - 1 = -p$, $n - 7 = -p^2$. Rovnakým postupom sa dopracujeme k výsledku $p = 3$. Skúste si to sami. Po dosadení do pôvodných rovníc dostávame $n = -2$. Urobíme ešte skúšku, $(-2-4)^2 - 9 = 36 - 9 = 27 = 3^3$.

Zjavne sme prešli všetky možnosti a preto existujú práve dve riešenia, $n \in \{-2, 10\}$. Hotovo.

Komentár: Mnohí z vás si neuvedomili, že n je celé číslo a neuvažovali záporné delitele p^2, prípadne p^3. Tak sa vám niektoré riešenia stratili, čo je škoda. Treba si na to dávať pozor. Samozrejme, úloha sa dala riešiť aj inak. Hlavne k časti a) prišli rôzne druhy postupov, z nich niektoré veľmi pekné. Avšak niektorí ste sa snažili rozoberať, aká cifra môže byť na mieste jednotiek v daných číslach, ale to nebola najšťastnejšia voľba, pretože to neviedlo k riešeniu.

Úloha č. 6: *Máme štvorec 3×3 rozdelený na deväť rovnakých štvorčekov. Chceme do nich vpísať deväť kladných celých čísel tak, aby súčin čísel v každom riadku a stĺpci bol 270.*
a) Vieme štvorec takýmto spôsobom vyplniť?
b) Koľko je rôznych spôsobov, ako to spraviť? (Dve vyplnenia, ktoré sú jedno otočením alebo zrkadlovým obrazom druhého, považujeme za rôzne.)

Riešenie: (opravovali Janchi a Miki)
Začnime časťou a). Ako dokázať, že taký štvorec existuje? No, stačilo by nájsť aspoň jeden. Keďže v zadaní sa nič nepíše o tom, že by čísla mali byť rôzne, tak skoro každého hneď napadol takýto štvorec (alebo jeho varianty).

270	1	1
1	270	1
1	1	270

To je jedno z možných správnych riešení. Máme za sebou prvú (ľahšiu) časť úlohy.

Poďme sa pozrieť na časť b). Ak chceme, aby sa súčin troch čísel rovnal 270, tak tieto tri čísla musia spolu obsahovať práve všetky prvočísla z prvočíselného rozkladu 270, aj s príslušnými násobnosťami. Zistiť prvočíselný rozklad 270 je ľahké, keďže $270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Musíme teda nájsť všetky možné umiestnenia týchto prvočísel tak, aby boli splnené podmienky zo zadania. To znamená, že v každom riadku a v každom stĺpca musí byť práve jedna dvojka a práve jedna päťka. Pre trojky je situácia trochu zložitejšia, preto sa na ňu pozrieme až nakoniec. Koľko je možností ako umiestniť dvojku do prvého stĺpca? Tri. Pre druhý stĺpec máme len 2 možnosti (keďže dvojka už nemôže byť v tom istom riadku ako v prvom stĺpci). Podobne, pre tretí stĺpec máme už iba jednu. Spolu je to $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností umiestnenia dvojky do štvorca. Toľko isto ich je aj pre päťku. Aj pre každú z trojok. Ale keďže tri trojky sú rovnaké, tak po vynásobení môžeme dostať v nejakom políčku to isté číslo viacerými „rôznymi“ rozmiesteniami. To by nebolo až také zlé, ale zároveň nie je ľahké určiť, koľko (nezávislých) rozmiestnení troch trojok nakoniec dáva tie isté čísla. Skúsme to preto trošku inak. Trojky môžu byť v políčku bunke štvorca buď všetky tri, dve, jedna alebo žiadna. Ako môže vyzerať nejaký riadok? Tu sú všetky možnosti.

$3 \cdot 3 \cdot 3$	1	1

1	$3 \cdot 3 \cdot 3$	1

1	1	$3 \cdot 3 \cdot 3$

$3 \cdot 3$	3	1

$3 \cdot 3$	1	3

3	$3 \cdot 3$	1

1	$3 \cdot 3$	3

1	3	$3 \cdot 3$

3	1	$3 \cdot 3$

3	3	3

Teraz treba zistiť, ktoré riadky môžeme dať pod seba tak, aby aj v stĺpcoch boli práve tri trojky. Po chvíli skúšania pomerne ľahko nájdeme všetky možnosti, dostávame nasledujúcich deväť tabuliek.

27	1	1
1	27	1
1	1	27

27	1	1
1	9	3
1	3	9

1	27	1
9	1	3
3	1	9

1	1	27
9	3	1
3	9	1

3	9	1
9	1	3
1	3	9

3	9	1
3	1	9
3	3	3

3	1	9
9	3	1
1	9	3

9	3	1
1	3	9
3	3	3

9	1	3
1	9	3
3	3	3

Všimnite si, že riadky vo všetkých tabuľkách sú rôzne a preto ich môžeme poprehadzovať. To sa dá šiestimi spôsobmi pre každú tabuľku, preto nakoniec máme 54 spôsobov umiestnenia trojok.
Tí, ktorí si tabuľky naozaj dôkladne prezreli, isto zistili, že chýba tabuľka s trojkou na každom políčku. Vynechali sme ju zámerne, pretože jej riadky sa nedajú medzi sebou prehadzovať. Tým dostávame 55. možnosť ako umiestniť 9 trojok do štvorca 3×3 tak, aby boli v každom riadku a stĺpci práve tri.
Pre každú z týchto 55 možností máme $6 \cdot 6$ možností, ako k nim prinásobiť prvočísla 2 a 5. V každom políčku vznikne nejaký deliteľ čísla 270 a ich súčin v každom riadku a v každom stĺpci je presne 270. Celkovo teda máme $55 \cdot 36 = 1980$ spôsobov, čo je odpoveď na otázku zo zadania.

Komentár: Všetci, ktorí ste na riešení objavili len stručný komentár „Pozri vzorák.“, ste riešili rovnakým postupom, a to takýmto: „Uvažujem všelijaké možnosti, rátam a zratúvam kým sa dá a nakoniec vypíšem, koľko som ich našiel.“ Ku každému spôsobu vypisovania možností nám ale musíte napísať aké sú to možnosti a prečo ich je práve toľko. To platí najmä (ale nielen) vtedy, ak takéto spôsoby počas riešenia striedate. Vieme, že tým riešenie trochu stráca na prehľadnosti a čitateľnosti, ale bez toho to nejde, lebo potom sa v tom nevyznáme. To sa potom naozaj zle opravuje, pretože my nečítame myšlienky, ale len to, čo je na papieri. K spôsobom vypisovania by sme ešte chceli dodať, že pri niektorých bolo veľmi ťažké (priam nemožné) nezabudnúť na nejakú možnosť, prípadne posúdiť, či ste nejakú nezarátali viackrát. Za to, čo sme nevedeli posúdiť, ste body nedostali. Uvedomujeme si, že riešenie tohto príkladu sa písalo dosť ťažko, dúfame však, že ste sa z toho poučili a nabudúce vám bude dariť trochu viac.

Úloha č. 7: *Kvadratická rovnica $x^2 + ax + b + 1 = 0$ má dva kladné celočíselné korene. Dokážte, že číslo $a^2 + b^2$ je zložené.*

Riešenie: (opravovali Škrečok a Peťo G.)
Začnime krátkou delostreleckou prípravou. Každý, kto pozná Viètove vzťahy, si môže pokojne zapchať uši alebo preskočiť na ďalší odstavec. Vieme, že každú kvadratickú rovnicu v tvare $x^2 + kx + l = 0$, ktorá má dva korene p a q, môžeme zapísať aj v tvare $(x - p)(x - q) = 0$. Jasne totiž vidno, že ľavá strana takto zapísanej rovnice bude rovná nule práve vtedy, keď za x dosadíme niektorý z koreňov p, q. Roznásobme teraz túto ľavú stranu a dostaneme $x^2 - (p+q)x + pq = 0$. Keďže je to stále naša stará známa rovnica $x^2 + kx + l = 0$, jednotlivé koeficienty pri mocninách x sa musia rovnať, z čoho dostávame $k = -(p + q)$ a $l = pq$. Tieto vzťahy medzi koeficientami kvadratickej rovnice a jej koreňmi sa volajú Viètove a sú dosť užitočné, ako hneď uvidíme.

V našom prípade máme koeficienty $k = a$ a $l = b + 1$, teda po dosadení do spomínaných vzťahov dostávame $a = -(p + q)$ a $b + 1 = pq$, čiže $b = pq - 1$. Pozrime sa teraz na výraz $a^2 + b^2$, ktorý nás zaujíma:

$$a^2 + b^2 = (-(p + q))^2 + (pq - 1)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + p^2q^2 - 2pq + 1 = (p^2 + 1)(q^2 + 1)$$

Posledný tvar je už oprávneným dôvodom na radosť. Korene p a q sú totiž podľa zadania celé a kladné, teda hodnoty p^2 a q^2 sú tiež celé čísla väčšie alebo rovné jednej. Preto každá zo zátvoriek má hodnotu aspoň dva. No a číslo, ktoré možno vyjadriť ako súčin dvoch prirodzených čísel veľkosti aspoň dva, je určite zložené, čo sme mali dokázať.

Komentár: V poslednom odstavci sme dokazovali, že v súčine $(p^2 + 1)(q^2 + 1)$ nie je ani jeden z činiteľov jednotka. Viacerí z vás rovno prehlásili, že ak sa nám podarilo rozložiť $a^2 + b^2$ na súčin dvoch zátvoriek, musí to byť zložené číslo. To ale na správne riešenie nestačí, hoci vám asi bolo jasné, že sa nemôže stať, aby tam jednotky boli. Skúste na túto drobnosť nabudúce obetovať aspoň jednu vetu…

Úloha č. 8: *Peťo a Maťo napiekli dva plechy plné koláčikov a rozhodli sa, že si zahrajú nasledujúcu hru. Na prvom plechu je m koláčikov, na druhom ich je $n < m$. Peťo a Maťo sa striedajú v jedení. Ten z nich, ktorý je na ťahu, musí zjesť nenulový počet koláčikov z plechu, na ktorom ich je viac (alebo z ktoréhokoľvek, ak je na oboch plechoch rovnako veľa koláčikov). Počet koláčikov, ktoré zje, však musí byť násobkom počtu koláčikov na plechu s menším počtom koláčikov. Napríklad, ak je na začiatku na jednom plechu 15 a na druhom plechu sú 4 koláčiky, prvý hráč môže zjesť 4, 8 alebo 12 koláčikov z prvého plechu. Hráč, ktorý ako prvý vyprázdni niektorý z plechov, vyhrá. Dokážte, že ak začína Peťo a $m > 2n$, tak potom vie vždy vyhrať, aj keby Maťo hral najlepšie, ako sa dá.*

Riešenie: (opravoval Bebe)
Je dobré si hneď na začiatku uvedomiť, že priebeh našej hry je istým spôsobom predurčený. Totiž nikdy sa nemôže stať, že by si jeden z hráčov mohol vybrať, z ktorého plechu bude odjedať. Aby takáto situácia nastala, museli by

sa počty koláčikov na plechoch rovnať. Vtedy by ale hráč, ktorý by bol na ťahu, mohol z jedného z plechov zjesť všetky koláčiky a vyhral by.
Všimnime si, že akýkoľvek priebeh hry si môžeme zaznačiť ako postupnosť počtov koláčikov na plechoch. Napríklad ak na prvom bude 49 koláčikov a na druhom 18, túto pozíciu môžeme zapísať ako (49, 18). Zo zadania teda vieme, že začiatočná pozícia je (m, n), kde $m > 2n$. Všetky pozície rozdelíme na nasledujúce tri druhy.

a) Pozície typu $(k \cdot a, a)$, respektíve $(a, k \cdot a)$. Ak sa hra dostane do takejto pozície, hráč, ktorý je na ťahu, môže potiahnuť tak, aby vyhral.[3]
b) Pozície typu (a, b), kde $a > 2b$. V takýchto pozíciách si hráč môže vybrať z viacerých možností, ako hrať (môže zjesť b, $2b$,… koláčikov).
c) Pozície typu (a, b), kde $2b > a > b$. V takýchto pozíciách nemá hráč možnosť výberu (musí zjesť b koláčikov).

Chceme ukázať, že Peťo vie vždy vyhrať. Budeme sa preto tváriť, že sme Peťo :) a nájdeme návod ako hrať tak, aby sme vždy vyhrali. Takýto návod sa nazýva vyhrávajúca stratégia a nie v každej hre musí existovať. (Ak existuje, v hre sú isté situácie, v ktorých sa dá hrať podľa vyhrávajúcej stratégie a hru vyhrať. Takéto pozície nazývame (nečakane) vyhrávajúce. Ostatné pozície nazývame prehrávajúce. Ak je počiatočná pozícia prehrávajúca, potom existuje vyhrávajúca stratégia pre druhého hráča. Časť matematiky zaoberajúca sa hrami sa nazýva Teória hier a dá sa o nej nájsť veľa materiálov napríklad vyhľadávaním spojenia „Games theory“ na internete.)
Našim cieľom je teda nájsť vyhrávajúcu stratégiu pre Peťa. Ako sme už spomínali, pozície typu $(k \cdot a, a)$ sú víťazné, preto chceme nájsť spôsob, ako za každých okolností dostať Peťa do tejto situácie tak, aby bol na ťahu.
Zamyslime sa teraz nad tým, čo by sa stalo, keby bol Maťo na ťahu v pozícii typu b). Potom by si mohol vybrať, koľko koláčov zje a tým by mohol ovplyvniť kto vyhrá. Preto by sme sa mali snažiť byť na ťahu v každej takejto pozícii. Potom Maťo nebude mať na výber a bude robiť iba vynútené ťahy.
Teraz nech sme na ťahu v pozícii (m, n), kde $m = k \cdot n + c, k > 1, 0 \leq c < n$. Ak zjeme $(k - 1) \cdot n$ koláčikov, hra sa dostane do pozície $(n + c, n)$, v ktorej musí Maťo zjesť n koláčikov a na ťahu je opäť Peťo. Pritom môže byť na ťahu v rôznych pozíciách. Ak je to pozícia typu b), tak si opäť môže vyberať. Problém by mohol nastať, ak by sa jednalo o pozíciu typu c). V tom prípade by Peťo nemal na výber a mohlo by sa stať, že by sa Maťo dostal na ťah v pozícii typu b) a mohol by ovplyvniť vývoj hry. (Alebo by sa rovno dostal na ťah v situácii a) a vyhral by.) Tomu však vieme zabrániť. Stačí, ak v poslednej pozícii, v ktorej máme na výber, vezmeme $k \cdot n$ namiesto $(k - 1) \cdot n$ koláčikov.
Takto prinútime urobiť Maťa vynútený ťah a sebe necháme aj ďalšiu možnosť výberu. Keďže takto vieme hrať stále, Maťo bude robiť iba vynútené ťahy a nikdy sa nedostane do pozície typu a). Skúsme teraz presne popísať, ako budeme hrať. *Dobré pozície* pre nás budú tie, ktoré sú typov a) alebo b).
Ak je medzi dvoma dobrými nepárny počet zlých pozícií (typu c)), zjeme $n \cdot k$ koláčov. (Preto, aby sme neboli na ťahu v poslednej zlej. Rozmyslite si to.) Ak je medzi nimi párny počet zlých pozícií, zjeme len $(k-1) \cdot n$ koláčikov, opäť si rozmyslite, že to funguje. Keďže v prvej pozícii je na ťahu Peťo a táto pozícia je dobrá, vieme vždy hrať tak, že vyhráme.
Nájdením vyhrávajúcej stratégie sme zároveň ukázali, že existuje. V tomto prípade to zrejme bolo jednoduchšie ako iba dokázať jej existenciu. V rámci voľného času počas prázdnin môžete skúsiť nájsť čo najmenšiu konštantu c takú, že ak v začiatočnej pozícii (m, n) je $m > c \cdot n$, tak pre Peťa existuje vyhrávajúca stratégia.

Úloha č. 9: *Rasťa už omrzelo sudoku a tak sa rozhodol, že vymyslí nejakú novú a náročnejšiu hru. Vyryl preto do hliny na záhrade tabuľku* 2006×2006 *a povedal si, že ju vyplní číslami od* 1 *po* 2006^2 *tak, že každé číslo použije práve raz. Aby to nemal také jednoduché, vymyslel aj nasledujúce pravidlo. Pre každé políčko tabuľky sa musia dať nájsť tri rôzne čísla a, b, c z riadku alebo stĺpca, v ktorom je toto políčko, pre ktoré platí* $a = bc$. *(Tieto tri čísla nemusia byť všetky z toho istého riadku alebo z toho istého stĺpca — jedno z nich môže byť napríklad z toho istého riadku, ako je vybrané políčko a zvyšné dve zas z toho istého stĺpca.) Je možné, aby sa Rasťovi podarilo vyplniť tabuľku podľa pravidiel?*

Riešenie: (opravovali Jaro a Erika)
Máme zistiť, či sa dá vyplniť tabuľka 2006×2006 podľa pravidiel zo zadania. Najskôr musíme stanoviť hypotézu (či sa to dá alebo nedá) a potom naše tvrdenie dokázať. Či sa dá tabuľka vyplniť podľa pravidiel, môžeme zistiť na tabuľkách menších rozmerov. Sú typy úloh, pri ktorých nám zmenšenie tabuľky pomôže. Toto je jedna z takých úloh. Okrem toho, že zistíme, že tabuľky 3×3 a 4×4 sa vyplniť nedajú, pri pozorovaní menších tabuliek môžeme zistiť zákonitosti, ktoré sa pri zväčšení veľkosti tabuľky nezmenia. Dokážme teda, že tabuľka 2006×2006 sa podľa pravidiel vyplniť nedá. Majme vyplnenú tabuľku a ukážme, že toto vyplnenie nie je správne.
Vieme, že pre každý prvok tabuľky musia existovať tri rôzne čísla a, b, c také, že $a = bc$ (podľa zadania). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $b < c \leq a$. Keďže $a \leq 2006^2$, musí byť $b < 2006$. (Rozmyslite si to.) Teda pre b máme najviac 2005 možností (toľko, koľko je prirodzených čísel od 1 po 2005). Vidíme, že vhodné b môžeme doplniť do nanajvýš 2005 riadkov a 2005 stĺpcov, nech sa snažíme akokoľvek. Teda existuje riadok a stĺpec, do ktorého sme nedoplnili ani jedno vhodné b. (Pod vhodným myslíme prirodzené číslo b také, že $1 \leq b < 2006$.)
Vezmime teraz políčko, ktoré leží na prieniku tohto riadku a stĺpca. Pre toto políčko platí, že všetky čísla v príslušnom riadku sú väčšie ako 2005 a takisto pre príslušný stĺpec platí, že všetky čísla v tomto stĺpci sú väčšie ako 2005. Teda súčin ľubovoľných dvoch z nich je väčší ako 2006^2. (Vieme, že žiadne dve čísla v tabuľke nie sú rovnaké.) Preto

[3] Keďže chceme ukázať, že Peťo vždy vie vyhrať a Maťo hrá najlepšie, ako vie, tak takýmito pozíciami sa nemusíme ďalej zaoberať.

pre toto políčko nevieme nájsť takú trojicu čísel a, b, c, aby platilo $a = bc$. (Keď vyberieme ľubovoľnú dvojicu čísel b, c, ich súčin bude väčší ako 2006^2.) A tým je dôkaz hotový; tabuľka sa Rasťovi podľa pravidiel vyplniť nepodarí.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existuje trojica kladných celých čísel x, y, z spĺňajúcich rovnosť*

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2.$$

<u>Riešenie:</u> (opravoval Peťo)

Po chvíli skúšania objavíme dve trojice spĺňajúce zadanú rovnosť: $x = y = z = 1$ pre $n = 3$ a $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ pre $n = 1$ (samozrejme, v druhom prípade vyhovujú všetky trojice, ktoré dostaneme zmenou poradia čísel 1, 2, 3). Ďalšie trojice sa nám však nedarí nájsť ani po dlhom skúšaní (viacerí ste na počítači vyskúšali veľa možností), vyzerá to tak, že už iné nie sú.

Zaoberajme sa tým, čo musí vyhovujúca trojica x, y, z spĺňať. Inými slovami, predpokladajme, že prirodzené čísla x, y, z spĺňajú zadanú rovnosť pre nejaké prirodzené číslo n. Je zrejmé, že potom

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y^2z^2. \tag{1}$$

Keďže na pravej strane je súčin troch druhých mocnín a na ľavej súčet troch tretích mocnín, dá sa očakávať, že táto nerovnosť bude pre „veľké“ hodnoty x, y, z splnená len v prípade, keď jedna z premenných bude o dosť „väčšia“ ako zvyšné dve (pre „zhruba“ rovnaké hodnoty totiž výraz napravo bude rásť ako šiesta mocnina, resp. ako štvrtá, ak je jedno z čísel „malé“ a zvyšné dve sú „veľké“). Táto úvaha nám priamo nepomôže, avšak prezrádza, že dôležité je usporiadanie čísel x, y, z. Bez ujmy na všeobecnosti teda predpokladajme, že $x \geq y \geq z$. Nerovnosť (1) potom môžeme rozšíriť na tvar

$$3x^3 = x^3 + x^3 + x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y^2z^2 \geq x^2y^2 \cdot 1, \qquad \text{čiže} \qquad 3x \geq y^2 \tag{2}$$

(použili sme fakt, že $z \geq 1$ a predelili sme nerovnosť kladným výrazom x^2).

Ešte musíme nejako využiť podmienku, že x, y, z sú prirodzené. Pravá strana zadanej rovnosti je deliteľná výrazom x^2. Preto aj ľavá strana ním musí byť deliteľná, odkiaľ vyplýva, že $x^2 \mid y^3 + z^3$ (premyslite si, prečo). Dostávame tak nerovnosť

$$x^2 \leq y^3 + z^3 \leq y^3 + y^3 = 2y^3, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{x^2}{2} \leq y^3. \tag{3}$$

Teraz už stačí dať nerovnosti (2), (3) dokopy. Keďže všetky uvažované výrazy sú kladné, môžeme prvú z nich umocniť na tretiu a druhú umocniť na druhú. Spojením dostaneme

$$27x^3 \geq y^6 \geq \frac{x^4}{4}, \qquad \text{čiže (po vydelení } x^3 \text{ a vynásobení štyrmi)} \qquad 27 \cdot 4 \geq x.$$

Najväčšie z trojice čísel je teda nanajvýš 108 a už len stačí vyskúšať konečne veľa možností.

Keďže tých možností je pomerne veľa, skúsme doterajšie nerovnosti vylepšiť (zatiaľ sme boli zbytočne príliš „veľkorysí“ a robili sme len veľmi hrubé odhady). Nasledujúca časť riešenia bude najmä podľa *Katky Turekovej* a *Miša Szabadosa*.

Nerovnosť (2) možno zapísať v tvare

$$3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2, \qquad \text{čiže} \qquad 3x \geq ny^2z^2$$

a po umocnení $9x^2 \geq n^2y^4z^4$ (stále sú všetky výrazy kladné, takže si to môžeme dovoliť). S využitím tohto vieme nerovnosť (3) rozšíriť na

$$\frac{n^2y^4z^4}{9} \leq x^2 \leq 2y^3, \qquad \text{čiže (po vydelení } y^3 \text{ a vynásobení deviatimi)} \qquad n^2yz^4 \leq 18. \tag{4}$$

Z toho je jasné, že $z = 1$ (inak $n^2yz^4 \geq z^5 \geq 32 > 18$, stále totiž predpokladáme, že $y \geq z$) a $n \leq 4$ (inak $n^2yz^4 \geq n^2 \geq 25 > 18$). Ostáva teda overiť len niekoľko málo prípadov, akú hodnotu môže n nadobúdať.

Možnosti $n = 3$ a $n = 1$ prípustné sú, ako sme uviedli na začiatku (zadanie nevyžaduje nájsť všetky trojice spĺňajúce danú rovnosť, takže viac sa týmito prípadmi zaoberať nemusíme, nie je však ťažké ukázať, že okrem tých spomenutých už iné trojice neexistujú).

Ak $n = 4$, nerovnosť (4) má tvar $4^2 \cdot y \cdot 1^4 \leq 18$, t. j. nutne $y = 1$. Podľa (3) potom $x^2 \leq 2 \cdot 1^3 = 2$ a nutne $x = 1$. Avšak pre $x = y = z = 1$ máme $n = 3$. Takže pre $n = 4$ zadaná rovnosť nie je nikdy splnená.

Ak $n = 2$, nerovnosť (4) má tvar $2^2 \cdot y \cdot 1^4 \leq 18$, takže $y \leq 4$. Už skôr sme odvodili, že $x^2 \mid y^3 + z^3$. V tomto prípade preto $x^2 \mid y^3 + 1$. Pre $y = 4$ dostávame $x^2 \mid 65$, čo je nie možné pre žiadne $x \geq y$. Pre $y = 3$ máme $x^2 \mid 28$, čo opäť nedáva žiadnu možnosť pre $x \geq y$. Pre $y = 2$ máme $x^2 \mid 9$, teda jediná možnosť pre $x \geq y$ je $x = 3$. Trojica $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ však dáva $n = 1$. Konečne pre $y = 1$ máme $x^2 \mid 2$, odkiaľ $x = 1$ a opäť $n \neq 2$.

Jediné kladné celé čísla n spĺňajúce podmienku zo zadania sú 1 a 3.

Komentár: Veľká časť riešení končila tým, že nerovnosť (1) pre čísla x, y, z väčšie ako 1 nikdy neplatí, lebo pravá strana „rastie rýchlejšie“ ako ľavá. To však nie je pravda. Ľavá strana môže byť mnohonásobne väčšia ako pravá aj pre veľké hodnoty x, y, z. Ak napríklad dosadíme $x = 1\,000\,000$, $y = z = 10$, bude ľavá strana viac ako stonásobne väčšia ako pravá. Kľúčom k riešeniu je až nerovnosť (2) a najmä nerovnosť (3), ktorú sme dostali z toho, že x, y, z, n sú prirodzené čísla.

Úloha č. 11: *Po úspechu v prvej sérii sme pre vás pripravili pokračovanie úlohy s guľôčkami. Tentokrát ich stojí* 2005 *v jednom rade. Každá z nich má čiernu alebo bielu farbu. Pre každú guľôčku zistíme súčet počtu bielych guľôčok nachádzajúcich sa napravo od nej a počtu čiernych guľôčok nachádzajúcich sa naľavo od nej. Dostaneme tak* 2005 *súčtov. Medzi týmito súčtami sa práve jedno číslo vyskytuje nepárny počet ráz. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať toto číslo. Nezabudnite zdôvodniť, prečo nemôže nadobúdať iné hodnoty.*

Riešenie: (opravovali Fero a Rasťo)
Poznáte to. Sedíte na letisku, vedľa vás vám Kubíček diktuje kraviny, v pozadí vystupuje pochybná charitatívna kapela. A vy sa snažíte napísať vzorák jedenástky. No dobre, vy skôr sedíte niekde doma pekne za stolom, na stole leží zadanie a vám nie a nie prísť niečo na um; zúfalosť situácie je však porovnateľná. Čo vtedy robiť? Pomôže jediné, treba si začať kresliť.
Skúste si nakresliť rad guľôčok čiernej a bielej farby a sledujte, ako sa správa súčet spomínaný v zadaní (môžete si napríklad načrtnúť graf závislosti súčtov od pozície v rade a snažiť sa odhaliť nejaké zákonitosti). Čo môžeme vypozorovať? Očíslujme si guľôčky zľava doprava číslami od 1 do 2005 a pre n-tú z nich označme s_n súčet počtu bielych guľôčok napravo a počtu čiernych guľôčok naľavo od nej. Pozrime sa teraz bližšie na dve susedné guľôčky na miestach n a $n+1$. Ak sú obidve čierne, tak napravo od seba majú obe rovnako veľa bielych guľôčok a $(n+1)$-vá má naľavo o jednu čiernu guľôčku viac ako n-tá, preto $s_{n+1} = s_n + 1$. Podobne, ak sú obe biele, tak $s_{n+1} = s_n - 1$. Napokon, ak sú rôznych farieb, tak buď má n-tá napravo o jednu bielu guľôčku viac a naľavo o jednu čiernu menej ako $n+1$-vá (to nastane ak prvá z nich je čierna a druhá biela) alebo sú tieto počty pre obe guľôčky rovnaké (pre opačné poradie farieb). Tak či tak, v oboch týchto prípadoch máme $s_{n+1} = s_n$. A to okrem iného znamená, že susedné súčty sa nikdy nelíšia o viac ako jedna.
Začnime teraz prechádzať guľôčky zľava doprava a sledujme, ako súvisí farba n-tej guľôčky s tým, koľkokrát sme už videli jej súčet s_n. Nech S je nejaký súčet vyskytujúci sa v našej postupnosti aspoň dvakrát a nech m a n sú dve po sebe idúce miesta jeho výskytu (čiže $s_m = s_n = S$ a medzi pozíciami m a n sa už S nenachádza). Ukážeme, že m-tá a n-tá guľôčka majú rôzne farby. Ak $n = m + 1$, tak máme dve susedné pozície s rovnakým súčtom, preto sa farby guľôčok na týchto miestach musia líšiť. Predpokladajme teraz, že $n > m + 1$. Čísla $s_{m+1}, \ldots, s_{n-1}$ sú všetky rôzne od S a susedné sa líšia najviac o jedna, preto sú buď všetky väčšie ako S alebo sú všetky menšie. Čiže buď $s_{m+1} = s_m + 1$ a $s_{n-1} = s_n + 1$ a potom m-tá guľôčka musí byť čierna a n-tá biela, alebo $s_{m+1} = s_m - 1$ a $s_{n-1} = s_n - 1$ a farby sú v opačnom poradí. Vidíme teda, že s každým ďalším výskytom súčtu S sa zmení farba prislúchajúcej guľôčky.
To by sme mali. Aká farba je však na mieste prvého výskytu? Označme si W a B celkové počty bielych a čiernych guľôčok v rade. Aby sme nemuseli rozoberať rôzne prípady podľa farby prvej a poslednej guľôčky v rade, tak si situáciu trošku zjednodušíme. Pridajme na začiatok radu akúsi fiktívnu bielu guľôčku a na jeho koniec fiktívnu čiernu guľôčku[4]. Uvedomte si, že toto nám nijako nepomení súčty $s_1 \ldots s_{2005}$. Ak dodefinujeme s_0 a s_{2006}, tak dostaneme $s_0 = W$ a $s_{2006} = B$. Pri prechode radom zľava doprava začíname na súčte W, preto keď prvýkrát zbadáme súčet väčší ako W, tak sme k nemu museli prísť zdola, čo môže nastať len pre čiernu guľôčku. Podobne, súčty menšie ako W (a zrejme aj samotné W) zase začínajú bielymi guľôčkami. No a rovnakým spôsobom môžeme ukázať, že súčty väčšie ako B končia bielymi a súčty menšie alebo rovné B zasa čiernymi guľôčkami.
Už sme skoro tam. Predpokladajme, že $W < B$. Potom súčty S ($W < S \leq B$) začínajú aj končia čiernymi guľôčkami, preto sa musia v postupnosti vyskytovať nepárne veľa krát. Naopak, ostatné súčty začínajú a končia guľôčkami rôznych farieb a medzi súčtami sa teda nachádzajú párny počet ráz. Nesmieme však zabudnúť odrátať jeden výskyt súčtov W a B spôsobený fiktívnymi guľôčkami. Dostaneme, že nepárne veľa krát sa vyskytujú práve tie súčty S, pre ktoré je $W \leq S < B$. Takýto súčet je ale podľa zadania iba jeden, preto nutne $W = B - 1$ a $S = 1002$. Prípad $W > B$ si skúste rozriešiť na domácu úlohu.
To je všetko. Alebo ešte niečo chýba? Zatiaľ sme neukázali, že situácia, keď jediný súčet vyskytujúci sa nepárny počet ráz je 1002, môže naozaj nastať. Uvažujme preto rad 1002 bielych a 1003 čiernych guľôčok rozostavených na striedačku (začínajúci aj končiaci čiernou guľôčkou). V každej susednej dvojici majú guľôčky navzájom rôzne farby, preto sú všetky súčty rovnaké a rovné $s_1 = 1002$. Medzi súčtami sa teda vyskytuje jedine číslo 1002 a to je tam 2005-krát.

Iné riešenie:
V predchádzajúcom riešení sme nijako nezasahovali do toho, ako sú naše guľôčky v rade zoradené. Čo keby sme ich však skúsili nejako vhodne poprehadzovať? Zoberme si dve susedné guľôčky rôznych farieb. Už vieme, že obe musia mať rovnaký súčet, označme ho S. Ak tieto guľôčky navzájom vymeníme, tak oba súčty klesnú alebo stúpnu o jedna, podľa toho, či je prvá guľôčka čierna a druhá biela alebo naopak. Počet výskytov súčtu S teda klesne o dva, zatiaľ čo jeden zo súčtov $S-1$, $S+1$ sa teraz bude v postupnosti nachádzať o dva razy viac. To znamená, že parita počtu ich výskytov sa vôbec nezmení. Takýmito výmenami môžeme preusporiadať guľôčky napríklad

[4] Používanie takýchto neutrálnych okrajových prvkov (tzv. sentinelov) je bežné najmä v programovaní. V riešeniach väčšinou nehrajú kľúčovú rolu, dokážu však zjednodušiť ošetrovanie špeciálnych prípadov.

do stavu, v ktorom máme na začiatku radu všetky čierne guľôčky a ďalej všetky biele guľôčky. No a odtiaľto to už dopočítate aj sami.

Úloha č. 12: *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech T je stred kružnice opísanej trojuholníku AOC. Bod M je stredom strany AC. Body D a E ležia po rade na priamkach AB a CB tak, že uhly MDB a MEB sú rovnako veľké ako uhol ABC. Dokážte, že priamky BT a DE sú na seba kolmé.*

Riešenie: (opravoval Mazo)
Po prvom prečítaní zadania máme chuť pekne poďakovať zadávateľovi úlohy a riešenie prenechať niekomu inému. Nevzdáme to však tak skoro a skúsime si kresliť. Doporučujeme (nielen v tejto úlohe) nakresliť si nový obrázok zakaždým, keď začneme zvažovať novú situáciu. Na staré obrázky sa môžeme hocikedy pozrieť, takže tým môžeme len získať (prehľadnosť). Medziiným odpozorujeme toto:
(1) Celá situácia je určená trojuholníkom ABC, nemáme žiadne ďalšie voliteľné parametre.
(2) Polohu skoro všetkých bodov určujeme pomocou veľkosti uhla ABC. Preto ak budeme určovať veľkosť nejakého uhla, skúsime ju vyjadriť pomocou $|\sphericalangle ABC| = \beta$.
(3) Bod O slúži len na určenie polohy bodu T.
Pozrieme sa na pozorovanie (3) v duchu pozorovania (2). Uhol AOC má veľkosť 2β, preto uhol ATC neobsahujúci bod B má veľkosť 4β. Ako vidíme, nastávajú isté problémy s polohou bodu T. Preto sa budeme zaoberať situáciou, keď bod T leží v polrovine opačnej k ACB (druhý prípad má podobné riešenie). Takže uhly ATM aj CTM majú veľkosť $180° - 2\beta$ (to je kladné číslo, keďže trojuholník ABC je ostrouhlý). Bod T leží na osi strany AC a jeho presná poloha je určená spomínanými uhlami.
Pozrime sa na bod D. Uhly MDB a CBD majú rovnakú veľkosť. Sú však umiestnené tak, že nevytvoria tetivový štvoruholník.[5] Mohli by vytvoriť rovnoramenný trojuholník, keby sme úsečku DM predĺžili tak, aby preťala priamku BC v bode D'. Potom uhol $BD'D$ má veľkosť $180° - 2\beta$. Kde sme už taký uhol videli? Pri určovaní polohy bodu T. Keď sa na to pozrieme bližšie, vidíme, že štvoruholník $CMTD'$ je tetivový (dôvod je rôzny v závislosti od poradia bodov B, C, D' na priamke BC, premyslite si to). Uhol CMT je pravý, preto aj uhol $CD'T$ je pravý.
Analogickú úvahu vieme spraviť aj pre bod E. Označíme E' priesečník priamok EM a BA. Uhol $BE'E$ má veľkosť $180° - 2\beta$. Uhly $DE'E$ a $DD'E$ majú rovnakú veľkosť a body E', D' ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou DE, preto body D, E', D', E ležia v tomto poradí na kružnici.
O situácii sme zistili nemálo, zbavili sme sa bodov O, A, C aj M. Zistíme, či o zvyšných bodoch vieme dosť na to, aby sme dokázali, že BT a DE sú na seba kolmé. Nakreslíme obrázok, ktorý obsahuje iba body B, T, D, E, D', E', objavené tetivové štvoruholníky a zistené pravé uhly.
Označme veľkosti uhlov TBE a BED písmenami φ a ε. Nasledujúce tvrdenia si rozmyslite pre obe situácie, ktoré môžu nastať: bod E' leží na úsečke BD alebo mimo nej. Štvoruholník $DE'D'E$ je tetivový a preto uhol $BE'D'$ má veľkosť ε. Štvoruholník $BE'TD'$ je tetivový, preto uhol $D'E'T$ má veľkosť φ. Takže

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{BT}, \overleftrightarrow{DE}| = \varphi + \varepsilon = |\sphericalangle BE'D'| + |\sphericalangle D'E'T| = |\sphericalangle BE'T| = 90°.$$

Poznámka: Ak poznáte kružnicovú inverziu, nemusíte tie uhly na záver počítať. Keď vieme, že body D, E', D', E ležia na kružnici, tak mocnosť bodu B k tejto kružnici je $|BD| \cdot |BE'| = |BD' \cdot BE| = r^2$ (pre nejaké číslo r). Spravíme preto inverziu so stredom B s polomerom r. V tejto inverzii sa priamka BT zobrazí na seba a priamka DE sa zobrazí na kružnicu prechádzajúcu bodmi D', E' a B, teda na kružnicu opísanú štvoruholníku $BD'TE'$. Priamka BT je na túto kružnicu kolmá (prechádza jej stredom) a inverzia zachováva uhly. Hotovo.
Tento trik sa používa často, doporučujeme precvičiť si ho na ďalších úlohách, napríklad na geometrii z krajského kola minulého ročníka MO kat. A.

Úloha č. 13: *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné reálne čísla x, y spĺňajú vzťah*

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Riešenie: (opravovali Fero a Kenny)
Ako to už pri funkcionálkach býva, skúsime za x alebo y niečo dosadiť (keď má funkcia nejakú vlastnosť všeobecne, tým skôr pre špeciálne hodnoty x či y). Najlepšie býva dosadiť nulu, lebo veľa členov vypadne. Keby sme mohli dosadiť nulu za y, dostaneme $f(xa) = a + x$, kde $a = f(0)$. Z toho by po vhodnej substitúcii hneď vyšlo riešenie. Avšak v definičnom obore funkcie f nulu nemáme, teda tadiaľ cesta nepôjde.
Po dosadení jednotky za x dostaneme rovnosť $f(f(y)) = f(y)+1$. Označme $w = f(y)$. Potom $f(w) = w+1$ a máme riešenie. Problém je v tom, že posledný vzťah platí len pre čísla w z oboru hodnôt funkcie f, a to nemusí byť celé $\mathbb{R}^+$. (Naozaj nebude, ako uvidíme ďalej.)
Po chvíľke skúšania skúsime substitúciu $y = 1/x$ a dostaneme

$$f(xf(1/x)) = f(1) + x.$$

[5] Pri počítaní uhlov bežne hľadáme dvojice rovnobežných priamok, rovnoramenné trojuholníky, dvojice rovnakých uhlov, dvojice uhlov so súčtom 180°, tetivové štvoruholníky, dvojice podobných trojuholníkov. To preto, aby sa nám uhly dobre počítali.

Táto rovnosť nám môže pomôcť. Je v nej totiž konštanta $f(1)$ a ničím neobmedzované x. Pravá strana rovnosti môže nadobúdať všetky hodnoty ostro väčšie ako $f(1)$. Keďže naľavo máme iba jeden člen $f(xf(1/x))$, musí funkcia f nadobúdať všetky hodnoty väčšie ako $f(1)$. Preto do oboru hodnôt patrí interval $(f(1), \infty)$. Keď sa teraz pozrieme na naše prvé dosadenie, vidíme, že pre všetky $w \in (f(1), \infty)$ môžeme písať $f(w) = w + 1$.
Čo však s číslami menšími alebo rovnými $f(1)$? Keď máme ľubovolné $y > 0$, vieme nájsť x také, aby výrazy $xf(y)$ a xy boli oba väčšie ako $f(1)$. Potom môžeme podľa predchadzajúceho upraviť rovnosť

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= f(xy) + x, \\ xf(y) + 1 &= xy + 1 + x, \\ xf(y) &= x(y+1), \\ f(y) &= y + 1. \end{aligned}$$

Poslednú úpravu sme mohli spraviť, pretože $x > 0$. Máme teda jediné možné riešenie. Skúškou správnosti ľahko zistíme, že toto riešenie nazaj vyhovuje.

Iné riešenie:
Inou možnosťou bolo dosadiť $f(z)$ za x.

$$\begin{aligned} f(f(z)f(y)) &= f(f(z)y) + f(z) && \text{(využijeme pôvodnú rovnosť v tvare } f(f(z)y) = f(zy) + y) \\ f(f(z)f(y)) &= f(zy) + y + f(z) && \text{(symetricky zameníme } y \text{ a } z) \\ f(f(y)f(z)) &= f(yz) + z + f(y) \\ f(zy) + y + f(z) &= f(zy) + z + f(y) \\ f(z) - z &= f(y) - y \end{aligned}$$

Keď si uvedomíme, čo nám hovorí posledná rovnosť, zistíme, že $f(x) = x + c$, z čoho ľahko dopočítame správny tvar funkcie.

Úloha č. 14: *Prirodzené čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$.*
a) Dokážte, že x je deliteľné piatimi.
b) Existujú celé čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Riešenie: (opravoval Bus)
a) Všimnime si, že y musí byť nepárne. Pre zjednodušenie si označme $z = y^3$.

$$\begin{aligned} 2x^2 &= z^5 + 1, \\ 2x^2 &= (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1). \end{aligned}$$

Teraz z nejakých záhadných dôvodov poďme nájsť pomocou Euklidovho algoritmu najväčší spoločný deliteľ činiteľov na pravej strane.

$$(z+1,\, z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = (z+1,\, -2z^3 + z^2 - z + 1) = (z+1,\, 3z^2 - z + 1) = (z+1,\, -4z + 1) = (z+1, 5).$$

To znamená, že ich najmenší spoločný deliteľ je buď 5 alebo 1. Predpokladajme najskôr, že je to 1, teda že sú zátvorky nesúdeliteľné. Tu by už mali naše záhadné dôvody vyplávať na povrch: ich súčin má byť dvojnásobkom štvorca, pravá zátvorka je nepárna a nesúdeliteľná s prvou, preto musí byť sama štvorcom. Všimnime si však, že pre $z > 1$ platí

$$\left(z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 < (z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) < \left(z^2 - \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Číslo v strede je medzi dvoma po sebe idúcimi štvorcami celých čísel (z je nepárne), ono samo preto štvorcom byť nemôže a dostávame spor. Najväčší spoločný deliteľ $z + 1$ a $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ je teda 5, pravá strana je deliteľná 25, čiže 5 delí x.
b) Ak sa vám podarí nejaké riešenie nájsť, pošlite nám ho do konca budúceho roka a budete odmenení čokoládou. Ceny do súťaže venujeme ja a Mazo, každý jednu.

Komentár:
Táto úloha dopadla celkovo veľmi zle. Viacerí z vás si zadanie poriadne neprečítali, mnohí dokonca vôbec, a preto tí, čo vôbec nejaké riešenie poslali, v ňom museli veľmi veľa improvizovať. Drvivá väčšina riešiteľov spravila chybu hneď v prvom kroku a tento krok bol často aj krokom posledným. Nikomu sa nepodarilo získať viac ako nula bodov a aj tých riešiteľov, ktorí túto hodnotu dosiahli, bolo len veľmi málo. Dúfam preto, že nabudúce vyviniete viacej aktivity.

Vzorové riešenia úloh 12 a 13 z 2. série.

Úloha č. 12: *Nech n je prirodzené číslo a $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí*

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1})^{1/n} \geq a_1^{1/n} - a_2^{1/n} + a_3^{1/n} - a_4^{1/n} + \cdots - a_{2n}^{1/n} + a_{2n+1}^{1/n}.$$

Riešenie: (opravoval Ondrík)

Pri takom zložitom zadaní neváhajte a vyskúšajte si niektoré špeciálne, „malé“ prípady, aby ste nazreli do štruktúry nerovnosti a zžili sa s problémom. Navyše tak často zistíme, kedy asi nastáva rovnosť (a budeme na to brať ohľad pri odhadoch, ktoré budeme používať).

Pre $n = 1$ dostávame na oboch stranách $a_1 - a_2 + a_3$ a teda platí rovnosť. Zaujímavejšie je to pre $n = 2$. Za predpokladov $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ chceme dokázať

$$\sqrt{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5} \geq \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_4} + \sqrt{a_5}.$$

Tak to skúsme nejako vyriešiť. Prirodzene by sme sa chceli zbaviť odmocnín. Skôr či neskôr však dôjdeme k tomu, že len umocňovaním sa to nedá, a tak si zavedieme substitúciu: $x_i = \sqrt{a_i}$ pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Dostávame tak nový problém (uvedomte si, že $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ je ekvivalentné s $a < b$ pre a, b kladné reálne). Pre $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ chceme dokázať (po umocnení na druhú)

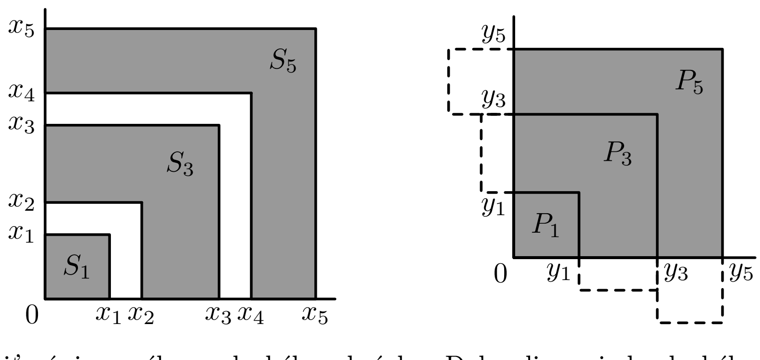
$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 \geq (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2.$$

A niečo takéto ľahko porátame, napríklad vhodným preskupením členov (tak, aby sme využili nerovnosti pre x_i). Jeden z možných spôsobov:

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = 2(x_5 - x_4)(x_4 - x_3) + 2(x_5 - x_4)(x_2 - x_1) + 2(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

Pravá strana je určite kladná, teda to vieme dokázať pre prípad $n = 2$. Môžeme sa pokúsiť substitúciu a preusporiadanie použiť vo všeobecnosti, ale vyzerá to ako ťažká cesta, najmä kvôli mnohým členom, ktoré nám vzniknú na pravej strane po umocnení na n-tú. Zostaňme teda ešte pri $n = 2$ a skúsme nájsť všeobecnejšiu myšlienku.

V substituovanej nerovnosti máme samé štvorce (je homogénna, stupňa 2). Tu by Vás mohla napadnúť geometrická interpretácia (vôbec nie nezvyčajný postup pri dokazovaní nerovností). Niektoré nerovnosti sú len „zašifrované“ geometrické odhady vzdialeností, prípadne odhady obsahov pod krivkou (tam pri riešení zvykneme používať integrály). Po chvíli čmárania sa dá prísť na niečo takéto: označme si $y_1 = x_1$, $y_3 = x_1 - x_2 + x_3$ a $y_5 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$ a nakreslíme si dva obrázky. Ľavá strana nerovnosti je striedavé sčitovanie a odčitovanie nejakých obsahov štvorcov. Umiestnime si ich tak, aby boli rovnako orientované a s jedným spoločným vrcholom. Obsah vyšrafovanej časti ľavého obrázka, ktorá sa skladá z troch častí s obsahmi S_1, S_3, S_5, predstavuje veľkosť ľavej strany nerovnosti ($S_1 = x_1^2$, $S_2 = x_3^2 - x_2^2$ a $S_3 = x_5^2 - x_4^2$). Veľkosť pravej strany nerovnosti zas vyjadruje vyšrafovaný štvorec v pravom obrázku (so stranou veľkosti y_5).



Už si stačí len uvedomiť súvis prvého a druhého obrázka. Dokreslime si do druhého z nich štvorce so stranami y_1, y_3. Prečo by sme tak mali spraviť? No preto, lebo nám potom vzniknú také nejaké „L-ká“ (ich obsahy označme P_1, P_3, P_5), ktoré vyzerajú porovnateľne s obsahmi S_1, S_3, S_5. Prečo? No lebo sú rovnako hrubé: $x_1 = y_1$, $x_3 - x_2 = y_3 - y_1$ a $x_5 - x_4 = y_5 - y_3$. Na obrázku zas jasne vidíme, že tie „L-ká“ sú v druhom obrázku na seba natlačenejšie a teda obsah vyšrafovanej časti ľavého obrázka je aspoň toľko, ako pravého štvorca. Skúsme formálne. Chceli by sme ukázať $S_1 \geq P_1$, $S_3 \geq P_3$ a $S_5 \geq P_5$, čo znamená dokázať tieto nerovnosti:

$$\begin{aligned} S_1 = x_1^2 &\geq {y_1}^2 = P_1, \\ S_3 = x_3^2 - x_2^2 &\geq {y_3}^2 - {y_1}^2 = P_3, \\ S_5 = x_5^2 - x_4^2 &\geq {y_5}^2 - {y_3}^2 = P_5. \end{aligned}$$

Prvá platí triviálne a druhú (tretiu) možno vydeliť kladným číslom $y_3 - y_1 = x_3 - x_2$ ($y_5 - y_3 = x_5 - x_4$), čím dostaneme

$$\begin{aligned} x_3^2 - x_2^2 \geq {y_3}^2 - {y_1}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_3 + x_2 \geq y_3 + y_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_2 \geq x_1, \\ x_5^2 - x_4^2 \geq {y_5}^2 - {y_3}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_5 + x_4 \geq y_5 + y_3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_4 + 2x_2 \geq 2x_3 + 2x_1. \end{aligned}$$

Kvôli usporiadaniu x_i všetky tri nerovnosti platia. Ich sčítaním dostávame požadovanú nerovnosť, čiže $S_1+S_3+S_5 \geq$ $\geq P_1+P_3+P_5$.
Poriadne si to všetko premyslite. Pre $n=2$ sme úlohu vyriešili cez obsahy štvorcov. Prečo by to nemalo pre $n=3$ vyjsť cez objemy kociek? Nechcem tým povedať, že pre n to chceme riešiť ako n-rozmernú geometrickú nerovnosť, ale len vytiahnuť z toho ten princíp, ako to zapíšeme a dokážeme. To však teraz pôjde ľahko.
Máme $2n+1$ čísel $0<a_1<a_2<\cdots<a_{2n+1}$. Substituujeme $x_i=\sqrt[n]{a_i}$ pre $i\in\{1,2,\ldots,2n+1\}$, nerovnosť umocníme na n-tú a máme dokázať, že za predpokladu $0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n+1}$ platí

$$x_1^n-x_2^n+x_3^n-x_4^n+\cdots+x_{2n+1}^n \geq (x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2n+1})^n.$$

Tak ako predtým označíme

$$y_{2k+1}=x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2k+1}$$

pre $k\in\{0,1,2,\ldots n\}$ a budeme porovnávať tie „n-rozmerné L-ká“, čiže chceme ukázať toto:

$$\begin{aligned}
S_1=x_1^n &\geq {y_1}^n=P_1,\\
S_3=x_3^n-x_2^n &\geq {y_3}^n-{y_1}^n=P_3,\\
S_5=x_5^n-x_4^n &\geq {y_5}^n-{y_3}^n=P_5,\\
&\ldots\\
S_{2n+1}=x_{2n+1}^n-x_{2n}^n &\geq y_{2n+1}^n-y_{2n-1}^n=P_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Ľahko vidíme, že súčtom týchto nerovností dostaneme požadovanú nerovnosť. Prvá samozrejme platí. Ostatné sú tvaru

$$x_{2k+1}^n-x_{2k}^n \geq y_{2k+1}^n-y_{2k-1}^n$$

pre $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Pre každé také k ľahko dostaneme

$$y_{2k+1}-y_{2k-1}=(x_1-x_2+x_3-\cdots+x_{2k-1}-x_{2k}+x_{2k+1})-(x_1-x_2+x_3-\cdots+x_{2k-1})=x_{2k+1}-x_{2k},$$

ale zároveň aj

$$x_{2k}-y_{2k-1}=x_{2k}-(x_1-x_2+x_3-\cdots+x_{2k-1})=(x_{2k}-x_{2k-1})+(x_{2k-1}-x_{2k-2})+\cdots+(x_2-x_1)>0.$$

Pre zjednodušenie zápisu si teda označme $y_{2k-1}=a$, $x_{2k}=b$ (teda z toho čo sme ukázali platí $a<b$) a navyše nech $z=x_{2k+1}-x_{2k}>0$. No ukázali sme aj $y_{2k+1}-y_{2k-1}=x_{2k+1}-x_{2k}=z$. Takže sa nám to zjednoduší na tvar

$$(b+z)^n-b^n \geq (a+z)^n-a^n$$

a tu nám postačí aj binomická veta a popárovanie členov. Totižto posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\binom{n}{1}(b^{n-1}-a^{n-1})z+\binom{n}{2}(b^{n-2}-a^{n-2})z^2+\binom{n}{3}(b^{n-3}-a^{n-3})z^3+\cdots+\binom{n}{n-1}(b-a)z^{n-1}\geq 0$$

a to platí, lebo $b-a>0 \Rightarrow b^m-a^m>0$ pre všetky prirodzené m. A teda to máme, no nie? Naozaj, sčítaním tých $n+1$ nerovností dostávame:

$$x_1^n+\sum_{k=1}^{n}\left(x_{2k+1}^n-x_{2k}^n\right)\geq y_1^n+\sum_{k=1}^{n}\left(y_{2k+1}^n-y_{2k-1}^n\right)$$

pričom členy na pravej strane sa nám pekne poodčitujú a zostane nám len

$$x_1^n-x_2^n+x_3^n-x_4^n+\cdots+x_{2n+1}^n\geq y_{2n+1}^n=(x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2n+1})^n$$

a to sme chceli.
<u>Iné riešenie:</u>
Samozrejme, toto nebola jediná cesta, ktorou sa dalo vydať. Hlavné však bolo dôjsť k tomu, ako to odhadovať a uvedomiť si, že ak (aj keď v zadaní je to zakázané) $a_{2k-1}=a_{2k}$ pre $k=1,2,\ldots,n$, tak nastáva rovnosť. Tak ste mohli dospieť napr. k riešeniu s rovnakou podstatou, ktoré používa techniku *mixing variables*. V skratke: nech

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_{2n+1})=\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2n+1}}-(\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+\sqrt[n]{a_3}-\cdots+\sqrt[n]{a_{2n+1}}).$$

Teraz nech $b_{2k+1}=a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2k+1}$ pre $k=0,1,\ldots,n$ (teda aj $b_1=a_1$). Potom jednoducho ukážeme

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_{2n+1})\geq V(a_1,b_1,b_3,a_4,a_5,\ldots,a_{2n+1})\geq$$

$$\geq V(a_1,b_1,b_3,b_3,b_5,a_6,a_7,\ldots,a_{2n+1})\geq\cdots\geq V(a_1,b_1,b_3,b_3,b_5,\ldots,b_{2n-1},b_{2n+1})=0.$$

Pritom každú z tých nerovností ľahko dokážeme a spolu tvoria presne to, čo chceme.

Iné riešenie:
Pri úvahách pre malé n a dosadzovaní konkrétnejších hodnôt za čísla a_i si môžeme všimnúť aj čosi iné. To, že sú tam n-té odmocniny a to, že prvkov máme $2n+1$, skoro vôbec nesúvisí. Jemnou úpravou vzorového riešenia dostanete dôkaz tohto tvrdenia: Pre $m, n \in \mathbb{N}$ a $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ platí (pozor, m-té odmocniny)

$$\sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n+1}} \geq \sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + \sqrt[m]{a_3} - \cdots + \sqrt[m]{a_{2n+1}}.$$

Výhodou tohto zovšeobecnenia je, že ho môžete dokázať aj indukciou podľa n, kdežto pôvodné tvrdenie tak dokážete len veľmi ťažko. Pozor! Naozaj, toto zovšeobecnenie sa rieši oveľa jednoduchšie ako pôvodné zadanie! Vyskúšajte si tú indukciu.

Poznámka: Pre ešte náročnejších ponúkam ďalšiu, všeobecnejšiu verziu. Nech $f(x)$ je funkcia konkávna na kladných reálnych číslach. Potom pre $n \in \mathbb{N}$ a $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$ platí

$$f(a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n+1}) \geq f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - \cdots + f(a_{2n+1})$$

Dôkaz je opäť podobný. Akurát nič neumocňujeme, no musíme využiť konkávnosť a to napríklad tak, že vieme, že pre konkávnu funkciu na kladných číslach platí: Ak $a, b, z > 0$, $a < b$, potom platí $f(b+z) - f(b) \leq$ $\leq f(a+z) - f(a)$ (pomenovanie písmeniek naznačuje, kde to treba využiť). Na toto zovšeobecnenie sa dalo prísť veľmi ľahko ak poznáte Karamatovu (resp. Hardy-Littlewood-Polyovu) majorizačnú nerovnosť. Kto chce vedieť o nej viac, píšte na `ondrob@gmail.com`, skúsim vám ponúknuť nejakú vhodnú dokumentáciu:). Zatiaľ si môžete pozrieť `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=14975`.

Úloha č. 13: *V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš d liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d+1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Nebudeme si nič zastierať, zo zadania je jasné, že máme do činenia s neorientovaným súvislým grafom, nazvime si ho G. Medzi každými dvoma vrcholmi nášho grafu existuje cesta dĺžky najviac d a najkratšia kružnica má dĺžku $2d+1$. Vezmime si teda nejaký vrchol v, od ktorého existuje vrchol vzdialený d, na spomínanej kružnici taký musí ležať. Vyberme teraz pre každý vrchol grafu najkratšiu cestu z neho do v (ak takých existuje viac, vezmime jednu ľubovoľnú) a ofarbime červenou tie hrany nášho grafu, ktoré ležia na niektorej z týchto vybraných ciest. Modrou ofarbime všetky ostatné hrany. Pozrime sa teraz na červený podgraf nášho grafu. Z toho, ako sme ofarbovali, vyplýva, že to bude kostra pôvodného grafu, teda nebude obsahovať kružnicu.

Aby sa nám jednoduchšie vyjadrovalo, dohodnime sa, že pre $k \in \{0, \ldots, d\}$ bude P_k označovať množinu všetkých vrcholov grafu G, ktorých najkratšia cesta spájajúca ich s vrcholom v je dlhá práve k. Teda $P_0 = \{v\}$ a ak si spomínanú červenú kostru nakreslíme s vrcholom v hore a červenými hranami vedúcimi vždy o jedno „poschodie“ nižšie, bude potom k-te poschodie tvorené práve vrcholmi z množiny P_k. Ďalej sa dohodnime, že pre ľubovoľný vrchol u grafu G bude V_u označovať množinu vrcholov, do ktorých sa dá dostať z u len po červených hranách, navyše tak, aby sme neprechádzali cez koreň v. Intuitívne teda každá množina V_u predstavuje jednu „vetvu“ nášho červeného stromu, tú, v ktorej leží vrchol u.

Najprv si uvedomme, že vrchol v sme vybrali tak, aby od neho existoval nejaký vrchol vzdialený d, preto všetky množiny $P_0, P_1, \ldots, P_d$ sú neprázdne. Teraz poďme preskúmať, kde všade môžu ležať modré hrany. Určite nemôžu spájať dva vrcholy z tej istej vetvy. Takéto dva vrcholy majú totiž v tejto vetve nejakého spoločného predka, s ktorým sú oba spojené červenou cestou. Obe tieto červené cesty sú dlhé najviac $d-1$, a tak by spolu s uvažovanou modrou hranou tvorili kružnicu kratšiu ako $2d+1$, čo by bol spor so zadaním. Modrá hrana tiež nemôže vychádzať zo žiadneho vrchola, ktorý je na inom poschodí ako P_d. Ak by to tak bolo, táto hrana by opäť spolu s červenými cestami z oboch jej vrcholov do v tvorila kratšiu kružnicu, ako pripúšťa zadanie.

Vieme, že existuje červená cesta, ktorá zostupuje až do poschodia P_d, označme si ju C. Potom platí, že aj každá iná vetva (dokonca všetky jej „výhonky“) zostupuje až do poschodia P_d. Inými slovami, z každého vrchola, ktorý nepatrí do P_d, vychádza červená hrana smerom do nižšieho poschodia. Ak by to tak nebolo, potom by vzdialenosť tohto vrchola od niektorého z vrcholov na C podľa už dokázaného bola väčšia ako d, pretože najkratšia cesta musí viesť cez v alebo cez P_d (iné prepojenia medzi vetvami nie sú).

Nech stupeň vrchola v je s, teda máme s rôznych vetiev. Celý čas potichu predpokladáme, že $s \geq 2$, ak by to tak nebolo, máme pred sebou patologický prípad grafu, dôsledky si premyslite sami. Spolu sa teraz sa zamyslime nad tým, aký je stupeň vrcholov v poschodí P_d. Zoberme si jeden konkrétny takýto vrchol. Musí z neho viesť hrana do každej zo zvyšných vetiev: ak by neviedla do žiadneho vrchola z nejakej vetvy V, potom by jeho vzdialenosť od najvrchnejšieho vrchola V (v poschodí P_1) bola $d+1$, čo je priveľa. Zároveň nesmú zo žiadneho vrchola v poschodí P_d viesť dve hrany do tej istej vetvy, pretože by nám (spolu s časťou tejto vetvy) vytvorili kružnicu kratšiu ako $2d+1$. Teda z každého vrchola v poschodí P_d vychádza $s-1$ modrých hrán do ostatných vetiev a jedna červená smerom hore, preto stupeň každého vrchola v P_d je s.

Uvažujme teraz ľubovoľnú červenú hranu. Označme vrcholy, ktoré spája, x a y. Z doteraz dokázaných tvrdení vyplýva, že v grafe G existuje kružnica dĺžky $2d+1$, do ktorej patrí aj naša hrana xy. Nájdeme ju napríklad tak, že ten z vrcholov x, y, ktorý je bližšie ku koreňu v, s ním spojíme, ten druhý spojíme s ľubovoľným listom v jeho podstrome a následne tieto dva konce prepojíme cestou dĺžky d vedúcou niektorou zo zvyšných vetiev. Označme

K túto kružnicu a z ten jej vrchol, ktorý je od x aj y najvzdialenejší. Keďže K má nepárnu dĺžku, je z jednoznačne určený. Vrcholy x aj y sú od z vzdialené d, keby boli bližšie, bolo by možné kružnicu K skrátiť. To znamená, že vrchol z spĺňa podmienku, ktorú sme na začiatku kládli na náš koreň v. Preto môžeme zopakovať celú úvahu, tentoraz so z ako s koreňom. Vrcholy x aj y budú v hĺbke d a teda budú mať rovnaký stupeň. Na začiatku úvahy sme však vybrali ľubovoľnú červenú hranu, takže každé dva vrcholy spojené červenou hranou sú rovnakého stupňa. Červené hrany však tvoria kostru grafu G. Takže úloha je vyriešená a my si zaslúžime koniec vzoráku. Tu je.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Bzdušek Tomáš	4.	GPdC PN	8	2		9	8	9	9	3	9		44	131
2.	Podolák Martin	4.	Gamča BA	7	2		9	9	6	9	1	9		42	130
3.	Szabados Michal	4.	ŠPMNDG BA	8	5			9	9	9	8	8		43	128
4.	Tureková Katarína	3.	GJGT BB	8	2		*	9	9	9	9			36	126
5.	Herencsár Albert	2.	Gmaď GA	4	0	9	9	9	7		2			36	124
6.	Kuncová Alexandra	2.	GAlej KE	5	0	9	9	9	6					33	119
7.	Starovská Mária	3.	Gamča BA	8	2		9	9	9	9				36	117
8.	Alif Maja	3.	GCelje	3	0	9	2	9	7	9				36	116
8.	Derňár Marek	4.	GAlej KE	6	0	9	2	9	5	9				34	116
10.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	10	5			9	9	9	2	5		34	109
11.	Boža Vladimír	3.	GDT PP	6	3			9	7	6	6	7		35	108
11.	Hapák Samuel	3.	Gamča BA	6	4			9	9	9	9	8		44	108
13.	Jursa Jakub	2.	GAlej KE	5	0	9	8	9			2			28	106
14.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	7	2		9	7	6		2	6		30	103
15.	Polačko Martin	2.	GAlej KE	5	0	9	8	9	2		1	0		29	102
16.	Vendel Dávid	2.	GPoš KE	4	0	7	7	8	9	9				40	101
17.	Juríková Katarína	3.	GJGT BB	5	0	9	4	9						22	97
18.	Haas Emil	2.	Gamča BA	5	0	3	2	7	8	8				28	96
18.	Hojčka Michal	2.	GKom PE	4	1		3	9	7	8	0	0		27	96
18.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE	6	1		4	7	7			8		26	96
18.	Kubina Filip	3.	GPOH DK	5	0	9	7	4	8	2				30	96
18.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	3	0	4	2	2	7	6				21	96
18.	Špesová Nikola	3.	GK2 PO	7	2		9	9	6					24	96
24.	Ujházi Vladislav	3.	GPJŠ RO	7	5			9	9					18	94
25.	Kovalčíková Kristína	4.	GVar ZA	10	2		5	8	9			3		25	93
25.	Liščinský Miroslav	2.	GAlej KE	5	0	9	4	9		9	2			33	93
25.	Rizman Tomáš	2.	GVar ZA	4	0	5	2	9	7	2				25	93
28.	Šagát Marián	3.	GŠkol PB	5	0	8		9						17	92
29.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	3	0	5	2	9	7	6				29	90
30.	Matejovičová Lenka	3.	Gamča BA	8	2		9	5	7	9	3			33	89
31.	Kuzma Tomáš	2.	GAlej KE	5	0	9	5	9			2	0		25	88
32.	Jakubík Jozef	3.	GKom PE	6	1		5	6	5	2	2			20	87
32.	Vancáková Judita	4.	GPoš KE	6	1		2	9	6		2			19	87
34.	Čevorová Kristína	4.	ŠPMNDG BA	8	2		8	7	9	2	1	5		31	86
34.	Melicherčík Martin	3.	GPár NR	8	2		9	9						18	86
34.	Simanová Lucia	3.	Gamča BA	6	0	5	6	7	1					19	86
37.	Biskupičová Lívia	2.	GŠkol PB	4	0	6	4	2	1		2			15	84
37.	Fekiač Jozef	2.	Gamča BA	4	0	9	2	9	5	0				25	84
37.	Kočiský Tomáš	3.	Gamča BA	4	1		6	7	4	4		1		22	84
40.	Csiba Peter	2.	ŠPMNDG BA	4	0	4	3	6	9	9	2			31	80
40.	Paulovský Michal	3.	Gamča BA	5	0	8	4	3	1					16	80
42.	Hojčková Martina	4.	GJH BA	8	2		2	9	6	8	0			25	79
43.	Hudec Vladimír	2.	GVar ZA	4	0	7	4	9	4					24	78
43.	Petrucha Michal	2.	GMet BA	4	0	1		9	3					13	78
45.	Vdovičenko Martin	3.	GPár NR	7	2		9	9	5		1			24	76
46.	Magyarová Katarína	4.	GBST LC	8	1		4	9	7		1	2		23	74
47.	Hollá Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	3	6	0		1	2	0		12	73

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
47.	Konečný Lukáš	3.	GPdC PN	3	0	1	3	9						13	73
49.	Szabadosová Emília	3.	ŠPMNDG BA	6	0	6	3	0	1					10	72
50.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	2	0	8	5	9						22	71
50.	Godány Martin	4.	ŠPMNDG BA	7	1		9	9	6					24	71
52.	Melo Matej	2.	GsvFA ZA	4	0	3	4		7		2	3		19	70
53.	Kobza Vladimír	3.	GJGT BB	5	0	9	3	9	1		2			24	68
54.	Vrbovská Mária	3.	GJGT BB	5	0	6	3	9			2			20	67
55.	Živčáková Andrea	3.	GJGT BB	4	0	5	2	8						15	65
56.	Kuklišová Nina	2.	GMet BA	5	0	4		9	4					17	60
57.	Hodásová Judita	2.	Gamča BA	4	0	1	4	7	0					12	56
57.	Jablonická Kristína	2.	ŠPMNDG BA	4	0	3	2			7	2	1		15	56
59.	Dlabaja Petr	4.	Holešov ČR	4	0									0	50
60.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3	0		4							4	49
61.	Dvoranová Veronika	3.	G Šurany	6	1		6	9						15	48
61.	Dvoranová Mária	2.	G Šurany	4	0									0	48
63.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	2	0	9	4	7						20	47
63.	Janíková Karolína	4.	GVar ZA	6	0	5		7						12	47
65.	Minárik Marián	3.	GPár NR	5	1		9	9						18	46
66.	Cibiček Jozef	4.	GJH BA	6	1									0	45
66.	Žemlička Martin	4.	GLS BJ	4	0									0	45
68.	Kotrlová Katarína	2.	GVPT MT	4	0	8	3		3					14	44
69.	Brída Radoslav	3.	Gamča BA	4	0	3	2							5	42
70.	Šiagi Miroslav	3.	GJGT BB	4	0									0	41
71.	Hajdin Michal	2.	GJH BA	4	0	2	3	0						5	39
72.	Bogár Ondrej	4.	GĽŠ TN	4	0									0	37
73.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3	0	5	3							8	34
74.	Roháľ Branislav	3.	GŠkol PB	5	0									0	32
74.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3	0	4	2							6	32
76.	Lukačišin Martin	3.	GJFR LE	3	0									0	28
77.	Birčák Erik	4.	ŠPMNDG BA	4	0	1								1	26
77.	Slovík Lukáš	3.	GJGT BB	4	0	8	2				2			12	26
79.	Košinárová Alena	3.	Gamča BA	8	3									0	25
79.	Sudolský Michal	4.	GJGT BB	9	6									0	25
81.	Alberty Roman	3.	GJGT BB	4	0	6								6	20
82.	Halaga Jozef	4.	GAP SB	4	0									0	16
82.	Nemec Juraj	3.	GJGT BB	4	0									0	16
82.	Nerer Juraj	3.	GJGT BB	4	0	5		9			2			16	16
85.	Kucbel Maroš	3.	GJGT BB	4	0									0	12
85.	Rakovská Elena	4.	GBil BA	4	0									0	12
87.	Pažický Martin	2.	GJH BA	2	0		2				2			4	9
87.	Szabo Martin	3.	GJGT BB	4	0									0	9
89.	Valenčíková Romana	2.	GJGT BB	3	0									0	6
89.	Šrámek Martin	3.	GTilg BA	4	0									0	6
91.	Konôpková Júlia	2.	GJGT BB	3	0									0	5
92.	Minďášová Katarína	2.	GJGT BB	3	0									0	3
93.	Betka Matej	2.	GJGT BB	3	0									0	0
93.	Kapustová Katarína	2.	GJGT BB	3	0									0	0
93.	Zubnárová Katarína	3.	GJGT BB	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Hagara Michal	1.	GJH BA	1	9	9	9		9		9		131
1.	Karásková Natália	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9		7		131
1.	Rudolfová Barbora	1.	GMet BA	1	9	9	9	8	8		9		131
4.	Konečný Jakub	1.	Gamča BA	2		9	6	7	7		9		120
5.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9	4	7		118

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
6.	Belan Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	8		5	9			117
7.	Peitl Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	8		5	3			114
8.	Hašík Juraj	1.	Gamča BA	2		9	9	3	2	2	7		111
9.	Zajac Anton	1.	Gamča BA	2		9	9	3	2		9		103
10.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	3			8	8	4	2	2		100
11.	Křemenová Lucie	1.	GMet BA	1	9	6		0	1	2			92
12.	Firbas Karol	1.	Gamča BA	2		9	9	9	0	4			90
13.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3			2	8		4			86
14.	Buchholcerová Anna	1.	GBil BA	2		9	2	1	2	4			85
14.	Matulová Daniela	1.	GVaz BA	1	9	9	9	0	2	3			85
16.	Magula Mário	1.	Gamča BA	1									79
17.	Vaškovičová Michaela	1.	1SG BA	1	5	3	2			2			73
18.	Formánek Michal	2.	ŠPMNDG BA	3									68
19.	Mieresová Ľubomíra	0.	GJH BA	1									62
20.	Pažický Martin	2.	GJH BA	2						2			7
21.	Vytřísal Filip	0.	ŠPMNDG BA	0		1	1	0	0	2			4

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Konečný Lukáš	3.	GPdC PN	3			8	6	1	3	9		115
2.	Bogár Ján	1.	GĽŠ TN	1	9	9	6	7	3	2			114
3.	Péder Mário	1.	GMRŠ Šamorín	1	9	9	9		0	4			106
4.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	2	9	9	8		8	5	9		97
5.	Tomašovič Juraj	1.	GPdC PN	1	8	2	4	6		3			79
6.	Bošanská Eva	2.	GĽŠ TN	2		9	9	3	3				70
7.	Repková Lucia	1.	GPár NR	1									52
8.	Šimková Mária	1.	GJF Šaľa	1	6	2	4	1	1	3			41
9.	Baxová Katarína	2.	GĽŠ TN	2									38
10.	Šimora Peter	2.	GVBN PD	2									22
11.	Baxová Jana	1.	GĽŠ TN	1									13
12.	Babiarová Dana	2.	GJab MY	3									0

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	1.	GVO ZA	2		9	9	9	9	8	9		135
2.	Jagoš Ľubomír	1.	GVO ZA	2		9	8	9	9	2	9		130
3.	Tvarůžková Jarmila	1.	GŠkol PB	1	8	9	8	7			7		124
4.	Štyráková Kamila	1.	GPOH DK	1	9	9	9	8	7				119
5.	Rošťáková Zuzana	1.	GMMH LM	1	9	2	9	4	7	5	9		114
6.	Porembová Alexandra	1.	BiG Sučany	1	9	9	2	0	8	4			112
7.	Maixner Michal	2.	GVar ZA	2		9	8	7	5	3	8		110
8.	Lauková Ivana	1.	GJL MT	1	7	9	9	6	2				105
9.	Majdiš Mojmír	1.	GPOH DK	1	8	9	4	6	6				100
10.	Perešíniová Michaela	1.	OA BB	1	5	9	8	5		2			96
11.	Ziman Michal	1.	GBST LC	1	9	9		6	0	4			91
12.	Kredatus Ivan	1.	SPŠJM BB	1	8	1	8	0	1	4			76
13.	Kieferová Marika	2.	GsvFA ZA	3			2	3	4	3	2		65
13.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3			8	1	5	3			65
15.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3			2	1	4	2			50
16.	Ľubušký Peter	1.	GAK BS	1									42
17.	Oravcová Zosia	2.	GJGT BB	3			9	1	1	4			35
18.	Vajdová Zlatica	1.	GJGT BB	2		9		1		2			33
19.	Selečéni Miloš	1.	GJGT BB	2									26
20.	Fajčíková Patrícia	1.	GBST LC	1									25

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
21.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	1									21
22.	Minďášová Katarína	2.	GJGT BB	3									10
23.	Bene Daniel	3.	GBST LC	3									9
24.	Valenčíková Romana	2.	GJGT BB	3									8
25.	Kapustová Katarína	2.	GJGT BB	3									7
26.	Konôpková Júlia	2.	GJGT BB	3									5
26.	Mlynáriková Michaela	2.	GJGT BB	3									5
28.	Betka Matej	2.	GJGT BB	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	1.	GPoš KE	2		9	9	9	5		9		127
1.	Popovič Viktor	1.	GJAR PO	2		9	8	7	5	4	9		127
3.	Kičová Kristína	1.	GPoš KE	1	9	9	9	7	9				124
4.	Rigdová Emília	1.	GKuk PP	1	9	9	8	1	5	4			113
5.	Mitro Juraj	1.	GJAR PO	1	9	9	8	6	2				111
6.	Cocuľová Zuzana	1.	GPoš KE	2		9	8	0	5	4			101
7.	Hudák Adam	1.	GMRŠ KE	1	9	9	4		2	2			91
8.	Baranová Jana	1.	GAlej KE	2		9	8		5				88
9.	Lešková Andrea	1.	G Lipany	1	9	9	9	9	9				87
10.	Dobranský Marián	2.	GPoš KE	3			2	2		2	3		60
11.	Vaľková Monika	1.	GAlej KE	2									58
12.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	3					5	2	9		56
13.	Lukačišin Martin	3.	GJFR LE	3									40
14.	Lešková Katarína	1.	G Lipany	1									31
15.	Zatrochová Zuzana	1.	GAlej KE	2									30
16.	Görcsösová Andrea	1.	GAlej KE	2									19

kategória ALFA, mimo SR

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Matúš Kopf	1.	GMen OP	1	6	9	8		5	2	7		122

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	1.	GPoš KE				1			1
2.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	2	6		3			41
3.	Bzdušek Tomáš	4.	GPdC PN	3	9			0		38
4.	Hapák Samuel	3.	Gamča BA	9	8		7			51
5.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE		8					26
6.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	2	5					29
7.	Podolák Martin	4.	Gamča BA	1	9					55
8.	Szabados Michal	4.	ŠPMNDG BA	8	8		7			70
9.	Ujházi Vladislav	3.	GPJŠ RO				7			35
10.	Šagát Marián	3.	GŠkol PB				7			13