Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série letnej časti 2007/2008

Úloha č. 1: *Miťo dostal na Vianoce novú grafickú kalkulačku a veľmi sa jej potešil. Keďže nie je príliš technicky nadaný, naučil sa na nej zatiaľ iba zadávať prvočísla* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ *a násobiť ich.*
a) Koľko rôznych výsledkov vie Miťo dostať vynásobením niektorých dvoch zo spomínaných čísel?
b) Koľko rôznych párnych výsledkov vie Miťo dostať vynásobením niektorých troch zo spomínaných čísel?
(Čísla, ktoré Miťo násobí, sa samozrejme môžu aj rovnať.)

Riešenie: (opravovala Ajka)

a) Vieme zadávať prvočísla $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ a 29. Chceme zistiť koľko rôznych výsledkov vieme dostať vynásobením dvoch z nich. Uvedomme si, že vynásobením dvoch rôznych dvojíc prvočísel dostaneme rôzne čísla. Je to preto, že tie súčiny majú rôzny prvočíselný rozklad[1]. Stačí nám preto zrátať, koľko rôznych dvojíc vieme vybrať spomedzi prvočísel, ktoré vie Miťo zadávať. (Pritom nám nezáleží na poradí – dvojica $2 \cdot 3 = 6$ a $3 \cdot 2 = 6$ sú rovnaké.) To zabezpečíme napríklad tak, že z dvojice $a \cdot b$ a $b \cdot a$ vyberieme a započítame tú v ktorej je prvé číslo menšie ako druhé. S číslom 2 môžu byť v dvojici prvočísla 2 až 29, spolu desať rôznych výsledkov. S číslom 3 môžu byť v dvojici prvočísla 3 až 29 (dvojka už nemôže, lebo je menšia ako trojka), deväť rôznych výsledkov. S číslom 5 môžu byť 5 až 29, osem výsledkov. Takto budeme postupovať ďalej. Zakaždým sa počet možností zmenší o jedna, pretože máme o jedno použiteľné prvočíslo menej. Posledná dvojica bude iba jedna $(29 \cdot 29)$. Spolu máme $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ rôznych výsledkov.

b) Opäť nám na to, aby sme dostali rôzne výsledky, stačí zobrať rôzne trojice prvočísel. (Zasa je to vďaka tomu, že budú mať rôzny prvočíselný rozklad.) Teraz chceme aby výsledky boli párne, takže potrebujeme, aby bolo aspoň jedno prvočíslo dvojka. Môže byť použitá trikrát ($2 \cdot 2 \cdot 2$ – jeden výsledok), dvakrát ($2 \cdot 2$ krát prvočíslo od 3 do 29 – 9 výsledkov), alebo len raz, čiže 2 krát dve prvočísla rôzne od dvojky. Počet takýchto dvojíc sme už rátali v a) len musíme vynechať dvojice s dvojkou. V prípade, že použijeme len jednu dvojku máme $55 - 10 = 45$ rôznych výsledkov. Spolu vieme dosiahnuť $1 + 9 + 45 = 55$ rôznych výsledkov.

Komentár: Dalo sa to riešiť aj trochu rýchlejšie. V časti a) môžete využiť kombinačné čísla, a tak počet dvojíc prvočísel zrátate jednoducho ako $10 + \binom{10}{2}$. (Desať dvojíc, kde sú prvočísla rovnaké a $\binom{10}{2}$ dvojíc, kde sú vybrané prvočísla rôzne.) V časti b) si stačí uvedomiť, že každý výsledok deliteľný dvoma, je súčin dvojky a dvoch ďalších prvočísel. Ale tie dve ďalšie prvočísla vieme vybrať toľkými spôsobmi ako v a), preto je odpoveď takisto 55.

Úloha č. 2: *Traja kamaráti sedia okolo stola a pijú kofolu. Každý má na začiatku vo svojom pohári určité neznáme množstvo kofoly, dohromady jej však majú presne tri litre. (Predstavte si veľmi veľké poháre.) Prvý vezme svoj pohár a rozdelí kofolu v ňom rovnakým dielom medzi poháre zvyšných dvoch. Potom spraví so svojim pohárom to isté druhý a po ňom aj tretí. Nakoniec má každý v pohári rovnaké množstvo kofoly, ako mal na začiatku. Koľko kofoly majú jednotliví kamaráti?*

Riešenie: (opravovala Katka M.)

Kofole zdar, milí mladí priatelia, vitajte pri vzorovom riešení úlohy číslo dva. Na riešenie budeme potrebovať: tri veľké poháre, jednu ľahšiu úvahu, štipku predstavivosti a zopár rovníc. Na úvod len toľko, že úloha nebola ťažká a väčšina z vás ju zvládla. Vyskytli sa však chyby, na ktoré treba poukázať. Veci, ktoré sú „na prvý pohľad zrejmé“ alebo „po vyskúšaní vyjdú“ treba dokázať a ak sa nám podarí nájsť výsledok skúšaním, treba overiť, či je jediný. A teraz už k samotnej úlohe.

Najistejšie bolo pozrieť sa na to, ako prelievanie prebieha. Pomenujme kamarátov Feráč (1), Kubík (2) a Bus (3). Bus na konci prelievaní všetku svoju kofolu dal Feráčovi a Kubíkovi, čiže mu žiadna neostala. Vieme, že toľko mal aj na začiatku, preto začínal s prázdnym pohárom. Preto ak si označíme začiatočné množstvá kofoly u Feráča a Kubíka F a K, platí rovnosť $F + K = 3$. Teraz sa pozrime na to, ako budú vyzerať množstvá kofoly v pohároch po jednotlivých prelievaniach. Po prvom bude mať Feráč 0, Kubík $K + F/2$ a Bus $F/2$. Po druhom (rozlieva Kubík, takže mu ostane 0) bude stav (po úprave)

$$\text{Feráč:}\quad \frac{F + 2K}{4}, \qquad \text{Bus:}\quad \frac{3F + 2K}{4}.$$

Sme na konci, preleje sa tretí raz, Bus bude mať prázny pohár a

$$\text{Feráč:}\quad \frac{5F + 6K}{8}, \qquad \text{Kubík:}\quad \frac{3F + 2K}{8}.$$

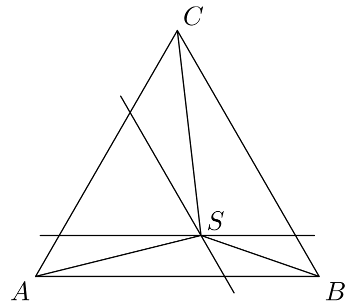
[1] Vieme, že prirodzené čísla majú jednoznačný prvočíselný rozklad až na poradie, napríklad číslo 21 vieme dostať *len* ako súčin 3 a 7

No a teraz si len uvedomíme, že tieto množstvá Kofoly sa podľa zadania rovnajú tým na začiatku. Keď navyše využijeme to, že $F + K = 3$, zo sústavy rovníc dostneme, že $F = 2$ a $K = 1$.
Pozor, ešte sme neskončili. Keďže sme riešili rovnicu, musíme urobiť skúšku správnosti. V našom prípade (keďže z rovníc jednoznačne vyplynulo, že toto je jediné riešenie) stačí napísať, ako prebieha prelievanie pre začiatočné množstvá 2, 1 a 0 a úloha je doriešená ako má byť.

Komentár: Skúste sa zamyslieť ako by táto úloha fungovala pre viacerých kamarátov (4, 5, ..., n).

Úloha č. 3: *V rovnostrannom trojuholníku* ABC *so stranami dĺžky* 12 m *nájdite taký bod* S*, aby obsahy trojuholníkov* ABS*,* BCS*,* CAS *boli v pomere* $1 : 2 : 3$.

Riešenie: (opravoval Janko)

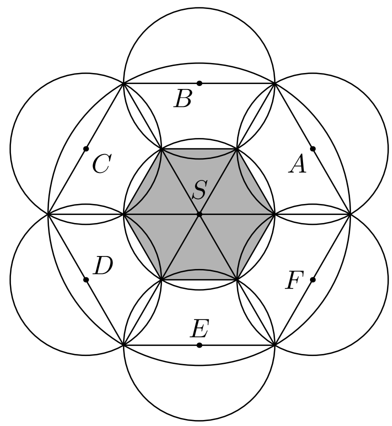


Označme dĺžku strany trojuholníka ABC ako a a výšku v. (Z rovnostrannosti vieme, že má strany aj výšky rovnako veľké.) Obsah trojuholníka ABC je $P = av/2$. Obsahy malých trojuholníkov sú v pomere $1 : 2 : 3$ a spolu dávajú obsah P. Preto ich obsahy sú postupne $1/6$, $2/6$ a $3/6$ obsahu veľkého trojuholníka, t.j. $P/6$, $P/3$ a $P/2$. Keďže malé trojuholníky majú tiež základňu a a vieme ich obsahy, ľahko zrátame ich výšky. Napríklad pre trojuholník ABS má platiť $av_1/2 = P/6$. Pomocou rovnosti $P/6 = av/12$ dostaneme $v_1 = v/6$. Pre výšky ďalších dvoch trojuholníkov dostaneme $v_2 = v/3$ a $v_3 = v/2$. Teraz stačí, ak narysujeme rovnobežku s AB vo vzdialenosti $v/6$ (od AB) a rovnobežku s BC vo vzdialenosti $v/3$ (od BC). Označme si ich priesečník S. Teraz vieme, že trojuholník ABS má obsah $1/6$ trojuholníka ABC, trojuholník BCS má obsah $1/3$ trojuholníka ABC. Obsah trojuholníka CAS je $1 - 1/6 - 1/3 = 1/2$ obsahu ABC. Takže náš bod S spĺňa podmienky zadania.

Komentár: Niektorí z vás skonštruovali všetky tri rovnobežky a povedali, že sa všetky pretnú v jednom bode. V tomto prípade je to síce pravda, ale musíte to nejako dokázať. (Vo všeobecnosti sa môžu tri priamky, ktoré nie sú navzájom rovnobežné, pretať buď v jednom alebo v troch bodoch.)

Úloha č. 4: *Rišo s Katkou chcú sedieť na svadbe za veľkým kruhovým stolom s polomerom dva metre. Nepodarilo sa im však zohnať iné ako kruhové obrusy s polomerom jeden meter. Poraďte im, ako pokryť celý stôl s použitím maximálne siedmich takýchto obrusov, alebo vysvetlite, prečo sa to nedá.*

Riešenie: (opravovala Katka Š)
Podarí sa Katke s Rišom pokryť stôl? Najlepšie je zobrať ceruzku a papier a skúsiť si to nakresliť. Po chvíľke sa dá prísť na to, že to ide pomocou 7 obrusov tak, ako na obrázku. Bod S je stred kruhu s polomerom 2 metre. Body A, B, C, D, E, F sú stredy strán pravidelného 6-uholníka vpísaného do kruhu s polomerom 2 metre. Body S, A, B, C, D, E a F budú stredy obrusov, t.j. stredy siedmich kruhov s polomerom 1 meter.



Na obrázku to síce vyzerá pekne (a zakryto), ale ešte treba dokázať, že celý stôl je naozaj pokrytý. Dokreslíme si do obrázka pomocnú 6-uholníkovú sieť, pozostávajúcu z pravidelných 6-uholníkov so stranou 1 meter tak, aby body S, A, B, C, D, E, F boli stredmi siedmich takých 6-uholníkov zo 6-uholníkovej siete. Každý z týchto siedmich 6-uholníkov je pokrytý jedným obrusom s polomerom 1 meter. Takže ak sa nám podarí dokázať, že týchto sedem 6-uholníkov pokrýva celý stôl, bude to znamenať, že aj sedem obrusov s polomerom 1 meter ho pokrýva. Je jasné, že týchto sedem 6-uholníkov na pokrytie stola potrebujeme. Ale budú nám stačiť? Ukážeme, že žiadny vnútorný bod iného 6-uholníka ako týchto 7, nebude vnútorným bodom kruhu s polomerom 2 metre (stola). Stredy všetkých ostatných 6-uholníkov sú od bodu S vzdialené aspoň 3 metre. Lenže z toho vyplýva, že kružnica s polomerom 2 metre a stredom S a kružnica opísaná ľubovoľnému inému 6-uholníku sa môžu nanajvýš dotýkať. Čiže stôl a ľubovoľný iný 6-uholník možu mať najviac 1 spoločný bod, tieto spoločné body sú vrcholmi pravidelného 6-uholníka vpísaného do kružnice s polomerom 2 metre a stredom S. Avšak tieto body sú už pokryté obrusmi so stredmi v stredoch strán 6-uholníka vpísaného do kružnice s polomerom 2 metre a stredom S. Tým pádom je stôl celý pokrytý.
Sú aj iné postupy ako ukázať, že stôl je týmito kružnicami celý pokrytý. Napríklad pokryjeme obvod stola šiestimi obrusmi, a potom dokážeme, že zvyšná časť stola sa dá pokryť obrusom položeným do stredu stola. Vypočítame obsah prečnievajúcich a prekrývajúcich sa častí obrusov. (Obsah tých častí obrusov, ktoré by sme mohli odstrihnúť, a stôl by bol celý pokrytý tak, že by sa žiadne časti obrusov neprekrývali.) Ak bude tento obsah rovný rozdielu medzi súčtom obsahov obrusov a obsahom stola, tak stôl je celý pokrytý.

Komentár: Ak ste iba napísali, že stôl sa dá pokryť siedmimi obrusmi a nakreslili ste obrázok, ešte ste nevyriešili príklad úplne. Bolo nutné zdôvodniť, že stôl je naozaj celý pokrytý. Je to podobné, ako keby ste riešili príklad s číselným výsledkom, a vy by ste napísali do riešenia iba výsledok, ale vôbec by ste nedokázali, že tento výsledok je správny.

Úloha č. 5: *Ondro písal písomku z dejepisu, na ktorej bolo* 30 *otázok. Pravidlá bodovania hovoria, že ak študent odpovie na x otázok správne, na y otázok nesprávne a na zvyšných $30 - x - y$ otázok sa rozhodne neodpovedať, dostane z písomky $30+4x-y$ bodov. Ondrovi sa podarilo získať $n > 80$ bodov a hneď sa s tým pochválil Škrečkovi. Škrečok z tohto počtu bodov dokázal zistiť, koľko mal Ondro správnych odpovedí. Navyše si všimol, že keby Ondro získal ľubovoľný menší počet bodov ako n ale väčší ako* 80*, nedal by sa už počet jeho správnych odpovedí určiť jednoznačne. Na koľko otázok z písomky odpovedal Ondro správne?*

Riešenie: (opravovali Ondro a 5ko)
V prvom rade si musíme uvedomiť, čo vlastne chceme urobiť. Máme nájsť taký počet bodov, pri ktorom bude Škrečok s istotou vedieť, na koľko otázok odpovedal Ondro správne. Zároveň bude pre každý menší bodový zisk platiť, že existujú aspoň dva rôzne spôsoby na jeho získanie. Po chvíľke hrania a zoznamovania sa s príkladom si môžeme všimnúť isté zákonitosti. Počet bodov sa nemení v prípade, keď sa x zvýši o 1 a y o 4. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že tým pádom nie je ani jeden bodový zisk jednoznačný, ale naštastie je počet otázok obmedzený na 30. Takže všetky možné bodové stavy dosiahnuteľne odpovedaním na najviac 25 otázok (či už správne alebo nesprávne - na tom teraz nezáleží) vieme získať aspoň dvoma rôznymi spôsobmi. Preto pre Ondra musí platiť $x + y > 25$ (Premyslite si.)
Teraz si môžeme všimnúť ďalšiu vec. Ak $y > 3$ môžeme ho zmenšiť o 4 a zároveň x zvýšiť o 1, a tak sa ten počet bodov dá dosiahnuť aj iným spôsobom. Preto pre Ondrov počet bodov musí platiť $y \leq 3$. Máme spolu dve podmienky: $x+y > 25$ a $y \leq 3$. My hľadáme najmenší možný počet bodov pre x a y čo toto spĺňajú. To dosiahneme vybratím čo najväčšieho možného y a čo najmenšieho možného x. Zrejme to spĺňa $y = 3$ a $x = 23$. Ondro podľa nás získal $30 + 4 \cdot 23 - 3 = 119$ bodov.
Úloha sa ešte nekončí. Musíme overiť, že 119 naozaj spĺňa podmienky zo zadania. Najprv ukážeme, že z čísla 119 je jasné koľko akých odpovedí mal Ondro. Snažíme sa nájsť všetky x a y $(x+y \leq 30)$, pre ktoré platí $30+4x-y = 119$, čiže $4x = 89 + y$. Aby ľavá strana bola aspoň 89, musí platiť $x \geq 23$. Pre $x = 23$ máme jediné vyhovujúce $y = 3$. Ak by $x \geq 24$, potom pravá strana musí byť aspoň $24 \cdot 4 = 96$, ale y by bolo aspoň $96 - 89 = 7$, čím by sme dostali odhad $x + y \geq 24 + 7 = 31$ čo nemôže platiť. Tým sme ukázali jednoznačnosť.
Ešte musíme overiť, že každý z počtu bodov $80, 81, \ldots, 118$ sa dá získať aspoň dvoma spôsobmi. (Čo znamená že každé z čísel $50, 51, \ldots, 88$ sa dá napísať v tvare $4x - y$ $(x + y \leq 30)$ minimálne dvoma spôsobmi.) Každé z čísel $50, 51, \ldots, 88$ si ale môžeme napísať v tvare $4k + z$, kde z je zvyšok po delení 4 (ale zvyšky budeme brať ako 1, 2, 3 alebo 4, napr. $32 = 7 \cdot 4 + 4$) a k čiastočný podiel. Keďže sú to čísla do 88, tak k bude najviac 21 (premyslite si) a $z \leq 4$. Potom číslo $4k + z$ vieme napísať ako $4 \cdot (k + 1) - 1 \cdot (4 - z)$, ale aj $4 \cdot (k + 2) - 1 \cdot (8 - z)$. Navyše platí $(k + 1) + (4 - z) \leq 21 + 1 + 3 = 25$ a $(k + 2) + (8 - z) \leq 21 + 2 + 7 = 30$, čiže menšie počty bodov sa dajú získať viacerými spôsobmi.
Ondro odpovedal správne na 23 otázok. Kto by neveril tomuto postupu, ešte vždy mu ostáva možnosť vyskúšať všetky možnosti a tým sa presvedčiť o správnosti výsledku, čo aj mnohí z vás urobili.

Úloha č. 6: *Nájdite zvyšok čísla $6^{83} + 8^{83}$ po delení*
a) číslom 7*,*
b) číslom 49*. Nezabudnite uviesť aj postup, ktorým ste riešenie našli, a dokázať, že vaše riešenie je správne.*

Riešenie: (opravovali Kubman a Mišáč)
Chceme vedieť, aký zvyšok dáva číslo $6^{83} + 8^{83}$ po delení číslom 7 a číslom 49. Obidve tieto čísla sú mocniny čísla 7, čo zrejme nebude náhoda. Všimnime si tiež, že čísla 6 a 8 sa líšia od čísla 7 len o jednotku. Napíšme si preto číslo 6 ako $7 - 1$ a číslo 8 ako $7 + 1$. Zaujíma nás zvyšok čísla $(7 - 1)^{83} + (7 + 1)^{83}$ po delení číslom 7 (číslom 49). Teraz je tá správna chvíľa spomenúť si na binomickú vetu a rozpísať čísla nasledovne:

$$\begin{aligned}(7-1)^{83} &= 7^{83} + \binom{83}{1}7^{82}(-1) + \cdots + \binom{83}{81}7^2(-1)^{81} + \binom{83}{82}7(-1)^{82} + (-1)^{83},\\ (7+1)^{83} &= 7^{83} + \binom{83}{1}7^{82} + \cdots + \binom{83}{81}7^2 + \binom{83}{82}7 + 1^{83}.\end{aligned}$$

Vidíme, že na pravých stranách rovníc sú všetky sčítance okrem posledného deliteľné číslom 7. To znamená, že $(7 - 1)^{83} + (7 + 1)^{83}$ dáva zvyšok $(-1)^{83} + 1^{83} = 0$ po delení číslom 7.
Pri deliteľnosti číslom 49 postupujeme podobne. Tentokrát sú na pravých stranách rovníc všetky sčítance okrem posledných dvoch deliteľné číslom 49. Teda $(7 - 1)^{83} + (7 + 1)^{83}$ dáva taký zvyšok ako číslo

$$\binom{83}{82}7(-1)^{82} + (-1)^{83} + \binom{83}{82}7 + 1^{83} = 83 \cdot 7 + 83 \cdot 7 = 1162.$$

Nie je ťažké spočítať, že $1162 = 49 \cdot 24 + 35$. Zvyšok v tomto prípade je 35.

Poznámka: Ak sa vám aj tento postup zdá zdĺhavý a bažíte po jednoduchšom riešení, odporúčame naštudovať malú Fermatovú vetu, Eulerovu vetu a Eulerovu funkciu z teórie čísel. Tým čo tak už učinili, nech slnko večne žiari do tvárí a tiene nech im padajú za chrbát.

__Úloha č. 7:__ *Kuna rada skáče po prirodzených číslach. Avšak neskáče hocijako, robí len nasledovné skoky: Z čísla n sa vie dostať na číslo $2n$ a naopak. Z čísla n sa vie taktiež dostať na číslo $3n+1$ alebo naopak. Vie sa z každého prirodzeného čísla nejakou postupnosťou skokov dostať na číslo 1?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kika a Bus)

Väčšina z vás sa chytila tej myšlienky, že kuna bude pomocou týchto dvoch operácií skákať na menšie a menšie čísla, až pokiaľ nedôjde k jednotke. Presnejšie dokážeme, že pre každé číslo $n > 1$ sa po niekoľkých skokoch kuna vie dostať na číslo menšie ako n (z čoho už vyplýva tvrdenie zo zadania, premyslite si). Dalo sa to rôznymi spôsobmi, ukážeme jeden z nich. Všetky čísla si na začiatku rozdelíme do troch kategórií podľa deliteľnosti trojkou. Každé jedno číslo bude určite patriť do jednej z týchto skupín.

a) $n = 3k$. S takýmto číslom urobíme postupne tieto operácie

$$3k \to 9k+1 \to 18k+2 \to 36k+4 \to 12k+1 \to 4k \to 2k \to k.$$

Takouto postupnosťou skokov sa kuna z čísla $3k$ dostane na k. Evidentne platí, že pokiaľ $3k > 0$, potom aj $3k > k$.

b) $n = 3k+1$. Z takéhoto čísla kuna podľa zadania skočí hneď na k. Zase ak $3k+1 > 0$, potom $3k+1 > k$.

c) $n = 3k+2$. Tu budeme postupovať

$$3k+2 \to 6k+4 \to 2k+1,$$

a kuna skončí na čísle $2k+1$. Ak $3k+2 > 0$, potom $3k+2 > 2k+1$.

Naozaj, z ľubovoľného čísla sa najviac na sedem krokov vieme dostať do menšieho a tak kuna vie z ľubovoľného čísla n doskákať na číslo 1 (na najviac $7(n-1)$ krokov, premyslite si).

__Úloha č. 8:__ *Peťko hodil 15-krát mincou a zapísal si postupnosť hláv a znakov, ktorá mu padla. Potom zrátal počet dvojíc hlava-hlava, hlava-znak, znak-hlava, znak-znak, ktoré padli v dvoch po sebe idúcich hodoch. Vyšli mu postupne počty $2, 3, 4, 5$. Koľko je rôznych postupností, ktoré môže mať Peťko zapísané?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Zuska a Buggo)

Milé deťúrence a iné žubrienky. Tento vzorák sa skladá z dvoch častí. V prvej objasňujeme základné myšlienky a prístupy, ktoré by mohli viesť k riešeniu. Druhá časť obsahuje priame riešenie bez zbytočných rečí navyše.

V riešení bude h označovať hlavu, o orla a z znak. Vypíšme si niekoľko postupností spĺňajúcich zadanie a pozrime sa na ne. Existuje nejaký súvis medzi výskytmi dvojíc hz a zh, alebo ich počtami? Po krátkom hraní sa a hľadaní skrytých vlastností si každý so zrakom sťa o všimne, že medzi dvoma hz je nutne jedno zh a naopak. My máme tri hz a štyri zh, čo znamená, že na začiatku bude určite z a na konci h. (Premyslite si prečo.) Napíšme si teraz postupnosť $zhzhzhzh$. Keď teraz namiesto nejakého z napíšeme postupnosť viacerých *zetiek*, počet dvojíc zz nám primerane narastie. (Pridáme dve z, pribudnú dve dvojice.) Takže nás zaujíma, koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť päť *zetiek* na štyri miesta a dve *háčka* na ďalšie štyri miesta. Aby sme to zrátali, môžeme použiť staré známe úvahy o chlievikoch a oddeľovačoch, známe tiež pod názvom kombinácie s opakovaním. Keďže každé rozdelenia z možno skombinovať s každým rozdelením h sú tieto rozdelenia navzájom nezávislé, vynásobením týchto dvoch čísel dostaneme hľadané riešenie. Výsledok je teda

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{5}{2} = 560.$$

Tu je už sľúbená druhá časť, čisté riešenie. Keď sčítame výskyty h (resp. z) v dvojiciach zo zadania, dostaneme 11 (resp. 17). Uvedomme si, že okrem prvého a posledného hodu sme zarátali každú mincu dva krát. To ale znamená, že prvý a posledný hod sa rôznia, pretože ak by boli rovnaké, súčty by boli párne. V našej postupnosti sa štyri krát zmení z na h, avšak h na z len tri krát. Preto ak majú byť symboly na začiatku a na konci rôzne, musí sa začínať znakom a končiť hlavou. Označme $ZHZHZHZH$ každú postupnosť zloženú z písmen z a h takú, že každé Z (resp. H) predstavuje niekoľko (aspoň jedno) písmen z (resp. h). V takejto postupnosti budú vždy práve tri dvojice hz a práve štyri dvojice zh. Takže nami požadované postupnosti budú určite v tomto tvare.

Ak chceme, aby počet dvojíc zz bol 5, musia sa tieto dvojice vyskytovať vrámci niektorých blokov Z. Jeden blok Z, pozostávajúci z k písmen z, obsahuje $k-1$ dvojíc zz. Nakoľko Z obsahuje vždy aspoň jedno písmeno z, všetkých možných rozložení dvojíc zz je rovnako veľa ako možností rozloženia 5 prvkov do 4 priehradok, teda

$$\binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}.$$

Analogickým postupom pre hh dostaneme výsledok $\binom{5}{2}$. Nakoľko rozdelenie zz a hh je nezávislé, výsledný počet postupností je

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{5}{2} = 560.$$

Úloha č. 9: *Pre ktoré prirodzené čísla n je výraz $n^2 + 3^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla?*

Riešenie: (opravovali Tina a Miťo)

Trochu netradične, najprv si ukážeme dôkaz pre párne n, ktorý sa *nedá* použiť aj pre n nepárne. V druhej časti vzorového riešenia si potom ukážeme prístup, pri použití ktorého nezáleží na tom, či je n párne alebo nepárne.

Riešenie pre párne n.

Nech $n = 2k$ pre nejaké prirodzené k. Zadanie si prepíšeme do rovnice

$$n^2 + 3^n = x^2, \tag{1}$$

kde x je prirodzené číslo. Všimnime si, že 3^{2k} je druhá mocnina prirodzeného čísla a preto x musí byť aspoň $3^k + 1$. Dosadením tohto odhadu do (1) získame $(2k)^2 + 3^{2k} \geq (3^k + 1)^2$ a po drobnej úprave dostávame $4k^2 = 2 \cdot 3^k + 1$. Vyskúšaním niekoľkých malých hodnôt k získame podozrenie, že táto rovnica nemá riešenie.[2] Keďže $2 \cdot 3^k + 1 > 2 \cdot 3^k$, stačí indukciou dokázať nerovnosť $2k^2 < 3^k$, čím dokončíme riešenie.

Riešenie pre všetky n.

V príkladoch tohoto typu môže byť celkom vhodné používať rozklad na súčin, vyskúšajme to aj my. Rovnicu (1) prepíšeme na tvar $3^n = (x - n)(x + n)$. Všimnime si, že ak má byť súčin nejakých dvoch čísel mocninou trojky, aj obe tieto čísla musia byť mocninami trojky (vrátane možnosti $1 = 3^0$). Toto pozorovanie môžeme zapísať pomocou rovníc

$$\begin{aligned} 3^a &= x - n, \\ 3^b &= x + n, \end{aligned}$$

kde $a + b = n$, $a < b$ (a samozrejme a aj b sú nezáporné celé čísla). Odčítajme od druhej rovnice prvú, dostaneme $3^b - 3^a = 2n$, po rozložení ľavej strany na súčin a dosadení za n

$$3^a(3^{b-a} - 1) = 2(a + b). \tag{2}$$

Keď dosadíme za a, b niekoľko malých hodnôt, opäť začneme mať pocit, že rovnica nebude mať veľa riešení, pretože ľavá strana rastie „príliš rýchlo.“ Skúsme to dokázať, motivuje nás pritom snaha zistiť, kedy je ľavá strana najmenšia. Skúsme ju preto odhadnúť zdola. Zrejme $3^{b-a} - 1 > 3^{b-a-1}$ a preto

$$3^a(3^{b-a} - 1) > 3^a \cdot 3^{b-a-1} = 3^{b-1}.$$

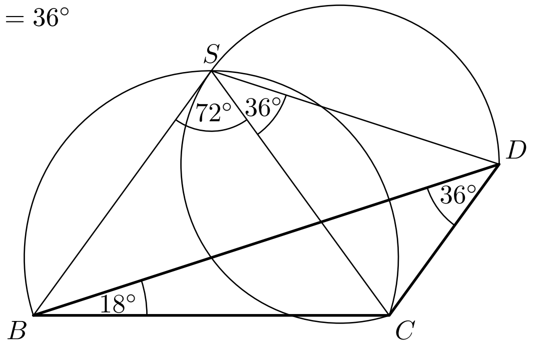
Podobne, $3^{b-a} - 1 < 3^{b-a}$ a preto je ľavá strana menšia ako $3^a \cdot 3^{b-a} = 3^b$. Spojením týchto odhadov máme $2n \in (3^{b-1}, 3^b)$, čo síce priamo nepotrebujeme, ale vyzerá to dobre `:)`. Ak si všimneme, že $2(a + b) < 4b$, tak na dokončenie dôkazu stačí dokázať nerovnosť $4b < 3^{b-1}$. To je rutinná indukcia, ktorú si iste radi vyskúšate sami. Samozrejme, uvedená nerovnosť neplatí už pre $b = 1$, ale od určitého b platí. Pre menšie hodnoty treba rovnicu (2) riešiť inak, napríklad dosadením a rozobraním konkrétnych prípadov, nie je ich veľa.

Komentár: Mnohí z Vás to pri rovnici (2) alebo ekvivalentnej „zabalili“ s tvrdením, že na ľavej strane je exponenciálna funkcia, ktorá rastie rýchlejšie ako lineárna na pravej strane. Problém je samozrejme v tom, že to nie je exponenciálna funkcia, ale rozdiel, respektíve súčin dvoch exponenciálnych funkcií. Navyše, exponenty nemôžu byť len tak hociaké, ale musia spĺňať väzbu $a + b = n$. A to už za trochu dokazovania snáď stojí, či nie?

Úloha č. 10: *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BDC| = 36°$, $|\sphericalangle CBD| = 18°$ a $|\sphericalangle BAC| = 72°$. Uhlopriečky tohto štvoruholníka sa pretínajú v bode P. Zistite veľkosť uhla APD.*

Riešenie: (opravoval Škrečok)

(Podľa *Hany Šormovej.*)



Vezmime si trojuholník BCD, v ktorom zo zadania poznáme $|\sphericalangle BDC| = 36°$ a $|\sphericalangle CBD| = 18°$. Opíšeme tomuto trojuholníku kružnicu, jej stred si označíme ako S. Z vety o obvodovom a stredovom uhle vyplýva, že $|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BDC| = 72°$ a $|\sphericalangle CSD| = 2|\sphericalangle CBD| = 36°$. (Sú to stredové uhly prislúchajúce tetivám BC a CD.)

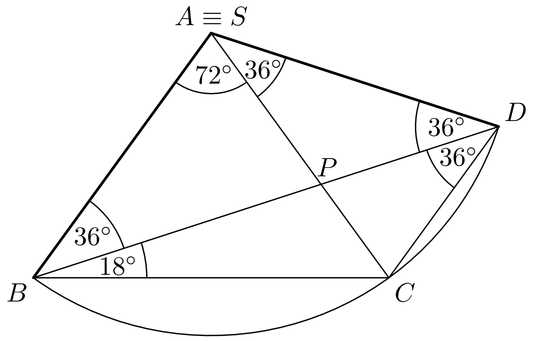
Všimnime si, že podľa zadania platí $|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BAC|$ aj $|\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle CAD|$. Je to prinajmenšom podozrivé, skúsime dokázať, že body S a A sú *totožné.* Keďže je štvoruholník $ABCD$ konvexný, body A, D, S ležia v tej istej polrovine určenej priamkou BC. Podobne body A, B, S ležia v tej istej polrovine vzhľadom na CD. Skonštruujme teraz známym spôsobom

- množinu bodov, z ktorých vidno úsečku BC pod uhlom 72°,

[2]Na pravej strane je exponenciálna funkcia, ktorá rastie rýchlejšie ako kvadratická na ľavej strane.

- množinu bodov, z ktorých vidno úsečku CD pod uhlom 36°,

pričom skonštruujeme iba tie časti množín, ktoré ležia v spomínaných polrovinách. (Tie druhé osovo súmerné časti by boli zbytočné.) Koľko je takých bodov, že ležia na oboch skonštruovaných oblúkoch? Zrejme sú najviac dva a jeden z nich je bod C. No ale na oboch oblúkoch musia ležať aj body A a S, z čoho dostávame, že sú naozaj totožné.



Inak povedané, bod A je stredom kružnice opísanej trojuholníku BCD. Vďaka tomu platí $|AB| = |AC|$, a preto je trojuholník ABD rovnoramenný. Dopočítame v ňom veľkosť uhlov pri základni ako

$$|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle BDA| = \frac{180° - 72° - 36°}{2} = 36°.$$

Teraz už v trojuholníku APD poznáme veľkosti všetkých uhlov až na hľadanú $|\sphericalangle APD|$, ktorú vieme dorátať ako $180° - |\sphericalangle BDA| - |\sphericalangle CAD| = 180° - 36° - 72° = 108°$. Ešte si môžete pre istotu skúsiť dorátať veľkosti ostatných uhlov v štvoruholníku, aby bolo jasné, či takýto štvoruholník $ABCD$ vôbec existuje.

Komentár: Ako ste viacerí na fóre o príkladoch poznamenali, nešlo to vyrátať iba tak, že si pomocou sústavy rovníc vyjadríme a dorátame neznáme uhly. Chcelo to niečo rafinovanejšie, v našom prípade to bolo pozorovanie, že bod A je stred kružnice opísanej trojuholníku BCD. Mnohí ste po tomto pozorovaní nevenovali veľkú pozornosť jeho *poriadnemu* dokázaniu, na čom ste stratili pár bodíkov.

Úloha č. 11: *Kružnica, rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými $1, 2, 3, \ldots, n$, reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?*

Riešenie: (opravoval Feráč)

Aj vy sa chcete stať milionármi? Hazardné hry väčšinou nie sú tou najľahšou cestou k úspechu, s touto však zaiste obohráme Ondreja o všetky plyšáky. Ale pozor, on teraz určite začne trénovať, budeme sa preto musieť na neho dobre pripraviť. Ako na to?

Začnime pekne od začiatku, od maličkostí. Malo by byť jasné, že vôbec nezáleží na tom, akými číslami očíslujeme body na kružnici, dôležitá je len ich parita. Môžete si ich preto nahradiť krížikmi a krúžkami, alebo čiernymi a bielymi korálikmi, tak aby ste si ich vedeli čo najlepšie predstaviť. Taktiež nezáleží na presnej polohe bodov, iba na ich vzájomnom poradí. Keď ich poposúvame bez narušenia ich poradia, tak to nijako neovplyvní to, ktoré ich spojnice sa pretínajú. Odteraz preto budeme vždy predpokladať, že sú na kružnici rozmiestnené rovnomerne.

Na začiatku hry sa párne a nepárne body pravidelne striedajú, jedinou výnimkou sú susedné body 1 a N pre nepárne N. Teraz si ukážeme, ako túto pravidelnosť využiť. Zoberme si nejakú pozíciu s párnym počtom bodov (nie nutne pravidelnú), v ktorej ešte nie sú žiadne úsečky. Ku každému bodu potom vieme jednoznačne priradiť jemu protiľahlý bod. Povieme, že táto pozícia je symetrická, ak každé dva protiľahlé body majú rovnakú paritu. Naopak, pozícia je antisymetrická, ak každé dva protiľahlé body majú rôznu paritu. Predstavte si to tak, že zobrazením bodov v stredovej súmernosti cez stred kružnice sa symetrická pozícia zobrazí sama na seba, zatiaľčo antisymetrická sa zobrazí na sebe opačnú pozíciu. Skúste sa teraz chvíľku pohrať, možno sami prídete na nasledovné pozorovania. Budeme predpokladať, že ťaháme prví, Ondrej ide druhý.

Každá symetrická pozícia je vyhrávajúca. Stačí nám spojiť ľubovoľné dva protiľahlé body. Týmto sa nám hra rozpadne na dve súmerné polovice. Odteraz môžeme jednoducho opakovať po Ondrejovi. Keďže žiadna ďalšia úsečka nemôže pretínať prvú, tak každé dva spojené body budú patriť do tej istej polovice. Ak Ondrej spojí nejaké dva body rovnakej parity v jednej polovici, my spojíme im protiľahlé v druhej polovici. (Tieto majú tiež rovnakú paritu kvôli symetrii.) Po každom našom kroku bude celková herná situácia stredovo súmerná, preto ak Ondrej môže urobiť ťah v jednej polovici, my môžeme urobiť rovnaký ťah v druhej. To znamená, že takto nemôžeme nikdy prehrať. A keďže hra skončí po konečnom počte krokov, tak takto určite vyhráme.

Každá antisymetrická pozícia je prehrávajúca. Tentokrát môže Ondrej opakovať po nás. Predpokladajme, že na začiatku nášho ťahu sú doteraz nakreslené úsečky rozmiestnené stredovo súmerne. Buď nemáme žiaden možný ťah a prehrávame, alebo môžeme spojiť nejaké dva body A a B. Tieto body určite nie sú protiľahlé, lebo každé dva protiľahlé body majú podľa predpokladu rôznu paritu. To znamená, že ich spojnica AB neprechádza stredom kružnice. Pozrime sa na im protiľahlé body A' a B'. Keďže A a B mali rovnakú paritu, tak A' a B' majú tiež rovnakú paritu. Úsečka $A'B'$ je obrazom úsečky AB v stredovej súmernosti cez stred kružnice a AB týmto stredom neprechádza, preto $A'B'$ nepretína AB. Takisto $A'B'$ nepretína žiadnu z predošlých úsečiek, lebo ani AB nepretína žiadnu z nich a pred naším ťahom bola situácia stredovo súmerná. To znamená, že Ondrej môže podľa pravidiel spojiť A' a B' a tým súmernosť obnoviť. Takto si zaručí, že bude môcť vždy potiahnuť, a vyhrá.

No a už sme skoro na konci. Uvedomte si, že počiatočné pozície pre N tvaru $4k$ sú symetrické a pre N tvaru $4k+2$ antisymetrické. Ostáva nám už len vyšetriť nepárne N.
Nech $N = 4k+1$. Pre $N = 1$ máme prehrávajúcu pozíciu. Pre väčšie N spojme body N a $N-2$, ktoré sú oba nepárne. Žiadny z bodov $N-2$, $N-1$ a N sa už nebude dať použiť, môžeme ich kľudne vymazať bez ovplyvnenia budúcich ťahov. Ondrejovi ostanú body $1, 2, \cdots, N-3$, ktoré tvoria prehrávajúcu pozíciu. Vyhráme my.
Pri $N = 4k+3$ spojme body $2k+1$ a $2k+3$, oba nepárne. Podobne ako v predošlom prípade, body $2k+1$, $2k+2$ a $2k+3$ môžeme teraz vymazať bez ovplyvnenia budúcich ťahov. Ostáva nám $4k$ bodov, pozor však, ich parita sa nestrieda tak ako pre $N = 4k$. V skutočnosti je výsledná pozícia antisymetrická (nakreslite si!), a teda prehrávajúca. Opäť vyhráme my.
Zhrnutie na záver: prvý hráč vyhrá práve vtedy, keď $N > 1$ a N nie je tvaru $4k+2$.
A pokiaľ aj vy hráte *hru*, tak ste práve prehrali:)

Úloha č. 12: *Špeciálne egyptské číslo je také prirodzené číslo, ktoré sa dá napísať ako súčet nie nutne rôznych prirodzených čísel so súčtom prevrátených hodnôt rovným* 1. *Napríklad* $32 = 2+3+9+18$ *a zároveň* $1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1$.
a) Dokážte, že existuje číslo N také, že všetky od neho väčšie prirodzené čísla sú špeciálne egyptské čísla.
b) Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú špeciálne egyptské. V riešení môžte využiť aj počítač, ak tak ale spravíte, musíte dokázať správnosť použitého programu.

Riešenie: (opravovali Ondráč a Edo)
Najprv si ukážeme jeden veľmi poučný princíp na riešenie mnohých diofantických rovníc. Majme kladné racionálne číslo q, prirodzené číslo m a hľadáme prirodzené riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m} = q.$$

Ako by ste postupovali ak by som vám zadal nejaké konkrétne q a m? Skúste si napr. $q = 1/2$ a $m = 3$. Všeobecný postup je nasledovný. Ak by všetky zlomky $1/a_i$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ boli menšie ako q/m, tak rovnosť určite nenastáva. Čiže aspoň pre jedno i platí $1/a_i \geq q/m$. Vzhľadom na symetrickosť rovnice nech $i = m$. Toto nám však povie, že $a_m \leq m/q$, teda $a_m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor m/q \rfloor\}$. To je však konečný počet možností a tak vieme rovnicu riešiť nasledovne. Pre každé $a_m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor m/q \rfloor\}$ vyriešime rovnicu s neznámymi $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ tvaru

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{m-1}} = q - \frac{1}{a_m}.$$

To je opäť rovnica tvaru ako sme mali na začiatku ale má o jednu neznámu menej. Keď sme si vyberali $i = m$, mohli sme si dokonca povedať, že a_m bude najmenšie zo všetkých čísel a_i a tak pri riešení tejto podúlohy s konkrétnym a_m môžeme predpokladať, že $a_i \geq a_m$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Takto sa nám úloha bude vetviť ale v každej vetve časom dôjdeme až na rovnicu o jednej neznámej tvaru

$$\frac{1}{a_1} = q - \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_{m-1}} - \cdots - \frac{1}{a_2}.$$

Tá má zrejme riešenie práve vtedy ak pravá strana je prevrátená hodnota nejakého prirodzeného čísla čo veľmi ľahko skontrolujeme. Riešenia pôvodnej rovnice tvoria všetky permutácie riešení, ktoré týmto algoritmom dostaneme.
Ukážka: Nech $m = 3$ a $q = 3/2$, hľadáme prirodzené riešenia

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{3}{2}\cdot$$

Nech a_3 je najmenšie z čísel a_1, a_2, a_3. Potom môže byť najviac $m/q = 2$. Rozoberieme dva prípady:

- $a_3 = 1$. Potom riešime rovnicu
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2}\cdot$$
Nech a_2 nie je väčšie ako a_1. Potom môže byť najviac $2/(1/2) = 4$. Rozobereme prípady $a_2 = 1, 2, 3, 4$ a zistíme, kedy vieme dorátať prirodzené a_1. Výde to práve pre $a_2 = 3$ a $a_2 = 4$, čím dostaneme riešenia $(6, 3, 1)$ a $(4, 4, 1)$.

- $a_3 = 2$. Teraz musí platiť $a_1, a_2 \geq 2$. Navyše a_2 môže byť najviac $2/1 = 2$, čiže $a_2 = 2$ a z toho máme rovno $a_1 = 2$, čiže aj $(2, 2, 2)$ je riešenie.

Vyzbrojení takýmto aparátom sa hravo môžeme pustiť do danej úlohy. Skúmajme najprv len také m-tice prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$, ktorých súčet obrátených hodnôt je 1. Pre konkrétne m je takých m-tíc len konečne veľa (vyplýva z postupu čo sme si popísali), takže vám nerobí problém nájsť všetky pre malé m. Nech teraz máme

ŠEČ (špeciálne egyptské číslo) n také, že $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Použitím Cauchyho nerovnosti (alebo nerovnosti medzi harmonickým a aritmetickým priemerom) dostaneme

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}\right) \geq m^2$$

čo po nahradení prvej zátvorky číslom n a druhej jednotkou tvrdí $n \geq m^2$. Preto ak preveríme napríklad $m = 1, 2, 3, 4$, tak určite dostaneme všetky ŠEČ do 25 a tie čísla čo nedostaneme nebudú ŠEČ. Urobte to. Mali by ste zistiť, že ŠEČ do 25 sú

$$1, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 25.$$

Vidíme, že ani také veľké číslo ako 23 nie je ŠEČ. Zdá sa však, že všetky väčšie už sú. Rôznymi trikmi sa vám podarilo poprichádzať na to, že ďalších mnoho (cca 30) čísel sú ŠEČ. To začína byť celkom dobrý základ pre nejaký indukčný dôkaz, že všetky ďalšie čísla (počnúc 24) sú ŠEČ. Ale ako spraviť druhý indukčný krok? Majme nejaké ŠEČ $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Potom $2n = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_m$ ale

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_m} = \frac{1}{2}.$$

Pričítaním $1/2$ k obom stranám dostávame

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_m} + \frac{1}{2} = 1.$$

Teda $2n+2 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_m + 2$ je ŠEČ. Analogicky dostaneme pre $2n+9 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_m + 3 + 6$, že

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_m} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Teraz stačí, ak ukážeme, že čísla $24, 25, 26, \ldots, 56$ sú ŠEČ a môžeme to pre zvyšné dokázať indukciou. Formálne: Nech $24, 25, 26, \ldots, k$ sú ŠEČ pričom $k \geq 56$. Potom ak k je párne, tak $(k-2)/2 \geq 24$ je ŠEČ a teda aj k je ŠEČ. Ak k je nepárne, potom $(k-9)/2 \geq 24$ je ŠEČ, teda aj k je ŠEČ.
Tým sme dokončili obe časti, teda vieme presne ktoré čísla sú ŠEČ a ktoré nie. Bol to trochu náročnejší príklad čo sa týka rozoberania, ale aj také sa treba naučiť riešiť. :)

Úloha č. 13: *Trojuholník ABC má strany dĺžky a, b a c. Trojuholník $A'B'C'$ má strany dĺžky $a + b/2$, $b + c/2$ a $c + a/2$. Dokážte, že obsah trojuholníka $A'B'C'$ je aspoň $9/4$ obsahu trojuholníka ABC.*

Riešenie: (opravovala Hanka)
Strany trojuholníka $A'B'C'$ označme a', b', c' ($a' = a + b/2$, $b' = b + c/2$, $c' = c + a/2$). Ďalej nech

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \qquad s' = \frac{a'+b'+c'}{2} = \frac{3}{4}(a+b+c)$$

Vyjadrime si obsahy trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ pomocou Herónovho vzorca. Obsah trojuholníka ABC potom bude

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(-a+b+c)}{2}\frac{(a-b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}}.$$

Podobne pre obsah trojuholníka $A'B'C'$ platí

$$S_{\triangle A'B'C'} = \sqrt{\frac{3}{4}(a+b+c)\frac{(3a+c-b)}{4}\frac{(3b+a-c)}{4}\frac{(3b+a-c)}{4}}.$$

Teraz môžeme skúsiť buď bezhlavo do toho „búšiť“ a utopiť sa v úpravách alebo si spomenúť na trik, ktorý nám zvykne takéto „trojuholníkovo-obsahové“ zápisy zjednodušiť. Áno, je to klasická trojuholníková substitúcia. Vpísanú kružnica trojuholníka ABC rozdelí jeho strany na úseky, ktoré si označme x, y, z. Nech platí $a = y + z$, $b = x + z$ a $c = x + y$. Pre obsah trojuholníka ABC dostaneme

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(x+y+z)xyz}\,.$$

Pre obsah trojuholníka $A'B'C'$ dostaneme

$$S_{\triangle A'B'C'} = \sqrt{\frac{3(x+y+z)}{2}\frac{(2y+z)}{2}\frac{(2z+x)}{2}\frac{(2x+y)}{2}}\,.$$

Chceme dokázať takúto nerovnosť:

$$\sqrt{\frac{3(x+y+z)}{2}\frac{(2y+z)}{2}\frac{(2z+x)}{2}\frac{(2x+y)}{2}} \geq \frac{9}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz}\,.$$

Po umocnení a jednoduchých úpravách dostaneme

$$(2y+z)(2z+x)(2x+y) \geq 27xyz\,.$$

Ak to z tohoto tvaru ešte neviete doklepnúť, stačí roznásobiť a poupravovať na

$$2zy^2+2yx^2+2xz^2+xy^2+yz^2+zx^2 \geq 9xyz\,.$$

Toto tvrdenie (samozrejme ekvivalentné s tým čo chceme dokázať, lebo sme robili úpravy zachovávajúce znamienko) sa už dá dostať priamo z AG nerovnosti:

$$\begin{aligned} 2zy^2+2yx^2+2xz^2 = 6\left(\frac{zy^2+yx^2+xz^2}{3}\right) &\geq 6\sqrt[3]{(zy^2)(yx^2)(xz^2)} = 6xyz,\\ xy^2+yz^2+zx^2 = 3\left(\frac{xy^2+yz^2+zx^2}{3}\right) &\geq 3\sqrt[3]{(xy^2)(yz^2)(zx^2)} = 3xyz. \end{aligned}$$

Tým sme nerovnosť pre trojuholníky dokázali. Howgh!

Úloha č. 14: *Nájdi všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ktoré pre každé reálne x, y spĺňajú vzťah*

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy).$$

Riešenie: (opravoval Feráč)
Ako to už s funkcionálnymi rovnicami býva zvykom, aj táto má len triviálne (dokonca konštantné) riešenia. Dokázať však, že toto sú naozaj všetky, už také jednoduché nie je. Ako začať? Skúsme najprv vyšetriť, kedy môže naša funkcia nadobúdať nulové hodnoty. Týmto sa neskôr vyhneme možným problémom s delením. Predpokladajme, že existuje $a\in\mathbb{R}$ také, že $f(a)=0$. Dosadením $y=a$ do zadanej rovnice dostaneme

$$f(x+a) = f(x)f(a)f(xa) = 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Z čoho ihneď usudzujeme, že $f(t)=0$ pre všetky t, čo je jedno z riešení našej rovnice.
Odteraz môžeme predpokladať, že f nikde nenadobúda hodnotu 0. Teraz prichádza na rad kľúčový trik v riešení, a tým je vyjadriť $f(2+x)$ dvomi rôznymi spôsobmi.

$$\begin{aligned} f(2+x) &= f(1+(1+x))\\ &= f(1)f(1+x)f(1+x)\\ &= f(1)f(1+x)^2\\ &= f(1)[f(1)f(x)f(x)]^2\\ &= f(1)^3f(x)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2+x) &= f(2)f(x)f(2x)\\ &= f(1+1)f(x)f(x+x)\\ &= [f(1)f(1)f(1)]f(x)[f(x)f(x)f(x^2)]\\ &= f(1)^3f(x)^3f(x^2) \end{aligned}$$

Porovnaním týchto výrazov dostávame $f(x)=f(x^2)$ pre všetky x. Z tohto vyplýva, že f je nevyhnutne párna funkcia, pretože $f(-x)=f((-x)^2)=f(x^2)=f(x)$. Na záver položme $y=-x$ do pôvodnej rovnice.

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x)f(-x)f(-x^2)\\ f(0) &= f(x)f(x)f(x^2)\\ f(0) &= f(x)^3\\ \sqrt[3]{f(0)} &= f(x) \end{aligned}$$

Čiže f je konštantá funkcia. Poľahky overíme, že $f(x)=c$ je riešením práve vtedy, keď c je -1, 0 alebo 1.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	6	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Bosák Radomír	3.	Gamča BA	3	0	9	9	9	9	9				45	45
1.	Hagara Michal	2.	GJH BA	5	1		9	9	9	9	9	3		45	45
1.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	10	6			9	9	9	9	9		45	45
1.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	10	9			9	9	9	9	9		45	45
6.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	8	1		9	8	9	9	5	9		44	44
7.	Karásková Natália	2.	Gamča BA	6	1		9	8	9	8	9			43	43
7.	Komárková Zuzana	3.	Brno ČR	5	1		7	9	9	9	9			43	43
7.	Šormová Hana	3.	Brno ČR	4	0		9	9	7	9	9			43	43
10.	Bachratý Martin	2.	GVO ZA	6	1		9	8	9	7		7		40	40
10.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	3	0	9	9	9	9	4				40	40
10.	Liščinský Miroslav	3.	GAlej KE	8	2		9	9	9	6	7			40	40
10.	Říha Samuel	3.	Brno ČR	5	3			9	9	8	9	5		40	40
14.	Hajdin Michal	3.	GJH BA	5	0	9	9		9	5	7			39	39
14.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	6	1		8	9	9	4	9	1		39	39
14.	Simanová Lucia	4.	Gamča BA	9	3			9	9	9	9	3		39	39
14.	Sládek Filip	2.	GAB NO	3	1	9	9	9	3	9	9	0		39	39
18.	Jursa Jakub	3.	GAlej KE	9	3			9	9	8	9	3		38	38
18.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	9	3			9	9	9	6	5		38	38
20.	Szilágyiová Adriana	4.	GPoš KE	7	2		9	8	9	4	7			37	37
21.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN	4	1		9		9	9		9		36	36
21.	Peitl Tomáš	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	9		9	9			36	36
21.	Spišiak Michal	3.	Gamča BA	7	5			9	9	9	9			36	36
21.	Starovská Mária	4.	Gamča BA	12	5			9	9	9	9			36	36
21.	Tkadlec Josef	3.	Praha ČR	4	1	9	9	3	6	9	9			36	36
26.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	6	1		8	9	7	7	4			35	35
26.	Juríková Katarína	4.	GJGT BB	9	3			9	8	9	9			35	35
26.	Polačko Martin	3.	GAlej KE	9	3			9	7	9	7	3		35	35
29.	Hujer Peter	3.	GPár NR	4	0	9	9	8	8					34	34
29.	Töpfer Jakub	3.	Praha ČR	3	0	9	9		2	6	8			34	34
31.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	11	7			8	8	9	8			33	33
31.	Herencsár Albert	3.	Gmaď GA	6	1		9	3	5	8	8			33	33
31.	Jakubík Jozef	4.	GKom PE	10	4			8	9	9	7	0		33	33
31.	Popovič Viktor	2.	GJAR PO	6	2		9	8	3	4	9			33	33
35.	Kočiský Tomáš	4.	Gamča BA	8	4			8	7	9	8	0		32	32
35.	Uhrík Jakub	3.	Gamča BA	5	0	9	9	4		9		1		32	32
37.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	5	2		4		9	9	9			31	31
37.	Kopf Matúš	2.	Opava ČR	5	1		9	4	9	5	4			31	31
37.	Kuzma Tomáš	3.	GAlej KE	9	3			8	9	6	8			31	31
37.	Petrucha Michal	3.	GMet BA	7	2			8	9	8	6			31	31
41.	Cocuľová Zuzana	2.	GPoš KE	5	0	8	9		2	5	6			30	30
41.	Eiben Eduard	3.	GPoš KE	7	3			8	9	9	3	1		30	30
41.	Haas Emil	3.	Gamča BA	7	1		9	9	7	5				30	30
41.	Hojčka Michal	3.	GKom PE	8	4			3	8	9	9	1		30	30
41.	Kieferová Mária	3.	GsvFA ZA	4	0	9	7	3	8	3				30	30
41.	Kossaczký Igor	3.	Gamča BA	3	0	2	7	8	9	4				30	30
41.	Rizman Tomáš	3.	GVar ZA	6	1		9	8	6	7				30	30
48.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	4	0	9	9	9		1	1			29	29
48.	Rudolfová Barbora	2.	GMet BA	4	0	9	9	8		2	1			29	29
50.	Floriánová Michaela	2.	Gamča BA	6	0	9	6	1	7	5	1			28	28
50.	Majdiš Mojmír	2.	GPOH DK	4	0	9	9		9		1			28	28
52.	Matejovičová Lenka	3.	GJH BA	10	5			6	8	4	9	0		27	27

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	**$\sum$**
52.	Ziman Michal	2.	GBST LC	5	0	6	9	3	9			0		27	27
54.	Midlik Adam	2.	GJAR PO	3	0	9	9		8					26	26
54.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	3	0	6	9	9	1	1				26	26
54.	Štyráková Kamila	2.	GPOH DK	5	0	9	9	0	6	1	1			26	26
57.	Kořínková Marta	2.	Gamča BA	4	0	7	9	8						24	24
58.	Bogár Ján	2.	GĽŠ TN	5	1		9	0	9	4		1		23	23
59.	Kováč Jakub	3.	GCM NR	3	0	2	7		6	4		3		22	22
60.	Hudec Vladimír	3.	GVar ZA	6	1		9	8		4				21	21
61.	Babiarová Dana	3.	GJab MY	4	0	9	9	1			1			20	20
61.	Fekiač Jozef	3.	Gamča BA	6	1		8		5	7				20	20
63.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2	0	6	8	3			2			19	19
64.	Lešková Andrea	2.	G Lipany	5	0	8	9				1			18	18
64.	Porembová Alexandra	2.	BiG Sučany	5	1		9		9					18	18
64.	Rigdová Emília	2.	GKuk PP	5	1		8		7		3			18	18
67.	Kuklišová Nina	3.	GMet BA	7	1		8	3	1	4	1			17	17
68.	Baxová Katarína	3.	GĽŠ TN	3	0			8	6	1				15	15
68.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	4	0		7	1	0	0	7	0		15	15
70.	Hašík Juraj	2.	Gamča BA	5	0	4			9					13	13
71.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	3	0	1		0			1			2	2
72.	Kapustová Katarína	3.	GJGT BB	4	0						1			1	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
1.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	9		45
1.	Le Tuan Anh	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	9		45
1.	Šormanová Mária	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9	9			45
4.	Benčík Štefan	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9	9	9	9			43
4.	Csiba Dominik	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9	9	9	9			43
4.	Večerík Matej	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9	9	9	9			43
7.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1	7	7	9	8	9	9			42
7.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1	7	9	9	8	2	9	0		42
9.	Dresslerová Anna	1.	GJH BA	1	9	7	9	8	8				41
9.	Hlavatá Martina	1.	Gamča BA	3			9	9	6	9	8		41
11.	Buchman Marek	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	5	9	7			39
12.	Hajdinová Katarína	1.	GJH BA	2		9	9		9	9	2		38
12.	Sabadovičová Linda	1.	GJH BA	2		6	9	5	9	9			38
14.	Madáč Juraj	1.	GJH BA	1	8	7	9	8	3	3	1		35
14.	Phuong Mariana	1.	GJH BA	2		7	9	1	9	9			35
16.	Páleník Juraj	1.	ŠPMNDG BA	2		6	9	9	6	3			33
17.	Mojžišová Hana	1.	GJH BA	2		7	9	5	9	2			32
17.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	3			3	5	6	9	9		32
19.	Ďurikovičová Lucia	1.	GsvU BA	1	7	8	5	1	2	9	0		31
20.	Kubincová Petra	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9		9	4			29
21.	Bosák Radomír	3.	Gamča BA	3					9	9	9		27
22.	Kozák Andrej	1.	Gamča BA	3			9		6	2	9		26
23.	Masár Juraj	1.	GBil BA	2		6	3	7	6	3			25
24.	Heželyová Slávka	1.	ŠPMNDG BA	1	8	7	8		0				23
25.	Kossaczký Igor	3.	Gamča BA	3					2	7	8		17
26.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA	2				3		8	1		12

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Kováč Ondrej	1.	GCM NR	2		7	9	9	9	9	8		44
2.	Jakubík Ján	1.	SPŠE PN	2		7	9	9	5	8			38
3.	Dižová Andrea	1.	GKom PE	2		9	9	9	9				36
4.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2		3	9	5	6	8	3		31
5.	Horváthová Zuzana	1.	G Sereď	1	5	5	9	5	3	5	1		29
6.	Leššová Lívia	1.	GPár NR	2		7	9	5	2				23
7.	Štrbová Silvia	1.	GPár NR	3		3	9	5	0		1		15
8.	Kováč Jakub	3.	GCM NR	3					2	7			9
9.	Baxová Katarína	3.	GĽŠ TN	3							8		8

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Filip	2.	GAB NO	3			9	9	9	9	9		45
2.	Ječmen Matej	1.	GVar ZA	2		7	9	9	9	9			43
2.	Lešková Katarína	1.	BiG Sučany	2		9	9	9	7	9			43
4.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	2		4	9	5	9	9			36
5.	Kubinová Mária	1.	GPOH DK	2		8	3	9		6			26
6.	Fodorová Jana	1.	GJGT BB	2		7	9			9			25
7.	Bohiniková Alžbeta	1.	GVar ZA	2		1	8	5	1	8	1		23
8.	Majerová Karolína	1.	GJCh BR	1		9	9	3			1		22
9.	Sabaka Peter	1.	GJCh BR	1	3	7	9	1			1		21
10.	Santer Jakub	1.	GMH Trstená	2		7	9			3			19
11.	Anderle Michal	1.	GBST LC	1	7		8	1			1		17
11.	Bačinská Lenka	2.	GŠkol PB	3			9	3		5			17
13.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	3			9	5	1		0		15
13.	Ľuba Martin	2.	GAB NO	2		3	9	3	0				15

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Rohár Pavol	2.	GAlej KE	3			9	1	7	2			19
2.	Midlik Adam	2.	GJAR PO	3					9	9			18

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	9			7			36
1.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	4			1	3		36
3.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN		9		7	7		91
4.	Hagara Michal	2.	GJH BA	9	3	0	1	7		60
5.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	9	9	7	7	7		112
6.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	9	1	0	1	1		69
7.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	5	9	7	7	7		109
8.	Sládek Filip	2.	GAB NO	9	0	0	1	3		51
9.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	9	9	7	7	7		114
10.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA				0			0