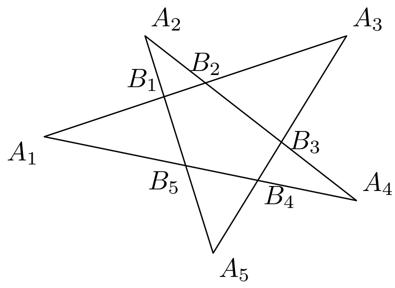
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série letnej časti 2007/2008

Úloha č. 1: *Aký je súčet uhlov v cípoch päťcípej hviezdy? Päťcípa hviezda je útvar ako na obrázku, pričom jej strany ani uhly nemusia byť rovnako dlhé.*

Riešenie: (opravovala Ivka)

(*Podľa Jána Hozzu.*) Na začiatok si nakreslíme pekný obrázok a označíme dôležité vrcholy a uhly. (Uhly pri vrcholoch $A_1, \dots, A_5$ označíme $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, uhly pri $B_1, \dots, B_5$ označíme $\beta_1, \dots, \beta_5$.) Zo školy vieme, že súčet vnútorných uhlov ľubovolného trojuholníka je $180°$. Podobne súčet vnútorných uhlov päťuholníka je $540°$. (Overte si to.) Z toho, že α_1, α_3. β_4 sú vnútorné uhly trojuholníka $A_1A_3B_4$ dostávame rovnosť $\alpha_1+\alpha_3+\beta_4 = 180°$. Aké ďalšie trojuholníky máme na našom obrázku? Napríklad tie tvorené dvoma vrcholmi päťcípej hviezdy (nie susednými) a jedným vrcholom päťuholníka $B_1B_2B_3B_4B_5$. Pre každý trojuholník máme jednu rovnosť. (Súčet veľkostí vnútorných uhlov je $180°$.) Keď týchto päť rovností sčítame, dostávame



$$2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) = 900°.$$

Päťuholník $B_1B_2B_3B_4B_5$ má súčet vnútorných uhlov $540°$, čiže $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5 = 540°$. Z toho už dostávame $2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = 360°$ a tak súčet uhlov v cípoch päťcípej hviezdy je $180°$.

Úloha č. 2: *Nájdite šesťciferné číslo, ktoré končí číslicou 6 a keď túto číslicu presunieme na začiatok, dostaneme štvornásobok pôvodného čísla.*

Riešenie: (opravovala Katka M.)

Táto úloha nebola ťažká. Všetci ste ju zvládli a riešili ste ju rôznymi spôsobmi. Príklad sa dal riešiť pomocou obyčajného násobenia, kde ste postupne dostali všetky cifry hľadaného čísla.[1] Vo vzorovom riešení si však ukážeme elegantnejší postup z ktorého ihneď dostaneme výsledok :).

Vieme, že naše hľadané číslo má 6 cifier a že končí číslicou 6. Číslo, ktoré dostaneme odobratím šestky (teda pozostáva len z prvých piatich cifier), označme p. V desiatkovom zápise má potom hľadané číslo tvar $10p + 6$. Štvornásobok tohoto čísla je jednak $4 \cdot (10p + 6)$, ale zároveň je to číslo, ktoré dostaneme premiestnením čifry 6 v hľadanom čísle. Uvedomme si, že to je vlastne p spolu s cifrou 6 na začiatku, čiže $600\,000 + p$. Štvornásobok hľadaného čísla máme vyjadrený dvoma spôsobmi, tak ich môžeme porovnať:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (10p + 6) &= 600\,000 + 6p, \\ 39p &= 59976, \\ p &= 15\,384. \end{aligned}$$

Jediné číslo, ktoré môže vyhovovať, je preto $153\,846$. Úplne správne riešenie musí obsahovať aj skúšku správnosti: $153\,846 \cdot 4 = 615\,384$. Hľadané číslo je $153\,846$. To je na dnes všetko. Do skakavenia, priatelia...

Úloha č. 3: *Na sústredení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústredením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.*

Riešenie: (opravoval Kaja, Hanka)

Na vyriešení tejto úlohy stačila jednoduchá úvaha o počte ľudí v skupinkách. Úlohu budeme riešiť sporom. Inak povedané, budeme predpokladať, že také rozdelenie existuje a pomocou neho dokážeme niečo, čo nemôže platiť. Predstavme si, že by sa účastníci dali rozdeliť na tie dve neprázdne skupiny. Ako by vyzerali? Každý účastník pozná 16 ďalších účastníkov, ktorý nutne musia byť v skupine s ním. Preto v oboch skupinách musí byť aspoň 17 účastníkov. Keďže skupiny sú dve, spolu obsahujú aspoň $2 \cdot 17 = 34$ účastníkov. To je však spor, pretože vieme, že účastníkov je práve 32. Tým sme dokázali, že sa účastníci nevedia rozdeliť na dve neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.

[1] Každú cifru označíme nejakým písmenkom a roznásobíme rovnosť v tvare $4(100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 6) = 600000 + 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$.

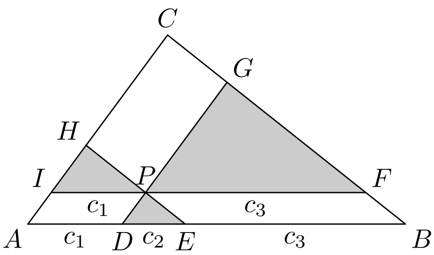
<u>**Úloha č. 4:**</u> *Dokážte, že ak a, b, c sú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka, pričom c je dĺžka prepony, potom pre všetky prirodzené čísla $k > 2$ platí:*
a) $a^3 + b^3 < c^3$,
b) $a^k + b^k < c^k$.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Rasťo a Zuzka)
Dokážeme časť b) a tým bude dokázaná aj časť a). Na začiatok si uvedomme niekoľko vecí. Keďže a, b, c sú strany pravouhlého trojuholníka, tak pre ne platí Pytagorova veta, ktorá hovorí, že $a^2 + b^2 = c^2$. Strana c je prepona, a preto je najdlhšia z nich ($a < c$, $b < c$).
Po prenásobení Pytagorovej vety výrazom c^{k-2} dostaneme rovnosť $a^2c^{k-2} + b^2c^{k-2} = c^k$. Vieme, že $a < c$, čiže $a^k < a^2c^{k-2}$, lebo to sme len nahradili všetky výskyty c vpravo menším a vľavo. (Využívame pri tom, že $k - 2$ je kladné, inak by c mohli byť aj v menovateli a predchádzajúci dôvod by neplatil.) Rovnako dostaneme aj nerovnosť $b^k < b^2c^{k-2}$. Sčítaním posledných dvoch nerovností získame výslednú nerovnosť $a^k + b^k < a^2c^{k-2} + b^2c^{k-2} = c^k$, čiže $a^k + b^k < c^k$.

<u>Poznámka:</u> Ak sa vám prenásobenie Pytagorovej vety výrazom c^{k-2} zdá príliš trikové a neprirodzené, môžete postupovať aj indukciou vzhľadom na k. Skúste si premyslieť ako z $a^k + b^k < c^k$ dostanete $a^{k+1} + b^{k+1} < c^{k+1}$.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC. Zostrojme úsečky rovnobežné so stranami trojuholníka prechádzajúce bodom P. Obsahy troch trojuholníkov, ktoré nám týmto vznikli, sú 4, 9 a 49. Aký je obsah trojuholníka ABC?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ika a Kubko)
Ako pri každej geometrii, aj tu začneme s pekným všeobecným obrázkom. V žiadnom prípade si nekreslíme trojuholník rovnoramenný alebo rovnostranný! Tie majú vlastnosti, ktoré by mohli narušiť všeobecnú platnosť riešenia, keby sme sa na ne spoľahli.



Všetky tri trojuholníky spolu s trojuholníkom ABC sú podobné (podľa vety uu), lebo ich prislúchajúce strany sú rovnobežné, a teda zvierajú aj zhodné uhly. Označme $|IP| = c_1$, $|DE| = c_2$ a $|PF| = c_3$. Štvoruholníky $ADPI$ a $EBFP$ sú rovnobežníky, preto $|AD| = c_1$ a $|EB| = c_3$, čiže $|AB| = c_1 + c_2 + c_3$. Nasleduje kľúčové pozorovanie, s ktorým úlohu hravo vyriešime. Majme dva podobné trojuholníky, povedzme IPH a DEP. Ich strany sú v pomere $c_1 : c_2$, preto aj ich výšky (myslíme výšku trojuholníka IPH z bodu H, označme ju v_1, a výšku trojuholníka DEP z bodu P, označme ju v_2). My ale vieme, že pre pomer obsahov S_{IPH} a S_{DEP} platí

$$\frac{9}{4} = \frac{S_{IPH}}{S_{DEP}} = \frac{2v_1c_1}{2v_2c_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}\,.$$

Podobne aj vo všeobecnosti je pravdivé tvrdenie: Pomer obsahov podobných trojuholníkov je druhá mocnina pomerov ich strán. Keďže obsahy trojuholníkov IPH, DEP a PFG sú v pomere $9 : 4 : 49$, tak pre ich prislúchajúce strany musí platiť $c_1 : c_2 : c_3 = 3 : 2 : 7$.
Od riešenia sme len kúsok. Pomer prislúchajúcich strán podobných trojuholníkov ABC a DEP je

$$\frac{c}{c_2} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} + 1 + \frac{c_3}{c_2} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{7}{2} = \frac{12}{2}\,.$$

Pomer obsahov trojuholníkov ABC a DEP preto (opäť využitím toho pozorovania) je $12^2 : 2^2 = 144 : 4$, čiže ABC má obsah 144. a to sme chceli zistiť, že?

<u>Iné riešenie:</u>
Dá sa použiť aj iný prístup. Rozdelíme trojuholník DEP na 4, trojuholník IPH na 9 a trojuholník PFG na 49 zhodných trojuholníčkov, deliace úsečky predĺžime a už len rátame malé zhodné trojuholníčky. :)

<u>**Úloha č. 6:**</u> *Označme si dve strany trojuholníka a, b a uhly oproti nim označme α, β. Ďalej označme v výšku na tretiu stranu tohto trojuholníka. Dokážte, že*
a) ak $\alpha + \beta = 90°$, *tak* $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$,
b) ak $|\alpha - \beta| = 90°$, *tak* $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ondro M. a Bebe)
a) Platí $\alpha + \beta = 90°$, preto je trojuholník ABC pravouhlý. Obsah tohto trojuholníka vieme vypočítať dvoma spôsobmi:

- $S_{ABC} = (ab)/2$, kde a a b sú odvesny tohoto trojuholíka.
- $S_{ABC} = (vc)/2$, kde v je výška na preponu c.

Z týchto dvoch vyjadrení obsahu toho istého trojuholníka dostávame rovnosť $a^2b^2 = c^2v^2$. Teraz môžeme využiť, že v pravouhlom trojuholníku platí $c^2 = a^2 + b^2$. (Pytagorova veta.) Po dosadení $a^2 + b^2$ za c^2 v prvej rovnosti dostávame $a^2b^2 = v^2a^2 + v^2b^2$. Po predelení obidvoch strán rovnosti výrazom $a^2b^2v^2$ dostaneme rovnosť

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

ktorá má presne taký tvar aký sme potrebovali.
b) Nech $\alpha > \beta$ potom $\alpha = \beta + 90°$. (V opačnom prípade by bol dôkaz veľmi podobný. Rozmyslite si to.) Označme C_0 pätu výšky na stranu AB. Trojuholník C_0AC je pravouhlý, navyše $|\sphericalangle CAB| = 90° + \beta$, preto $|\sphericalangle C_0CA| = \beta$. (Vidíte to vo vašom obrázku?)
Z pravouhlého trojuholníka BC_0C vidíme, že $\sin\beta = |C_0C|/|CB| = v/a$. Podobne z pravouhlého trojuholníka CC_0A dostávame $\cos\beta = |C_0C|/|CA| = v/b$.
Pre sínus a kosínus rovnakého uhla platí $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Po vyjadrení sínusu a kosínusu pomocou predchádzajúcich vzťahov dostávame

$$\frac{v^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Už sme ale skončili, pretože túto rovnosť stačí predeliť v^2 a zistíme, že platí

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2},$$

čo sme chceli dokázať.

Komentár: Prvá časť úlohy nebola ťažká, mnohí ste sa s ňou popasovali na výbornú. Pri riešení ste väčšinou využili Euklidove vety o výške a odvesne, ale išlo to aj bez nich. S druhou časťou bol väčší problém. Skúste si na domácu úlohu vyriešiť túto časť aj iným spôsobom. Všimnite si, že pri dôkaze vychádzame z nejakého pravdivého tvrdenia a postupne sa dopracujeme k tomu, čo chceme dokázať. To vám robilo problémy, väčšina z vás upravovala tvrdenie ktoré ste mali dokázať a úpravami ste sa dostali k nejakému pravdivému tvrdeniu. To ale nemusí byť vždy správny dôkaz.

Úloha č. 7: *Nech M je stred strany CD v rovnobežníku $ABCD$. Dokážte, že bod M leží na osi uhla BAD práve vtedy, keď je uhol AMB pravý.*

Riešenie: (opravovali Baja a ZuzkaC)
Keďže v zadaní bolo „práve vtedy, keď“, bolo treba dokázať dve implikácie. Prvou je: „Ak M leží na osi uhla BAD, potom je uhol AMB pravý“, a opačne: „Ak je uhol AMB pravý, potom bod M leží na osi uhla BAD“. Na toto mnohí z vás zabudli a dokázali len jedno tvrdenie.
Poďme na prvú časť dôkazu. Vychádzame z toho, že bod M leží na osi uhla BAD. Nakreslime si obrázok, to vždy pomôže :). Keďže polpriamka AM je osou uhla pri vrchole A, platí $|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle BAM|$, označme si ich α. Štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník, takže protiľahlé uhly má rovnaké a súčet všetkých je 360°. Z toho dostávame, že $|\sphericalangle ADM| = 180° - 2\alpha$ a $|\sphericalangle BCD| = 2\alpha$. Teraz môžeme v trojuholníku ADM dopočítať posledný uhol: $|\sphericalangle DMA| = 180° - (180° - 2\alpha) - \alpha = \alpha$. Vidíme, že trojuholník AMD je rovnoramenný, pretože platí $|\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle DAM|$. Z toho vyplýva, že $|AD| = |DM|$. Vieme, že M je stred strany DC, takže $|DM| = |MC|$. Napokon z vlastností rovnobežníka máme, že $|AD| = |BC|$. Keď dáme toto dokopy, dostávame $|AD| = |BC| = |DM| = |MC|$. Takže aj trojuholník BCM je rovnoramenný, so základňou MB. Uhly pri základni musia byť rovnaké a pretože poznáme uhol $|\sphericalangle MCB| = 2\alpha$, je ľahké ich dopočítať: $|\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle MBC| = 90° - \alpha$. Uhol DMC je priamy a jeho veľkosť vieme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AMD| + |\sphericalangle BMC| + |\sphericalangle AMB| &= 180°, \\ \alpha + 90° - \alpha + |\sphericalangle AMB| &= 180°, \\ |\sphericalangle AMB| &= 90°, \end{aligned}$$

a to sme chceli dokázať.
Teraz predpokladajme, že $|\sphericalangle AMB| = 90°$. Chceme ukázať, že M leží na osi uhla BAD. Označme si $|\sphericalangle BAM| = \alpha$. Všimnime si, že platí $|\sphericalangle AMD| = \alpha$, pretože je striedavý s uhlom BAM. Keďže trojuholník ABM je pravouhlý, bod M leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad AB. Ak stred strany AB označíme S, platí: $|AS| = |BS| = |MS|$. MS je spojnica stredov strán v rovnobežníku $ABCD$, preto je rovnobežná so stranami AD, BC a platí $|AD| = |MS|$. Dostávame, že $|AD| = |MS| = |AS| = |DM|$, trojuholník AMD je rovnoramenný. Odtiaľ $|\sphericalangle DAM| = |\sphericalangle AMD| = \alpha$, a preto $|\sphericalangle DAM| = |\sphericalangle MAN| = \alpha$. To ale znamená, že AM je osou uhla BAD. Tadááá, hotovo!

Poznámka: Ako to už v geometrii býva, existuje viacero riešení. (Napríklad aj cez sínusovú vetu :).)

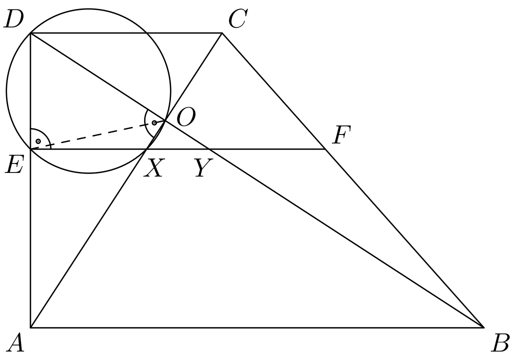
Úloha č. 8: *Do tabuľky s veľkosťou 22×22 vpíšeme čísla $1, 2, 3, \ldots, 22^2$, každé práve raz. Je pravda, že vždy vieme vybrať dvojicu políčok susediacich rohom alebo stranou tak, že súčet čísel vpísaných v týchto políčkach bude deliteľný 4?*

Riešenie: (opravoval Jaro)
Rôznymi spôsobmi sa dalo ukázať, že zadanie neklame. Uvedieme si ten použitý väčšinou z Vás.
Prvým dobrým nápadom bolo pamätať si z čísel len ich zvyšok po delení štvorkou. To jediné totiž potrebujeme, ak chceme zvyšok súčtu susedov po delení štvorkou. Nech $[i]$ značí ľubovoľné číslo so zvyškom i. (Napr. symbol $[1]$ označuje nejaké číslo so zvyškom 1.)
Druhým nápadom bolo skúsiť vyplniť menšie tabuľky po tom, ako sa nám nedarilo vyplniť tabuľku so záporným výsledkom na otázku v zadaní. Prevrovať všetky možné vyplnenia tabuľky 22×22 naozaj nie je dobrý nápad. (Mimochodom, je ich $\binom{22^2}{22\cdot 11}\binom{22\cdot 11}{11^2}$, ak nás zaujímajú len zvyšky po delení štyroma.)
Buď takto alebo skúsenosťou (so susednosťou v (ne)štvorčekových tabuľkách) sa dala odhaliť hlavná pointa. Tou bolo rozdeliť tabuľku na chlieviky 2×2. Pretože políčka chlievika susedia, dvakrát $[0]$ či $[2]$ v chlieviku by znamenalo hľadaný pár. Zostáva nám dať maximálne po jednej $[0]$ aj $[2]$ na chlievik. Keďže medzi číslami $1, 2, 3, \ldots, 22^2$ je 11^2 čísel každého zvyšku po delení štyrmi a máme aj 11^2 chlievikov, musí v každom byť práve jeden exemplár $[0]$ aj $[2]$. Ak nechceme mať zaraz dvojicu $[1]$ a $[3]$, musíme voľné miesta v chlievikoch dopĺňať buď dvoma jednotkami alebo dvoma trojkami. Pretože trojok máme toľko ako jednotiek, vyplníme oboma po rovnako veľa chlievikov. Tých je ale nepárny počet, teda aspoň jeden chlievik bude miešaný. A v ňom opäť nachádzame požadovanú dvojicu, čo sme chceli ukázať.

Poznámka: Uvedené tvrdenie platí pre tabuľku $n \times n$, práve keď je n tvarov $4k + 2$, $4k + 3$. Dôkaz pre nepárne rozmery je škaredší a výsledky sú trochu prevrátené (Pre $4k + 3$ máme párny počet chlievikov).

Úloha č. 9: *Majme lichobežník $ABCD$, v ktorom $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, uhol pri vrchole A je pravý, jeho uhlopriečky sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode O. Nech OE je os uhla AOD, pričom bod E je bod úsečky AD. Nech F je taký bod na BC, že $EF \parallel AB$. Dokážte, že $|EF| = |AD|$.*

Riešenie: (opravovala Erika)
Táto úloha je pekná v tom, že nemusíme dokresliť ani jednu čiaru do obrázka, aby sme prišli na riešenie. Jediné, čo je treba urobiť, je nakresliť si viacero lichobežníkov vyhovujúcich zadaniu a postrehnúť niekoľko spoločných vlastností.



Označme priesečníky priamky EF s uhlopriečkami AC, BD postupne X, Y. Dokážeme, že $|ED| = |EX|$ a $|AE| = |XF|$. Tým dokážeme aj rovnosť $|AD| = |EF|$, keďže $|AD| = |AE| + |ED|$, $|EF| = |EX| + |XF|$.
Na ukázanie rovnosti $|ED| = |EX|$ si stačí všimnúť, že štvoruholník $EXOD$ je tetivový, lebo súčet dvoch protiľahlých uhlov je $180°$. Naviac $|\sphericalangle XOE| = |\sphericalangle EOD| = 45°$, čiže tetivy EX, ED prislúchajúce k týmto dvom uhlom majú rovnakú dĺžku.
Ukázať druhú rovnosť $|AE| = |XF|$ bude o trošku zložitejšie. Využijeme pri tom skutočnosť, že trojuholníky EYD a EAX sú zhodné a fakt, že $|XF| = |EY|$. Dva uvedené trojuholníky sú zhodné podľa vety *usu*. Naozaj, $|\sphericalangle DEY| = |\sphericalangle XEA| = 90°$, $|ED| = |EX|$, a ľahko nahliadneme, že $|\sphericalangle DAO| = |\sphericalangle EYD|$ (sú doplnkami do pravého uhla k uhlu $|\sphericalangle ADY|$ v trojuholníkoch ADO, EYD). Zo zhodnosti týchto dvoch trojuholníkov vieme, že $|AE| = |EY|$. Teraz už len stačí dokázať, že $|EY| = |XF|$. Všimnime si trojuholníky ABD, ABC. Majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na túto stranu. Úsečky EY, XF sú ich priečky nachádzajúce sa v rovnakej výške, preto sú rovnako dlhé. Kto by neveril, stačí si uvedomiť, že koeficient k podobnosti trojuholníkov ABD a EYD je rovnaký ako koeficient podobnosti trojuholníkov ABC a XFC, na základe čoho nutne $|EY| = |XF| = k|AB|$. Takže $|AE| = |EY| = |XF|$, čo sme chceli ukázať.

Úloha č. 10: *Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že pre všetky $n \geq 2$ platí*

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n).$$

Riešenie: (opravoval Škrečok)
Poďme skúsiť nájsť nejakú funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá by vyhovolala podmienke zo zadania. Keďže

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \tag{1}$$

pre $n \geq 2$ a funkčná hodnota $f(f(n-1))$ je väčšia ako nula, dostávame, že $f(n+1) - f(n) > 0$. Takže pre $n \geq 2$ je f rastúca, pretože vtedy platí $f(n+1) > f(n)$.

Skúsme teraz zdola odhadnúť funkčnú hodnotu $f(n)$ pre $n \geq 2$ (o $f(1)$ sa nebudeme starať, pretože tam nemáme zaručenú rastúcosť f). Zrejme je $f(2) \geq 1$, pretože f je funkcia do prirodzených čísel. Vďaka rastúcosti je $f(3)$ väčšie ako $f(2) \geq 1$, takže $f(3) \geq 2$. Induktívne vieme postupovať ďalej ako

$$f(n) > f(n-1) > \cdots > f(2) \geq 1 \Rightarrow f(n) \geq n-1. \tag{2}$$

Dokazovať to nebudeme a nechávame to na matematickej-indukcie-chtivého čitateľa.
Dolný odhad $f(n) \geq n-1$ pre $n \geq 2$ by sme mali, skúsme pre zmenu odhadovať zhora. Vieme, že určite je $f(n) > 0$. Odtiaľ a z rovnice (1) dostávame, že pre $k \geq 2$ platí $f(f(k-1)) < f(k+1)$, pretože od $f(k+1)$ odčítavame kladnú hodnotu $f(k)$. Teraz môžeme opäť použiť rastúcosť funkcie f a „vykrátiť“ predchádzajúcu nerovnosť na $f(k-1) < k+1$ (rozmyslite si, prečo to tak môžeme urobiť). Máme už aj nejaký horný odhad, ak navyše zameníme $(k-1)$ za n, dostávame $f(n) < n+2$ pre všetky prirodzené n. To nám spolu s (2) dáva

$$n+2 > f(n) \geq n-1, \text{ pre } n \geq 2. \tag{3}$$

Keď sme už rozbehnutí v odhadovaní, odhadnime ešte rozdiel $f(n+1) - f(n)$ zhora pre $n \geq 2$. Z horného odhadu pre $f(n+1)$ a z dolného odhadu pre $f(n)$ máme

$$f(n+1) - f(n) < (n+3) - (n-1) = 4.$$

No a teraz sa už len stačí pozorne pozrieť na (1). Pre $n \geq 7$ je pravá strana menšia ako 4, kým ľavá strana je (podľa dolného odhadu pre $f(n)$) určite aspoň 4, lebo $f(f(n-1)) \geq f(n-1) - 1 \geq (n-2) - 1 = n-3 \geq 4$ pre $n \geq 7$. No ale to je, milí priatelia, spor. Funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spĺňajúca podmienku zo zadania neexistuje.

Poznámka: Určite si lámete hlavu nad tým, ako sa dalo prísť na ten spor. Stačí si všimnúť, že rozdiel $f(n+1)-f(n)$ na pravej strane rovnosti je aj pre veľké n menší ako 4. Zároveň na ľavej strane rovnosti máme nejakú funkčnú hodnotu, a o tej vieme, že rastie. Takže niekde sa to musí „prešvihnúť“ a rovnosť zo zadania niekde musí prestať platiť (to, že je to pri sedmičke, už zistíme poľahky).

Komentár: Veľa z vás urobilo po odvodení odhadu (3) alebo podobného, pomerne zásadnú chybu. Konkrétne že ak platí trebárs $n+2 > f(n) \geq n-1$, tak potom je $f(n) = n-1$ pre všetky n alebo je $f(n) = n$ pre všetky n alebo je $f(n) = n+1$ pre všetky n. To je zásadná chyba dokonca z dvoch dôvodov.
Prvý z nich je komplikovanejší, ale o to zásadnejší. Ten odhad *hovorí iba to*, že pre každé $n \geq 2$ platí buď $f(n) = n-1$ alebo $f(n) = n$ alebo $f(n) = n+1$ (pevne veríme, že cítite ten rozdiel). Takže stále to môže byť aj taká funkcia f, že $f(1) = 1$ a $f(n) = n+1$ pre $n > 1$. Funkcií vyhovujúcich odhadu existuje nekonečne veľa (nie iba tri). Dajú sa však pomerne jednoducho popísať, ak si uvedomíte, že f musí byť od dvojky rastúca.
Druhý dôvod je jednoduchší, totiž treba si uvedomiť, že ten náš odhad platí iba pre $n \geq 2$. V prípade takéhoto rozoberania „možných“ funkcií f treba potom venovať pozornosť aj tomu, aké môže byť $f(1)$, ak nechcete prísť o drahocenné bodíky…

Úloha č. 11: *Uvažujme mnohouholník s celočíselnými stranami taký, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé (nemusí byť konvexný). Dokážte, že ak ho vieme pokryť neprekrývajúcimi sa dominovými kockami veľkosti* 2×1 *umiestnenými rovnobežne s jeho stranami, tak aspoň jedna z jeho strán má párnu dĺžku.*

Riešenie: (opravoval Bus)
Stačí nám dokázať, že ak bude mať mnohouholník všetky strany nepárnej dĺžky, nebude sa dať pokryť dominovými kockami. Uvažujme takýto mnohouholník a rozdeľme si ho na štvorčeky veľkosti 1×1. Tie vyfarbime striedavo čiernou a bielou farbou tak, aby žiadne dva hranou susediace štvorčeky nemali rovnakú farbu. (Rovnako, ako políčka na šachovnici.) Aby sa dal mnohouholník pokryť dominovými kockami, musí obsahovať rovnako veľa čiernych a bielych políčok, pretože každá dominová kocka umiestnená rovnobežne s jeho stranami zaberie práve jedno čierne a jedno biele políčko. Toto platí dokonca aj v prípade, že dominová kocka nebude presne zarovnaná s našou štvorčekovou sieťou, ale posunutá o nejakú neceločíselnú vzdialenosť – bude sa síce prekrývať s viac ako dvoma štvorčekmi, ale celkový obsah prikrytej bielej časti bude rovnaký, ako obsah prikrytej čiernej časti, a to presne jedna.
Našim cieľom teraz bude ukázať, že čiernych a bielych políčok nemôže byť rovnako veľa. Pozrime sa bližšie na vrcholy nášho mnohouholníka. Konvexnými vrcholmi budeme nazývať tie vrcholy, pri ktorých je vnútorný uhol $90°$, a nekonvexnými tie, pri ktorých je vnútorný uhol mnohouholníka rovný $270°$. Všimnime si, že políčka pri konvexných vrcholoch sú všetky rovnakej farby – nech je to bez ujmy na všeobecnosti čierna – a pri nekonvexných vrcholoch sú vždy dve čierne a jedno biele políčko. Je tomu tak preto, lebo všetky strany nášho mnohouholníka sú nepárnej dĺžky, a teda ak aspoň jeden konvexný vrchol má pri sebe čierne políčko, musia aj susedné vrcholy mať jedno čierne políčko ak sú konvexné, resp. dve čierne políčka ak sú nekonvexné. To isté platí aj pre vrcholy susediace s týmito susednými vrcholmi, a tak ďalej, až pre všetky vrcholy mnohouholníka.
Uvažujme teraz mrežové body vo vnútri a na obvode mnohouholníka. (Mrežové body sú body, kde sa pretínajú vodorovné a zvislé čiary našej štvorčekovej siete, t.j. vrcholy čiernych a bielych štvorčekov. Napríklad každý vrchol mnohouholníka by mal byť zároveň mrežovým bodom.) Nech v je počet mrežových bodov vnútri mnohouholníka,

k počet konvexných vrcholov, n počet nekonvexných vrcholov a o počet ostatných mrežových bodov na obvode mnohouholníka. Každý vnútorný mrežový bod susedí s dvoma bielymi a dvoma čiernymi štvorčekmi, konvexný vrchol s jedným čiernym a žiadnymi bielymi štvorčekmi, nekonvexný vrchol s dvoma čiernymi a jedným bielym štvorčekom a ostatné obvodové mrežové body susedia vždy s jedným bielym a jedným čiernym štvorčekom. Celkový počet čiernych a bielych štvorčekov bude:

$$\begin{aligned} \text{počet bielych štvorčekov} &= 2v + n + o \\ \text{počet čiernych štvorčekov} &= 2v + k + 2n + o \end{aligned}$$

Určite vám ale neušlo, že takýmto spôsobom sme veľa štvorčekov započítali viackrát. Ak sa ale dobre zamyslíte, mali by ste si uvedomiť, že každý štvorček sme započítali presne štyrikrát – raz za každý jeho vrchol. Stačí horeuvedené počty vydeliť štyrmi a dostaneme správny výsledok. Čiernych políčok bude o $(k + n)/4 =$ (počet vrcholov)/4 viac ako bielych, čím je dôkaz ukončený. Mimochodom, z nášho výsledku tiež vyplýva, že počet vrcholov v pravouhlom mnohouholníku s nepárnymi dĺžkami strán je vždy deliteľný štyrmi.

Úloha č. 12: *Dokážte, že z ľubovoľnej množiny deviatich celých čísel vieme vždy vybrať rôzne čísla a, b, c a d tak, že číslo $a + b - c - d$ je deliteľné 20. Zistite, či to platí aj pre ľubovoľnú osemprvkovú množinu celých čísel.*

Riešenie: (opravovali Ondráč a Kuna)
Ak medzi tými deviatimi číslami existujú dve disjunktné dvojice $\{a, c\}$ a $\{b, d\}$ (spolu štyri rôzne čísla) také, že v každej dvojici majú obe čísla rovnaký zvyšok po delení 20, tak $a + b - c - d = (a - c) + (b - d)$ je deliteľné 20. Ak také dve dvojice neexistujú, znamená to, že medzi tými deviatimi číslami sa opakuje najviac jeden zvyšok po delení 20 a opakuje sa najviac trikrát. (Premysli si.) Teda tých deväť čísel obsahuje aspoň sedem rôznych zvyškov reprezentovaných siedmymi rôznymi číslami z deväťprvkovej množiny. Spomedzi týchto sedem čísel vieme vybrať $\binom{7}{2} = 21$ dvojíc, teda podľa Dirichletovho princípu nejaké dve rôzne dvojice $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ (tu slovo „rôzne“ znamená $\{a, b\} \neq \{c, d\}$, ale nemusí platiť $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$) také, že $a + b$ a $c + d$ majú rovnaké zvyšky po delení 20. Ak by tieto dvojice mali neprázdny prienik, teda BUNV $a = c$, potom b a d majú nutne rovnaký zvyšok po delení 20, preto $b = d$, čiže dvojice $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ sa rovanjú, čo je spor. Preto musia byť disjuktné: $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. Teraz však štvorica a, b, c, d dáva riešenie. Rozobrali sme všetky možnosti a prvú časť máme za sebou.
Čo sa pokazí ak by sme ten sitý postup chceli aplikovať na osemprvkovú množinu? Nefungoval by nám Dirichletov princíp, lebo $\binom{6}{2} = 15 < 20$. Tak skúsime nájsť protipríklad. Budeme mať sedem rôznych zvyškov po delení 20, pričom jeden, povedzme 0, sa zopakuje trikrát. Začneme číslami $0, 20, 40$. Po chvíľke hrania sa a skúšania, zvyšné čísla hravo doplníte, napr. $1, 2, 4, 7$ a 12. Na úplné riešenie však musíme ukázať, že z množiny $\{0, 20, 40, 1, 2, 4, 7, 12\}$ naozaj nejde vybrať štvoricu a, b, c, d akú by sme chceli. Rozobereme niekoľko možností:

- Ak by medzi číslami a, b, c, d boli 0, 20 aj 40, určite by $a + b - c - d$ nebolo deliteľné 20 (práve kvôli tomu štvrtému číslu).
- Ak by dve z čísel a, b, c, d boli deliteľné 20 a dve nie, tak by to znamenalo, že buď súčet, alebo rozdiel dvoch rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 4, 7, 12\}$ je deliteľný 20. Rozdiel hneď vylúčime a dostávame len súčty: 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19.
- Ak každé z čísel a, b, c, d má rôzny zvyšok po delení 20, tak to by znamenalo, že dve disjunktné dvojice čísel z množiny $\{0, 1, 2, 4, 7, 12\}$ majú rovnaký súčet modulo 20 (tu 0 reprezentuje jedno číslo z $\{0, 20, 40\}$). Dvojice ale dávajú 15 rôznych súčtov: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 19.

Rozobrali sme všetky možnosti a ukázali sme, že pre množinu $\{0, 20, 40, 1, 2, 4, 7, 12\}$ hľadané a, b, c, d neexistujú.

Úloha č. 13: *Dokážte, že existuje také číslo M, že pre každé prirodzené $m > M$ existujú $a, b, c \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí*

$$m^3 < a < b < c < (m + 1)^3,$$

a zároveň číslo abc je tretia mocnina prirodzeného čísla.

Riešenie: (opravovali Ondráč a Kuna)
S týmto príkladom ste si veľmi dobre poradili. Vo vašich riešeniach sa vyskytovali dva rôzne prístupy, jeden existenčný a druhý konštrukčný. Aby ste neboli o nič ukrátení, spomenieme si ich oba. :) *Prvé riešenie:* Budeme

využívať poznatok, že druhé mocniny rastú pomalšie ako tretie mocniny prirodzených čísel a preto pre dosť veľké m budú medzi číslami m^3 a $(m + 1)^3$ aspoň dve druhé mocniny k^2 a l^2, $k < l$. Ak sa nám toto podarí dokázať, potom stačí zvoliť $a = k^2$, $b = kl$ a $c = l^2$. Zrejme

$$m^3 < a < b < c < (m + 1)^3,$$

a $abc = (kl)^3$, čo sme chceli. Už len dokázať, že pre dosť veľké m existujú dve rôzne druhé mocniny medzi m^3 a $(m + 1)^3$. Na to nám stačí ukázať, že rozdiel odmocnín $(m + 1)^3$ a m^3 je väčší ako 2, čiže

$$(m + 1)^{3/2} - m^{3/2} > 2.$$

Pre $m \geq 5$ to dokážeme odhadom

$$(m+1)^{3/2} - m^{3/2} = (m+1)\sqrt{m+1} - m\sqrt{m} \geq (m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m} = \sqrt{m} > 2.$$

Z toho vieme, že pre $m \geq 5$ existujú dve rôzne prirodzené čísla k, l také, že

$$m^{3/2} < k < l < (m+1)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad m^3 < k^2 < l^2 < (m+1)^3.$$

Tým sme dokázali sme, že môžeme zvoliť $M = 4$.

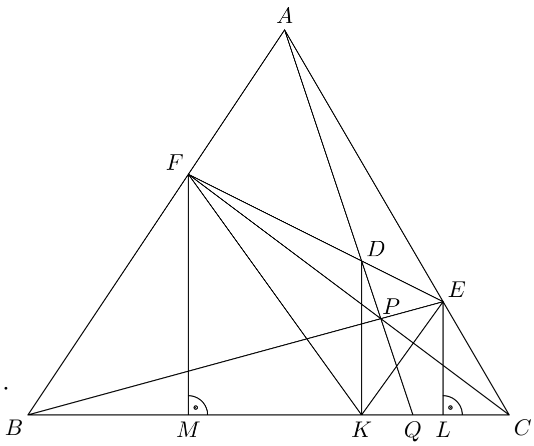
Druhé riešenie: Skúsime a, b, c vyjadriť ako nejaké jednoduché funkcie m. Aby nám sedeli nerovnosti, patrilo by sa, aby to boli nejaké polynómy tretieho stupňa od m. Po nejakom skúšaní ľahko objavíte trojicu

$$\begin{aligned} a &= (m-1)^2(m+3), \\ b &= (m-1)m(m+3), \\ c &= m^2(m+3). \end{aligned}$$

Súčin $abc = ((m-1)m(m+3))^3$ je tretia mocnina a podmienka $m^3 < a < b < c < (m+1)^3$ platí (ako sami určite zvládnete ukázať) pre $m \geq 5$, teda opäť stačí zvoliť $M = 4$.

Úloha č. 14: *V ostrouhlom trojuholníku ABC máme vnútorný bod P. Priamka BP pretína AC v bode E, priamka CP pretína AB v bode F a priamka AP pretína EF v bode D. Označme K pätu kolmice z bodu D na BC. Ukážte, že KD je os uhla EKF.*

Riešenie: (opravovala Hanka)



Päty kolmíc z bodov F a E na stranu BC označme M a L. Taktiež budeme potrebovať prienik priamok AP a AC, ktorý označme Q. Chceme dokázať, že KD je os uhla EKF. Stačí nám ukázať, že uhly $BKF = \alpha$ a $CKE = \beta$ sú rovnako veľké, čo je ekvivalentné s podmienkou $\tan\alpha = \tan\beta$. Teraz bude naša stratégia ukázať platnosť tohto tvrdenia pomocou toho, že si budeme postupne vyjadrovať iným spôsobom všetko čo si budeme vedieť vyjadriť a nakoniec nám to nečakane vyjde;) Z trojuholníkov FMK a ELK vieme

$$\tan\alpha = \frac{|FM|}{|MK|}, \quad \tan\beta = \frac{|EL|}{|KL|}.$$

Ďalej z trojuholníka BFM vieme vyjadriť $|FM| = |BF|\sin(|\sphericalangle ABC|)$. Podobne z trojuholníka ELC dostaneme $|EL| = |EC|\sin(|\sphericalangle ACB|)$. Keďže body K, L a M sú kolmé priemety bodov D, E a F, tak medzi nimi ostali zachované pomery vzdialeností, teda

$$\frac{|KM|}{|KL|} = \frac{|FD|}{|DE|}.$$

Takže zatiaľ sme zistili

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{|BF|\sin(|\sphericalangle ABC|)}{|EC|\sin(|\sphericalangle ACB|)} \cdot \frac{|DE|}{|FD|}. \tag{4}$$

Z Čevovej vety vieme o úsekoch BQ, QC, EC, EA, AF a BF, že sú v nasledovných pomeroch.

$$\frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{z}{y}, \quad \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{x}{z}, \quad \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{y}{x}$$

Potom pre dĺžky úsečiek BF a EC máme vyjadrenia

$$\begin{aligned} \frac{|BF|}{|AB|} &= \frac{x}{x+y} \quad &\Rightarrow \quad |BF| &= \frac{x}{x+y}|AB|, \\ \frac{|EC|}{|AC|} &= \frac{x}{x+z} \quad &\Rightarrow \quad |EC| &= \frac{x}{x+z}|AC|. \end{aligned}$$

Po dosadení do vzťahu (4) dostaneme

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x+z}{x+y} \cdot \frac{|AB|\sin(|\sphericalangle ABC|)}{|AC|\sin(|\sphericalangle ACB|)} \cdot \frac{|DE|}{|FD|}. \tag{5}$$

Zo vzťahov pre obsah trojuholníka ABC vidíme, že $|AC||BC|\sin(|\sphericalangle ACB|) = |AB||BC|\sin(|\sphericalangle ABC|)$, preto sa náš vzťah (5) zjednoduší na

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x+z}{x+y} \cdot \frac{|DE|}{|FD|}. \tag{6}$$

Toto vyzerá oveľa jednoduchšie ako na začiatku. Už to len doklepnúť `:)`. Chvíľu sa budeme zabávať s obsahmi, však to poznáte, Čevova a Menelaova veta tiež súvisia s pomermi a tiež sa dokazujú cez obsahy.
Takže vieme

$$\frac{|DE|}{|FD|} = \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PFD}} = \frac{S_{\triangle PEA}}{S_{\triangle PFA}}.$$

Ďalej z trojuholníka APB vyplýva

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle PFA}}{S_{\triangle PFB}} &= \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{y}{x}, \\ S_{\triangle PFA} &= S_{\triangle PBA}\frac{y}{x+y}. \end{aligned}$$

Analogicky dostaneme pre obsah trojuholníka PEA vzťah

$$S_{\triangle PEA} = S_{\triangle PCA}\frac{z}{x+z}.$$

Vzťah (6) vieme potom prepísať na vzťah

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{z}{y} \cdot \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PBA}}. \tag{7}$$

Už len nejako „prepojiť“ obsahy trojuholníkov ABP a ACP a máme to.

$$\frac{y}{z} = \frac{S_{\triangle ACQ}}{S_{\triangle ABQ}} = \frac{S_{\triangle PCQ}}{S_{\triangle PBQ}} = \frac{S_{\triangle ACQ} - S_{\triangle PCQ}}{S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle PBQ}} = \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle ABP}}$$

Takže vidíme, že daný vzťah (7) platí. Tým sme úlohu dokázali, Hanka môže ísť spať.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	6	1		9	9	9	9	9			45	90
1.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	10	9			9	9	9	9	9		45	90
3.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	8	1		9	9	9	7	7	9		43	87
4.	Komárková Zuzana	3.	Brno ČR	5	1		9	9	9	9	7			43	86
5.	Bachratý Martin	2.	GVO ZA	6	1		9	9	9	9	9			45	85
6.	Karásková Natália	2.	Gamča BA	6	1		9	9	9	9	5			41	84
6.	Sládek Filip	2.	GAB NO	3	1	9	9	9	9	9	9			45	84
8.	Hagara Michal	2.	GJH BA	5	1		9	9	9	1	9	0		37	82
9.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	10	6			9	9	9	7	2		36	81
9.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	6	1		9	9	8	9	7	2		42	81
9.	Starovská Mária	4.	Gamča BA	12	5			9	9	9	9	9		45	81
9.	Říha Samuel	3.	Brno ČR	5	3			9	9	9	7	7		41	81
13.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN	4	1		9	9	9	9	8			44	80
14.	Šormová Hana	3.	Brno ČR	4	0		8	9	9	6	4			36	79
15.	Bosák Radomír	3.	Gamča BA	4	0	9	9	5			7	2		32	77
16.	Tkadlec Josef	3.	Praha ČR	4	1		7	9	8	9	7			40	76
17.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	6	1		9	9	7	9	6			40	75
18.	Petrucha Michal	3.	GMet BA	7	2		9	9	9	9	4			40	71
18.	Spišiak Michal	3.	Gamča BA	7	5			8	9	9	9			35	71
20.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	11	7			8	9	9	9	2		37	70

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
20.	Liščinský Miroslav	3.	GAlej KE	8	2		9	9	9	2	1			30	70
22.	Eiben Eduard	3.	GPoš KE	7	3			9	9	9	7	5		39	69
22.	Hojčka Michal	3.	GKom PE	8	4			9	9	9	3	9		39	69
24.	Jakubík Jozef	4.	GKom PE	10	4			9	9	8	9	0		35	68
24.	Szilágyiová Adriana	4.	GPoš KE	7	2		9	9	4	9				31	68
26.	Simanová Lucia	4.	Gamča BA	9	3			6	3	9	5	5		28	67
26.	Uhrík Jakub	3.	Gamča BA	5	0	8	8	6		9	4	0		35	67
26.	Štyráková Kamila	2.	GPOH DK	5	0	9	9	5	9	6				38	67
29.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	3	0	9	8	9						26	66
29.	Kopf Matúš	2.	Opava ČR	5	1		7	9	9		6	4		35	66
29.	Polačko Martin	3.	GAlej KE	9	3			9	9	9	4	0		31	66
32.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	4	0	9	9	9	9					36	65
33.	Hujer Peter	3.	GPár NR	4	0	7	9	5	9					30	64
34.	Juríková Katarína	4.	GJGT BB	9	3			9	1	9	9			28	63
34.	Midlik Adam	2.	GJAR PO	3	0	9	9	9	1	9				37	63
36.	Cocuľová Zuzana	2.	GPoš KE	5	0	8	5	9	2	4	6			32	62
36.	Jursa Jakub	3.	GAlej KE	9	3			9	1	9	5			24	62
36.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	9	3			9	7	4	2	2		24	62
39.	Haas Emil	3.	Gamča BA	7	1		9	9	4	9				31	61
39.	Popovič Viktor	2.	GJAR PO	6	2		9	9	1	8	1			28	61
39.	Töpfer Jakub	3.	Praha ČR	3	0		9	9	9		0	0		27	61
42.	Hajdin Michal	3.	GJH BA	5	0	9	3	4	2		1			19	58
42.	Kieferová Mária	3.	GsvFA ZA	4	0	9	9	2	1	7				28	58
42.	Kočiský Tomáš	4.	Gamča BA	8	4			8	4	8	6	0		26	58
42.	Peitl Tomáš	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	4	1	8				22	58
46.	Kuzma Tomáš	3.	GAlej KE	9	3			9	9		7	0		25	56
46.	Matejovičová Lenka	3.	GJH BA	10	5			5	9	7	1	7		29	56
48.	Kossaczký Igor	3.	Gamča BA	4	0	8	9	5	2			0		24	54
49.	Rudolfová Barbora	2.	GMet BA	4	0	8	8	5	1			1		23	52
50.	Rizman Tomáš	3.	GVar ZA	6	1		9	9	1			0		19	49
51.	Bogár Ján	2.	GĽŠ TN	5	1		8	7	1		7	0		23	46
51.	Herencsár Albert	3.	Gmaď GA	6	1		8	5						13	46
53.	Majdiš Mojmír	2.	GPOH DK	4	0		3	8	4			2		17	45
54.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	3	0	0	8	9	0			1		18	44
55.	Floriánová Michaela	2.	Gamča BA	6	0	2	6	5	1	1				15	43
56.	Kuklišová Nina	3.	GMet BA	7	1		9	5	1	3	6			24	41
57.	Fekiač Jozef	3.	Gamča BA	6	1		9	2	1	8				20	40
58.	Kováč Jakub	3.	GCM NR	3	0		9	5	1	2	0	0		17	39
59.	Köry Jakub	4.	GJAR PO	4	1		9	9	9		4	7		38	38
60.	Lešková Andrea	2.	G Lipany	5	0	9	4	5	1					19	37
61.	Ziman Michal	2.	GBST LC	5	0	4		4	1			0		9	36
62.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2	0	9	3	4						16	35
62.	Rigdová Emília	2.	GKuk PP	5	1		3	8	6			0		17	35
64.	Hapák Samuel	4.	Gamča BA	10	9			7	8		9			24	32
65.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	5	2									0	31
65.	Hudec Vladimír	3.	GVar ZA	6	1		7	2	1			0		10	31
67.	Porembová Alexandra	2.	BiG Sučany	5	1		3	5		4				12	30
68.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	4	0	3	3	5		1				12	27
69.	Babiarová Dana	3.	GJab MY	4	0		4		1					5	25
69.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	3	0	9	9	5						23	25
71.	Baxová Katarína	3.	GĽŠ TN	3	0	3	3	3						9	24
71.	Kořínková Marta	2.	Gamča BA	4	0									0	24
73.	Hašík Juraj	2.	Gamča BA	5	0			5	1					6	19
74.	Zubnárová Katarína	4.	GJGT BB	5	0	8	3							11	11
75.	Kapustová Katarína	3.	GJGT BB	4	0		0	5		0				5	6

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
76.	Konôpková Júlia	3.	GJGT BB	4	0		0	5		0				5	5

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	3			9	9	9	8	9		89
2.	Csiba Dominik	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9		9		88
2.	Le Tuan Anh	1.	Gamča BA	3			9	9	9	7	9		88
4.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1	9	9	9	9			9		87
4.	Večerík Matej	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9	3	8		87
6.	Dresslerová Anna	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9	9			86
6.	Hlavatá Martina	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	9		86
6.	Šormanová Mária	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9		5		86
9.	Phuong Mariana	1.	GJH BA	2		8	9	9	9	8	9		79
10.	Benčík Štefan	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	8		9			78
11.	Macháč Juraj	1.	GJH BA	1	9	9	9			7	7		76
12.	Buchman Marek	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	4	4	1		74
13.	Hajdinová Katarína	1.	GJH BA	2		9	9	8	5	3	4		73
14.	Páleník Juraj	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9		8	4		72
15.	Ďurikovičová Lucia	1.	GsvU BA	1	9	9	9	4	2	9	1		71
16.	Sabadovičová Linda	1.	GJH BA	2		9	9	4	4		3		67
17.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	3			9	8	0	8	9		66
17.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1	2	9	4	1	5		4		66
19.	Kubincová Petra	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	8				64
20.	Mojžišová Hana	1.	GJH BA	2		8	9	2	8	3			62
21.	Kozák Andrej	1.	Gamča BA	3			9	9	9	3	5		61
22.	Masár Juraj	1.	GBil BA	2		9	9	7					50
23.	Heželyová Slávka	1.	ŠPMNDG BA	1	2	9	8	4					46
24.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA	2									12

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Kováč Ondrej	1.	GCM NR	2		6	9	9	5		3		76
2.	Dižová Andrea	1.	GKom PE	2		9	9		7	3	9		73
3.	Jakubík Ján	1.	SPŠE PN	2		8	9	9		3	5		72
4.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2		8	9	8	9	3	4		69
5.	Horváthová Zuzana	1.	G Sereď	1	2	8	9	3		5	0		56
6.	Štrbová Silvia	1.	GPár NR	3			8	9	9	3	5		49
7.	Leššová Lívia	1.	GPár NR	2			9	9		3			44
8.	Kováč Jakub	3.	GCM NR	3						9	5		23
9.	Baxová Katarína	3.	GĽŠ TN	3					3	3	3		17

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Filip	2.	GAB NO	3			9	9	9	9	9		90
2.	Ječmen Matej	1.	GVar ZA	2		8	9	9		8	5		82
3.	Lešková Katarína	1.	BiG Sučany	2		9	9		9	3	3		76
4.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	2		7	9	4	7	4	2		67
5.	Bohiniková Alžbeta	1.	GVar ZA	2		9	9	9	9	3	5		64
6.	Santer Jakub	1.	GMH Trstená	2		8	9	9		3	9		57

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
7.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	3			9	9	9	9	5		56
7.	Kubinová Mária	1.	GPOH DK	2		8	9	6	7		0		56
9.	Fodorová Jana	1.	GJGT BB	2		9	9	4		3			50
10.	Majerová Karolína	1.	GJCh BR	1	1	9	9						41
11.	Ľuba Martin	2.	GAB NO	2		9	9	1	3				37
12.	Bačinská Lenka	2.	GŠkol PB	3					5	8	5		35
13.	Sabaka Peter	1.	GJCh BR	1									21
14.	Anderle Michal	1.	GBST LC	1									17

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Midlik Adam	2.	GJAR PO	3					9	9	9		45
2.	Rohár Pavol	2.	GAlej KE	3			9	4		4	3		39
3.	Stehlík Matúš	1.	GAlej KE	2		9	9	4					22

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	9		6	6			57
2.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	6						42
3.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN	8		6	7			112
4.	Hagara Michal	2.	GJH BA	9	0					69
5.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	7	2	6	7	7		141
6.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	7	2					78
7.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	7	9	7	7	7		146
8.	Sládek Filip	2.	GAB NO	9		6	7			73
9.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	9	9	7	7	7		153
10.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA							0