Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série letnej časti 2007/2008

Úloha č. 1: *Škrečok s Katkou majú v záhrade strom, ktorý rodí samé zdravé exotické ovocie. Rastú na ňom mangá, papáje a liči. 1. januára 2008 vyrástlo prvé mango, liči aj prvá papája. Nové mango vyrastie každý tretí deň, no na strome vydrží len 10 dní, potom zhnije a odpadne. Podobne, každý piaty deň vyrastie nová papája, ktorá zhnije a odpadne po 15 dňoch. Liči vydrží na strome 30 dní a nové vyrastie vždy po týždni.*
a) Kedy najbližšie narastú všetky tri plody v jeden deň?
b) Koľko kusov akého ovocia bude na strome 20. februára?
c) Koľko kusov akého ovocia bude na strome 20. februára, ak ho Škrečok s Katkou 1. februára obrali?

Riešenie: (opravovala Kika)
Prvý deň vyrástlo všetko. Mango rastie každý tretí deň, čiže prvý, štvrtý, siedmy, atď. Sú to dni, ktoré majú tvar $3m+1$. (Po delení tromi dávajú zvyšok 1.) Podobne rastie papája každý deň tvaru $5p+1$ a liči tvaru $7l+1$. Je nepraktické počítať s takýmito číslami, preto si situáciu preznačíme. Nech 1. január 2008 je nultý deň. Potom 31. január je tridsiaty deň, 20. február je päťdesiaty deň a ovocie rastie v dni, ktoré majú tvar $3m, 5p$ a $7l$.

a) Naraz narastú v deň, ktorý je násobok všetných troch, čo je naskôr 105-ty deň. Čo je to za dátum? Keď od tohto čísla odčítame 30 zvyšných januárových dní, 29 dní februára (rok 2008 je priestupný) a 31 marcových, dozvieme sa, že hľadaný deň je 15. apríl.

b) Chceme vedieť, koľko bude čoho na 50. deň. Keby nejaké mango vyrástlo pred 40-tym dňom, aj tak by odpadlo a zhnilo. Preto na strome budú len tie mangá, ktoré vyrastú 40. deň a neskôr. Čiže hľadáme násobky 3 medzi 40 a 50. To sú čísla $42, 45$ a 48 – 3 mangá. Podobne stačí zistiť, koľko papájí vyrastie od 35. dňa. To sú násobky piatich od 35 do 50. Tie sú 4, aj keď papáje z 35 a 50 dňa sú trochu diskutabilné. Odpadla (resp. narástla) už tá papája, keď sme počítali, alebo ešte nie? Dohodnime sa, že boli 4. Ale uznávala som aj iné riešenia, ak boli zdôvodnené. Pri liči stačí skúmať, koľko plodov narastie po 20. dni. To sú násobky 7 menšie ako 50 a väčšie ako 20, teda 5 plodov.

c) Všimnime si, že mangá a papáje, ktoré vydržia na strome do 20. februára, sú všetky z februára. Teda oberanie stromu 1. februára nemá vplyv na to, koľko bude týchto ovocí 20. februára. S liči je to trochu iné. Z tých 5, ktoré by na strome vydržali do 20. februára, treba odčítať tie, ktoré narástli v januári. To sú dva plody z 21. a 28. dňa, teda 20. februára budú na strome 3 liči, 3 mangá a 4 papáje.

Úloha č. 2: *Do tabuľky veľkosti 5×5 vpisujeme čísla -1, 0 a 1. Chceli by sme to urobiť tak, aby súčty čísel v každom riadku, stĺpci aj na oboch diagonálach boli rôzne. Ukážte, že sa to tak urobiť nedá.*

Riešenie: (opravovala Ajka)
Najskôr si zistíme koľko rôznych súčtov potrebujeme. Máme päť riadkov, päť stĺpcov a dve uhlopriečky, preto potrebujeme 12 rôznych súčtov. Teraz sa zamyslíme nad tým, aké súčty vieme získať. Súčet robíme vždy z piatich sčítancov (pretože v riadkoch, stĺpcoch a na uhlopriečkach je vždy 5 štvorčekov), z ktorých každý je $1, 0$ alebo -1. Takže najväčší súčet dostaneme, keď sčítame päť jednotiek (najväčších čísel), čo je päť a najmenší keď sčítame päť mínus jednotiek (najmenších čísel), čo je mínus päť. Teda súčty môžu byť celé čísla od -5 do 5. Tie dokonca vieme všetky získať. Napríklad tak, že použijeme potrebný počet jednotiek (alebo mínus jednotiek) a zvyšok nuly: $3 = 1+1+1+0+0$ alebo $-2 = (-1)+(-1)+0+0+0$. Dokopy vieme spraviť jedenásť rôznych súčtov ($-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ a 5). Vieme aj, že na vyriešenie úlohy ich potrebujeme aspoň dvanásť, takže nám bude minimálne jeden súčet chýbať. Ukázali sme, že tabuľka sa tak vyplniť nedá.

Komentár: V tomto príklade si bolo treba dať pozor na jednu vec. Keď zistíme, že najmenší výsledok je -5 a najväčší je 5, ešte to neznamená, že vieme dosiahnuť všetky celočíselné výsledky od -5 do 5. Mohlo by sa stať, že niektoré nevieme naskladať z čísel ktoré máme dané. (V našom prípade to ide, ale nemusí to ísť vždy.) Preto nemôžeme tvrdiť, že ich je 11 bez toho aby sme ukázali že všetky existujú.

Úloha č. 3: *Princezná Hanka bola väznená hrozivým drakom vo vysokej veži. Keďže sa drak bál, že ju niekto príde vyslobodiť, postavil okolo veže hradby, dokonca rovno niekoľko hradieb. Prvé mali tvar kružnice, ktorej stredom bola veža a polomer mali 1 km. Do nich bol vpísaný štvorec, do neho opäť kružnica, do nej ďalší štvorec, do neho opäť kružnica a v nej posledný štvorec. Koľko kilometrov hradieb celkovo musel drak postaviť?*

Riešenie: (opravoval Miťo)
Na úspešné vyriešenie tohoto príkladu potrebujeme zvládnuť dve veci. Pre danú kružnicu s polomerom r vypočítať dĺžku strany štvorca vpísaného kružnici. Druhou vecou je pre daný štvorec so stranou a zistiť polomer kružnice vpísanej tomuto štvorcu. Dajme sa teda do toho.

Ak do kružnice vpíšeme štvorec $ABCD$, ľahko si môžeme všimnúť, že uhlopriečka štvorca je priemerom kružnice. Potrebujeme preto zistiť, aký je vzťah medzi dĺžkou uhlopriečky štvorca a jeho stranou. Toto sa dá ľahko zistiť pomocou Pytagorovej vety pre trojuholník ABC, dostávame $2r = a \cdot \sqrt{2}$. (Druhou možnosťou je použiť Pytagorovu vetu na trojuholník ABS, kde S je stred kružnice, vyskúšajte si to.)
Poďme k druhej časti. Ak štvorcu vpíšeme kružnicu, môžeme si všimnúť, že priemer kružnice je rovnako dlhý ako strana štvorca. (Nakreslite si priemer, ktorý je rovnobežný so stranou štvorca.) To znamená, že $a = 2r$.
To je v podstate všetko, treba už iba každé z predchádzajúcich pozorovaní použiť tri krát a zo zistených údajov vypočítať obvody. Ak to spravíme, pre polomery kružníc dostávame postupne 1, $\sqrt{2}/2$ a $1/2$, strany štvorcov majú dĺžky $\sqrt{2}, 1$ a $\sqrt{2}/2$. Obvody isto ľahko dopočítate sami, celkový obvod je

$$(3 + \sqrt{2})\pi + 6\sqrt{2} + 4,$$

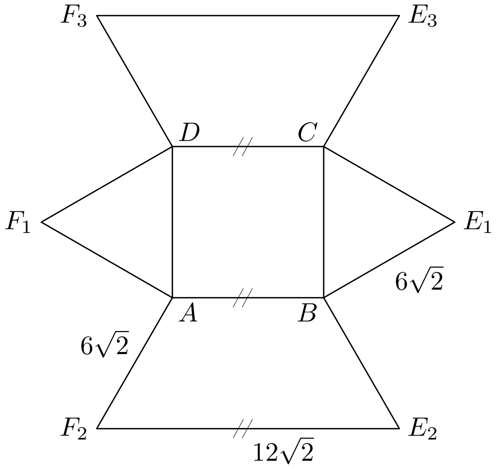
čo je približne $26,35$ km.

<u>Úloha č. 4:</u> *Koľkými spôsobmi môžeme za sebou usporiadať čísla* $21, 31, 41, 51, 61, 71$ *a* 81 *tak, aby sme použili každé z čísel práve raz a aby bol súčet každých štyroch za sebou idúcich čísel deliteľný číslom tri?*

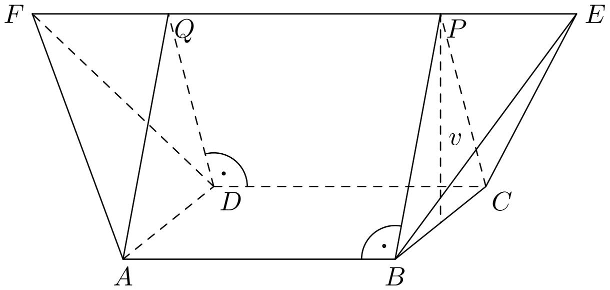
<u>Riešenie:</u> (opravoval Rasťo)
Súčet čísel je deliteľný tromi práve vtedy, keď je aj súčet ich zvyškov po delení 3 deliteľný tromi. Preto najskôr skúsime zistiť ako usporiadať ich zvyšky a potom budeme môcť každý zvyšok nahradiť ľubovoľným číslom s tým zvyškom a podmienka zo zadania sa nám nepokazí. Medzi našimi číslami máme tri čísla deliteľné tromi, dve so zvyškom 1 a dve so zvyškom 2 po delení tromi, čiže budeme usporiadavať 3 nuly, 2 jednotky a 2 dvojky.
Teraz si môžeme všimnúť, že prvé a piate číslo musia mať rovanký zvyšok po delení tromi, lebo keď k ľubovoľnému z nich pripočítame tri čísla spomedzi nich, tak nám vznikne štvorica, ktorá už musí byť deliteľná tromi. Z rovankého dôvodu budú zvyšky rovnaké aj na 2. a 6. mieste a aj na 3. a 7. mieste. Takže usporiadanie vieme symbolicky zapísať ako $a\ b\ c\ d\ a\ b\ c$ (rovnaké písmenko znamená rovnaký zvyšok). Zvyšky a, b, c nemôžu byť rovnaké, lebo potom by taký istý zvyšok musel byť dvakrát aj v prvej a aj v druhej polovici a teda spolu štyrikrát, čo však nemôže byť, lebo nemáme 4 čísla s rovnakým zvyškom. Z počtu zvyškov ďalej vieme, že d predstavuje zvyšok 0. Ak zvyšky 0, 1 a 2 ľubovoľne priradíme písmenkám a, b, c tak dostaneme vždy dobrú postupnosť. Týchto priradení je: 3 možnosti na a krát 2 možnosti na b krát 1 možnosť na c, čiže $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ a máme preto 6 rôznych usporiadaní zvyškov: 0120012, 0210021, 1020102, 1200120, 2010201, 2100210.
Počet možností koľkými môžeme obsadiť pozície so zvyškom 0 číslami $21, 51$ a 81 je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Podobne máme dve možnosti ako obsadiť pozície so zvyškom 1 a tiež dve možnosti pre zvyšok 2. Iné usporiadanie zvyškov a iné obsadenie pozícií zvyškov skutočnými číslami nám dá vždy novú postupnosť, a preto je spolu $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$ rôznych usporiadaní čísel 21, 31, 41, 51, 61, 71 a 81 takých, že súčet každých štyroch za sebou idúcich je deliteľný tromi.

<u>Úloha č. 5:</u> *Štvorec $ABCD$ má stranu dĺžky $6\sqrt{2}$. Úsečka EF je rovnobežná s rovinou, v ktorej leží štvorec $ABCD$, a má dĺžku $12\sqrt{2}$. Trojuholníky BCF a ADE sú rovnostranné. Aký je objem telesa $ABCDEF$?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kubo a Buggo)
Najprv sa zamyslíme, koľko rôznych telies spĺňa zadanie. Potom úlohu vyriešime. Následne ju vyriešime ešte dvoma inými spôsobmi. Pozor, tretie riešenie je len pre silné žalúdky. Poďme teda na prvý bod nášho programu.



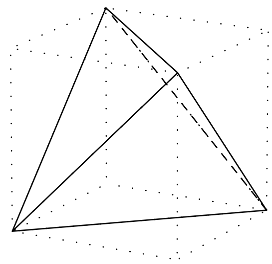
Pokúsme sa nakresliť plášť nášho telesa. Body označené rovnakým písmenom s rôznym číselným indexom splynú po zložení plášťa do jedného bodu. (Napr. z bodov F_1 a F_2 bude bod F.)
Istý máme štvorec $ABCD$. Je jasné, že nad stranami BC a DA sú rovnostranné trojuholníky. Rovnako poznáme dĺžky všetkých strán v štvoruholníkoch AF_2E_2B a DCE_3F_3. To nám však na ich jednoznačné určenie ešte nestačí. My však vieme, že úsečka EF je rovnobežná so štvorcovou podstavou. Zamyslime sa, ako môžeme náš plášť skladať.
Uvedomíme si, že úsečka EF musí ležať v tej rovine kolmej podstavu, v ktorej ležia aj body E_1 a F_1 (vrcholy rovnostranných trojuholníkov). Spojením týchto dvoch poznatkov dostávame, že strana EF môže ležať len na jednej priamke, prieniku týchto dvoch rovín. Keď si všimneme, že túto stranu dostaneme prehnutím plášťa okolo úsečky AB, je nám všetko jasné. Úsečky E_2F_2 a E_3F_3 sú rovnobežné s AB. Vidíme teda, že tento plášť prislúcha práve jednému telesu. (Skúste si napísať detailný dôkaz posledných dvoch viet.)
Tááak, plášť môžeme poskladať a pozrieť sa na naše teleso. Už len zrátať objem. Jedna možnosť ako to dosiahnuť je divoko povyjadrovať čo sa len dá s nádejou, že to *potom už z toho vypadne*. Alebo sa môžeme zamyslieť a možno si ušetriť čas.



Označme si body P a Q ako na obrázku. Stačí, ak zrátame objem hranola $ABCDPQ$ a štvorstenov $BCEP$ a $ADQF$. Je zrejmé, že $|EP| = |FQ| = 3\sqrt{2}$. Nezabudnime, že $|BE| = 6\sqrt{2}$. Dvojnásobným použitím Pytagorovej vety dostávame, že $|BP| = 3\sqrt{6}$ a $v = 6$. A tak sa dostávame k vyjadreniu objemu

$$V = \frac{(6 \cdot \sqrt{2})^2 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = 288.$$

Keď už máme úlohu nejako vyriešenú, môžeme sa zamyslieť, či by sme nevedeli nájsť nejaké elegantnejšie riešenie. Myslíte si, že $\sqrt{2}$ v dĺžkach strán je len náhoda? Alebo sme vám tou odmocninou chceli dať, prepitujeme, *hint*?
Odmocnina z dvoch sa štandardne vyskytuje v uhlopriečkach štvorcov. Čo ak je EF uhlopriečka nejakeho *nadradeného* telesa? Dokreslime, uvidíme. Ajhľa. Náš útvar sa dá celý vpísať do kocky s 12 cm dlhou stranou. A koho osvietil záblesk prozretelnosti, ten si isto všimol, že naše teleso nie je nič iné, ako polovica stredného štvorstena pri rozrezaní kocky ako na obrázku. No a zrátať jeho objem vie predsa každý.



Tretia možnosť ako riešiť príklad, je vyhadriť si plochu rezu nášho útvaru pre každú výšku h. A zintegrovať:

$$\int_0^6 \left(1 - \frac{h}{6}\right) \cdot 6\sqrt{2} + 3h\, dh$$

<u>Úloha č. 6:</u> *Nech a, b, c sú prirodzené čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 1. Ďalej o nich vieme, že súčin každých dvoch je deliteľný tretím. Dokážte, že každé z čísel a, b, c sa rovná najmenšiemu spoločnému násobku zvyšných dvoch vydelenému najväčším spoločným deliteľom zvyšných dvoch čísel.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Katka M. a Škrečok)

Poďme sa spoločne pozrieť, ako môžu vyzerať rozklady čísel a, b, c na súčin prvočísel. Keďže najväčší spoločný deliteľ týchto troch čísel je jedna, nemôžu mať tieto čísla v rozklade žiadne prvočíslo spoločné. V takom prípade by bol totiž ich najväčší spoločný deliteľ práve toto spoločné prvočíslo.
Skúsme teraz zistiť, aký vplyv na prvočíselný rozklad a, b, c má vlastnosť, že „súčin každých dvoch z nich je deliteľný tretím“. Podľa tejto vlastnosti napríklad a delí súčin bc. To znamená, že b a c majú v rozklade nejaké spoločné činitele s a. Možno iba b, možno iba c, možno obe, to zatiaľ nevieme. Tieto činitele sú najväčšie spoločné delitele týchto dvojíc, označme si ich $\mathrm{NSD}(a, b) = x$ a $\mathrm{NSD}(a, c) = y$.
Analogickú úvahu môžeme urobiť aj pre ostatné dvojice čísel deliteľné tretím číslom. Označiac $\mathrm{NSD}(b, c) = z$ a tuho sa zamysliac dostávame, že naše tri čísla a, b, c musia byť v tvare

$$\begin{aligned} a &= xyp, \\ b &= xzq, \\ c &= yzr, \end{aligned}$$

pričom všetky celé čísla x, y, z, p, q, r musia byť nesúdeliteľné. (Ich najväčší spoločný deliteľ musí byť jedna.) Musí to tak byť preto, lebo x, y, z sú najväčšie spoločné delitele dvojíc čísel spomedzi a, b, c a takisto kvôli tomu, že $\mathrm{NSD}(a, b, c) = 1$.
Pozrime sa na čísla p, q, r. Keďže $a = xyp$ delí súčin $bc = xyz^2qr$, dostávame, že p musí byť jedna. Je totiž s číslami x, y, z, q, r vystupujúcimi v súčine bc nesúdeliteľné. Podobným spôsobom sa ľahko presvedčíme o tom, že aj q a r sú rovné jednej. To ale znamená, že

$$\begin{aligned} a &= xy, \\ b &= xz, \\ c &= yz. \end{aligned}$$

Skúsme sa teraz mrknúť do zadania, čo po nás vedúci chcú, a prepíšme si to do reči nášho označenia. Dokážeme iba to, že a sa rovná najmenšiemu spoločnému násobku čísel b a c vydelenému najväčším spoločným deliteľom b a c. Zvyšné dve rovnosti zvládne bystrý čitateľ poľahky. Chceme zistiť, čomu sa rovná

$$\frac{\mathrm{nsn}(b, c)}{\mathrm{NSD}(b, c)} = \frac{xyz}{z} = xy = a.$$

Celé sme to dostali vďaka tomu, že čísla x, y, z sú po dvoch nesúdeliteľné. Hotovo.

Komentár: Chceme vás pochváliť za pekné riešenia. Viacerí z vás však bohužiaľ stratili cenný bodík-dva za to, že nezdôvodnili, prečo sú naše čísla p, q, r rovné jednej, ba dokonca s nimi ani nepočítali a hneď napísali, že $a = xy\dots$

Úloha č. 7: *Na plášti gule so stredom S a polomerom $r = 1$ sú dané body A, B, C, D, ktoré tvoria vrcholy štvorstena. Dokážte, že ak bod S leží vnútri štvorstena $ABCD$, tak aspoň jedna z hrán AB, AC, AD má dĺžku väčšiu ako $\sqrt{2}$.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Väčšine z vás nerobilo problém nájsť „hraničný prípad“, kedy bod S ležal na stene BCD a hrany AB, AC a AD mali dĺžku $\sqrt{2}$. Horšie to už bolo so zdôvodnením samotného tvrdenia. Malo by vyzerať napríklad takto:
Budeme dokazovať obmenou. (Namiesto implikácie $A \Rightarrow B$ dokážeme $B' \Rightarrow A'$.) V našom prípade B' znamená, že každá hrana AB, AC a AD má dĺžku najviac $\sqrt{2}$. Použitím kosínusovej vety pre trojuholník ASB dostaneme

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2|AS||BS|\cos(\sphericalangle ASB) = 2(1 - \cos(\sphericalangle ASB)).$$

Z predpokladu $|AB| \le \sqrt{2}$ máme

$$2 = \sqrt{2}^2 \ge 2(1 - \cos(\sphericalangle ASB)),$$

čo vieme upraviť na $\cos(\sphericalangle ASB) \ge 0$. Funkcia kosínus má na intervale $[0, \pi/2|$ nezáporné a na $(\pi/2, \pi]$ záporné hodnoty. O uhle ASB preto vieme $\sphericalangle ASB \le \pi/2$. Rovina kolmá na AS prechádzajúca bodom S nám rozdelí guľu na dve pologule a jedna z nich bude mať vrchol A. Uhol ASB je menší rovný $\pi/2$ práve vtedy, keď leží na povrchu tej pologuli (môže aj na hraničnej kružnici-„rovníku“), ktorej vrcholom je bod A. Toto si môžeme overiť napríklad prierezom gule rovinou ASB. Rovnakú úvahu môžeme spraviť aj pre body C a D. Zistili sme, že body B, C aj D ležia na jednej pologuli spolu s bodom A. Z toho vieme, že štvorsten $ABCD$ sa celý nachádza v polpriestore vyčlenenom rovinou prechádzajúcou bodom S a kolmou na AS. Ak by bod S ležal vnútri $ABCD$, tak by tento štvorsten zasahoval do vnútra oboch polpriestorov, čo sme práve vylúčili. Podarilo sa nám dokázať, že S neleží vnútri štvorstena $ABCD$. Tým je dôkaz obmenou kompletný.

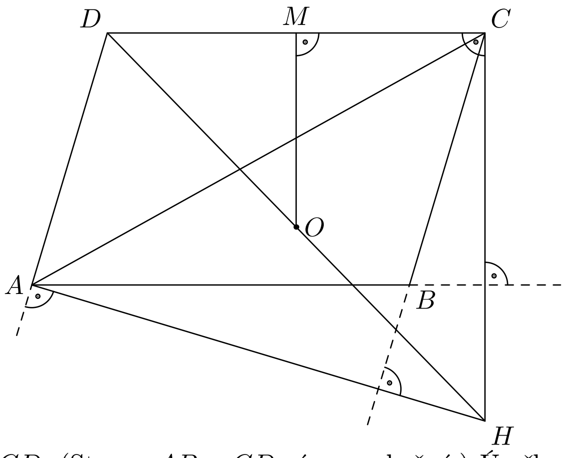
Komentár: Akonáhle pochopíte, čo chcete dokázať, úloha je intuitívne veľmi jasná, čo mnohých doviedlo ku veľmi ležérnym, „obkecávacím“ dôkazom, ktoré ani tak veľmi dôkazmi neboli. Zoberte si z toho ponaučenie, a užite si prázdniny.

Úloha č. 8: *Na stole je položených 15 kariet, každá je otočená buď lícom hore alebo lícom dole, nemusia byť však všetky otočené rovnako. Mišáč urobí 15 ťahov, pričom v i-tom ťahu otočí presne i kariet. Dokážte, že Mišáč vždy môže dosiahnuť, aby po týchto 15 ťahoch boli všetky karty lícom hore, alebo všetky karty lícom dole.*

Riešenie: (opravoval Bebe)
Skôr ako sa pustíme do samotného riešenia, pouvažujme nad nasledujúcou otázkou. Je nutné dodržiavať poradie ťahov, alebo môžeme spraviť ľubovoľný ťah v ľubovoľnej časti hry? Spôsob akým musíme ťahať je totižto veľmi obmedzujúci a neumožňuje nám robiť čo sa nám zapáči.
Zrejme nám stačí dokázať, že poradie každých dvoch ťahov možno zameniť. (Rozmyslite si prečo.) Majme teda dva za sebou nasledujúce ťahy, pričom v prvom musíme otočiť k a v druhom l kariet. (Ak sa Vám písmenká nepáčia kľudne si môžete predstaviť 8 a 3.) Ak sme nejakú kartu otočili v oboch ťahoch, tak ju otočíme 2-krát aj keby sme ťahy zamenili. (Teda najskôr otáčali l a až potom k kariet.) Naopak karty, ktoré neotočíme ani v jednom ťahu, naša zámena neovplyvní. A na záver karty, ktoré otočíme len v jednom z našich ťahov ostanú len raz otočené, aj ak by sme poradie ťahov vymenili. Jednoduchú prípravu by sme mali za sebou, môžeme sa vrhnúť na riešenie.
Jednotlivé ťahy už môžeme hociako presúvať. Poprehadzujme ich teda tak, aby sme mali vedľa seba ťahy v ktorých otáčame i a $15 - i$, kde $i < 15 - i$. (Tieto dva ťahy budeme spoločne označovať ako *dvojťah*.) Keďže ťahov je 15 a ťah v ktorom otáčame 15 kariet je zbytočný, vieme takto „popárovať“ všetky ťahy. Toto rozloženie sa zdá byť výhodné, lebo z neho vieme vyčítať mnohé súvislosti. Napríklad aj to, že ak máme na začiatku všetky karty rovnako otočené, tak táto vlastnosť sa nám po našich ťahoch nepokazí. Stačí v každom *dvojťahu* po otočení i kariet otočiť aj zvyšných $15 - i$ kariet. Takýmto spôsobom po každom *dvojťahu* otočíme každú kartu práve raz.
Čo však so situáciou, v ktorej sú niektoré karty lícom hore a iné lícom dole? Je dôležité si uvedomiť, že nám nezáleží na tom, ako budú karty otočené na konci. (Všetky lícom hore alebo všetky lícom dole.) Kariet je 15. To znamená, že na začiatku bude tých, ktoré sú lícom hore, alebo tých druhých, nepárny počet.
Teraz sa pozrime na ľubovoľný z *dvojťahov*. Nezabúdajme, že $i < 15 - i$. Ak otočíme v prvom ťahu i a v druhom i tých istých kariet a ešte $15 - 2i$ iných bude efekt rovnaký, ako keby sme otočili len $15 - 2i$ kariet. Je to preto, lebo sme i kariet otočili 2-krát, čo je to isté, ako keby sme ich neotočili vôbec. Vhodnou voľbou i teda vieme otočiť ľubovoľný nepárny počet (< 15) kariet na opačnú stranu. Napríklad práve 7 kariet otočíme na opačnú stranu pomocou *dvojťahu*, v ktorom $i = 4$. V tomto momente máme všetky karty otočené rovnako. Takže sa budeme snažiť túto vlastnosť zachovať do konca hry. To však ľahko dosiahneme. Stačí ak ostatnými *dvojťahmi* otočíme vždy i a následne zvyšných $15 - i$ kariet.
Prišli sme na to, že v každom počiatočnom rozložení máme otočený nepárny počet kariet jedným smerom. A tie vieme otočiť naopak a potom už nič nepokaziť, pomocou predchádzajúceho postupu. Čím je príklad vyriešený.

Úloha č. 9: *Nech $ABCD$ je štvoruholník, v ktorom $AB \parallel CD$ a $|AB| \geq |CD|$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ACD a H priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že ak body D, O a H ležia na jednej priamke, tak $ABCD$ je rovnobežník.*

Riešenie: (opravoval Mišáč)



Na začiatok by som každému odporučil, aby si skúsil vyriešiť túto geometriu skôr než prečíta riešenie. Riešenie pôsobí jednoducho, jeho prečítanie samo o sebe asi nebude prínosné. Kto už túto úlohu vyriešil alebo sa o to aspoň pokúsil, nech smelo číta ďalej.

Chceme dokázať, že $ABCD$ je rovnobežník. Rovnobežnosť strán AB a CD máme zo zadania, ostáva dokázať, že aj strany BC a DA sú rovnobežné. Nemusí nás hneď napadnúť, ako by sme túto rovnobežnosť dokazovali, môžeme sa preto pozrieť na obrázok a skúsime si všimnúť dôležité vzťahy. Keďže bod O je stredom kružnice opísanej trojuholníku ACD, tak leží na osiach jeho strán. Jednou z týchto osí je os kolmá na stred strany CD, ktorý označme M. Úsečka OM je preto kolmá na stranu CD. Keď využijeme, že H je priesečník výšok trojuholníka ABC, dostaneme kolmosť úsečky CH na stranu AB a teda aj na stranu CD. (Strany AB a CD sú rovnobežné.) Úsečky CH a MO sú kolmé na stranu CD, čiže sú rovnobežné. Keďže M je stred strany CD, tak z rovnobežnosti úsečiek MO a CH vieme, že MO je stredná priečka v trojuholníku HCD. Bod O je potom stredom strany HD. To znamená, že na kružnici opísanej trojuholníku ACD so stredom v bode O musí ležať aj bod H. Došli sme k tomu, že štvoruholník $AHCD$ je tetivový. Súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je $180°$. Protiľahlý uhol k pravému uhlu HCD musí byť tiež pravý, čo znamená, že úsečka AH je kolmá na stranu DA. Pripomeňe si, že chceme dokázať rovnobežnosť strán BC a DA. Našli sme úsečku AH kolmú na stranu DA, stačí nám dokázať, že je kolmá aj na stranu BC. Keďže H je priesečník výšok trojuholníka ABC, tak AH je výškou na stranu BC, teda je na ňu kolmá.

Chýba nám ešte niečo? Áno, diskusia. Postupne si prechádzajme dôkaz a zamyslime sa, či v nejakom kroku nemôže nastať špeciálny prípad. Narazíme na miesto, kde sa spomína trojuholník HCD. Čo ak to nie je trojuholník, lebo body H, C, D ležia na priamke? V tom prípade je bod H totožný s bodom B. Rozoberte tento prípad osobitne a ukážte, že tvrdenie platí. Hľadajme ďalšie problematické miesta. Zdôvodnili sme, že bod H musí ležať na kružnici opísanej trojuholníku ACD. Čo ak je totožný s nejakým z týchto bodov a teda štvoruholník $AHCD$ vlastne ani nie je štvoruholník? Prípad, keď bod H je totožný s bodom C sme už rozobrali, s bodom D zrejme totožný byť nemôže. Ak je bod H totožný s bodom A, tak trojuholník ABC musí byť pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Dokreslite si ešte bod D a všimnite si, že tvrdenie v tomto prípade vôbec platiť nemusí, čo sa podarilo odhaliť len niekoľkým. To je všetko.

Úloha č. 10: *Máme množinu desiatich rôznych reálnych čísel takú, že pre každé dva jej rôzne prvky je ich súčin alebo ich súčet racionálne číslo. Dokážte, že druhá mocnina každého čísla z našej množiny je racionálne číslo.*

Riešenie: (opravoval Jaro)

Úlohu dokážeme sporom, nech teda niektoré z čísel nie je druhou odmocninou racionálneho čísla. Vieme, že sčítaním, odčítaním, násobením alebo *nenulovým* delením racionálnych čísel dostávame zasa racionálne čísla (hovoríme o *uzavretosti* množiny racionálnych čísel vzhľadom na dané operácie). Skúsme to využiť. Môžeme tu mať nenulové racionálne číslo? Z uzavretosti racionálnych čísel by všetkých desať bolo racionálnych a tým skôr by tvrdenie platilo, takže nie. Dvojice s racionálnym súčtom spojme modrou čiarou a ostatné s racionálnym súčinom červenou.

Aspoň deväť čísel je nenulových. Potom aspoň päť má rovnaké znamienko. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to znamienko kladné. (Všetko len preto, aby sme neskôr nedelili nulou.) Zamerajme sa na tých päť čísel. Môžeme mať trojuholník s jednou modrou stranou? Potom by $[(ab) + (ca)]/(b + c) = a$ bolo racionálne (delíme kladným číslom), opäť záporná odpoveď. A čo modrý trojuholník? Zasa by $0,5 \cdot [(a + b) - (b + c) + (c + a)] = a$ bolo racionálne, do tretice nie. Pre červený trojuholník dostávame $(ab)(ca)/(bc) = a^2$ racionálne (delíme kladným číslom), cyklicky aj b^2, c^2 racionálne.

Ak máme červené čiary uv, vw a $u \neq w$, tak aj čiara uw je červená. Táto vlastnosť je veľmi silná, hovorí totiž, že ak sa

vieme po červených čiarach dostať z čísla do čísla, tak sú obe spojené červenou čiarou. Znamená to, že dostaneme niekoľko skupín, v každej skupine sú medzi číslami len červené čiary a medzi nimi sú len modré čiary.

Znamená to, že dostaneme niekoľko skupín čísel oddelených modrou, pričom v skupine je každá čiara červená. Už vieme, že môžu existovať najviac dve také červené skupiny. Takže musí existovať červená skupina s aspoň troma číslami (červený trojuholník) a štvorce týchto čísiel (označme dve čísla ako $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$) budú racionálne.

Vráťme sa späť ku všetkým číslam. Ak a^2, ab sú racionálne, taktiež aj $(ab)(ab)/(a^2) = b^2$ bude racionálne. Preto každé číslo spojené červenou s šervenou skupinou má racionálny štvorec. Existuje teda x spojené modrou s $\sqrt{p}$ aj $\sqrt{q}$, čiže $x + \sqrt{p}$, $x + \sqrt{q}$ sú racionálne. Máme $(x + \sqrt{p}) - (x + \sqrt{q}) = \sqrt{p} - \sqrt{q}$. (Racionálne.) Potom $(p - q)/[\sqrt{p} - \sqrt{q}] =$

$\sqrt{p}+\sqrt{q}$ je racionálne (delíme nenulovým číslom), výsledne $0,5 \cdot [(\sqrt{p}+\sqrt{q})+(\sqrt{p}-\sqrt{q})] = \sqrt{p}$ je tiež racionálne. Máme medzi desiatimi číslami racionálne, spor.

<u>**Úloha č. 11:**</u> *Nájdite všetky prvočísla p také, že $p^2 - p + 1$ je treťou mocninou prirodzeného čísla.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Bus)
Chceme nájsť všetky prvočísla p také, že

$$p^2 - p + 1 = n^3$$

pre nejaké prirodzené n. To, že v rovnosti vystupujú prvočísla, by nás mohlo priviesť na nápad upraviť rovnosť na súčin viacerých členov:

$$\begin{aligned} p^2 - p + 1 &= n^3, \\ p^2 - p &= n^3 - 1, \\ p(p-1) &= (n-1)(n^2+n+1). \end{aligned}$$

Výhodou tohto nového tvaru je, že ľavá strana je násobkom prvočísla p, z čoho možno vyvodiť, že aj pravá strana musí byť násobkom p. Keďže p je prvočíslo, musí byť aspoň jedna zo zátvoriek na pravej strane deliteľná p. Ďalším krokom je uvedomiť si, že zo zátvoriek na pravej strane je tá druhá vždy väčšia. Veľa riešiteľov sa to pokúšalo zdôvodniť vágnymi argumentami, ktoré sa opierali o to, že kvadratická funkcia rastie rýchlejšie ako lineárna, prípadne porovnávali kvadratickú funkciu na ľavej strane s kubickou funkciou na pravej strane. Takýmto spôsobom sa to dokázať dá, chce to však oveľa dôslednejší postup, nie len to sucho prehlásiť za fakt. Jednoduchší spôsob, ako nerovnosť dokázať, je napríklad tento:

$$\begin{aligned} n^2 &\geq 0, \\ n^2+n+1 &\geq n+1 > n-1, \\ (n^2+n+1) &> (n-1). \end{aligned}$$

Pomocou tohto výsledku už môžme sporom dokázať, že p delí (n^2+n+1). Keby to tak totiž nebolo, muselo by p deliť $(n-1)$ a teda by platilo:

$$(n-1) = pq$$

kde q je nejaké celé číslo. Keďže n má byť prirodzené, ľavá strana musí byť aspoň nula, preto aj $q \geq 0$. Dá sa ľahko overiť, že v prípade $q = 0$ dostávame výsledok $n = 1$ a $p = 0$ alebo $p = 1$, z čoho však ani jedno nie je prvočíslo. Ostáva nám možnosť $q \geq 1$:

$$\begin{aligned} p &\leq pq = (n-1), \\ (p-1) < p &\leq (n-1) < (n^2+n+1), \\ p(p-1) &< (n-1)(n^2+n+1). \end{aligned}$$

kde posledná nerovnosť je súčinom prvých dvoch − nerovnosti sme mohli násobiť, pretože obe strany v oboch nerovnostiach sú kladné. To je spor, čím sme dokázali, že p delí n^2+n+1. Môžme teda písať

$$\begin{aligned} (n^2+n+1) &= pk, \\ \frac{(n^2+n+1)}{k} &= p. \end{aligned}$$

kde k je kladné celé číslo, keďže ľavá strana rovnosti je určite kladná. Dosadením do pôvodnej rovnosti máme

$$\begin{aligned} p(p-1) = (n-1)(n^2+n+1) &= (n-1)pk, \\ (p-1) &= (n-1)k, \\ p &= (n-1)k+1, \\ \frac{(n^2+n+1)}{k} = p &= (n-1)k+1, \\ (n^2+n+1) &= (n-1)k^2+k. \end{aligned}$$

Zaujímavou možnosťou je pozrieť sa na zvyšok oboch strán po delení $(n-1)$, my však zvolíme trochu priamočiarejší postup a budeme túto rovnosť riešiť ako kvadratickú rovnicu. Otázkou je, či budeme rovnicu riešiť pre neznámu k alebo pre neznámu n. Správny postup je samozrejme vyskúšať obe možnosti – ukáže sa, že výhodnejšie je zvoliť si za neznámu n, dostávame

$$\begin{aligned} n^2 + n(1-k^2) + (k^2-k+1) &= 0, \\ n &= \frac{(k^2-1) \pm \sqrt{(1-k^2)^2 - 4(k^2-k+1)}}{2}. \end{aligned}$$

Aby sme dostali celočíselné riešenie, musí byť diskriminant štvorcom,

$$D = (1-k^2)^2 - 4(k^2-k+1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3 = (k^2-3)^2 + 4k - 12.$$

Vidíme, že D je „takmer" štvrocom, líši sa len o málo od $(k^2-3)^2$. Pokúsime sa dokázať, že pre $k > 3$ bude platiť:

$$(k^2-3)^2 < D < (k^2-2)^2$$

Ľavá nerovnosť vyplýva z toho, že pre $k > 3$ je $4k - 12 > 0$. Pravú nerovnosť dokážeme úpravou na štvorec

$$\begin{aligned} -5 &< 0 \le 2(k-1)^2, \\ -5 &< 2k^2 - 4k + 2, \\ 4k - 12 &< 2k^2 - 5, \\ (k^2-3)^2 + 4k - 12 &< (k^2-3)^2 + 2k^2 - 5, \\ D &< k^4 - 4k^2 + 4, \\ D &< (k^2-2)^2. \end{aligned}$$

Keďže $(k^2-3)^2$ a $(k^2-2)^2$ sú po sebe idúce štvorce, nie je medzi nimi žiaden ďalší štvorec celého čísla a teda ani D nemôže byť štvorcom pre $k > 3$. Keďže k je prirodzené číslo, ostali nám už len tri možnosti. Iba jedna z nich nám po dosadení dá riešenie úlohy, a to $k = 3$, $n = 7$, $p = 19$.

Úloha č. 12: *Zo stredu štvorca vyrazil svetelný lúč, odrážal sa od strán štvorca, nikdy pritom nevrazil do rohu a po čase sa opäť vrátil do stredu štvorca, a to po prvý raz. Dokážte, že sa lúč odrazil od strán štvorca nepárny počet krát.*
Poznámka: Uhol dopadu je rovný uhlu odrazu.

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Prišli dva druhy riešení, obe mali peknú myšlienku a veľmi rýchlo viedli k výsledku. Prvé spočíva v tom, že namiesto toho, aby sme kreslili lomenú čiaru–trajektóriu našeho lúča, si nakreslíme štvorcovú sieť, vyznačíme si na nej dva stredy štvorčekov a spojíme ich rovnou úsečkou. Namiesto odrazu zvyšok cesty lúča preklopíme okolo strany do ktorej narazil a tak pokračujeme ďalej. Počet odrazov teraz reprezentuje počet priesečníkov našej úsečky s priamkami vytvárajúcimi mrežovú sieť. Sami si určite ľahko rozoberiete, aká môže byť ich parita, akonáhle neprechádza cez žiadny mrežový bod.
Druhé riešenie popíšeme potrobnejšie. Pre ľubovoľnú priamu časť trajektórie lúča si zaveďme parameter α, ktorý bude veľkosť orientovaného uhla medzi x-ovou osou a smerom lúča (orientácia napr. proti smeru hodinových ručičiek), ale berme ho modulo π. Zrejme keď lúč narazí do steny zmení sa jeho parameter z α na $\pi - \alpha$. Ak začneme s parametrom $\alpha = \pi/2$, tak sa dostaneme do stredu na jeden odraz, teda nepárny počet. Ak nie, budú sa nám striedať rôzne hodnoty α a $\pi - \alpha$. Preto ak začneme zo stredu s parametrom α a do stredu sa vrátime s parametrom $\pi - \alpha$, tak sme mali nepárny počet odrazov. Stačí dokázať, že do stredu sa nemôžeme dostať s rovnakým parametrom s akým sme začínali. Inými slovami, nech sa nám stala jedna z týchto dvoch nepriaznivých situácií.

1. Vrátili sme sa presne po tej polpriamke, po akej sme na začiatku lúč vystrelili. To by ale znamenalo, že presne v strede cesty sa lúč musel obrátiť naopak, čo sa pri $\alpha \neq \pi/2$ nedá.

2. Vrátili sme sa po tej istej priamke, po akej sme na začiatku lúč vystrelili, ale z opačnej strany (a medzitým nebol nikdy v strede). Predstavme si, že by sme oboma smermi, ktoré majú parameter α vystrelili lúč naraz. Išli by stredovo súmerne vzhľadom na stred štvorca a v polke cesty by sa museli stretnúť. Ale to by sa mohli iba v strede štvorca, čo je spor.

Tým sme dokázali, že počet odrazov je naozaj nepárny.

<u>**Úloha č. 13:**</u> *Nech $p > 5$ je prvočíslo. Nech A je množina všetkých postupností $(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ takých, že $a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq a_i \leq i+1$ pre $i = 1, 2, \dots, p+1$. Množina $X \subset A$ sa nazýva roztopašná, ak každé dve rôzne postupnosti z X sa líšia aspoň na troch miestach. Aký najväčší počet prvkov môže mať roztopašná množina X?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ondráč)
(*podľa Mira Majerčíka*) V postupnosti $(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ máme na výber prvých $p-1$ miest $2\cdot 3\cdot 4\cdots p = p!$ možností, lebo $a_1 \in \{1,2\}$, $a_2 \in \{1,2,3\}$, …, $a_{p-1} \in \{1,2,3,\dots,p\}$. Ak by $|X| > p!$ určite by v X existovali dve postupnosti s rovnakými prvými $p-1$ členmi, čiže by sa líšili na najviac dvoch miestach a X by nebola roztopašná. Ukážeme, že existuje roztopašná množina X s práve $p!$ prvkami.
Zoberme si všetkých $p!$ možných kombinácií prvých $p-1$ prvkov postupností, vo všeobecnosti $(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$. Ku každej definujeme a_p tak, aby $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ bolo deliteľné p a a_{p+1} tak, aby $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + pa_p + (p+1)a_{p+1}$ bolo deliteľné p.
Majme dve takéto rôzne postupnosti $(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ a $(b_1, b_2, \dots, b_{p+1})$. Ukážeme, že sa líšia aspoň na troch miestach. Rozoberieme tri prípady:

1. Ak sa na prvých $p-1$ miestach líšia aspoň trikrát, tak je to v poriadku.
2. Ak sa na prvých $p-1$ miestach líšia práve dvakrát, povedzme $a_i \neq b_i$ a $a_j \neq b_j$, potom[1]

$$\begin{aligned} a_p - b_p &= (a_i - b_i) + (a_j - b_j), \\ a_{p+1} - b_{p+1} &= i(a_i - b_i) + j(a_j - b_j). \end{aligned}$$

   Ak by oba tieto rozdiely boli rovné 0, potom by aj

$$a_{p+1} - b_{p+1} - i(a_p - b_p) = (j - i)(a_j - b_j) = 0,$$

   čo ale nemôže byť, lebo $j-i$ ani $a_j - b_j$ nie je deliteľné p a p je prvočíslo. Preto buď $a_p \neq b_p$, alebo $a_{p+1} \neq b_{p+1}$, a teda postupnosti a a b sa musia líšiť aspoň na troch miestach.
3. Ak sa na prvých $p-1$ miestach líšia práve raz, teda $a_i \neq b_i$, potom zrejme

$$\begin{aligned} a_p - b_p &= a_i - b_i \neq 0 \\ a_{p+1} - b_{p+1} &= i(a_i - b_i) \neq 0. \end{aligned}$$

   Opäť sa nám postupnosti musia líšiť aspoň na troch miestach.

Dokázali sme, že takto definovaná množina X s $p!$ prvkami je roztopašná.

<u>**Úloha č. 14:**</u> *Každá podmnožina množiny prirodzených čísel $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ má iný súčet prvkov. Aký najmenší môže byť výraz (v závislosti od n) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ondráč)
Nikomu sa nepodarilo dokázať toto tvrdenie. Za bežných okolností by sme vám asi tento príklad predložili znovu, no teraz budeme dobrí. Naznačíme postup, akým sa to dá dokázať, detaily si premyslite sami.
Majme čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ a pozrime sa na sumu

$$\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2,$$

pričom sčitujeme cez všetkých 2^n možných kombinácií znamienok + alebo −. Vnútro žiadnych dvoch zátvoriek v sume nemôže byť rovnaké (tým by sme došli k sporu s tými rôznymi súčtami) a navyše majú všetky rovnakú paritu. Samozrejme, žiadna zátvorka nemôže byť ani nulová.
Aký najmenší môže byť súčet druhých mocnín 2^n rôznych čísel s rovnakou paritou, medzi ktorými nie je 0? Sami si ľahko dokážete, že je to

$$\sum_{m=-2^{n-1}-1}^{2^{n-1}} (2m-1)^2 = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2^n - 1)^2) = \frac{2^{3n} - 2^n}{3}$$

Na druhú stranu si uvedomme, ako vyzerá $\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ po roznásobení. Všetky členy tvaru $x_i x_j$ (pre $i \neq j$)nám vymiznú (práve vďaka striedaniu znamienok) a teda

$$\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2 = 2^n (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

[1] Rovnosti medzi členmi postupností odteraz berieme modulo p. Potom na dokázanie nerovnosti nejakých dvoch členov stačí dokázať ich nerovnosť po delení p.

Dokopy už vieme, že

$$\begin{aligned} 2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) &\geq \frac{2^{3n} - 2^n}{3}, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &\geq \frac{4^n - 1}{4 - 1}. \end{aligned}$$

Máme dolný odhad na súčet druhých mocnín čísel x_i. Množina $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}\}$ zrejme spĺňa podmienku o rôznych súčtoch (jednoznačný zápis v dvojkovej sústave) a navyše

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + \cdots + (2^{n-1})^2 = \frac{4^n - 1}{4 - 1}.$$

Dokázali sme odhad a našli prípad, kedy sa krajná hodnota nadobúda. Ako sa vám to páčilo?

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	6	1		9	9	9	9				36	126
2.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	8	1		9	6	8	7	8			38	125
2.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	10	9			9	9	9		8		35	125
4.	Karásková Natália	2.	Gamča BA	6	1		9	9	4	8		2		32	116
5.	Bachratý Martin	2.	GVO ZA	6	1		9	9	4	8				30	115
5.	Bosák Radomír	3.	Gamča BA	4	0	9	9	3	9			8		38	115
7.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	6	1		8	6	5	8	6	2		33	114
7.	Tkadlec Josef	3.	Praha ČR	4	1		9	8	6	8	7			38	114
9.	Říha Samuel	3.	Brno ČR	5	3			9	6	8	9			32	113
10.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	6	1		8	9	9	8	0	2		36	111
10.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	10	6			9	8	9	3	1		30	111
12.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN	4	1		9	3	9	8				29	109
12.	Sládek Filip	2.	GAB NO	3	1	7	9	8	9					26	109
14.	Starovská Mária	4.	Gamča BA	12	5			9	9	8		0		26	107
15.	Komárková Zuzana	3.	Brno ČR	5	1		9	0	0	8	0			17	103
15.	Uhrík Jakub	3.	Gamča BA	5	0	9	8	3	8	8				36	103
17.	Hujer Peter	3.	GPár NR	4	0	9	9	9	4	6				37	101
18.	Hagara Michal	2.	GJH BA	5	1		9	9			0			18	100
19.	Midlik Adam	2.	GJAR PO	3	0	9	9	2	8	8				36	99
20.	Štyráková Kamila	2.	GPOH DK	5	0	9	9	8		5				31	98
21.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	11	7			9	5	8	4	1		27	97
21.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	4	0	9	9	2	4	8				32	97
21.	Hojčka Michal	3.	GKom PE	8	4			9	6	8	2	3		28	97
21.	Kopf Matúš	2.	Opava ČR	5	1		8	4	8	8	3			31	97
21.	Liščinský Miroslav	3.	GAlej KE	8	2		7	8	4	8				27	97
26.	Šormová Hana	3.	Brno ČR	4	0		9	0	0	8	0			17	96
27.	Simanová Lucia	4.	Gamča BA	9	3			9	9	8	1	0		27	94
28.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	3	0	9	9	9						27	93
28.	Töpfer Jakub	3.	Praha ČR	3	0	8	6	9	9					32	93
30.	Szilágyiová Adriana	4.	GPoš KE	7	2		8	8		6				22	90
31.	Jursa Jakub	3.	GAlej KE	9	3			8	9	8	0	2		27	89
31.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	9	3			9	9	8	0	1		27	89
33.	Eiben Eduard	3.	GPoš KE	7	3			9	9					18	87
33.	Hapák Samuel	4.	Gamča BA	10	9			9	9	8	8	0		34	87
35.	Rudolfová Barbora	2.	GMet BA	4	0	9	9	8	8					34	86
36.	Peitl Tomáš	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	3	7	8	0			27	85
36.	Polačko Martin	3.	GAlej KE	9	3			7	7	1	1	3		19	85
36.	Popovič Viktor	2.	GJAR PO	6	2		8	3	4	8	0	1		24	85

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
39.	Rizman Tomáš	3.	GVar ZA	6	1		9	9	0	8	2	6		34	83
40.	Kočiský Tomáš	4.	Gamča BA	8	4			9	4	8	3	0		24	82
40.	Matejovičová Lenka	3.	GJH BA	10	5			9	9	7		1		26	82
42.	Kieferová Mária	3.	GsvFA ZA	4	0	8	8	0	7					23	81
43.	Hajdin Michal	3.	GJH BA	5	0	9	2		7			2		20	80
44.	Kossaczký Igor	3.	Gamča BA	4	0	9	7	8			0	1		25	79
45.	Haas Emil	3.	Gamča BA	7	1		9		4					13	74
46.	Petrucha Michal	3.	GMet BA	7	2									0	71
46.	Spišiak Michal	3.	Gamča BA	7	5									0	71
48.	Kuzma Tomáš	3.	GAlej KE	9	3			1	8		2	3		14	70
49.	Jakubík Jozef	4.	GKom PE	10	4									0	68
50.	Ziman Michal	2.	GBST LC	5	0	9		7	8	5				29	65
51.	Rigdová Emília	2.	GKuk PP	5	1		9	3	9	8				29	64
52.	Juríková Katarína	4.	GJGT BB	9	3									0	63
53.	Cocuľová Zuzana	2.	GPoš KE	5	0									0	62
54.	Bogár Ján	2.	GĽŠ TN	5	1			8	6		0			14	60
54.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	3	0	7	1	3	4			1		16	60
56.	Fekiač Jozef	3.	Gamča BA	6	1		9	2	5		0			16	56
57.	Kuklišová Nina	3.	GMet BA	7	1		0	3	6	1	0	1		11	52
58.	Herencsár Albert	3.	Gmaď GA	6	1									0	46
58.	Lešková Andrea	2.	G Lipany	5	0	9								9	46
60.	Majdiš Mojmír	2.	GPOH DK	4	0									0	45
61.	Floriánová Michaela	2.	Gamča BA	6	0									0	43
61.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	3	0	9	8	1						18	43
61.	Hudec Vladimír	3.	GVar ZA	6	1			3	0	5		4		12	43
64.	Kováč Jakub	3.	GCM NR	3	0									0	39
65.	Köry Jakub	4.	GJAR PO	4	1									0	38
66.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2	0	2								2	37
67.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	5	2									0	31
68.	Porembová Alexandra	2.	BiG Sučany	5	1									0	30
69.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	4	0									0	27
70.	Babiarová Dana	3.	GJab MY	4	0									0	25
71.	Baxová Katarína	3.	GĽŠ TN	3	0									0	24
71.	Kořínková Marta	2.	Gamča BA	4	0									0	24
73.	Hašík Juraj	2.	Gamča BA	5	0									0	19
74.	Zubnárová Katarína	4.	GJGT BB	5	0									0	11
75.	Kapustová Katarína	3.	GJGT BB	4	0									0	6
76.	Konôpková Júlia	3.	GJGT BB	4	0									0	5

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	9		134
2.	Le Tuan Anh	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	9		133
3.	Csiba Dominik	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9	8			132
3.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1	9	9	9		9	9			132
5.	Dresslerová Anna	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9	9			131
6.	Hlavatá Martina	1.	Gamča BA	3			9	9	9	9	8		130
7.	Večerík Matej	1.	ŠPMNDG BA	2		8	9	8		9	7		128
8.	Šormanová Mária	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9		0		122
9.	Phuong Mariana	1.	GJH BA	2		9	9	9	7	7			120
10.	Macháč Juraj	1.	GJH BA	1	7	9	9	9	9		1		119
11.	Hajdinová Katarína	1.	GJH BA	2		9	9	9	7	8			115
12.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1	4	9	9	9	9		6		108
13.	Buchman Marek	1.	ŠPMNDG BA	2		8	9	7	9				107

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
13.	Ďurikovičová Lucia	1.	GsvU BA	1	8	5	9	6	8		4		107
15.	Benčík Štefan	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9		9		0		105
16.	Kozák Andrej	1.	Gamča BA	3			9	9	9	8	6		102
17.	Sabatovičová Linda	1.	GJH BA	2		8	5	8	9	4	1		101
18.	Kubincová Petra	1.	ŠPMNDG BA	2		8	9	9	9				99
18.	Páleník Juraj	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9		9				99
20.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	3			9	7	7	1	3		93
21.	Masár Juraj	1.	GBil BA	2		9	9	7	9	8			92
21.	Mojžišová Hana	1.	GJH BA	2		9	9	3	9				92
23.	Heželyová Slávka	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	8		9				81
24.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA	2									12

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Jakubík Ján	1.	SPŠE PN	2		9	9	7	9	8			114
2.	Kováč Ondrej	1.	GCM NR	2		9	9	9	7	3			113
3.	Dižová Andrea	1.	GKom PE	2		9	9	9	9				109
4.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2		9	7	3	2				90
5.	Štrbová Silvia	1.	GPár NR	3			9	7	9	0			74
6.	Leššová Lívia	1.	GPár NR	2		9	9	9		0			71
7.	Horváthová Zuzana	1.	G Sereď	1									56
8.	Kováč Jakub	3.	GCM NR	3									23
9.	Baxová Katarína	3.	GĽŠ TN	3									17

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Filip	2.	GAB NO	3			9	9	7	9	8		132
2.	Ječmen Matej	1.	GVar ZA	2		8	9	9	9	0			117
3.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	2		9	9	7	9	7	0		108
4.	Bohiniková Alžbeta	1.	GVar ZA	2		9	9	5	9	9			105
5.	Santer Jakub	1.	GMH Trstená	2		9	9	9		9	2		95
6.	Kubinová Mária	1.	GPOH DK	2		9	9	7	9				90
7.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	3			9	3	9	8	1		86
8.	Lešková Katarína	1.	BiG Sučany	2									76
9.	Fodorová Jana	1.	GJGT BB	2			9						59
10.	Majerová Karolína	1.	GJCh BR	1	6		7	3					57
11.	Ľuba Martin	2.	GAB NO	2									37
12.	Bačinská Lenka	2.	GŠkol PB	3									35
13.	Sabaka Peter	1.	GJCh BR	1									21
14.	Anderle Michal	1.	GBST LC	1									17

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Midlik Adam	2.	GJAR PO	3					9	9	2		65
2.	Rohár Pavol	2.	GAlej KE	3			9	7	0				55
3.	Stehlík Matúš	1.	GAlej KE	2		9	6	9					46

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE							57
2.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	0	2	7				51
3.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN							112
4.	Hagara Michal	2.	GJH BA	0						69
5.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	3	1					145
6.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	6	2	7		0		93
7.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	8		7	7	1		169
8.	Sládek Filip	2.	GAB NO							73
9.	Tkadlec Josef	3.	Praha ČR	7		7				77
10.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV		8					161
11.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA							0