Korešpondenčný Matematický Seminár

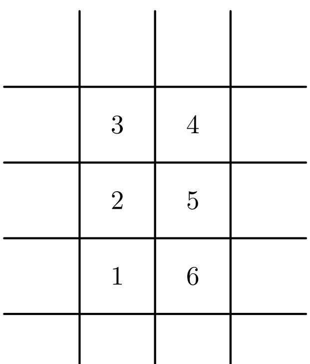
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti 2007/2008

Úloha č. 1: *Trojuholník ABC je rozdelený na dva trojuholníky ADC a BCD, ktoré sú rovnoramenné a majú rovnaký obsah. Veľkosť uhla ADC je $100°$. Aká je veľkosť uhla ABC?*

Riešenie: (opravovala Kaja a Ika)
Úloha by bola ľahšia, keby sme vedeli, ktoré strany v rovnoramenných trojuholníkoch ADC a BCD sú ramená. Žiaľ, jediné čo sme sa zo zadania dozvedeli je, že veľkosť uhla ADC je $100°$ a že spomínané trojuholníky majú rovnaký obsah. Skúsme z toho zistiť, ktoré strany sú ramená. Sústreďme sa teraz na trojuholník ADC. Ak by bol uhol ADC pri základni, musel by byť v tomto trojuholníku ešte jeden tak isto veľký uhol. Toto ale nemôže nastať, pretože súčet vnútorných uhlov trojuholníka je $180°$ a my by sme už sčítaním dvoch uhlov dosiali $200°$. Preto uhol ADC nemôže ležať pri základni, čiže to musí byť uhol zvieraný ramenami. Takže už vieme, že ramená v trojuholníku ADC sú AD a DC. Z veľkosti uhla ADC ešte vieme vypočítať veľkosť uhla CDB ($|\sphericalangle CDB| = 180° - |\sphericalangle ADC| = 80°$). Stále nevieme, kde sa nachádza základňa v trojuholníku BCD. Tak skúsme zistiť, čo sa skrýva za tým, že naše dva trojuholníky majú rovnaké obsahy. Obsah trojuholníka vieme vyrátať ako polovicu zo súčinu strany a na ňu kolmej výšky. Všimnime si naše trojuholníky ADC a DBC. Vyška z vrchola C na stranu AB v pôvodnom trojuholníku je aj výškou z vrchola C na strany AD a DB (zamyslite sa prečo). Označme túto výšku v. Keďže ADC a DBC majú rovnaké obsahy, platí $v \cdot |AD|/2 = v \cdot |DB|/2$. Úpravou tejto rovnice zistíme, že $|AD| = |DB|$. Z predchádzajucich úvah už vieme, že $|AD| = |DC|$. Preto platí aj $|DB| = |DC|$. Takže už vieme, že DB a DC sú ramenami trojuholníka DBC. Poznáme aj veľkosť uhla CDB. Teraz už ľahko dopočítame veľkosť uhla ABC. Platí $|\sphericalangle ABC| = (180° - |\sphericalangle CDB|)/2 = (180° - 80°)/2 = 50°$.

Úloha č. 2: *Na zemi je nakreslená nekonečná štvorčeková sieť, pričom na jednom z políčok stojí kocka, ktorej stena je rovnako veľká ako toto políčko. Kocka je celá čierna, len vrchnú stenu má natretú nabielo. Kocku začneme kotúľať po šachovnici a chceme, aby sa vrátila na pôvodné miesto tak, že biela stena bude naspodku. Vieme to dosiahnuť presne po 2008 krokoch? A čo tak po 2007 krokoch?*

Riešenie: (opravoval ZuzkaC)
a) Na skúšanie, či to ide, je 2008 dosť veľké číslo. Pokúsme sa teda nájsť želané riešenie pozostávajúce z menšieho počtu krokov a výsledné 2008-krokové riešenie získať jeho šikovným prerobením. Hneď na začiatok je veľmi dobré si uvedomiť, že ak kocku odkotúľame v niektorom smere a potom ju jednoducho prikotúľame naspäť v opačnom smere, výsledná pozícia bielej steny bude rovnaká ako na začiatku. Takto vieme urobiť ľubovoľný párny počet krokov bez toho, aby sme zmenili výslednú pozíciu bielej steny. (Párny preto, lebo ak odkotúľame kocku v jednom smere o k krokov, budeme potrebovať presne k krokov na to, aby sme sa vrátili späť. Spolu je to $2k$ krokov.) Prečo je toto zistenie také užitočné? Totiž ak sa nám podarí nájsť nejaký spôsob, ako dostať kocku do želanej pozície po malom párnom počte krokov, môžeme potom doplniť zvyšné kroky práve takto – odkotúľame kocku v jednom smere a prikotúľame ju späť. Biela stena ostane na spodnej strane kocky a my budeme mať za sebou 2008 krokov. Na nájdenie konkrétnych ťahov, ako dostať kocku do požadovanej pozície stačí chvíľka skúšania. Jednou z možností, ako dostať bielu stenu na spodnú stranu kocky, je kotúľať kocku postupne po políčkach $1, 2, 3, 4, 5, 6, 1$ (pozri obrázok).



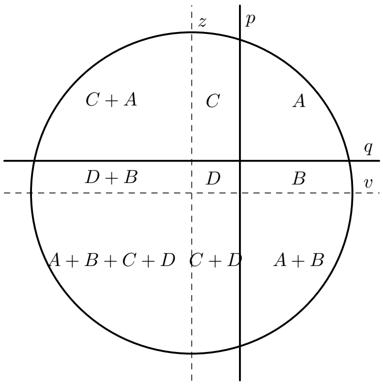
Takto sme urobili šesť krokov. Zvyšných 2002 urobíme tak, že odkotúľame kocku o 1001 políčok v ľubovoľnom smere a potom ju prikotúľame späť. Samozrejme, existuje veľa iných možností, ako dosiahnuť želaný výsledok po 2008 krokoch. Na to, aby sme ukázali, že sa to dá, nám ale úplne stačí nájsť jeden spôsob, ako to ide. A ten sme práve našli :). Viacerí z vás si všimli, že 2008 je deliteľné ôsmimi a založili svoje riešenie na tom, že našli spôsob, ako dostať bielu stenu nadol po ôsmich krokoch. Tento postup potom opakovali 251−krát. Toto riešenie je správne, no zároveň trochu zradné. Treba si pri ňom totiž uvedomiť jednu dôležitú vec. Ak nájdeme postup, ako z pôvodného postavenia kocky (biela stena navrchu) prísť k výslednému postaveniu (biela stena dole), znamená to, že sme našli postup, ako dostať hornú stenu nadol. Čo sa stane, ak tento postup zopakujeme druhýkrát? Čierna stena, ktorá je teraz navrchu, sa dostane nadol, a biela stena sa dostane naspäť hore. Takže týmto postupom nevieme dostať bielu stenu nadol pri každom počte krokov, ktorý by bol násobkom čísla osem, no musí to byť nepárny násobok. Platí $2008 = 8 \cdot 251$ a 251 je nepárne číslo. V našom prípade to teda funguje.
b) Už v prvej časti úlohy sme trochu načrtli riešenie druhej časti. Uvažovali sme totiž, že koľko krokov prejdeme v jednom smere, toľko krokov musíme prejsť aj v opačnom smere, ak sa chceme vrátiť späť. To platí, ak sa pohybujeme dopredu a dozadu, ale aj doprava alebo doľava. Preto celkový počet krokov, ktoré musíme urobiť, aby sme sa vôbec mohli vrátiť na pôvodné miesto, musí byť párny. Číslo 2007 je nepárne a tak nedokážeme kocku ani

len dokotúľať na pôvodné miesto po takomto počte krokov. To znamená, že ju tam nevieme dokotúľať ani bielou stenou nadol. Iný dôkaz dostaneme pomocou ofarbenia štvorčekovanej siete. Skúsme ofarbiť našu sieť rovnako ako je ofarbená šachovnica. Čo sa stane v každom kroku? Bez ohľadu na to, ktorým smerom sa pohneme, kocka bude stáť na políčku inej farby ako predtým. Ak teda na začiatku stála na bielom políčku, po každom nepárnom kroku bude stáť na čiernom políčku a naopak, po každom párnom kroku bude na bielom políčku. Po 2007 krokoch tak bude kocka na čiernom políčku. To znamená, že nemôže byť na svojej pôvodnej pozícii. A to je všetko :).

Úloha č. 3: *Ondráč od svojho pobytu v Ostrave nemá pizzu Quattro Formaggi veľmi v láske. Povedal si však, že jej dá ešte šancu. Na celú si ale netrúfa, zobral preto so sebou aj Škrečka, ktorý vždy rád pomôže. Aby to nekomplikovali, rozhodli sa, že pizzu rozdelia dvoma priamymi na seba kolmými rezmi, z ktorých žiaden neprechádza stredom, na štyri časti a každý si vezme dva protiľahlé kúsky. Škrečok si vybral tie dva, z ktorých jeden obsahoval stred pizze. Dokážte, že získal väčšiu časť pizze.*

Riešenie: (opravovali Lucy a Hanka)

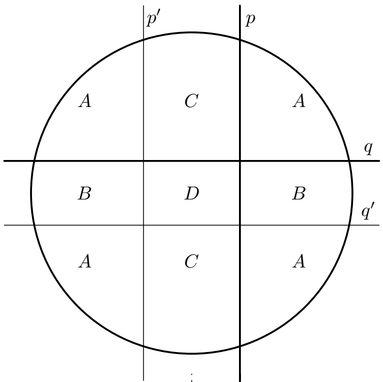
Po prečítaní zadania sa nám začnú zbiehať slinky na pizzu, ale vydržíme to a miesto napchávania sa si vezmeme papier, ceruzku a nakreslíme si veľký obrázok. (Ako v každej geometrickej úlohe, že?) Tak a teraz sa skúsime zamyslieť, ako vlastne v tomto príklade môžeme postupovať. Chceme ukázať, že obsah jedného „zvláštneho“ útvaru je väčší ako obsah druhého zvláštneho útvaru. Čo s tým? Môžeme napríklad skúsiť nejakým šikovným spôsobom vyjadriť obsah Ondráčovej a Škrečkovej pizze tak, aby sme ich potom vedeli porovnať. Ďalšou dobrou myšlienkou je, že jeden útvar je väčší ako druhý vtedy, keď sa doň „zmestí“ a ešte nám niečo „ostane“.



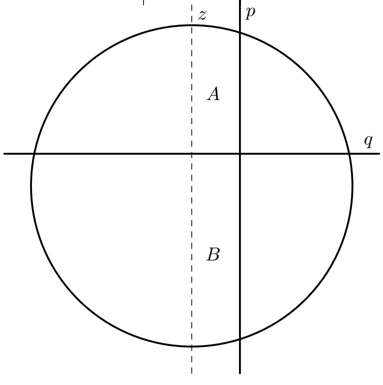
Prvé riešenie: Ako vidíme na obrázku, nakreslili sme si pizzu a rozdelili sme ju dvomi kolmými rezmi p a q. Máme teda štyri kúsky pizze. Vieme, že keby tieto rezy viedli stredom, boli by tie časti rovnaké. Tak si tam tie rezy stredom nakreslime rovnobežne s už existujúcimi (rezy z a v) a poďme skúsiť nejako vyjadriť obsahy pôvodných kúskov. Označme v pravej hornej štvrtine obsahy kúskov písmenami A, B, C a D. Spolu dávajú práve jednu štvrtinu pizze, takže hneď vieme napísať aj obsah ľavej dolnej štvrtiny, ktorý bude $A + B + C + D$. O kúsku v ľavom hornom rohu vieme povedať, že jeho obsah je $A + C$. Prečo? Lebo rez z delí pizzu na dve polovice a rez q je na z kolmý, a teda rez z delí na dve polovice aj časť pizze nad rezom q. Podobne to platí pre zvyšné tri kúsky, ktoré sme ešte nepopísali. Tak a teraz už len zrátať, kto dostal koľko pizze. Škrečok dostal dva protiľahlé kúsky, z ktorých jeden obsahoval stred pizze. V našom prípade teda pravú hornú a ľavú dolnú časť, čo bolo spolu

$$A + (D + B) + D + (C + D) + (A + B + C + D) = 2A + 2B + 2C + 4D.$$

Ondráč dostal $(C + A) + C + (A + B) + B = 2A + 2B + 2C$. Z toho hneď vidíme, že Škrečok dostal o $4D$ pizze viac ako Ondráč.



Druhé riešenie: Skúsme pizzu rozdelenú na štyri časti dvomi kolmými rezmi neprechádzajúcimi stredom rozdeliť ešte inak. Takým spôsobom, aby sme v oboch „zvláštnych“ útvaroch našli rovnaké časti. Keďže kruh je stredovo aj osovo súmerný (a to podľa každého priemeru), čo tak nakresliť obrazy rezov p a q v stredovej súmernosti so stredom S? Potom sa najmenší kúsok A bude nachádzať v štyroch „kópiách“, kúsky B a C v dvoch a kúsok D bude „sám“. Keď si všimneme, kúsok D bude práve tá časť pizze, o ktorú dostane Škrečok viac. (Premyslite si prečo.)



Tretie riešenie: Už sme viackrát spomenuli, že keby sme oba rezy viedli cez stred, boli by obsahy Ondráčovho a Škrečkovho kúska pizze rovnaké. Tiež však platí, že keď len jeden rez pôjde stredom, budú oba útvary mať opäť rovnaký obsah. Čo sa teraz stane ak vedú oba rezy mimo stred pizze? Akoby sme k Škrečkovej pizzi pridali kúsok B a odobrali od neho kúsok A. Keďže však obsah B je väčší ako obsah A, bude mať Škrečok viac ako mal predtým. No a predtým mali s Ondráčom rovnako veľa, takže teraz bude mať určite viac. (Premyslite si prečo.)

Komentár: Chceli by sme ešte upozorniť na fakt, že nech si predstavíme rezy cez pizzu akokoľvek, vždy ju vieme otočiť alebo preklopiť tak, aby vyzerala ako tá na našom obrázku. Takúto úvahu je fajn na začiatku spomenúť, napriek tomu, že môže znieť úplne samozrejme. Ešte dôležitejšie je si ju takto vedieť sformulovať, pretože môžu prísť príklady, v ktorých bude treba urobiť podobnú, len trošku zložitejšiu, a pomocou nej daný príklad zásadným spôsobom zjednodušíme. Inak sme celkom spokojné, ako ste sa s týmto príkladom popasovali :).

<u>Úloha č. 4:</u> *Štvorciferné číslo n, ktoré neobsahuje vo svojom zápise v desiatkovej sústave číslicu 9, je druhou mocninou prirodzeného čísla. Keď zväčšíme každú jeho číslicu o 1, dostaneme opäť druhú mocninu prirodzeného čísla. Nájdite všetky štvorciferné čísla s touto vlastnosťou.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kubman a Ajka)
Vo vašich riešeniach sa vyskytli viaceré prístupy k tejto úlohe. Ukážeme si jedno zrozumiteľné riešenie a druhé naznačíme.
Každú cifru nášho štvorciferného čísla n zväčšujeme o jedna, čo je to isté, ako by sme k nemu pripočítali jednu tisícku, jednu stovku, jednu desiatku a jednu jednotku. Celkovo naše číslo zväčšíme o 1111. Preto hľadáme také štvorciferné číslo n, že n aj $n + 1111$ sú druhé mocniny. Predstavme si, že sme také n našli a označme $n = y^2$ a $n + 1111 = x^2$, kde x a y sú prirodzené čísla. Čiže vieme, že rozdiel mocnín x^2 a y^2 je 1111. Napíšme si rovnicu a upravme rozdiel štvorcov na súčin:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1111, \\ (x-y)(x+y) &= 1111. \end{aligned}$$

Keďže sa pohybujeme v prirodzených číslach, tak $(x + y) > (x - y)$. Číslo 1111 sa dá ako súčin dvoch prirodzených čísel napísať iba dvoma spôsobmi, a to $1 \cdot 1111$ a $11 \cdot 101$. (Rozmyslite si prečo.) Preto máme dve možnosti. Prvou je prípad $(x + y) = 1111$ a $(x - y) = 1$. Riešením tejto sústavy je $x = 556$ a $y = 555$. Vypočítaním $556^2 - 555^2 = 1111$ zisťujeme, že rozdiel týchto čísel má požadovanú vlastnosť, ale číslo 555^2 zďaleka nie je štvorciferné. Zostáva nám druhá možnosť: $(x + y) = 101$ a $(x - y) = 11$. Riešením tejto sústavy je $y = 45$ a $x = 56$. Platí $56^2 - 45^2 = 3135 - 2025 = 1111$. Preto $n = 45^2 = 2025$ naozaj vyhovuje podmienkam a je jediné, lebo sme preverili všetky možnosti. (Splnili sme aj podmienku, že každá cifra je menšia ako 9.)

<u>Poznámka:</u> Trochu iný postup dostávame, ak menšie z čísel označíme n a väčšie $n + k$. Tak dostávame rovnicu $k(n + k) = 1111$. Ďalej postupujeme podobne ako v uvedenom riešení.

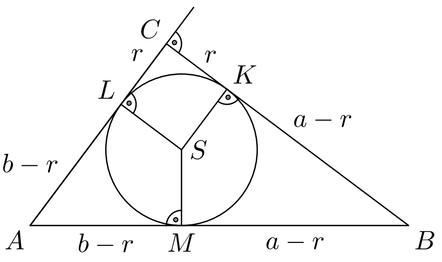
<u>Komentár:</u> Veľa z vás riešilo úlohu vypísaním a testovaním všetkých štvorciferných mocnín, čo tiež vedie k výsledku, ale nie ideálnou cestou. Okrem toho sa nedá použiť pre podobné príklady, v ktorých vystupujú viac-ciferné čísla, zatiaľ čo uvedené postupy áno. A ešte jeden problém – skúste si uvedomiť, že skontrolovať takéto riešenie[1] je *úplne rovnako ťažké* ako napísať ho. A to zrejme nie je priveľmi žiadaná vlastnosť matematického dôkazu. Prosím, snažte sa riešiť príklady matematicky a nie drevorubačsky (vytrvalá a usilovná práca je fajn, no často existuje aj rýchle a jednoduché riešenie).

<u>Úloha č. 5:</u> *Nech r je polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC a h je výška na preponu AB. Táto výška delí trojuholník ABC na dva menšie trojuholníky. Nech r_1 a r_2 sú polomery kružníc vpísaných týmto trojuholníkom. Dokážte, že platí*

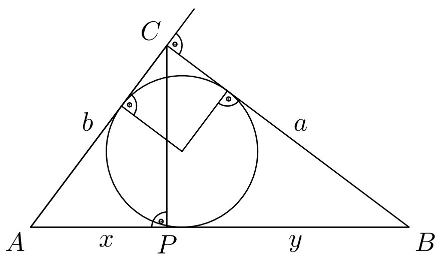
a) $r_1 + r_2 + r = h$,

b) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kika a Miki)



a) Označme S stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a K, L, M postupne body, v ktorých sa táto kružnica dotýka strán c, a, b. Uhly v štvoruholníku $MSLC$ sú pravé a $|SM| = |SL| = r$, čo znamená, že je to štvorec. Všimnime si, že priamky BK a BL sú dotyčnice ku kružnici z bodu B, a preto musia byť dĺžky úsečiek BK a BL rovnaké (rozmyslite si to). Teda $|BK| = |BL| = a - r$. Podobnú úvahu môžme spraviť aj pri vrchole A, čím dostaneme $|AM| = |AK| = b - r$. Tiež vieme, že $|AK| + |BK| = c$, čiže $a - r + b - r = c$. Z toho vyjadríme r len pomocou strán pravouhlého trojuholníka: $r = (a + b - c)/2$.



Ďalej v trojuholníku ABC nazvime P pätu výšky na stranu AB a označme $|AP| = x$ a $|PB| = y$. Trojuholníky ABC, ACP a CBP sú navzájom podobné, lebo majú rovnaké uhly (jednoducho si to dopočítajte). Pre výpočet polomeru ich vpísaných kružníc môžeme použiť ten vzorec, ktorý sme odvodili pre trojuholník ABC: súčet odvesien mínus prepona a to celé delenо dvoma. Dostaneme $r_1 = (x + h - b)/2$ a $r_2 = (y + h - a)/2$. A sme doma, pretože teraz $r + r_1 + r_2 = (a + b - c)/2 + (x + h - b)/2 + (y + h - a)/2 = (2h + x + y - c)/2 = h$, čo sme potrebovali dokázať.

b) Keďže trojuholníky ABC, CBP a ACP sú podobné, ich strany a polomery sú v rovnakom pomere. Matematicky zapísané $c/r = a/r_2 = b/r_1 = k \in \mathbb{R}$. Potom $c = kr$, $a = kr_2$ a $b = kr_1$. Z Pytagorovej vety vieme, že $a^2 + b^2 = c^2$. Po dosadení $k^2r_2^2 + k^2r_1^2 = k^2r^2$. Po vykrátení k^2 nám zase ostane to, čo sme chceli dokázať, teda rovnsť $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

<u>Komentár:</u> Táto úloha bola veľmi pekná (ako väčšina geometrických príkladov) a to z toho dôvodu, že sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Zvlášť oceňujeme niektoré trikové (porovnanie obsahov kružníc alebo využitie kosínusu a sínusu).

[1] respektíve uveriť mu

__Úloha č. 6:__ *Každé prirodzené číslo je zafarbené buď červenou alebo zelenou farbou tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Súčet troch červených (nie nutne rôznych) čísel je vždy červené číslo.*
2. *Súčet troch zelených (nie nutne rôznych) čísel je vždy zelené číslo.*
3. *Aspoň jedno číslo je zelené a aspoň jedno číslo je červené.*

Nájdite všetky ofarbenia, ktoré spĺňajú tieto podmienky.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Miťo)
Kľúčovým pozorovaním pri riešení tejto úlohy je, že zafarbenie nejakého čísla (čísel) „vynucuje" zafarbenie iných čísel. Napríklad, ak číslo u zafarbíme červenou, tak aj $u + u + u = 3u$ a $u + u + 3u = 5u$ musia byť červené. Ak teda chceme zafarbiť všetky čísla, mohli by sme postupovať aj tak, že skúsime zafarbiť čo najmenej čísel, ktoré nám vynútia zafarbenie všetkých ostatných. Ideálne by bolo, keby toto vynútené zafarbenie spĺňalo podmienky zo zadania. Dajme sa teda do toho.
Zafarbime číslo jedna červenou[2] farbou. Pozrime sa teraz na to, ktoré iné čísla sme ešte (nepriamo) zafarbili. Napríklad $3 = 1 + 1 + 1$ tiež musí byť červené, podobne $5 = 1 + 1 + 3$ a $7 = 1 + 1 + 5$. Asi nás napadne, že sme zafarbili všetky nepárne prirodzené čísla, skúsme to dokázať. Ak máme zafarbenú jednotku a číslo $2b - 1$, máme zafarbené aj číslo $1 + 1 + (2b - 1) = 2b + 1$. Takže sme naozaj zafarbili všetky nepárne čísla. Treba ešte dokázať, že sme nezafarbili žiadne iné – to ale nie je ťažké. Totiž súčet troch nepárnych čísel je opäť nepárne číslo. Poďme ďalej.
Číslo dva sme ešte nezafarbili a podľa zadania zafarbené byť musí. Ak by sme ho zafarbili červenou farbou, muselo by byť červené aj číslo $1+1+2 = 4$. Podobne ako v predchádzajúcom odstavci by sme vedeli dokázať, že by červené boli aj všetky ostatné párne čísla. Keďže ale aspoň jedno číslo musí byť zelené, musí byť zelené aj číslo dva.
Aké čísla sa stanú zelenými kvôli dvojke? Využijeme osvedčený postup a zisťujeme, že to sú $2 + 2 + 2 = 6$, ďalej $2 + 2 + 6 = 10$ a postupne 14, 18,… Dokážme, že zafarbíme práve všetky takéto čísla; potrebujeme si všimnúť, že medzi nimi nie je žiadne deliteľné štvorkou. Navyše sú všetky tieto čísla párne, takže majú tvar $4k + 2$ pre nejaké vhodné k. Súčet troch takýchto čísel je ale opäť tvaru $4l + 2$ pre nejaké l (dokážte to). Takže sme naozaj nezafarbili žiadne číslo deliteľné číslom štyri.
Akú farbu môže mať štvorka? Keby bola červená, aj číslo $1 + 1 + 4 = 6$ by muselo byť červené. To už ale je zelené, takže to asi nepôjde. Ak bude zelená, budú aj všetky ostatné čísla deliteľné číslom štyri zelené. (Dokážte to – zapíšte všetky takéto čísla ako súčet zelených čísel.) Takže máme červené nepárne čísla a zelené párne čísla; pritom to je jediný spôsob, ako čísla zafarbiť. Treba ešte overiť, či je toto zafarbenie korektné, t.j. či žiadne číslo nemá dve farby. (Splnenie ostatných podmienok zo zadania sme už dokázali.) Vieme už, že súčet červených čísel je opäť červené číslo, pre zelené to platí v podstate rovnako. Zelené sú párne a súčet troch párnych čísel je párne číslo. Prehrali sme.

<u>Komentár:</u> Ak sa dve zafarbenia líšia iba v tom, ktorá farba je ktorá, považujeme ich (v tomto riešení) za rovnaké, pretože jedno vieme získať z druhého výmenou farieb.

__Úloha č. 7:__ *Dada má krúžok a na ňom n kľúčov ($n \geq 3$). Keď ho vyberie z vrecka, nevie, či sa jej náhodou nepootočil alebo neobrátil. Jediný spôsob, ako rozlíšiť kľúče, je zafarbiť ich (každý kľúč dostane jednu farbu). Aký je najmenší možný počet farieb, ktoré Dada potrebuje?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali OndroM a Bebe)
Je jasné, že na ofarbenie kľúčov nestačí jedna farba. Skúsme kľúče ofarbiť dvoma farbami, čiernou (C) a bielou (B). Ak chceme rozlíšiť kľúče, potrebujeme vedieť jednoznačne určiť každý kľúč. Ako to urobiť? Skúsme pomocou farieb vyznačiť nejaký kľúč na zväzku tak, aby sme presne vedeli, ktorý to je. V nasledovných úvahách budeme mať problémy s malými n, preto predpokladajme $n > 5$. Zoberme jeden kľúč a ofarbime ho na bielo. Rozlíšme ho od ostatných tak, že kľúče, ktoré sú vedľa neho, zafarbíme na čierno. Zvyšné kľúče môžeme ofarbiť na bielo. Teraz vieme náš kľúč medzi ostatnými vždy rozlíšiť. V tomto zväzku máme ale menší problém. Neviem rozlíšiť naše dva susedné čierne a taktiež niektoré biele (premyslite si to). Teda ak obrátime celý zväzok, dostaneme rovnaké rozostavenie kľúčov. A toto sa nemôže stať. Ale ako ich teraz rozoznať? Využime náš biely kľúč, o ktorom vieme, kde je. Pridajme z jeho jednej strany ešte jeden čierny kľúč (to znamená že bude vedľa seba $CBCC$). Čo sa týmto zmenilo? Čo sa pokazilo? Náš vyznačený kľúč zostane vyznačený, lebo iný biely kľúč nemá oboch susedov čiernych. Avšak z jednej strany bude mať dvoch čierny susedov. Teraz keď Dada vytiahne zväzok, tak má na ňom určený „pevný" biely kľúč (jediný biely obklopený dvoma čiernymi; uvedomte si, že tu využívame $n > 5$) a akýsi smer. Smer je určený dvoma čiernymi susedmi. No teraz sme už vyriešili aj problém s bielymi kľúčmi. Vieme totižto o každom povedať, aké je jeho poradie vzhľadom na biely kľúč a dva čierne, a teda ktorý kľúč je ktorý.
Problém nastane pri $n \leq 5$. V prípade $n = 5$ čierne kľúče z druhej strany ohraničujú iba jeden biely kľúč (zväzok vyzerá takto: $CBCCB$). Takže dva biele kľúče nevieme rozlíšiť. Podobne aj pri $n = 4$ a $n = 3$ máme problém s označením jedného kľúča a určením smeru. Zrejme v týchto zvyšných prípadoch musíme použiť aj tretiu farbu. S troma farbami vyznačíme jedinečný kľúč, napríklad žltou farbou. Smer určíme farbou B a zvyšné kľúče ofarbíme farbou C. Vidíme, že je to dobrý spôsob s ktorým jednoznačne určíme všetky kľúče. (Tento spôsob síce vieme použiť

[2] bez ujmy na všeobecnosti

aj pre $n > 5$, ale tu si vystačíme aj s dvoma farbami.) Aby bolo naše riešenie kompletné, treba ukázať, že pre $n \leq 5$ nám dve farby nestačia. Budeme to robiť rozumným rozoberaním možností. Ešte predtým si uvedomme, že farby môžeme hocikedy vymeniť (čiernu za bielu)a tak si môžeme povedať, že kľúčov čiernej farby nebude viac ako kľúčov bielej farby (totiž ak by bolo, stačí farby vymeniť).
a) Nech $n = 3$. Keďže používame len dve farby, tak nejaké dva kľúče budú farby C a zvyšný bude B (CBC). Ale keď zväzok obrátime, dostaneme rovnaké usporiadanie kľúčov (tiež CBC). Teda dve farby pre tri kľúče nestačia.
b) Nech $n = 4$. Môžeme tu rozlíšiť dve možnosti. Ak je jeden kľúč farby B a tri kľúče sú farby C, tak dostávame podobnú situáciu ako v a). Ak sú dva kľúče farby C a dva farby B, dostávame dve možnosti. Buď $C_1B_1C_2B_2$ (kľúče sú na "preskačku"), čo je po obrátení rovnaké ako $C_1B_2C_2B_1$, alebo $B_1B_2C_1C_2$, čo je rovnaké ako $B_2B_1C_2C_1$.
c) Mech $n = 5$. Znova rozlišujeme dve možnosti. Ak je len jeden kľúč jednej farby, a štyry kľúče zvyšnej farby, je to opäť jednoduché. Nech sú dva kľúče farby B a tri sú farby C. Celá situácia vyzerá ako $C_1C_2C_3B_1B_2$ (kľúče rovnakej farby sú pri sebe), čo je po obrátení rovnaké ako $C_3C_2C_1B_2B_1$, alebo na preskačku $B_1C_1B_2C_2C_3$, čo je totožné s $B_2C_1B_1C_3C_2$. (Overte, že sú to naozaj všetky možnosti!)
Zistili sme, že pre tri, štyri a päť kľúčov potrebujeme tri farby a pre šesť a viac kľúčov nám postačia dve farby.

__Úloha č. 8:__ *Pokúsme sa do roviny umiestniť $n \geq 3$ bodov tak, aby žiadne tri neležali na jednej priamke a aby medzi týmito n bodmi bolo čo najviac trojíc ktoré tvoria vrcholy rovnoramenného trojuholníka. Označme $f(n)$ najväčší možný počet rovnoramenných trojuholníkov ktorý takto vieme dosiahnuť s n bodmi. Dokážte, že existujú kladné reálne konštanty a, b také, že pre všetky $n \geq 3$ platí $an^2 < f(n) < bn^2$.*

__Riešenie:__ (opravoval Jaro)
Najskôr skúsme toto komplikované zadanie pochopiť a zistiť, čo vlastne máme dokazovať. Máme zadefinovanú nejakú funkciu f, ktorej hodnota v bode n vyjadruje maximálny počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vieme dostať z n bodov (pričom žiadne tri neležia na priamke). Skúste si vyrátať f pre pár malých n (3, 4, ...). Máme dokázať, že táto funkcia rastie „podobne rýchlo" ako funkcia n^2. Teraz ukážeme, že čísla a, b nie len existujú, ale vyhovujú práve vtedy, keď $a < 1/9$ a $b \geq 1$.

a) (Existencia a.) Pretože a je kladné, nemožno vziať nulu. Keďže $f(3) = 1$, tak určite $a \cdot 3^2 < f(3)$, alebo $a < 1/9$. Dokážeme, že takéto a stačí aj pre väčšie n. Rozostavme $n-1$ bodov na štvrťkružnicu okolo jedného (žiadne tri nie sú na priamke). Z $n-1$ vrcholov na kružnici vieme vybrať dva vrcholy $\binom{n-1}{2}$ spôsobmi. Každý takýto výber nám spolu s bodom v strede dá jeden rovnoramenný trojuholník a preto $f(n) \geq (n-1)(n-2)/2$. Z podmienky $n \geq 3$ však jednoducho dostaneme, že $n - 1 \geq 2n/3$ a $n - 2 \geq n/3$. Využitím spomenutých odhadov dostávame

$$f(n) \geq \binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{3} \cdot \frac{n}{3} = \frac{n^2}{9} > an^2.$$

Uázali sme, že ľubovoľné $a < 1/9$ vyhovuje.

b) (Existencia b.) Všetkých úsečiek spájajúcich našich n bodov je $\binom{n}{2}$. Ak by takáto úsečka bola základňou rovnoramenného trojuholníka, jeho vrchol zovretý ramenami bude ležať na osi základne. Keďže zo zadania na osi nemôžu ležať viac ako dva body, takáto úsečka môže byť základňou najviac dvoch rovnoramenných trojuholníkov. Keďže rovnoramenný trojuholník má aspoň jednu základňu (problém robí len rovnostranný trojuholník), bude ich najviac dvojnásobok počtu možných základní, teda $f(n) \leq 2\binom{n}{2} = n^2 - n < 1 \cdot n^2$. Teda stačí vziať $b > 1$.

Dáme si tú námahu (toto ste nemuseli robiť) a ukážeme, že b nemôže byť menšie ako jedna. Majme $n = 6k$ bodov, $k \in \mathbb{N}$. Uložme ich do pravidelného nepárnouholníka s jedným bodom S v strede (tak nevzniknú žiadne rovnostranné trojuholníky, prečo?). Vyberme si dvojicu bodov A, B rôznych od S. Volieb je $\binom{n-1}{2}$ a $|AS| = |BS|$, čo znamená, že máme rovnoramenný trojuholník. Všimnime si, ako AB rozdelí kružnicu opísanú mnohouholníku. Vnútri jedného oblúku je nepárny počet vrcholov, teda prostredný je na osi AB, čo nám dáva druhý trojuholník a tak pre každú z $\binom{n-1}{2}$ základní máme 2 rovnoramenné (nerovnostranné) trojuholníky. Nájdime také n, že $b < 1$ nevyhovuje:

$$\begin{aligned} f(n) \geq 2\tbinom{n-1}{2} = (n-1)(n-2) \geq (n-2)(n-2) &\geq bn^2, \\ \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 &\geq b, \\ 1 - \frac{2}{n} &\geq \sqrt{b}. \end{aligned}$$

Pre každé $b < 1$ tak máme dosť veľké n, aby $f(n) > bn^2$.

__Poznámka:__ Funkcia $f(n)$ rastie asi ako n^2 pre veľké n (píšeme $f(n) \sim n^2$). Dajú sa nájsť rôzne silné odhady na $f(n)$. Skúste si to aj vy. Dokážete zlepšiť tieto? Platí

$$\begin{aligned}
(n-2,5)(n-1) &\leq f(n) \text{ pre } n = 6k-5\\
(n-2)(n-1) &\leq f(n) \text{ pre } n = 6k-4\\
1,\overline{3} + (n-3,1\overline{6})(n-1) &\leq f(n) \text{ pre } n = 6k-3\\
(n-2,\overline{6})(n-1) &\leq f(n) \text{ pre } n = 6k-2\\
(n-2,5)(n-1) &\leq f(n) \text{ pre } n = 6k-1\\
(n-2)(n-1) &\leq f(n) \text{ pre } n = 6k.
\end{aligned}$$

Úloha č. 9: *Máme ostrouhlý trojuholník ABC. Body B', C' sú v tomto poradí súmerné s bodmi B, C v osovej súmernosti podľa priamok AC, AB. Kružnice opísané trojuholníkom ABB' a ACC' sa pretínajú v bodoch A a P. Dokážte, že priamka PA prechádza stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC.*

Riešenie: (opravoval Bus)

Táto úloha nebola veľmi ťažká, priam by sa dalo povedať, že šla vyriešiť úplne priamočiaro. Keďže rovnaké riešenie ako vzorové objavilo veľa z vás, nebudem nijako zdôrazňovať, že som ho odkukal ako od prvého práve od Matúša Benka z GJAR v Prešove.

Začnime narysovaním obrázku. (Presne tak, tým myslím rysovanie pravítkom. Ak chcete mať obrázok fakt pekný, požičajte si od spolužiaka aj kružidlo.) Najskôr zostrojme trojuholník ABC a body B', C'. Toto by ste mali všetci zvládnuť, nebudem to teda veľmi rozoberať. Pokračujme kružnicou opísanou trojuholníku ABB'. Jej stred, ktorý si môžme označiť napríklad S_B, nájdeme tak, že pretneme osi strán AB, BB' a $B'A$. Pri rysovaní osí týchto strán by ste si určite mali všimnúť, že os strany BB' už máme narysovanú – je to priamka AC. (Áno, presne preto sa tomu hovorí „osová“ súmernosť.) To znamená, že stred S_B bude ležať na priamke AC. Podobne nájdeme aj stred druhej opísanej kružnice S_C, ktorý bude zase ležať na priamke AB. Zostrojenie opísaných kružníc by už ďalej nemal byť problém, ich prienikom bude okrem bodu A druhý bod, ktorý si podľa zadania označíme P. Puntičkári by si teraz mali premyslieť, prečo majú tieto dve kružnice prienik práve dva body. Posledná vec, ktorá nám na obrázku chýba, je bod O, ktorý je prienikom osí strán trojuholníka ABC. Osy strán AB a AC už ale máme narysované, stačí nám teda len nájsť ich priesečník.

Teraz keď sme všetko úspešne zostrojili, mali by sme si zopakovať niekoľko podozrivých skutočností, ktoré sme si počas rysovania všimli. Prvá bola tá, že body S_B, S_C ležia na priamkach AC, AB. Druhá zase tá, že osy strán AB a AC sme využili ako na nájdenie bodov S_B a S_C, ako aj na zostrojenie bodu O. Tieto dve veci nám dohromady hovoria, že bod O je priesečníkom výšok v trojuholníku AS_BS_C. Keď sa však na obrázok lepšie zahľadíme, môžme si ľahko uvedomiť, že priamka AP je kolmá na úsečku S_BS_C a to preto, lebo body A, P sú práve priesečníkmi kružníc so stredmi v S_B a S_C. (Spojnica priesečníkov dvoch kružníc je vždy kolmá na spojnicu ich stredov.) To však znamená, že aj priamka AP je výškou v trojuholníku AS_BS_C, preto na nej určite leží aj ortocentrum O.

Úloha č. 10: *Čísla $x_1, x_2 \ldots, x_n$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$ spĺňajú vzťah $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m + r$, kde m je celé číslo a $r \in \langle 0,1)$. Dokážte, že $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq m + r^2$.*

Riešenie: (opravoval Kenny)

Aj keď väčšina z vás v riešení tejto úlohy úspešne použila dôkaz matematickou indukciou, my si najprv ukážeme iný spôsob ako dokázať platnosť nerovnosti zo zadania. Kľúčovým bodom tohto riešenia je úvod, preto si ho teraz spoločne pozorne prečítame.

Bolo by pekné, keby sme vedeli (pre dané n, m, r) nájsť nejakú význačnú n-ticu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takú, že ak tvrdenie platí pre túto n-ticu, tak zrejme bude platiť pre všetky. Tú môžeme hľadať tak, aby súčet $x_1 + \cdots + x_n$ zostal nezmenený a súčet druhých mocnín bol čo najväčší. (Potom ukážeme, že význačná n-tica má súčet druhých mocnín väčší nanajvýš rovný ostatným n-ticiam a menší nanajvýš rovný $m + r^2$.) Ako to ale spraviť? Najprv sa skúsme zamyslieť, ako by naša n-tica mohla vyzerať. Zamyslime sa nad tým, pre ktoré $a \in \langle 0,1\rangle$ platí rovnosť $a = a^2$? Zjavne len pre $a = 0$ alebo $a = 1$, v iných prípadoch platí $a > a^2$. (Rozmyslite si to.) Preto by bolo užitočné, keby sme v našej n-tici mali m jednotiek, jedno číslo rovné r a ostatné nuly, pretože vtedy by v nerovnosti zo zadania nastala rovnosť, teda $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq m + r^2$. No dobre, pre tento konkrétny prípad sme to vyriešili, ako ale dostaneme všetky ostatné n-tice vyhovujúce vzťahu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m + r$?

V tejto situácii bude vhodné využiť slová *Michala Hagaru* a pozrieť sa na čísla $x_1, \ldots, x_n$ ako na n krabíc, do ktorých sa zmestí najviac 1 (kilo jabĺk). Naša význačná n-tica teda zodpovedá krabiciam, ktoré sú všetky buď úplne plné, alebo úplne prázdne, až na jednu krabicu v ktorej je r kíl ($r \in \langle 0,1)$) jabĺk. Z ľubovoľného rozloženia jabĺk v krabici, ktoré má dokopy $m + r$ kíl, sa k tomuto rozloženiu vieme dostať jednoduchým spôsobom. Vezmeme si nejaké dve krabice. Premiestnime jablká z ľahšej do ťažšej tak, aby buď bola jedna prázdna alebo druhá plná. V reči čísel zmeníme čísla x_i, x_j $(x_i > x_j)$ na $x_i + c, x_j - c$ tak, aby buď $x_i + c = 1$ alebo $x_j - c = 0$. Teraz môžu nastať dve možnosti, buď sme dvojicu x_i, x_j nahradili dvojicou $1, x_j + x_i - 1$ alebo $x_j + x_i, 0$ podľa toho, ktorá z týchto nových dvojíc vyhovuje zadaniu, teda obe čísla sú z intervalu $\langle 0,1\rangle$. (Overte, že vždy aspoň jedna dvojica vyhovuje zadaniu.) Tento postup opakujeme až kým nedostaneme požadovaný tvar.

Zatiaľ vieme ako sa z ľubovolnej n-tice $x_1, \ldots, x_n$ dostaneme do tvaru $1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, r$, kde vystupuje číslo 1 m-krát, číslo r raz a ostatné sú nuly. Pomôže nám to? Náš postup sa dá rozdeliť na niekoľko krokov, pričom v každom kroku meníme len dve čísla. (V predchádzajúcom odstavci označené x_i, x_j.) V súčte sa nám zmenia len tieto dva členy, celkový súčet sa však nezmení. Čo platí o súčte druhých mocnín? Znova sa nám zmenia len dva členy platí však $(x_i+c)^2+(x_j-c)^2 \geq x_i^2+x_j^2$ pretože c je kladné a platí

$$\begin{aligned} x_i &\geq x_j, \\ 2c(x_i-x_j) &\geq 0, \\ 2c^2+2c(x_i-x_j) &\geq 0, \\ x_i^2+2x_ic+c^2+x_j^2-2x_jc+c^2 &\geq x_i^2+x_j^2, \\ (x_i+c)^2+(x_j-c)^2 &\geq x_i^2+x_j^2. \end{aligned}$$

To už sme ale skoro na konci, vieme totiž, že po každom kroku nášho postupu sa súčet druhých mocnín zväčší alebo ostane rovnaký. Na konci dostaneme n-ticu, ktorej súčet druhých mocnín je presne $m+r^2$. Preto nutne musí platiť $x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq m+r^2$.

Iné riešenie:

Ako sme si povedali na začiatku, mnoho vašich riešení využívalo dôkaz matematickou indukciou. Poďme ho v krátkosti popísať. Prvý krok matematickej indukcie, overenie platnosti tvrdenia pre $n=1$ vám nerobilo problémy. Pripomeňme len, že trebalo zvlášť rozobrať prípad $x_1=1$.

V druhom kroku matematickej indukcie treba dokázať platnosť tvrdenia pre $n=n_0+1$ za predpokladu, že tvrdenie platí pre $n=n_0$. Dôkaz sa dá rozdeliť na dve časti. Buď platí $x_1+\cdots+x_{n_0+1}=m+(r+x_{n_0+1})$ alebo $x_1+\cdots+x_{n_0+1}=(m+1)+(r+x_{n_0+1}-1)$.

V prvom prípade nahradíme z indukčného predpokladu súčet $x_1^2+\cdots+x_{n_0}^2$ väčšou hodnotou $m+r^2$ (uvedomte si, prečo to môžeme spraviť) a dostávame

$$\begin{aligned} m+r^2+x_{n_0+1}^2 &\leq m+r^2+2rx_{n_0+1}+x_{n_0+1}^2, \\ 0 &\leq 2rx_{n_0+1}, \end{aligned}$$

čo zjavne vyplýva z toho, že $r, x_{n_0+1} \in \langle 0,1\rangle$. V druhom prípade využijeme indukčný predpoklad rovnako, tentokrát však dostávame

$$\begin{aligned} m+r^2+x_{n_0+1}^2 &\leq m+1+r^2+x_{n_0+1}^2+1+2rx_{n_0+1}-2r-2x_{n_0+1}, \\ 0 &\leq 2+2rx_{n_0+1}-2r-2x_{n_0+1}, \\ 0 &\leq 2(r-1)(x_{n_0+1}-1), \end{aligned}$$

čo znova platí. Týmto môžeme uzavrieť dôkaz matematickou indukciou.

Úloha č. 11: *Pre prirodzené čísla x a y platí $3x^2+x=4y^2+y$.*
a) Dokážte, že $x-y$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. (4 body)
b) Dokážte, že zadaná rovnica má nekonečne veľa riešení. (4 body)
c) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice. (1 bod)

Riešenie: (opravovali KatkaM a Škrečok)

Vitajte na palube vzoráku úlohy číslo 11. Poriadne sa pripútajte. Núdzové východy sa nachádzajú na predchádzajúcich stranách vzorákov. Prajeme vám ničím nerušený let, počas ktorého sa možno dozviete aj to, ako vyriešiť rovnicu $x^2-my^2=1$ pre skoro hociaké prirodzené m.

Časť a)

Upravme si našu rovnicu $3x^2+x=4y^2+y$ na rozumnejší ekvivalentný tvar:

$$3x^2-3y^2+x-y=y^2 \Leftrightarrow (x-y)(3x+3y+1)=y^2.$$

Teraz si zoberme prvočíslo p, ktoré delí rozdiel $x-y$. Potom delí aj pravú stranu rovnice, teda $p|y^2$. Avšak y^2 môžu deliť len také prvočísla, ktoré delia aj y. Z toho dostávame, že $p|y$ a potom aj $p|x$ vďaka tomu, že $p|x-y$. Potom ale p nemôže deliť $(3x+3y+1)$, lebo by muselo deliť aj 1.

Pozrime sa na pravú stranu – ak $p|y$, znamená to, že p vystupuje v prvočíselnom rozklade y v nejakej mocnine, povedzme p^k. Potom ale bude p vystupovať v prvočíselnom rozklade y^2 v dvakrát väčšej mocnine, čiže p^{2k}. Dostávame, že $p^{2k}|y^2$ a zároveň nemôže plattiť $p^{2k+1}|y^2$. Z toho už vyplýva, že $x-y$ je druhá mocnina, čo chceme dokázať. Totiž $x-y$ musí byť deliteľné p^{2k}, pretože $(3x+3y+1)$ určite nie je deliteľné ani len p. Rovnako platí, že $x-y$ nie je deliteľné p^{2k+1}.

Samozrejme, toto nebola jediná možná úprava. Trochu fintovejšia (ale na ďalšie dokazovanie jednoduchšia) je úprava na tvar

$$(x-y)(12x-12y+1)=(4y-3x)^2.$$

Overte si sami, že je to naozaj ekvivalentné našej pôvodnej rovnici.

Iné riešenie:

Ukážeme si ešte jedno riešenie tejto časti, ktoré nám pomôže v časti b). Položme $z=x-y$, teda $x=y+z$. To, čo potrebujeme dokázať je, že z je druhá mocnina prirodzeného čísla (premyslite si, prečo musí platiť $z>0$). Dosaďme teraz vyjadrenie x do pôvodnej rovnice:

$$(y+z)^2 + (y+z) = 4y^2 + y,$$

z čoho po úpravách dostávame kvadratickú rovnicu

$$y^2 - 6yz - (3z^2 + z) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6z \pm \sqrt{36z^2 + 4(3z^2+z)}}{2} \Leftrightarrow y = 3z \pm \sqrt{12z^2 + z},$$

z ktorej sme si vyjadrili y. Aby bolo y prirodzené, musí byť výraz pod odmocninou druhou mocninou prirodzeného čísla (ak je $z > 0$, tak aj $12z^2 + z > 0$). Tento výraz sa však dá rozložiť na $12z^2 + z = z(12z+1)$, teda na súčin dvoch nesúdeliteľných čísel. No a podobne ako sme v prvom riešení ukázali, ak máme súčin dvoch nesúdeliteľných čísel, ktorý má byť druhou mocninou (prirodzeného čísla), musia byť oba činitele druhými mocninami. Špeciálne $z = x - y$ je druhou mocninou prirodzeného čísla, čo sme chceli.

Časť b)

Využijeme to, čo sme vyššie ukázali. Ak je $z = x - y$, tak z aj $12z+1$ musia byť druhé mocniny prirodzených čísel a navyše $y = 3z \pm \sqrt{z(12z+1)}$. Keďže $\sqrt{z(12z+1)} > \sqrt{9z^2} = 3z$ vďaka $z > 0$ a my chceme, aby y bolo prirodzené, vyhovuje iba $y = 3z + \sqrt{z(12z+1)}$. Položme $z = p^2$ a $12z + 1 = q^2$, kde p, q sú prirodzené. Dosadením z prvého vyjadrenia do druhého dostávame, že musí platiť

$$12p^2 + 1 = q^2 \Leftrightarrow q^2 - 12p^2 = 1. \tag{1}$$

Potrebujeme teraz ukázať, že táto rovnica má nekonečne veľa prirodzených riešení (p, q). Ak sa nám to podarí, bude existovať nekonečne veľa vyhovujúcich z (z vyjadrení $z = p^2$ a $12z + 1 = q^2$) a nekonečne veľa vyhovujúcich y (z vyjadrenia $y = 3z + \sqrt{12z^2 + z}$). Vďaka $z = x - y$ bude mať potom rovnica zo zadania nekonečne veľa riešení. Jedno riešenie rovnice (1) nájdeme ľahko, napríklad $p = 2$ a $q = 7$, označme si ho ako $(p_1, q_1) = (2, 7)$. Ak máme ukázať, že nejaká rovnica má nekonečne veľa riešení, hodí sa nám nejaký predpis, pomocou ktorého vyjadríme ďalšie riešenie z predchádzajúceho. Vytvoríme tak postupnosť riešení (p_n, q_n), $n = 1, 2, \ldots$ Tipnime si a hľadaný predpis skúsime nájsť v tvare

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= A \cdot p_n + B \cdot q_n, \\ q_{n+1} &= C \cdot p_n + D \cdot q_n, \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

pričom chceme nájsť koeficienty A, B, C, D. Ak sa nám to podarí, dokázali sme, čo sme chceli. Ak nie, skúsime si predpis tipnúť inak (bystrý čitateľ akiste tuší, že sa nám to podarí).

Každé riešenie (p_n, q_n) spĺňa rovnosť (1), preto budeme koeficienty voliť tak, aby platilo $q_{n+1}^2 - 12p_{n+1}^2 = q_n^2 - 12p_n^2$, z čoho po dosadení do (2) a zopár úpravách máme

$$\begin{aligned} (Cp_n + Dq_n)^2 - 12(Ap_n + Bq_n)^2 &= q_n^2 - 12p_n^2, \\ (C^2 - 12A^2)p_n^2 + (D^2 - 12B^2)q_n^2 + (2CD - 24AB)p_n q_n &= q_n^2 - 12p_n^2, \end{aligned}$$

čo má platiť pre každé n. Štandardným porovnaním koeficientov na oboch stranách dostávame, že pre A, B, C, D musí platiť

$$\begin{aligned} C^2 &= 12A^2 - 12, \\ D^2 &= 12B^2 + 1, \\ CD &= 12AB. \end{aligned}$$

Skúsme natipovať nejaké riešenie tejto sústavy. Najmenšie prirodzené čísla spĺňajúce druhú rovnicu sú $B = 2, D = 7$. Dosaďme ich do tretej, dostaneme $7C = 24A$. Najmenšie prirodzené riešenia tejto rovnice sú $A = 7$ a $C = 24$. Ľahko overíme, že vyhovujú aj prvej rovnici (24^2 je naozaj $12 \cdot 7^2 - 12$). Našli sme teda jedno riešenie $(A, B, C, D) = (7, 2, 24, 7)$, dosadíme ho teraz do (2):

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 7p_n + 2q_n, \\ q_{n+1} &= 24p_n + 7q_n, \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Môžeme si vyskúšať zrátať prvých pár členov. Dostávame dvojice $(2, 7)$, $(28, 97)$, $(390, 1351)$, … Ľahko sa presvedčíte o tom, že sú to riešenia rovnice (1). Vygenerujeme takto nekonečne veľa rôznych riešení, lebo postupnosť (p_n, q_n) je evidentne rastúca. To, že sú to naozaj riešenia, je jasné z postupu hľadania A, B, C, D a formálne sa to dá dokázať matematickou indukciou.

Vďaka tomu, že $z = p^2$, $12z + 1 = q^2$ resp. $y = 3z + \sqrt{12z^2 + z}$ a vďaka rastúcosti p_n vieme potom generovať aj nekonečne veľa riešení pôvodnej rovnice $3x^2 + x = 4y^2 + y$ (poriadne si premyslite prečo). Dostávame takéto riešenia $(x, y) = (30, 26)$, $(5852, 5068)$ atď.

Poznámka: Takýmto spôsobom vieme skoro o každej rovnici v tvare $x^2 - my^2 = 1$, ba aj v tvare $x^2 - my^2 = k$, kde m, k sú prirodzené, dokázať, že má nekonečne veľa riešení. Nejde to iba v prípade, že m je druhá mocnina, povedzme l^2. Vtedy vieme rozložiť $x^2 - l^2y^2 = (x - ly)(x + ly)$. Rozmyslite si, ako by sa takáto rovnica riešila ďalej. Všimnite si, že sme v tejto časti nemuseli nájsť nutne všetky riešenia, stačilo, že nájdeme nejakých nekonečne veľa riešení.

Časť c)
Poďme teraz nájsť všetky riešenia rovnice (1). V tejto časti sa už nezaobídeme bez znalostí Pellových rovníc. Sú to rovnice v spomínanom tvare $x^2 - my^2 = 1$. Záujemcom o ich štúdium odporúčame prečítať si knižku **ŠMM 49 – Řetězové zlomky**, ktorá sa nachádza aj v knižnici KMS (**http://kms.sk/kniznica** alebo sa ozvite mailom na `ondrob@gmail.com`), prípadne si pozrieť **http://en.wikipedia.org/wiki/Pell's_equation**.
Rovnica (1) je Pellova, a keďže m nie je druhá mocnina, vieme nájsť *všetky* jej riešenia v tvare

$$p = \frac{\left(q_1 + \sqrt{12}p_1\right)^n - \left(q_1 - \sqrt{12}p_1\right)^n}{2\sqrt{12}} \qquad q = \frac{\left(q_1 + \sqrt{12}p_1\right)^n + \left(q_1 - \sqrt{12}p_1\right)^n}{2}.$$

Pričtom (p_1, q_1) je jej najmenšie prirodzené riešenie, v našom prípade $(p_1, q_1) = (2, 7)$. Vyskúšajte si vyrátať a overiť (p_n, q_n) napríklad pre $n = 2$.
Teraz stačí už len spätne dosadiť postupne do vzťahov $z = p^2$ a $y = 3z + \sqrt{12z^2 + z}$, napokon vďaka $x = y + z$ vieme vypočítať x ako $4z + \sqrt{12z^2 + z}$. Vyjadrime si najprv z ako

$$z = \left(\frac{\left(7 + 2\sqrt{12}\right)^n - \left(7 - 2\sqrt{12}\right)^n}{2\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{\left(7 + 2\sqrt{12}\right)^{2n} - 2 + \left(7 - 2\sqrt{12}\right)^{2n}}{48}$$

pre všetky prirodzené n. Využili sme pritom, že $(7 + 2\sqrt{12})(7 - 2\sqrt{12}) = 49 - 48 = 1$. Vďaka tomu, čo sme povedali vyššie, vyhovujú rovnici $3x^2 + x = 4y^2 + y$ všetky dvojice (x, y) prirodzených čísel v tvare $(x, y) = (4z + \sqrt{12z^2 + z}, 3z + \sqrt{12z^2 + z})$. Ak máte chuť, môžete si tam dosadiť vyjadrenie z a trochu to poupraviť, prípadne dosadiť malé hodnoty n a overiť, či sú naozaj koreňmi pôvodnej rovnice. Hotovo.

Komentár: Posledná časť síce vyžadovala určité znalosti, no práve preto bola hodnotená iba jedným bodom. Odporúčanie do budúcnosti, ak máte o nejakej rovnici dokázať, že má nekonečne veľa riešení, nemusíte všetky riešenia nutne nájsť (a zistiť tak, že ich je nekonečne veľa). Stačí nájsť nejaké z nich, prípadne postup, akými sa dajú vyrábať z predchádzajúcich. Ak ste s nami doleteli až sem, tešíme sa na váš ďalší let vzorákom úlohy 11.

Úloha č. 12: *Nájdite prirodzené číslo n také, že číslo a) $n^2 - 1$, b) $n^2 - 4$ má presne 10 deliteľov.*

Riešenie: (opravoval PeťoG)
a) Pre začiatok si zopakujme zopár známych faktov, ktoré sa nám pri riešení úlohy zídu. Nech t je prirodzené číslo s prvočíselným rozkladom $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, \dots, p_k$ sú rôzne prvočísla a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sú kladné celočíselné exponenty. Takýto zápis je jednoznačný až na poradie činiteľov a je ním určený aj počet rôznych prirodzených deliteľov čísla t. Každý takýto deliteľ totiž môže vo svojom rozklade obsahovať iba prvočísla $p_1, \dots, p_k$ a každé z nich nanajvýš v takej mocnine, v akej sa vyskytuje v rozklade t. Preto t má presne $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ rôznych deliteľov.
My chceme v oboch prípadoch nájsť číslo s desiatimi deliteľmi. Podľa predošlého odstavca také číslo môže vzniknúť dvoma spôsobmi: buď ako deviata mocnina prvočísla (teda $t = p_1^9$) alebo ako súčin dvoch rôznych prvočísel, jedného v prvej mocnine a druhého v štvrtej (teda $t = p_1 p_2^4$).
Pozrime sa najprv na prvú úlohu. Chceme nájsť prirodzené číslo n také, aby číslo $n^2 - 1$ (volajme ho t) bolo tvaru p_1^9 alebo $p_1 p_2^4$. Najprv ukážeme, že také t v tvare p_1^9 neexistuje, takže týmto smerom nemá zmysel hľadať. Keďže $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, museli by byť čísla $n + 1$ aj $n - 1$ mocninou p_1. Rozdiel týchto čísel je 2, čiže by muselo platiť $p_1^{9-k} - p_1^k = 2$ pre $k \in \{0, \dots, 4\}$. Úpravou dostávame $p_1^k(p_1^{9-2k} - 1) = 2$ a túto rovnosť zjavne nie je možné splniť (premyslite si prečo!).
Ostáva možnosť hľadať t v tvare $p_1 p_2^4$. Tu budeme úspešnejší, stačí vyskúšať zopár malých prvočísel a riešenie $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ a $n = 7$ je razom na svete. Keby sme mali zlý deň a hľadanie skusmo by sa nám nedarilo, možno postupovať podobne ako pri riešení časti b). My sme však mali šťastie a zadanie žiada iba nájsť jedno vhodné n, takže hor sa na druhú časť.
b) V nej chceme nájsť číslo $t = n^2 - 4$ tak, aby opäť malo tvar p_1^9 alebo $p_1 p_2^4$. Tentoraz t možno rozložiť na súčin $(n - 2)(n + 2)$ a pre prípad $t = p_1^9$ rovnakou úvahou ako v prvej úlohe dostávame rovnicu $p_1^k(p_1^{9-2k} - 1) = 4$ pre $k \in \{0, \dots, 4\}$. Tejto rovnici opäť nevyhovuje žiadne prvočíslo p_1.
Zostal nám už iba prípad $t = p_1 p_2^4$. Keďže $(n + 2) - (n - 2) = 4$, pre najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel musí platiť $\mathrm{NSD}(n + 2, n - 2) \in \{1, 2, 4\}$. Ak by niektoré z čísel $n - 2$ a $n + 2$ bolo deliteľné štyrmi, potom by jedno z nich muselo byť deliteľné ôsmimi a to by znamenalo, že prvočíslo 2 sa v t nachádza aspoň v piatej mocnine. Na druhú stranu, ak by obe tieto čísla boli deliteľné dvoma, ale nie štyrmi, prvočíslo 2 by sa v t nachádzalo presne v druhej mocnine, čo nám opäť nevyhovuje. Preto môžme dve z uvedených možností vylúčiť a zostane nám $\mathrm{NSD}(n + 2, n - 2) = 1$. Keďže $t = p_1 p_2^4$, musí platiť, že jedno z čísel $n + 2, n - 2$ má hodnotu p_1 a druhé p_2^4. Ak $n - 2 = p_1$, dostávame $p_1 = p_2^4 - 4 = (p_2^2 + 2)(p_2^2 - 2)$, v opačnom prípade $p_1 = p_2^4 + 4 = (p_2^2 - 2p_2 + 2)(p_2^2 + 2p_2 + 2)$ a keďže kvôli parite $p_2 \geq 3$, v oboch prípadoch sa dostávame do sporu s predpokladom, že p_1 je prvočíslo. Preto úloha b) nemá riešenie.

Úloha č. 13: *Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I. Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A a C pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A_0 a C_0 a úsečky BC a BA po rade v bodoch A_1 a C_1. Predpokladajme, že sa priamky A_1C_1 a A_0C_0 pretínajú v bode P. Dokážte, že priamka PI je rovnobežná s priamkou AC.*

Riešenie: (opravoval Mazo)
Riešenie tejto úlohy sa dá poskladať z niekoľkých faktov, ktoré tu uvedieme. Skúste si každý z týchto faktov dokázať a usporiadať ich tak, aby vzniklo kompletné riešenie úlohy (nemusíte využiť všetky fakty).
Nech bod P leží na priamke C_0A_0 tak, aby priamka PI bola rovnobežná s AC.
1. Body C_0 a A_0 sú stredmi oblúkov AB a CB.
2. Kružnica opísaná trojuholníku C_0A_0I má rovnaký polomer ako kružnica opísaná trojuholníku ABC a dotýka sa priamky PI. (Dôkaz cez uhly.)
3. Priamka PB je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABC.
4. Trojuholník PBI je rovnoramenný.
Označme K a L priesečníky priamky PI s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Nech M a N sú priesečníky kružnice opísanej trojuholníku C_0A_0I s priamkou C_1A_1.
5. Štvoruholník $KLMN$ je tetivový. (Dôkaz cez mocnosť bodu P k vhodným kružniciam.)
6. Bod P je má rovnakú mocnosť ku kružniciam opísaným trojuholníkom ABC, C_0A_0I a KLM, inak povedané, je spoločným priesečníkom chordál.
Úloha sa dá riešiť aj bez použitia mocnosti bodu ku kružnici.

Úloha č. 14: *Šachovnica 3000×3000 je rozdelená na dominové doštičky (teda obdĺžniky veľkosti 1×2). Dokážte, že vieme dominové doštičky ofarbiť tromi farbami tak, aby doštičiek jednotlivých farieb bolo rovnako veľa a aby žiadna doštička nemala viac ako dvoch susedov takej farby, akú má sama.*

Riešenie: (opravoval Ondro)
(*podľa Michala Hagaru*)
Úlohu budeme riešiť v dvoch krokoch. Najprv popíšeme postup, ako priradíme farby doštičkám pre ľubovoľné rozloženie, a potom dokážeme, že to ofarbenie vyhovuje stanoveným podmienkam.
Označme si farby číslami 0, 1 a 2. Na šachovnici si očíslujme riadky aj stĺpce zaradom od 1 po 3000, teda ľubovoľné políčko šachovnice vieme popísať ako usporiadanú dvojicu (a, b) ($1 \leq a, b \leq 3000$, a je číslo riadku, b je číslo stĺpca). Teraz popíšeme, ako priradíme farbu ľubovoľnej doštičke. Sú dva typy doštičiek, horizontálne a vertikálne. Horizontálna pokrýva dve políčka (a, b) a $(a, b+1)$ a zafarbíme ju farbou, ktorú dostane ako zvyšok čísla $a+b$ po delení troma. Vertikálnu doštičku pokrývajúcu (a, b) a $(a+1, b)$ tiež zafarbíme farbou $a+b \pmod 3$. Toto farbenie si vieme predstaviť aj nasledovne. Najprv si ofarbíme samotné políčka šachovnice tak, že políčku (a, b) priradíme farbu určenú zvyškom $a+b$ po delení troma. Nakreslite si to pre malú šachovnicu. Potom každá dominová doštička dostane takú farbu, akú zakrýva jej časť, ktorá má menší súčet súradníc, teda je „viac vľavo“ a „viac hore“ ako tá druhá.
Teraz potrebujeme overiť dve veci. To, že každá kocka susedí s najviac dvoma kockami takej farby ako ona sama si overte sami. Stačí na to jeden obrázok, kde uvidíte, že ak si tam nejakú kocku umiestnite, tak sa jej naozaj môžu dotýkať najviac dve rovnakej farby ako ona. Posledné čo musíme overiť je, že každú farbu sme použili rovnako veľa krát. Označme p_0, p_1 a p_2 počty doštičiek jednotlivých farieb. Keďže každá doštička farby $i \in \{0, 1, 2\}$ zakryje políčka farby i a $i+1 \pmod 3$, vieme, že p_0+p_2 vyjadruje, koľko políčok farby nula zakryjú dokopy všetky doštičky, atď. Overte si, že na šachovnici je z každej farby rovnako veľa políčok. Preto musí platiť

$$p_0 + p_2 = p_1 + p_0 = p_2 + p_1,$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = \frac{3000^2}{2}.$$

Riešením tejto sústavy je $p_0 = p_1 = p_2 = 3000^2/6$, a tým je úloha vyriešená.

(*podľa Miroslava Majerčíka*) Druhé riešenie, možno ešte jednoduchšie ako prvé, využíva iné ofarbenie. Ofarbime si šachovnicu nasledovne: Políčku so súradnicami (a, b) priradíme farbu určenú zvyškom čísla a po delení troma ak $a+b$ je prárne. Ak je $a+b$ nepárne, dané políčko necháme nezafarbené. Rozmiestnené doštičky ofarbíme podľa toho, akú má farbu políčko, ktoré zakrývajú (každá zakrýva práve jedno ofarbené a jedno neofarbené, prečo?). Dokážte si, že toto ofarbenie bude vyhovovať zadaniu.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	k_α	k_β	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN	3	0	9	9	4	8	9	9			44	88
1.	Hapák Samuel	4.	Gamča BA	9	8			8	9	9	9	8		43	88
3.	Starovská Mária	4.	Gamča BA	11	4			9	9	9	9	5		41	86
3.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	9	8			9	5	9	9	9		41	86
5.	Tkadlec Josef	3.	GKep ČR	3	0	8	9	8	9	8	9	3		43	84
6.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	5	0	9	9	9	4		9			40	83
6.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	5	0	6	9	9	9	2	9	1		42	83
6.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	7	0	6	9	9	9	6	6	4		39	83
9.	Szilágyiová Adriana	4.	GPoš KE	6	1		9	9		9	8	4		39	82
9.	Vendel Dávid	3.	GPoš KE	7	2		9	7	4	9	9			38	82
11.	Bachratý Martin	2.	GVO ZA	5	0	9	9	4	9	9				40	81
11.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	6	1		9	8	3	9	8	5		39	81
11.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	9	5			8	8	9	9	9		43	81
14.	Komárková Zuzana	3.	Brno ČR	4	0	9	9	8		9	9			44	79
15.	Hagara Michal	2.	GJH BA	4	0	9	9	4	3	2	9	4		35	78
16.	Karásková Natália	2.	Gamča BA	5	0	9	9	4	2	9				33	77
16.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	8	2		9	9	6	7	1			32	77
16.	Sládek Filip	2.	GAB NO	2	0	9	9	9		9	9	7		45	77
19.	Kopf Matúš	2.	GMen OP	4	0	5	9	7		9	3			33	76
20.	Říha Samuel	3.	Brno ČR	4	2		9	9	5	9	8			40	75
21.	Eiben Eduard	3.	GPoš KE	6	2		9	1	4	9	9			32	74
22.	Jursa Jakub	3.	GAlej KE	8	2		9	5	2	9	9			34	73
22.	Peitl Tomáš	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	9	4	4	7				32	73
24.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	4	1		8	4	6	9	9	0		36	72
24.	Hojčka Michal	3.	GKom PE	7	3			9	8	1	9			27	72
26.	Simanová Lucia	4.	Gamča BA	8	2		9	9	4	9	6			37	69
26.	Spišiak Michal	3.	Gamča BA	6	4			8	6	9	9	4		36	69
28.	Batmendijnová Kristína	3.	GTV SL	5	0	9	9	8	4	2				32	68
28.	Jakubík Jozef	4.	GKom PE	9	3			9	6	9	5			29	68
28.	Liščinský Miroslav	3.	GAlej KE	7	1		9	4	0	7	9			29	68
28.	Novák Vladimír	4.	GPoš KE	6	1		7	8	7	3	9			34	68
32.	Bogár Ján	2.	GĽŠ TN	4	0	3	9	9	0	9				30	67
32.	Kočiský Tomáš	4.	Gamča BA	7	3			8	7	9	9			33	67
34.	Polačko Martin	3.	GAlej KE	8	2		3	5		3	8	4		23	66
35.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	10	6			4	3	9	9	5		30	65
35.	Juríková Katarína	4.	GJGT BB	8	2		9	9	7	9				34	65
37.	Majdiš Mojmír	2.	GPOH DK	4	0	4	9	9	9					31	64
38.	Matejovičová Lenka	3.	GJH BA	9	4			4	9	9	1	4		27	61
39.	Kuzma Tomáš	3.	GAlej KE	8	2		9	7	4		8			28	59
40.	Kuklišová Nina	3.	GMet BA	7	1		8	4		9	6			27	58
40.	Tureková Katarína	4.	GJGT BB	11	4			4		9				13	58
42.	Formánek Michal	3.	ŠPMNDG BA	5	1		8	9	6	2	7			32	57
42.	Popovič Viktor	2.	GJAR PO	5	1		6	8	1		9			24	57
42.	Rigdová Emília	2.	GKuk PP	4	0	9	3	7		9				28	57
42.	Rošťáková Zuzana	2.	GMMH LM	4	0	2	2	3		8	3			18	57
46.	Hujer Peter	3.	GPár NR	4	0	9		3		9				21	55
47.	Porembová Alexandra	2.	BiG Sučany	4	0	9	1	6			3			19	54
48.	Haas Emil	3.	Gamča BA	7	1		9	9						18	52
48.	Melicherčík Martin	4.	GPár NR	10	5			4		9		4		17	52
50.	Štyráková Kamila	2.	GPOH DK	4	0	4	9	4	5					22	50
51.	Jagoš Ľubomír	2.	GVO ZA	5	0	9	9	4						22	48
51.	Kieferová Mária	3.	GsvFA ZA	4	0	9	3	4		9	1			26	48
51.	Rizman Tomáš	3.	GVar ZA	6	1		2	8			5			15	48

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
54.	Herencsár Albert	3.	Gmaď GA	6	1		9	7						16	47
55.	Tonhauserová Ivana	2.	GPár NR	4	0	2	9	3						14	46
56.	Fekiač Jozef	3.	Gamča BA	6	1		9	4			2			15	45
56.	Hudec Vladimír	3.	GVar ZA	6	1		9	9			5	4		27	45
58.	Cocuľová Zuzana	2.	GPoš KE	5	0		9	6	1	9	0			25	43
58.	Lešková Andrea	2.	G Lipany	4	0	9	6	6	0	2				23	43
58.	Ziman Michal	2.	GBST LC	4	0		9	4	1		2			16	43
61.	Floriánová Michaela	2.	Gamča BA	5	0	5	4	4		9				22	42
62.	Petrucha Michal	3.	GMet BA	7	2		3	5						8	41
63.	Vdovičenko Martin	4.	GPár NR	8	2			4						4	40
64.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	3	0		3	7	1		2			13	36
65.	Melo Matej	3.	GsvFA ZA	5	0		2	4			4			10	34
66.	Kotrlová Katarína	3.	GVPT MT	5	0		9	9						18	33
67.	Köry Jakub	4.	GJAR PO	4	1									0	30
68.	Minárik Marián	4.	GPár NR	6	1			9						9	28
69.	Rudolfová Barbora	2.	GMet BA	4	0									0	27
70.	Kobolková Petra	3.	GVPT MT	4	0	9	3	2			1	0		15	26
71.	Kobza Vladimír	4.	GJGT BB	7	1					4				4	25
71.	Mitro Juraj	2.	GJAR PO	3	0									0	25
73.	Hudák Adam	2.	GMRŠ KE	4	0		1	3			1			5	23
74.	Štrbka Dávid	4.	Gamča BA	6	1									0	22
75.	Görcsösová Andrea	2.	GAlej KE	3	0		2	7	0		1			10	21
76.	Bendová Lenka	3.	GJH BA	5	0									0	20
76.	Kotry Lukáš	2.	GPár NR	4	0									0	20
78.	Hollá Barbora	3.	ŠPMNDG BA	5	0									0	17
79.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	3	0	3	2	4						9	16
79.	Paulovský Michal	4.	Gamča BA	8	2									0	16
79.	Živčáková Andrea	4.	GJGT BB	5	0									0	16
82.	Hašík Juraj	2.	Gamča BA	5	0		9	4						13	13
83.	Zubnárová Katarína	4.	GJGT BB	5	0		2	3						5	11
84.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1	0									0	9
84.	Křemenová Lucie	2.	GMet BA	4	0									0	9
86.	Plávala Martin	1.	GMet BA	1	0									0	6
86.	Vrbovská Mária	4.	GJGT BB	6	0									0	6
88.	Slovík Lukáš	4.	GJGT BB	5	0									0	5
89.	Kapustová Katarína	3.	GJGT BB	4	0									0	4
89.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1	0									0	4
91.	Baňasová Barbora	3.	GĽŠ TN	3	0									0	3
92.	Alberty Roman	4.	GJGT BB	5	0									0	2
92.	Sásková Jana	3.	GĽŠ TN	3	0									0	2
94.	Pažický Martin	3.	GJH BA	3	0									0	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Večerík Matej	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9		9	4		86
1.	Šormanová Mária	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9		9	5		86
3.	Csiba Dominik	1.	ŠPMNDG BA	1	6	9	9	9		9	4		80
4.	Le Tuan Anh	1.	Gamča BA	2		9	9	7		9	2		77
4.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	2		7	9	7		9	4		77
6.	Hajdinová Katarína	1.	GJH BA	1	7	7	9	5		2	6		76
7.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	2		9	9	4		9	4		74
8.	Páleník Juraj	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9		0		9	7		73
9.	Benčík Štefan	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9		0		7	3		67
10.	Masár Juraj	1.	GBil BA	1	6	7	7	6		1			66
10.	Mojžišová Hana	1.	GJH BA	1	9	6		7		1	6		66
12.	Kozák Andrej	1.	Gamča BA	2		9	4	4		7	4		64

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
13.	Buchman Marek	1.	ŠPMNDG BA	1		9	0	5		5	4		62
13.	Hlavatá Martina	1.	Gamča BA	2		8	9	9		2	4		62
15.	Phuong Mariana	1.	GJH BA	1	5	9	9	9			4		60
16.	Kořínková Marta	2.	Gamča BA	3			8	6	3	9	4		56
17.	Macháč Juraj	1.	GJH BA	1	5	8	9		3		1		51
18.	Kubincová Petra	1.	ŠPMNDG BA	1	5	9	0	6		2	2		49
19.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	3			9	7	3	2	4		46
20.	Sabadovičová Linda	1.	GJH BA	1	1	2	9	8		2			45
21.	Stančiaková Katarína	2.	GJH BA	2		1	5	9					34
22.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA	2		7		7	5		2		32
23.	Macková Lucia	1.	GJH BA	1	2			6					29
24.	Molnárová Karina	1.	GJH BA	1									24
25.	Kováčová Marta	1.	GJH BA	1									23
26.	Hlavatý Matej	1.	ŠPMNDG BA	1									22
27.	Minárová Sára	1.	GJH BA	1	3		3	7			2		15
28.	Plávala Martin	1.	GMet BA	1									4
29.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1									0
29.	Pažický Martin	3.	GJH BA	3									0
29.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1									0

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Kováč Ondrej	1.	GCM NR	1	9	6	7	8		9			76
2.	Dižová Andrea	1.	GKom PE	1	9	9		9		9	4		72
3.	Uher Brian	2.	GPár NR	3			9	8	4	7	3		65
4.	Kohútová Petra	2.	GJF Šaľa	2		9	8	9	4	1			64
5.	Jakubík Ján	1.	SPŠE PN	1	6	2	9	6		1			58
6.	Štrbová Silvia	1.	GPár NR	2			7	9	5	3	3		49
7.	Bódiová Zuzana	1.	GPár NR	2			7	9		2	1		42
8.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	1	4	0	0	5		2	1		40
9.	Magyarová Eva	1.	GPár NR	2			4	7		1			38
10.	Čellár Matúš	2.	GPár NR	3									25
11.	Kutnár Marek	2.	GPár NR	3									24
12.	Őri Viktor	1.	GĽJŠ KN	1									23
13.	Tomašovič Juraj	2.	GPdC PN	3									18
14.	Jančovičová Adela	1.	GPár NR	2									12
15.	Baňasová Barbora	3.	GĽŠ TN	3									3
16.	Sásková Jana	3.	GĽŠ TN	3									2

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Filip	2.	GAB NO	2		9	9	9	9	9	9		86
2.	Ječmen Matej	1.	GVar ZA	1	8	7	9	9		2			76
3.	Bohiniková Alžbeta	1.	GVar ZA	1	9	9	9	6		1	1		66
4.	Anderle Michal	1.	GBST LC	1	7	8	8	5	5	3	4		64
5.	Santer Jakub	1.	GMH Trstena	1	9		9	8	4	2			61
6.	Lešková Katarína	1.	BiG Sučany	1	4	2	9	4		1			54
7.	Sabaka Peter	1.	GJCh BR	1	7	6	9	9		1	1		53
8.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	1	4	5	0	6		2	1		44
9.	Majerova Karolina	1.	GJCh BR	1	7	6	0	5			1		40
10.	Kubinová Mária	1.	GPOH DK	1	2	4	0	6					37
11.	Bárdy Pavol	1.	GVO ZA	1									33
12.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	2			8			4	3		32
13.	Bačinská Lenka	2.	GŠkol PB	3			9	7		1	3		31

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
13.	Jackulíková Simona	3.	BiG Sučany	3	7	0	0	0		0	0		31
15.	Fodorová Jana	1.	GJGT BB	2	8		9	6			3		28
16.	Bachanová Emília	3.	BiG Sučany	3	5	0	0	0		0	0		27
17.	Dubničková Jana	1.	GŠkol PB	1									19
18.	Šesták Martin	2.	GŠkol PB	2									17
19.	Škrobák Michal	1.	GVO ZA	1	2	5		2		1	2		12
20.	Vozár Miroslav	1.	SOU Žar	1									9

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Midlik Adam	1.	GJAR PO	1		9	9	9	9		7		87
2.	Kocák Jakub	1.	GLS HE	1									32
3.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	3						3	7		27
4.	Görcsösová Andrea	2.	GAlej KE	3						2	7		20
5.	Mitro Juraj	2.	GJAR PO	3									9

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bačinská Lenka	2.	GŠkol PB					0		0
2.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	9	5					30
3.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	9	0	4	1			37
4.	Fulla Peter	3.	SPŠSj SN	9		7				41
5.	Hagara Michal	2.	GJH BA	9	4	5	0	6		33
6.	Hapák Samuel	4.	Gamča BA	9	8					49
7.	Hojčka Michal	3.	GKom PE	9		1				28
8.	Hozza Ján	1.	GJH BA							15
9.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	9	9	7				50
10.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	9	1	2		0		31
11.	Kopf Matúš	2.	GMen OP	3		2				20
12.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	1		3				23
13.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	6	4	6		6		53
14.	Nožička Karel	1.	Praha ČR							14
15.	Sládek Filip	2.	GAB NO	9	7	3				27
16.	Tkadlec Josef	3.	GKep ČR	9	3	5				40
17.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RV	9	9	7				57
18.	Vavrík Boris	1.	GJH BA							5