Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti 2007/2008

Úloha č. 1: *Ondrej dostal na narodeniny tortu v tvare kruhu. Mamička mu ju rozrezala pätnástimi priamymi rezmi, z ktorých každý prechádzal cez jej stred. Dokážte, že uhol medzi niektorými dvoma susednými rezmi musel byť nanajvýš* 12 *stupňov.*

Riešenie: (opravovali Ondro M. a Mišáč)
Mamička rozrezala tortu pätnástimi priamymi rezmi, z ktorých každý prechádzal cez jej stred. Skúsme zistiť niečo viac o kúskoch, na ktoré sa torta rozpadla. Prvým rezom mamička rozrezala tortu na dve rovnaké časti. Každým ďalším rezom sa počet častí, na ktoré je rozdelená torta, zvýšil o dva. Teda torta je rozrezaná na $2 + 2 \cdot 14 = 30$ častí. Každé dve protiľahlé časti sú zhodné, pretože sú určené dvojicou susedných rezov (prechádzajúcich stredom). Teraz musíme dokázať, že pri ľubovoľnom spôsobe rezania vieme nájsť dva susedné rezy s uhlom nanajvýš 12 stupňov. (Pri uhle susedných rezov rozumieme vždy ten, v ktorom nie sú žiadne iné rezy a teda na rozdiel od uhlu priamok môže byť aj väčší ako 90 stupňov.) Skúsme tortu rozrezať rovnomerne. Uhol medzi každými dvoma susednými rezmi potom bude $360°/30 = 12°$. Tu tvrdenie zo zadania platí, ale je to tak vždy? Skúsme úlohu vyriešiť sporom. Predpodkladajme, že by sa nám podarilo rozrezať tortu tak, že medzi každými dvoma susednými rezmi by bol uhol väčší ako 12 stupňov. Vieme, že každý kúsok torty má roh v strede a „zaberá“ tam taký veľký uhol, aký zvierajú dva susedné rezy, ktoré tento kúsok vykrojili. Takže máme tridsať kúskov torty a každý z plného uhla ($360°$) v strede torty vykrojí uhol väčší ako $12°$, teda spolu viac ako $30 \cdot 12° = 360°$. To sa ale nemôže stať. Preto sme museli niečo zle predpokladať a to mohlo byť len to, že každé dva susedné rezy zvierajú uhol väčší ako 12 stupňov. Takže musí platiť opak tohto tvrdenia, čiže niektoré dva susedné rezy musia zvierať uhol najviac 12 stupňov. A to sme chceli dokázať, že?

Úloha č. 2: *Katka si z dovolenky pri mori priniesla šesť krásnych kamienkov. Keďže sa rada hrá, položila ich na stôl a rozdelila do niekoľkých kôpok. Potom odobrala po jednom kamienku z každej kôpky a z nich vytvorila novú kôpku. Ak by takýto krok stále opakovala, koľko kôpok a s koľkými kamienkami by mohla mať na stole po* 30 *krokoch? Nájdite všetky možnosti a zdôvodnite, prečo už žiadne iné neexistujú.*

Riešenie: (opravovala Ivka)
Keď sa chvíľu budeme hrať so šiestimi kamienkami tak ako Katka, všimneme si, že po niekoľkých krokoch budeme mať na stole tri kôpky a na nich postupne jeden, dva a tri kamienky. (Bez ohľadu na to, ako sme kamienky rozdelili.) Ak spravíme ďalší krok, dostaneme znova tri kôpky a rovnaké rozloženie kamienkov. Po chvíli nás hranie prestane baviť, a tak usúdime, že po 30 krokoch budeme mať bez ohľadu na pôvodné rozdelenie kamienkov stále tri kôpky a na nich jeden, dva a tri kamienky. Teraz, keď už tušíme správnu odpoveď, potrebujeme zdôvodniť, prečo to tak bude vždy.
Všimnime si ako mohla Katka kamienky rozdeliť. Keďže má iba šesť kamienkov, mohla vytvoriť najviac 6 kôpok. Rozoberieme teda prípady, keď Katka rozdelí kamienky na jednu, dve, tri, štyri, päť alebo šesť kôpok. Rozdelenie kamienkov na kôpky môžeme zapísať kratšie tak, že napíšeme len počty kamienkov na jednotlivých kôpkach. Napríklad rozdelenie $(1, 2, 3)$ bude znamenať, že máme kôpky s jedným, dvoma a troma kamienkami. (Dokopy tri kôpky.)
Ak dá Katka všetky kamienky iba na jednu kôpku, vytvorí rozdelenie (6). Ak ich rozdelí na dve kôpky, môže dostať tri rôzne rozdelenia – $(1, 5)$, $(2, 4)$ alebo $(3, 3)$. Pri troch kôpkach dostávame znova tri možnosti a to $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$ a $(2, 2, 2)$. Ak má Katka rozdeliť šesť kamienkov na štyri kôpky, tak môže vytvoriť rozdelenie $(1, 1, 1, 3)$ alebo $(1, 1, 2, 2)$. Nakoniec, pri vytvorení piatich kôpok dostaneme rozdelenie $(1, 1, 1, 1, 2)$ a podobne ak Katka vytvorí šesť kôpok, rozdelenie bude $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. (Rozmyslite si to. Skontrolujte, či sme na žiadnu možnosť nezabudli.)
Pozrime sa ako Katka mení kôpky svojimi krokmi ak vychádza z nejakého rozdelenia. Katkin krok označíme šípkou $\to$, teda $(6) \to (1, 5)$ znamená, že Katka z jednej kôpky so šietimi kamienkami po jednom roku vyrobí dve kôpky s jedným a piatimi kamienkami. Ukážeme, že sa po niekoľkých krokoch dostaneme na rozdelenie $(1, 2, 3)$ a keďže platí $(1, 2, 3) \to (1, 2, 3)$, tak po tridsiatich krokoch budú kamienky vždy rozdelené takto. Spravme prvých niekoľko krokov z každého rozdelenia, až kým sa nedostaneme do situácie, v ktorej máme tri kôpky, na ktorých bude jeden, dva a tri kamienky.

- $(6) \to (1, 5) \to (2, 4) \to (1, 2, 3)$
- $(1, 5) \to (2, 4) \to (1, 2, 3)$
- $(2, 4) \to (1, 2, 3)$
- $(3, 3) \to (2, 2, 2) \to (1, 1, 1, 3) \to (2, 4) \to (1, 2, 3)$

- $(1,1,4) \to (3,3) \to (2,2,2) \to (1,1,1,3) \to (2,4) \to (1,2,3)$
- $(1,2,3)$
- $(2,2,2) \to (1,1,1,3) \to (2,4) \to (1,2,3)$
- $(1,1,1,3) \to (2,4) \to (1,2,3)$
- $(1,1,2,2) \to (1,1,4) \to (3,3) \to (2,2,2) \to (1,1,1,3) \to (2,4) \to (1,2,3)$
- $(1,1,1,1,2) \to (1,5) \to (2,4) \to (1,2,3)$
- $(1,1,1,1,1,1) \to (6) \to (1,5) \to (2,4) \to (1,2,3)$

Vidíme, že Katka sa po najviac šiestich krokoch dostane s kamienkami do rozdelenia $(1,2,3)$. To znamená, že po 30 krokoch bude v rozdelení $(1,2,3)$. Iná možnosť nie je.

Komentár: Úloha vám nerobila väčšie problémy, mnohí z vás však zabudli ukázať, že rozobrali naozaj všetky možnosti. Okrem zkonštatovania, že možností rozdelenia kamienkov je 11, treba napísať aj zdôvodnenie, že sú to naozaj všetky možnosti. Ak vám v zadaní príkladu niečo nie je jasné, stačí napísať do debaty na našej stránke, niekto vám zadanie určite rád objasní.

Úloha č. 3: *Hanka dostala ťažkú domácu úlohu – dokázať, že súčet $2^{60} + 7^{30}$ je deliteľný číslom 13. Keďže Hanka je poctivé dievča, úlohu si spraví sama. Skúste to však aj vy – viete, len tak pre istotu, aby si to Hanka mohla, hm… skontrolovať, hej, presne tak.*

Riešenie: (opravovali Rasťo a Zuzk:a))
Poďme Hanke trochu pomôcť. Môžeme si všimnúť, že 2^{60} a ani 7^{30} nie sú až také veľké čísla. Hodnoty 2^{30} a 7^{15} nám vyráta aj kalkulačka, potom ich stačí len ručne umocniť na druhú. Číslo $2^{60} = 1152921504606846976$ dáva po delení 13 zvyšok 1 a číslo $7^{30} = 22539340290692258087863249$ dáva po delení 13 zvyšok 12, čiže ich súčet je deliteľný 13.
Keby sme ale namiesto 30 a 60 mali v exponentoch oveľa väčšie čísla, napríklad milióny, tak by sa už tento postup nedal použiť. Preto si ukážeme jeden univerzálnejší. Ak umocňujeme číslo 2, postupne dostávame čísla 2, 4, 8, 16, 32, … Teraz si môžete všimnúť, že keď chceme skúmať deliteľnosť trinástimi, nemusíme už ďalej zdvojnásobovať 16, ale stačí zvyšok čísla 16 po delení 13, čiže 3. To preto, lebo $16 = 13 + 3$ a keď budeme 16 ďalej násobiť, tak $2 \cdot 16 = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 3$ a násobky čísla 13 nám už do celkového výsledku ničím neprispejú, lebo vždy dajú zvyšok 0.
Postupným násobením čísla 2 dostávame postupnosť zvyškov 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1, 2, 4, 8, … Vidíme, že po dvanástich krokoch sme opäť dostali zvyšok 2 a členy sa začali opakovať. To je očakávateľné, lebo je len 13 rôznych zvyškov po delení 13, a tak sa celkom skoro musí stať, že sa nejaký zopakuje. Keďže sa každý nasledujúci člen postupnosti získava len z predchádzajúceho člena, tak aj ďalšie čísla v postupnosti sa budú opakovať v rovnakom poradí ako predtým. Teda pre umocňovanie zvyškov čísla 2 po delení 13 máme periódu dĺžky 12. Z toho vyplýva, že číslo 2^{60} dáva po delení 13 rovnaký zvyšok ako číslo $2^{60-4\cdot 12} = 2^{12}$. Pritom z našej postupnosti vidno, že 2^{12} dáva zvyšok 1. Podobne vieme vypočítať zvyšok po delení 13 aj pre umocnenú sedmičku. Zistíme, že perióda opakovania zvyškov je tiež 12, a teda 7^{30} dáva rovnaký zvyšok ako $7^{30-2\cdot 12} = 7^6$. Pritom 7^6 (ako vidno z postupnosti, ktorú si sami pre kontrolu vytvoríte) dáva zvyšok 12. Dokopy sme teda dostali zvyšok 1+12=13, z čoho vyplýva, že číslo $2^{60} + 7^{30}$ je deliteľné 13.
Niektorí z vás našli aj jeden trikový spôsob. Pre nepárne n a ľubovoľné čísla a, b platí vzťah

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^{n-1}b^{n-1}),$$

pričom znamienka na pravej strane sa striedajú. Overte si to jednoduchým roznásobením zátvoriek. Nech $a = 2^4$ a $b = 7^2$. Potom dostávame $2^{60} + 7^{30} = (2^4)^{15} + (7^2)^{15} = (2^4 + 7^2)((2^4)^{14} - \cdots)$ a keďže $2^4 + 7^2 = 65$ je deliteľné 13, tak aj celý výraz je deliteľný 13.

Úloha č. 4: *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x_1, x_2, ktoré spĺňajú obe nasledujúce rovnice a jednu nerovnicu.*

$$\begin{aligned} x_2^4 - x_1^3 &= 5, \\ \frac{1}{x_2^2 - 1} - \frac{1}{x_2^2 + 1} &= \frac{1}{x_1^3}, \\ \sqrt{17x_2 - 5x_1} &\geq 1. \end{aligned}$$

Riešenie: (opravovali Miťo a Hanka)
Prvé dve rovnice až na tie mocniny vyzerajú v podstate celkom neškodne, tak sa pustime do druhej z nich, postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2^2-1} - \frac{1}{x_2^2+1} &= \frac{1}{x_1^3}, \\ (x_2^2+1)-(x_2^2-1) &= \frac{(x_2^2+1)(x_2^2-1)}{x_1^3}, \\ 2x_1^3 &= x_2^4-1, \\ x_2^4 &= 2x_1^3+1. \end{aligned}$$

(V prvom kroku sme rovnicu násobili súčinom $(x_2^2-1)(x_2^2+1)$, v druhom sme násobili x_1^3 a preusporiadali členy.) Všimnime si, že teraz v oboch rovniciach máme x_1 a x_2 v rovnakých mocninách. Keď nahradíme $x_1^3 = a$ a $x_2^4 = b$, tak z prvej a druhej rovnice dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} b &= 2a+1 \\ b-a &= 5. \end{aligned}$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme $-a = -2a+4$ a teda $a = 4$. Z druhej rovnice potom vyplýva, že $b = a+5 = 9$. V reči x_1 a x_2 to znamená

$$\begin{aligned} a = x_1^3 &= 4 \\ x_1 &= \sqrt[3]{4}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b = x_2^4 &= 9 \\ x_2^2 &= \pm 3 \\ x_2 &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch rovníc teda máme dve riešenia $(\sqrt[3]{4}, \sqrt{3})$ a $(\sqrt[3]{4}, -\sqrt{3})$. Ostáva nám overiť, či vyhovujú aj nerovnici

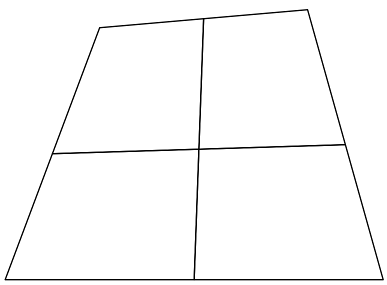
$$\sqrt{17x_2 - 5x_1} \geq 1.$$

Hneď si môžeme všimnúť, že ak za x_2 dosadíme zápornú odmocninu, bude výraz pod odmocninou menší ako nula. Preto táto možnosť nevyhovuje a ostáva nám zaoberať sa tou druhou.
Keďže obe čísla x_1 aj x_2 sú iracionálne, nepodarí sa nám vypočítať presnú hodnotu výrazu pod odmocninou. Treba ho len nejako odhadnúť. Ako to vieme urobiť? Jednou z možností je všimnúť si, že $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$. (Dokážte umocnením.) Preto $5x_2 - 5x_1 > 0$. Tiež zrejme platí, že $12x_2 > 1$ a preto $17x_2 - 5x_1 = 5x_2 - 5x_1 + 12x_2 > 0 + 1 = 1$. Spojením týchto nerovností dostávame $17x_2 - 5x_1 > 1$, čo je takmer ekvivalentné s nerovnosťou, ktorej platnosť sme mali overiť.

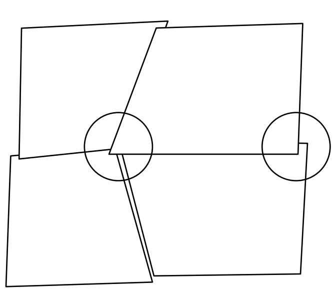
Komentár: Najprv si skúste všimnúť, že substitúciu (nahradenie) a, resp. b, za x_1^3, resp. x_2^2, sme mohli spraviť ešte skôr, ako sme sa pustili do riešenia. Nápovedou pre takýto postup mohlo byť to, že obe neznáme sa v oboch rovniciach vyskytujú iba v tretej, resp. druhej mocnine. Sme ale naozaj veľmi radi, že takéto nahradenie použili aj mnohí z Vás. Teraz pridáme pár slov o tom, prečo sme nerovnicu neoverovali pomocou kalkulačky. Asi viete, že $\sqrt{3}$ je iracionálne číslo, čo znamená, že sa nedá zapísať v tvare zlomku a zároveň je jeho desatinný rozvoj nekonečný (bez periódy). Preto keď túto odmocninu vypočítame na kalkulačke a všimneme si iba niekoľko (hocikoľko konečne veľa) cifier, dopustíme sa chyby. To znamená, že číslo, ktoré takto získame, sa nebude rovnať pôvodnému, alebo, inak povedané, rovnosť $\sqrt{3} = 1,73205$ ani žiadna podobná neplatí. Preto ani hociaký výsledok, ktorý použitím takýchto rovností odvodíme, nemusí platiť. Čo je ešte horšie, situáciu nezachránime ani tým, ak odmocniny zaokrúhlime. Za domácu úlohu nájdite dve čísla c a d také, že $3c > 2d$, ale keď c a d zaokrúhlime, nerovnosť nebude platiť.

Úloha č. 5: *Kika si narysovala konvexný štvoruholník ABCD. Potom spojila stredy jeho protiľahlých strán a dostala tak štyri menšie štvoruholníky, z ktorých sa jej podarilo poskladať rovnobežník. Je to náhoda? Dá sa to vždy? Prečo?*

Riešenie: (opravovali Kaja a Tina)
Urobme to, čo Kika. Nakreslime si štvoruholník (*Obrázok 1*) a vystrihnime. Skúsme poskladať rovnobežník. Rozstrihané časti pouklad áme k sebe časťami, ktoré tvorili strany pôvodného štvoruholníka. Výsledok je na obrázku (*Obrázok 2*).



Obrázok 1



Obrázok 2

Tento útvar vyzerá skoro ako rovnobežník, až na pár detailov (sú nimi napríklad zakrúžkované miesta Q a P v druhom obrázku v poradí zľava). Otázne je, či sme tieto nepresnosti spôsobili neporiadnym strihaním a skladaním, alebo tento útvar v skutočnosti rovnobežníkom nie je. Pozrime sa na tieto miesta poriadne.
Miesto P: Ukážeme, že strany útvaru sú „rovné" úsečky (nie sú „zalomené"). Potom nám ostanú na obvode útvaru iba štyri uhly (vidíte ich?) a bude jasné, že poskladaný útvar je štvoruholník (má štyri strany a štyri uhly). Na odôvodnenie, prečo sú strany „rovné", nám poslúžia susedné uhly (pripomeňme, že ich súčet je 180°). Dvojice susedných uhlov pri stredoch strán pôvodného štvoruholníka ostanú vedľa seba aj v novom útvare. Dokázali sme, že poskladaný útvar je štvoruholník.
Miesto Q: Nastrihané štvoruholníčky sme k sebe poprikladali rovnako dlhými stranami. Tu vidíme (miesto Q), že ak chceme štvoruholník ako sa patrí, musia sa štvoruholníčky na tomto mieste stretnúť v jednom bode a slušne sa správať (vyplniť celú plochu štvoruholníka bez vzájomného prekrývania). Na to aby sme ukázali, že nám strany malých štvoruholníkov k sebe zapadnú, musíme ukázať, že súčet uhlov okolo tohto bodu je 360°. Keď sa pozrieme, kde sú uhly, ktoré sa tu stretávajú, umiestnené v pôvodnom štvoruholníku, vidíme, že sú to jeho vnútorné uhly. Preto je ich súčet naozaj 360°. (Zamyslite sa, ako sme využili, že priliehajúce strany štvoruholníčkov sú rovnako dlhé a prečo to tak je.)
Teraz máme poskladaný štvoruholník a v jeho vnútri sú štyri malé do seba zapadajúce štvoruholníčky. Potrebujeme ukázať len to, že je skutočne rovnobežníkom. Na to nám stačí ukázať, že protiľahlé uhly poskladaného štvoruholníka sú rovnako veľké. Opäť sa pozrime do pôvodného štvoruholníka a nájdime si tieto uhly (urobte to). Vidíme ich okolo priesečníka spojníc stredov strán. Naozaj sú dva a dva z nich rovnako veľké (vrcholové uhly). Keď sa teraz pozrieme na poskladaný štvoruholník, vidíme, že oproti sebe sú práve rovnako veľké uhly.
Nebola to náhoda, že Kike sa podarilo poskladať rovnobežník, dá sa to vždy.
Poznámka: To, že štvoruholník je rovnobežník, sa dalo ukázať viacerými spôsobmi. Niektorí ste to ukazovali využitím poznatku, že spojnice stredov strán sa rozpoľujú. Táto vec nie je všeobecne známa a stojí za vysvetlenie.

Úloha č. 6: *Dvaja hráči hrajú takúto hru: na tabuľu píšu čísla od* 1 *do* 1000 *vrátane, pričom ak je nejaké číslo c už napísané na tabuli, ďalší hráč na ťahu môže pripísať buď číslo $c+1$, alebo číslo $2c$. Čísla sa z tabule nezotierajú a každé môže byť napísané najviac raz. Prvý hráč začína, pričom na tabuli je napísané iba číslo* 1. *Vyhrá ten, kto prvý napíše číslo* 1000. *Pre ktorého z hráčov existuje víťazná stratégia? Popíšte ju. (Víťazná stratégia je návod ako hrať a vyhrať, nech sa súper snaží ako chce.)*

Riešenie: (opravovali Katka a Miťo)
Na začiatok treba povedať, ža úloha nebola ťažká. Zadanie však skrývalo pár záludností, bolo ho treba správne pochopiť. Najskôr si vysvetlime, na čo si bolo treba dať pozor. Systém hry spočíva v tom, že môžeme napísať číslo tvaru $c+1$ alebo $2c$ ku *hociktorému* číslu na tabuli, nie len k poslednému napísanému. Tí z vás, ktorí robili ďalší ťah v závislosti od posledného napísaného čísla, riešili inú úlohu. Zadanie ďalej hovorilo, že číslo 1 je už na tabuli napísané, nie to, že ho napíše prvý hráč. Snáď je teraz všetko jasné, poďme konečne k riešeniu úlohy :).

Na hru sa pozrime od konca. Aby sa dalo napísať číslo 1000 a vyhrať, musí byť na tabuli napísané jedno z čísel 500 alebo 999. Tieto dve čísla sú preto prehrávajúce a hráč, ktorý chce vyhrať, sa im musí snažiť vyhnúť, alebo musí prinútiť protihráča, aby ich napísal. Keďže prehrávajúce čísla sú len dve, môže hráč napísať na tabuľu hociktoré iné číslo bez toho, aby prehral. Koľko je takýchto čísel? Dá sa každé z nich napísať?
Ak je na tabuli číslo 1, vieme pomocou operácie $c+1$ napísať všetky čísla až po 1000. To by bolo fajn, keby sme takto nenapísali aj číslo 500, ktoré napísať nechceme. Nevadí, zistili sme aspoň, že čísla od 1 po 499 určite napísať vieme. Číslo 500 potrebujeme preskočiť a na to potrebujeme použiť operáciu $2c$. Tou ale vieme získavať iba párne čísla, čiže určite takto nezískame číslo menšie ako 502. Pritom toto číslo získať vieme ako $2 \cdot 251$. Ak už je 502 na tabuli, vieme, podobne ako v prípade čísel menších ako 500, pomocou $c+1$ napísať všetky čísla až po 998. Dostávame teda, že jediné číslo okrem 1 a 1000, ktoré nie je prehrávajúce a nevieme ho napísať, je 501.
Spolu to je $1000 - 5 = 995$ čísel, ktoré možno dopísať, a to je 995 možných neprehrávajúcich ťahov. (Všimnime si, že ich počet vôbec nezávisí od toho, kto kedy aké číslo napísal.) Teraz si už stačí uvedomiť, že vďaka konečnému počtu neprehrávajúcich ťahov sa hra skončí vždy, keď sa tieto ťahy minú, teda najneskôr 996. ťahom. Ďalej vieme, že začínajúci hráč robí nepárne ťahy a druhý hráč v poradí párne ťahy. Keďže neprehrávajúcich ťahov je 995, posledný z nich urobí ten hráč, ktorý začínal. Druhý hráč nebude mať na výber a preto napíše buď 500 alebo 999, čím umožní prvému hráčovi vyhrať. Preto pre prvého hráča existuje víťazná stratégia a tá znie: nenapísať 500 ani 999 a keď súper napíše jedno z týchto čísel, napísať 1000. Tým je úloha vyriešená.

Úloha č. 7: *Majme nekonečnú aritmetickú postupnosť, ktorá obsahuje iba prirodzené čísla. Dokážte, že ak obsahuje nejakú druhú mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.*
Poznámka: Ak si prvý člen aritmetickej postupnosti označíme a_0, tak pre všetky prirodzené čísla n vieme ďalšie členy vyjadriť ako $a_n = a_{n-1} + d$. To znamená, že každý člen je o d väčší než predchádzajúci. Skúste si ešte premyslieť, že platí aj $a_n = a_0 + nd$.

Riešenie: (opravovali Ajka a Bebe)
Použime označenie zo zadania. Pozrime sa teraz bližšie na d. Ak by bolo d *záporné*, tak od nejakého člena budú všetky prvky našej postupnosti záporné. Je to tak preto, lebo a_0 je prirodzené číslo a jeho zmenšovaním by sme sa určite dostali „medzi" záporných čísel. Teda d je nezáporné. Ak d *je nula*, tak úlohu hravo vyriešime. Označme si

štvorec[1] v našej postupnosti ako x^2. Ďalším členom po x^2 je $x^2 + d = x^2 + 0 = x^2$, opäť štvorec, no a nekonečná postupnosť čísel x^2 obsahuje nekonečne veľa štvorcov.

Koniec? Len zdanlivo. Ostáva vyriešiť najťažšiu časť, možnosť d *kladné*. V tom prípade sú všetky členy našej postupnosti rôzne prirodzené čísla. Ako teda ďalej? Najprv sa zamyslíme nad tým, ako môžu tieto štvorce vyzerať. Nájdeme nejaký väčší ako x^2? Alebo sú všetky menšie? Na tieto otázky odpovie nasledujúca úvaha.

Predstavme si, že by boli všetky hľadané štvorce menšie ako x^2. Preto by muselo existovať nekonečne veľa štvorcov menších ako x^2. Ale x^2 je konkrétne prirodzené číslo, takže medzi ním a nulou je presne $(x^2 - 1)$ čísel, čo je len konečný počet. (Okrem toho, všetky členy našej postupnosti sú navzájom rôzne, preto aj tieto štvorce musia byť rôzne.) Teda všetky štvorce nemôžu byť menšie ako x^2. Niekoľko ich preto musí byť aj väčších ako x^2. Ale koľko? Ak by bol väčší len konečný počet z nich, tak nám stále ostane nekonečne veľa menších, čo nie je možné. Preto musí byť nekonečne veľa zo štvorcov väčších ako x^2. Ak ukážeme, že existujú, tak splníme našu úlohu. Najľahšie zrejme bude priamo ich nájsť.

Ako sme na tom teraz? Máme x^2 a chceme nájsť nekonečne veľa väčších štvorcov, ktoré sú členmi našej aritmetickej postupnosti. Skúsme nájsť aspoň jeden z nich. Tento musí byť od x^2 väčší o nejaký násobok d. (Lebo je taktiež členom aritmetickej postupnosti.) Takže chceme, aby x^2+dk (Δ) bolo pre nejaké prirodzené číslo k štvorcom. Ktoré známe štvorce majú takýto tvar? Poďme si nejaké vyskúšať. Prvý, ktorý nám asi napadne, je $(x+1)^2$. Ten je rovný $x^2 + 2x + 1$. No o tomto tvare sa ťažko hovorí, či je rovnaký ako tvar (Δ). Chýba nám v ňom d. Musíme skúsiť iný. Taký, v ktorom bude vystupovať aj d. Takým je napríklad $(x+d)^2$. Platí $(x+d)^2 = x^2+2xd+d^2 = x^2+d(2x+d)$. Keďže v (Δ) je k ľubovoľné prirodzené číslo, tak vyhovuje aj $k = 2x + d$. (Overte, že je naozaj prirodzené.)

Je teraz už koniec? Ešte stále nie. My sme mali dokázať, že naša postupnosť obsahuje nekonečne veľa štvorcov. Zatiaľ sme však dokázali, že ak máme jeden, tak v nej bude aj druhý. Čo s tým? Ponúkajú sa dva možné spôsoby dokončenia riešenia. Povieme, že k hociktorému štvorcu vieme nájsť ďalší (väčší) a týmto spôsobom môžeme vyrobiť nekonečne veľa štvorcov. Ukážeme si ale elegantnejšie zdôvodnenie tohoto záveru.

Našou výhodou v tomto momente je, že ak máme nejaký štvorec, tak vieme úspešne nájsť v našej postupnosti od neho väčší. A to by sme mohli využiť. Predpokladajme, že je štvorcov len konečný počet. V takomto prípade si ich vieme vypísať a vybrať najväčší spomedzi nich. Tento si označme y^2. No ako sme si pred chvíľou ukázali, ku každému štvorcu vieme nájsť väčší štvorec patriaci do postupnosti. Pre y^2 to je $(y+d)^2$. To znamená, že y^2 nebol najväčší štvorec, a že sme niekde v našej úvahe spravili chybu. A to sme mohli jedine v predpoklade, že štvorcov je konečný počet. Teda našich štvorcov je nekonečne veľa. Tým je úloha vyriešená. Koniec `:)`.

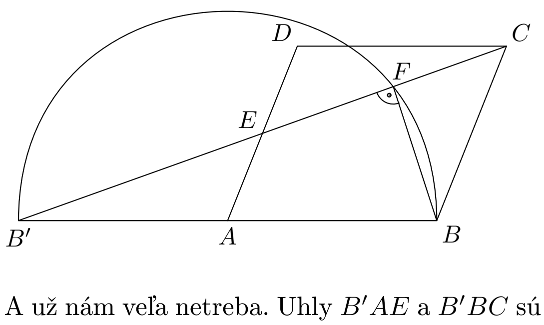
Komentár:

Úloha nebola ťažká, avšak napriek tomu sa veľká časť z Vás dopustila závažnej logickej chyby. Predpokladali ste, že v našej postupnosti existuje aj iná druhá mocnina okrem zadanej a z toho ste odvodili, ako má vyzerať. Toto však nemôžete robiť. Je to preto, lebo z chybných predpokladov môžete odvodiť pravdivé, ako aj nepravdivé tvrdenie (z predpokladu $1 + 1 = 4$ odvodíte napríklad aj $0 = 2$). Tento dôkaz nefunguje, no existuje spôsob, ako sa z tejto situácie dostať. Stačí overiť, že takýto štvorec sa naozaj v našej postupnosti vyskytuje. V budúcnosti si na to dávajte pozor.

Úloha č. 8: *Nech $ABCD$ je rovnobežník a E je bod na jeho strane AD. Na úsečke CE leží bod F tak, že úsečka BF je kolmá na úsečku CE. Bod G je osovo súmerný s bodom F podľa priamky AB. Zistite veľkosť pomeru $|AE|/|DE|$, ak viete, že A je stred kružnice opísanej trojuholníku BFG.*

Riešenie: (opravovali Kubman a Škrečok)

Na úvod vás chceme všetkých pochváliť, že ste objavili mnoho pekných (aj menej pekných `:)`) riešení. Ukážeme si najkrajšie z nich.



Keďže A je stred kružnice opísanej trojuholníku BFG, úsečka AB je jej polomer. Predĺžme si teraz úsečku AB a zostrojme bod B' stredovo súmerný s bodom B podľa stredu A. Platí teda, že body A, B, B' ležia na jednej priamke a navyše $|AB| = |B'A|$.

Vďaka *Tálesovej vete* vieme, že ľubovoľný trojuholník zostrojený nad priemerom kružnice je pravouhlý a naopak. Zo spôsobu konštrukcie bodu B' potom vyplýva, že úsečka BB' je priemer našej kružnice opísanej trojuholníku BFG.

A už nám veľa netreba. Uhly $B'AE$ a $B'BC$ sú zhodné, pretože ich zvierajú rovnobežky $AD||BC$ s tou istou priamkou $B'B$. Trojuholníky $B'AE$ a $B'BC$ sú preto podobné podľa vety *uu*, majú naviac spoločný $|\sphericalangle AB'E| = |\sphericalangle CB'B|$. Koeficient ich podobnosti je napríklad pomer

$$\frac{|B'A|}{|B'B|} = \frac{|AB|}{|B'B|} = \frac{1}{2}.$$

To ale znamená, že aj ostatné príslušné strany sú v tomto pomere, konkrétne

$$\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

[1] slovo "štvorec" sa, okrem iného, používa aj na označenie "druhej mocniny", napr. štvorec a je to isté ako druhá mocnina a

V rovnobežníku $ABCD$ platí $|AD| = |BC|$, preto je aj pomer $|AE|$ k $|AD|$ rovný $1/2$. Teraz už ľahko určíme hľadaný pomer

$$\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AD|/2}{|AD| - |AD|/2} = \frac{1}{1}.$$

Hotovo.

Komentár: Viacerí sa pustili do rozoberania možných polôh bodu F. Je to samozrejme chválitebné a v geometrických úlohách zväčša potrebné, táto úloha však bola výnimkou. V zadaní sa totiž píše, že body E, F ležia na *úsečkách* AD, resp. CE. Premyslite si, prečo vtedy naozaj nemôže nastať iná situácia než tá, ktorú sme uvažovali vo vzorovom riešení.

Úloha č. 9: *Dokážte, že čísla* $1, 2, \ldots, 16$ *vieme rozmiestniť na šachovnicu* 4×4 *tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac* 4. *Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac* 3.

Riešenie: (opravoval Mišáč)
Na dôkaz prvej časti stačí nájsť také rozmiestnenie čísel, pri ktorom je rozdiel ľubovoľných dvoch susedných čísel[2] najviac štyri. Po chvíli bádania ľahko nejaké nájdete, napríklad tieto:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	4	7
3	5	8	11
6	9	12	14
10	13	15	16

Po chvíli vpisovania čísel do šachovnice nadobudneme presvedčenie, že rozmiestniť čísla tak, ako popisuje druhá časť zadania, sa naozaj nedá. Ako ale dokázať, že to nejde? Pri vpisovaní čísel si môžeme všimnúť, že najvýhodnejšie je umiestniť čísla 1 a 16 čo najďalej od seba. Pozrime sa na to, v akej vzájomnej polohe môžu byť tieto čísla na šachovnici. Nech je vzdialenosť dvoch políčok na šachovnici minimálny počet políčok, ktoré treba prejsť od jedného políčka k druhému. Napríklad vzdialenosť susedných políčok je jeden a vzdialenosť políčok susediacich rohom je dva. Umiestnime niekde čísla 1 a 16 a zoberme si ľubovoľnú postupnosť susediacich políčok ktorá ich spája. Na týchto políčkach musia byť čísla tak, aby rozdiel nasledujúcich bol najviac 3, teda napríklad 1, 4, 7, 10, 13 a 16. V tejto postupnosti sme využili najväčšie možné rozdiely medzi susednými políčkami, preto na každej postupnosti susediacich políčok vedúcej z 1 do 16 potrebujeme aspoň štyri ďalšie políčka. (Okrem 1 a 16.) To znamená, že vzdialenosť čísel 1 a 16 musí byť aspoň päť. Z toho dostávame, že čísla 1 a 16 môžu byť na šachovnici rozmiestnené len dvoma spôsobmi. Buď sú obe čísla v protiľahlých rohoch (ich vzdialenosť je šesť), alebo je jedno z čísel v rohu a druhé na políčku susediacom s protiľahlým rohom (ich vzdialenosť je päť). Skúste si zdôvodniť, že iné rozmiestnenia týchto dvoch čísel neexistujú, ak má byť ich vzdialenosť aspoň päť. Rozoberme uvedené dva prípady. Nech sú čísla 1 a 16 v protiľahlých rohoch.

1			○
		○	
	○		
○			16

Vzdialenosť čísel na vyznačenej uhlopriečke od čísla 1 je tri, teda na uhlopriečke môžu byť čísla najviac o $3 \cdot 3 = 9$ väčšie ako číslo 1. Podobne vzdialenosť čísel na tejto uhlopriečke od čísla 16 je 3, teda na nej môžu byť čísla najviac o 9 menšie ako číslo 16. To znamená, že na uhlopriečke môžu byť jedine čísla 7, 8, 9 a 10. Keďže na tejto uhlopriečke majú byť štyri čísla, tak to musia byť práve čísla 7, 8, 9 a 10. (Nie nutne v tomto poradí.) Všetky čísla vo vzdialenosti dva od čísla 1 susedia s vyznačenou uhlopriečkou. Tieto čísla môžu byť najviac o 6 väčšie ako číslo 1. Keďže číslo 7 už je na uhlopriečke, tak čísla vo vzdialenosti dva od čísla 1 sú najviac 6. Avšak nejaké z týchto čísel určite susedí s číslom 10 na uhlopriečke, čo tvorí rozdiel aspoň štyri. Zistili sme, že čísla 1 a 16 nemôžu byť v protiľahlých rohoch.
Nech sú čísla 1 a 16 umiestnené tak, že jedno z nich je v rohu a druhé na políčku susediacom s protiľahlým rohom. Uvidíme, že nezáleží ktoré z čísel 1 a 16 je umiestnené v rohu. Vzdialenosť čísel 1 a 16 je päť, preto obe postupnosti políčok znázornené na obrázku musia byť práve tvaru 1, 4, 7, 10, 13, 16.

	1	●	●
	○		●
	○		●
	○	○	16

[2] ako susedné budeme označovať políčka susediace stranou

Čísla 4, 7, 10 a 13 sa nemôžu nachádzať súčasne na dvoch miestach, a teda čísla 1 a 16 na šachovnicu nevieme vhodne umiestniť. Preto šachovnicu nevieme vhodne vyplniť číslami, čo sme chceli dokázať.

Úloha č. 10: *Daná je priamka p a body A, B nepatriace priamke, ktoré ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku p. Nájdite na tejto priamke všetky body M s nasledujúcou vlastnosťou: uhol, ktorý zviera priamka p s úsečkou AM, je dvakrát väčší ako uhol, ktorý zviera priamka p s úsečkou BM.*

Riešenie: (opravovali Janka a Miki)
Pred samotným riešením treba spomenúť, že uhol medzi úsečkou a priamkou sa meria presne ako medzi priamkou (na ktorej leží tá úsečka) a priamkou – a to je vždy ten menší z nich.
Keď si nakreslíme zopár (desiatok) obrázkov, zistíme, že máme veľa možností, ako môžu byť body A a B usporiadané. A kto si ich nenakreslil dosť veľa, ten o tom ani nevie. Totiž pre rôzne takéto usporiadania vyjde zrejme aj iný počet riešení, preto si ich skúsime vhodne kategorizovať. Výborné rozdelenie je takéto: vzniknuté uhly buď majú prekryv, alebo nemajú. Uvažujeme prekryv okrem spoločného bodu M – ten vždy musia mať.
Tie, čo nemajú prekryv, majú spoločnú vlastnosť, že bod M sa nachádza medzi kolmými priemetmi bodov A a B na priamku p. (Tieto priemety si nazvime A_0 a B_0.) Druhá kategória riešení má bod M na priamke p buď vpravo, alebo naľavo od bodov A_0 a B_0.
Pozrime sa najprv na prvú kategóriu riešení a nakreslime si nejaký obrázok, pre ktorý sa dá nájsť nejaký bod M vyhovujúci zadaniu. Čo tam vidíme? Keď si ho nakreslíme správne (aj s bodom A' osovo súmerným s bodom A) tak vidíme, že priamka BM je osou uhla zovretého medzi úsečkou $A'M$ a priamkou p. To znamená, že kolmicou z bodu A' na túto os uhla dostaneme na priamke p bod C, ktorý je veľmi dôležitý. Trojuholník $A'CM$ je totiž rovnoramenný, ba naviac aj trojuholník $A'CB$ je rovnoramenný – oba sú zostrojené nad základňou $A'C$. Toto je fakt, ktorý nám umožní zostrojiť M – nájdem A', nájdem C, nájdem stred $A'C$ a tento stred spojím s B. Táto spojnica pretne priamku p v bode M. A teraz sa pozrime na háčiky: jeden je v nájdení bodu C. Tie totiž môžu byť dva, pretože C hľadám ako priesečník kružnice z bodu B s polomerom BA'. Zvýšok postupu je úplne jednoznačný, teoreticky nám teda vyjdú dva body M. Finta je v tom, že keď použijeme sedliacky rozum, tak zistíme, že nám môže vyjsť maximálne jeden bod M v tejto kategórii. (T.j. medzi bodmi A_0,B_0.) Ak máme totiž nejaký bod M vyhovujúci podmienkam zadania a pohneme s ním na priamke smerom ku A_0, tak uhol s AM stúpa a uhol s BM klesá a teda nemôže znova nastať situácia, že uhol p s AM bude dvojnásobok toho druhého. Druhý háčik je v tom, že sme začali obrázkom, kde M existoval a teda našli sme len **nutnú** podmienku pre existenciu M. Takýto bod medzi A_0 a B_0 vôbec nemusí existovať a to z dôvodu, že bod C nám vôbec nemusí vzniknúť, alebo M nevyjde na priamke p medzi A_0 a B_0. V týchto prípadoch môžeme konštatovať, že je konštelácia p, A, B nepriaznivá a riešenie neexistuje.
Teraz druhá kategória riešení. Zase začneme obrázkom, kde taký bod M existuje a pozorujeme. Nemusíme ani chodiť na opačnú polrovinu, ktora obsahuje body A, B, aby sme si všimli, že BM je osou uhla medzi p a AM. (Je tu istá analógia s predchádzajúcou kategóriou.) Kolmica z bodu A na túto os uhla pretne priamku v bode, ktorý označíme zase C. Trojuholník ACM je rovnoramenný a taktiež je rovnoramenný aj trojuholník ACB. Bod C vieme teda zase zostrojiť, ako priesečník kružnice z B s priemerom AB a priamky p. (Diskusia chvíľu počká.) Potom nájdeme stred úsečky AC a ten spojíme s B. Táto priamka pretne p v bode M a keby nás nečakala diskusia, tak sa tešíme ako blchy. Takto musíme ešte porozmýšľať. Zase sme začali najprv obrázkom, kde bod M existoval a potom sme zdôvodnili, ako sa dá nájsť. Našli sme teda nutnú podmienku jeho existencie a teda tento postup nám nemusí vždy určiť bod, ktorý vyhovuje. Týmto postupom však vyjdú maximálne 2 body, ktoré kandidujú na M – podľa počtu priesečníkov kružnice s priamkou. A ak aj vyjdú 2 priesečníky, tak nejaký M môže stále spadnúť medzi A_0 a B_0, čím už nespadá do tejto kategórie a preto ho nemôžme prijať do košíka s riešeniami tejto úlohy. V tejto kategórii však dve riešenia vyjsť môžu – vhodný obrázok iste za chvíľu nájdete ;).

Úloha č. 11: *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y platí*

$$f(x^3) + f(y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2).$$

Riešenie: (opravovali Ondráč a Kuna)
Sme veľmi radi, že ste sa opäť rozhodli letieť so vzorákom úlohy číslo 11. Tento náučný let bude ponad svet funkcií a funkcionálnych rovníc. Poriadne sa pripútajte, uvidíte, čo ste ešte nevideli. Pri prípadnej nehode dostanete píšťalku na žraloky, …, ehm, myslel som na funkcie :).
Máme nájsť všetky také funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre ľubovoľné reálne čísla x, y spĺňajú

$$f(x^3) + f(y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2). \tag{1}$$

Vyskúšajme za x a y dosadiť nejaké konkrétne čísla, najlepšie nejaké jednoduché, ako 0, 1, -1. Ak dosadíme $x = y = 0$, zisťujeme, že platí $f(0) + f(0) = 0$ a teda $f(0) = 0$. Dosadenia s 1 a -1 nám už presne neurčia inú funkčnú hodnotu. (Vyskúšajte si. Čo zistíme pre $x = 1$ a $y = -1$?)
Ďalej si skúsme nahradiť v našej rovnici konkrétnym číslom len jedno z x, y. Napríklad ak položíme $x = 0$, dostávame $f(0) + f(y^3) = 0 + y f(y^2)$ teda pre každé reálne y platí $f(y^3) = y f(y^2)$. To vyzerá celkom užitočne. Ak dosadíme $y = 0$ a x necháme ľubovoľné dostaneme $f(x^3) = x^2 f(x)$. Čo sme o funkcii f zistili? Pre každú funkciu, čo spĺňa (1), musí pre každé reálne x platiť

$$f(x^3) = xf(x^2) = x^2 f(x). \tag{2}$$

Podmienka $f(0) = 0$ sa nestratila, vyplýva z práve napísanej rovnice pre $x = 0$. Uvedomme si, že ak funkcia f spĺňa (2), potom spĺňa aj (1). (Premyslite si prečo.) Tým sme ukázali ekvivalenciu podmienok (1) a (2).
Ďalej si do 2 dosadíme x a $-x$ ($x \neq 0$). Dostávame

$$\begin{aligned} xf(x^2) &= x^2 f(x), \\ -xf((-x)^2) &= (-x)^2 f(-x). \end{aligned}$$

Porovnaním týchto rovníc dostaneme $f(x) = -f(-x)$. To platí pre každé x a teda funkcia f je nepárna.
Mnohí z vás sa po týchto zisteniach rozhodli, že je „zrejmé“, že všetky riešenia sú tvaru $f(x) = kx$, kde k je ľubovoľná reálna konštanta. Toto riešenie sa dalo uhádnuť aj zo začiatočného tvaru a naozaj vyhovuje, overte si to dosadením. Nikomu sa však nepodarilo poriadne zdôvodniť, že to sú jediné riešenia a to preto, lebo *existujú aj iné*. Pokúsme sa ich spolu nájsť.
Poďme na to nasledovne. Majme kladné reálne číslo a a nech $f(a) = b$. Čo všetko vieme potom zistiť o hodnotách f v iných bodoch? Pomocou $f(x^3) = x^2 f(x)$ a $f(x^2) = xf(x)$ (dosadením $x = a$, $x = a^{1/2}$, či $x = a^{1/3}$) ľahko vyrátame $f(a^2) = ab$, $f(a^3) = a^2 b$, $f(a^{1/2}) = a^{-1/2} b$ a $f(a^{1/3}) = a^{-2/3} b$. Keď poznáme tieto hodnoty, vieme zistiť aj $f(a^4) = a^3 b$, $f(a^6) = a^5 b$, $f(a^{1/6}) = a^{-5/6} b, \ldots$ Teda ak poznáme f v bode a a číslo c dostaneme z a len umocňovaním na 2, 3, 1/2 a 1/3, tak poznáme aj hodnotu f v bode c. Presnejšie, chceme dokázať, že z $f(a) = b$ vieme zistiť hodnotu vo všetkých bodoch tvaru $a^{2^m 3^n}$, kde m, n sú celé čísla. Dokonca sa zdá, že platí $f(a^{2^m 3^n}) = ba^{2^m 3^n - 1}$. Ako to formálne dokážeme? Skúsme indukciu vzhľadom na $|m| + |n|$. Pre $|m| + |n| = 0$, teda $m = n = 0$, je to zrejmé. Majme prirodzené k také, že pre všetky dvojice celých m a n, pre ktoré $|m| + |n| < k$, platí $f(a^{2^m 3^n}) = ba^{2^m 3^n - 1}$. Nech m a n sú celé čísla, pričom $|m| + |n| = k$. Rozoberieme tri prípady. Najprv nech m je kladné. Potom využitím (2) pre $x = a^{2^{m-1} 3^n}$ dostávame

$$\begin{aligned} a^{2^{m-1} 3^n} f((a^{2^{m-1} 3^n})^2) &= (a^{2^{m-1} 3^n})^2 f(a^{2^{m-1} 3^n}), \\ f(a^{2^m 3^n}) &= a^{2^{m-1} 3^n} ba^{2^{m-1} 3^n - 1}, \\ f(a^{2^m 3^n}) &= ba^{2^m 3^n - 1}, \end{aligned}$$

pričom sme využili indukčný predpoklad pre $m - 1$ a n ($|m - 1| + |n| = k - 1 < k$). Ak je m záporné postupujeme rovnako, ale dosádzame $x = a^{2^{m+1} 3^n}$. (Vyskúšajte si.) Zostáva nám prípad $m = 0$, čiže $|n| = k$. Tu naše tvrdenie dokážeme využitím $f(x^3) = x^2 f(x)$ (a indukčného predpokladu) pre $x = a^{3^{n-1}}$ ak $n = k$ a $x = a^{3^{n+1}}$ ak $n = -k$. Tým sme dôkaz indukciou dokončili.
Zhrňme si to. Podarilo sa nám dokázať, že pre ľubovoľné celé čísla m a n platí

$$f(a^{2^m 3^n}) = ba^{2^m 3^n - 1} = \frac{b}{a} a^{2^m 3^n}.$$

Z nepárnosti ďalej dostávame

$$f(-a^{2^m 3^n}) = -ba^{2^m 3^n - 1} = \frac{b}{a}(-a^{2^m 3^n}).$$

Teda, akonáhle určíme hodnotu f v bode a ($f(a) = b$), určíme aj hodnoty v množine $M_a = \{\pm |a|^{2^m 3^n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. (Rozmyslite si, že to platí pre kladné, záporné aj nulové a.) Na množine M_a sa f musí správať lineárne, teda pre $x \in M_a$ platí $f(x) = xb/a$. Kľúčom k úplnemu riešeniu je uvedomiť si, že žiadne iné hodnoty už predpoklad $f(a) = b$ neovplyvní. Ukážeme, že množiny tvaru M_a tvoria *rozklad* množiny reálnych čísel, čiže ak s, t sú dve reálne čísla, tak množiny M_s a M_t sú buď disjunktné, alebo totožné. Dôkaz je dosť technický, stačí si uvedomiť, že ak nejaké reálne číslo z patrí do oboch množín, tak potom $M_s = M_z$ a $M_z = M_t$. (Dokážte si to!)
Teraz si pre každú množinu M_a určíme lineárny koeficient k_a taký, že $f(x) = k_a x$ pre $x \in M_a$. Musíme to spraviť tak, že ak $M_a = M_b$, tak $k_a = k_b$. Tým sme určili f vo všetkých bodoch ako $f(x) = k_x x$. Riešenie (1) či (2) musí mať takýto tvar. Ukážeme, že to stačí. S takto definovanou funkciou máme $f(x^3) = k_{x^3} x^3$, $xf(x^2) = k_{x^2} x^3$ a $x^2 f(x) = k_x x^3$. Tieto tri hodnoty sa však rovnajú, lebo ľahko ukážeme, že $M_x = M_{x^2} = M_{x^3}$, z čoho už vyplýva $k_{x^3} = k_{x^2} = k_x$. Našli sme všetky vyhovujúce funkcie a pokúsili sa podať ich čo najpresnejšiu charakterizáciu. A to sme chceli, či nie?
Pristávame. Na začiatku sme vám zabudli povedať, kde sú sáčky, snáď (v prípade potreby) sa vám ich podarilo nájsť. Kto číta túto vetu, nech napíše na debatu KMS vtip o Kune.

<u>Úloha č. 12:</u> *V štvorci* 1×1 *sa zrazu objavilo konečne veľa úsečiek, ktoré majú súčet dĺžok* 18. *Každá z nich je rovnobežná s jednou zo strán štvorca a rozdeľujú ho na niekoľko častí. Bus si myslí, že obsah každej tejto časti je menší ako* $0,01$. *Môže mať pravdu?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Jaro)
Po prečítaní vzorového riešenia predošlej úlohy Vám následne ponúkame vzorák prvej pomoci na zmiernenie zúfalých záchvatov smiechu. Budete naň potrebovať iba štipku konštrukčnej geometrie a pár ľahkých nerovností. Ako čerešničku uprostred použijeme konvexný obal.

Úvodná idea býva pekne pravidelne štvorec nakrájať deviatimi vodorovnými a deviatimi zvislými rezmi. Podávaná porcia takto činí sto kusov po $0,01$. Čo čert nechcel, Busovo tvrdenie asi tesne neplatí. Niečo Vám našepkáva, že to nebude náhoda. A skutočne, náplňou ďalších riadkov bude usvedčiť ho ;).

Spomeňme najprv vhodné postrehy. Všimnime si, že úsečky neležiace na už nakreslenej uzavretej čiare (chvostíky) sú nanič. Takže preformulujeme zadanie na „. . . súčet dĺžok najviac 18." a predpokladajme, že už sme z porcií vyhádzali chvostíky. Celé sa to rozpadne na n pravouholníkov. Použime S_i pre ich obsahy a O_i pre obvody. Predpokladajme, že $S_i < 0,01$, alebo ekvivalentne $10S_i < \sqrt{S_i}$. Dĺžka úsečiek, ktoré ostali, je v obvodoch zarátaná dvakrát (z každej strany) plus obvod celého štvorca (z jednej strany). Preto $\sum_{i=1}^{n} O_i \le 40$. Okrem toho $\sum_{i=1}^{n} S_i = 1$.

Toto by už mohlo evokovať známu väzbu medzi obsahom a obvodom – z útvarov s daným objemom má minimálne ohraničenie guľa. Dôkaz nie je triviálny, nám by ale stačilo dokázať niečo menej. Po zamyslení si zvolíme: Zo všetkých pravouholníkov s daným obsahom má najmenší obvod štvorec (získali by sme nerovnosť $4\sqrt{S_i} \le O_i$). Presvedčte sa, že je to ekvivalent tvrdenia: Zo všetkých pravouholníkov s daným obvodom má najväčší obsah štvorec.

Keď už máme predstavu, čo urobíme, dohodnime sa, že konvexným obalom útvaru S nazveme najmenší konvexný útvar $C(S)$, ktorý obsahuje S. (Akoby ste okolo S navliekli gumičku.)

V reťazi dôkazu chýba len kľúčové ohnivko – maximálnosť obsahu štvorca. Najprv ukážme, že taký pravouholník P musí byť konvexný. Urobíme to algoritmom, ktorý transformuje útvar P na P' s rovnakým obvodom, ale väčším obsahom. Uvažujme $C(P)$, je to mnohouholník a jeho vrcholy sú aj vrcholmi P. Ak by každá dvojica susedných vrcholov $C(P)$ bola susednou v P, oba útvary by boli identické. My ale predpokladáme, že P je nekonvexný. Preto existujú susedia X, Y v $C(P)$ nesusediaci v P. Tí rozdelia O_P na „obvodové" výseky XY a YX. Hľadaný algoritmus znie napríklad takto: Výsek XY ponechať a výsek YX stočiť stredovo súmerne podľa stredu úsečky XY. Obvod sa zachová a pretože stredová súmernosť nemení neorientovaný smer priamky, dostávame pravouholník. Pritom jeho obvod sa nikde nekríži (Výseky sa sami o sebe nekrížili ani predtým. Pokiaľ by sa pretli navzájom, musel by priesečník ležať na priamke XY, z čoho ľahko máme, že by sa pretínali už skôr.). Obsah sa zrejme zväčšil, lebo P' obsahuje P v jednej polrovine ohraničenej priamkou XY a rozkladá sa aj v opačnej (vrcholy X, Y v P nesusedili). Maximálny obsah má teda obdĺžnik alebo štvorec. Majme štvorec s obvodom $4a$. Ľubovoľný obdĺžnik s rovnakým obvodom má strany $a - \phi$ a $a + \phi$, takže obsah je len $a^2 - \phi^2 < a^2$. Teraz už len dáme nerovnosti dokopy:

$$40 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} 4 \cdot 10S_i < \sum_{i=1}^{n} 4\sqrt{S_i} \le \sum_{i=1}^{n} O_i \le 40.$$

Teda $40 < 40$, máme spor.

Komentár: Nepoužili sme konečný počet úsečiek. Skúste si ukázať, že algoritmus končí na obdĺžniku/štvorci po konečnom počte krokov práve vtedy, ak má P konečný počet strán. Tvrdenie dokonca platí, ak zjavené krivky nie sú úsečky rovnobežné so stranami štvorca. Tieto formy ste ale neskúšali. Vlastne maximalitu štvorca ste všetci viac-menej prehlásili za zrejmú. Porovnanie štvorca s obdĺžnikom veľmi pekne dokázal *Tomáš Kocák*, tento spôsob je aj vo vzoráku. Keďže je to úvodná úloha do infinitezimálneho počtu (o oplotení pozemku), mnohí ste skúšali deriváciu. Tu by bolo dobré podotknúť, že nulová prvá derivácia je len nutná podmienka extrému. Či je to skutočne extrém a aký, možno vždy rozhodnúť zistením derivácií vyššieho stupňa v danom bode po prvú nenulovú, alebo úvahou (úvodnou myšlienkou takej úvahy býva, či nám tá derivácia stojí za to ;). Zvyšok dôkazu nerobil problém.

Úloha č. 13: *Nech $\varphi(n,m)$ $(m \ne 1)$ je počet prirodzených čísel menších alebo rovných n, ktoré sú nesúdeliteľné s m. Nájdite všetky prirodzené m, ktoré spĺňajú*

$$\frac{\varphi(n,m)}{n} \ge \frac{\varphi(m,m)}{m}$$

pre všetky prirodzené n.

Riešenie: (opravoval Feráč)

Na začiatok si trošku zjednodušme notáciu a položme $\varphi(m) = \varphi(m,m)$. Skúsený riešiteľ v tomto rozozná významnú Eulerovu funkciu. Pre naše potreby však jej znalosť nie je nevyhnutná a úplne nám vystačí jej nasledovná vlastnosť.

$(*)$: Ak m je deliteľné prvočíslom p, tak $\varphi(m) \le m - m/p$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy keď m je mocninou p.

Dôkaz tohto tvrdenia je celkom jednoduchý. Uvažujme ľubovoľné prirodzené číslo m deliteľné prvočíslom p. Nech $P = \{p, 2p, 3p, \ldots, \frac{m}{p}p\}$, čiže množina prirodzených čísel menších alebo rovných m deliteľných p. Všetky tieto čísla sú súdeliteľné s m, preto $\varphi(m) \le m - |P| = m - \frac{m}{p}$. Ak m je mocninou p, tak P obsahuje všetky čísla súdeliteľné s m, a preto v $(*)$ nastáva rovnosť. Naopak, ak m je deliteľné nejakým prvočíslom q rôznym od p, tak q je súdeliteľné s m a $q \notin P$, teda nerovnosť v $(*)$ je ostrá.

No a teraz sa už pustime do riešenia samotného problému. Neformálne, $\varphi(n,m)/n$ vyjadruje akúsi hustotu čísel nesúdeliteľných s m v rozmedzí $1, \ldots, n$. Ak chceme túto hodnotu minimalizovať, mali by sme zobrať čo najviac čísel súdeliteľných s m a useknúť to za posledným z nich. Takisto je jasné, že rozmiestnenie čísel nesúdeliteľných s m sa opakuje s periódou m, preto sa stačí zamerať na $n \le m$. Skúsme teda zobrať napríklad najväčšie $n < m$ súdeliteľné s m a uvidíme, či nám to niečo dá. Premyslite si, že toto $n = m - p$, kde p je najmenšie prvočíslo deliace m. (Uvažujme teraz len zložené m.) Potom $\varphi(n,m) = \varphi(m) - p + 1$, pretože všetky čísla medzi n a m sú podľa predpokladu s m nesúdeliteľné. Požadujeme

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(n,m)}{n} &\geq \frac{\varphi(m,m)}{m} \\
\frac{\varphi(m)-p+1}{m-p} &\geq \frac{\varphi(m)}{m} \\
m(\varphi(m)-p+1) &\geq (m-p)\varphi(m) \\
p\varphi(m) &\geq mp-m \\
\varphi(m) &\geq m-\frac{m}{p}
\end{aligned}$$

Porovnaním tohto výsledku s $(*)$ môžeme usúdiť, že m musí byť mocninou p. Naopak, ak p je prvočíslo a $m = p^{\alpha}$, tak čísla súdeliteľné s m sú práve tie, ktoré su deliteľné p, a tých je v rozmedzí $1,\dots,n$ presne $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. Preto $\varphi(n,m) = n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. Máme

$$\frac{\varphi(n,m)}{n} = \frac{n-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{n} \geq \frac{n-\frac{n}{p}}{n} = \frac{m-\frac{m}{p}}{m} = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

Zistili sme, že riešením sú všetky m, ktoré sú mocninami prvočísel.

Poznámka: Pre Eulerovu funkciu φ platí

$$\varphi(m) = m\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}),$$

kde $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ je kanonický rozklad m na prvočísla. Vlastnosť $(*)$ odtiaľ plynie automaticky.

Úloha č. 14: *a) Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo p také, že pre každé prirodzené číslo n a reálne čísla $x_1, x_2 \dots, x_n$ platí nerovnosť*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

b) Majme pevne zvolené prirodzené číslo n. Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo p také, že pre všetky reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

Riešenie: (opravoval Bus)

a) Tvar členov zadanej nerovnosti už na prvý pohľad pripomína rozvoj výrazov tvaru $(x_i + x_{i+1})^2$, preto pre viacerých z vás nebol problém upraviť pre $p = 1$ túto nerovnosť ekvivalentnými úpravami na súčet štvorcov:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \dots - x_{n-1}x_n + x_n^2 \geq 0$$

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{(x_1-x_2)^2}{2} + \frac{(x_2-x_3)^2}{2} + \dots + \frac{(x_{n-1}-x_n)^2}{2} + \frac{x_n^2}{2} \geq 0$$

Teda pre $p = 1$ je nerovnosť vždy splnená. Otázka však je, či by nemohlo existovať aj nejaké väčšie p, ktoré by malo túto vlastnosť. Ako možno tušíte, odpoveď je, že nemohlo, a dokážeme to sporom. Nech $p = 1 + d$ kde d je kladné reálne číslo. Dosaďme do nerovnosti za všetky x_i hodnotu 1:

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &\geq (1+d)(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) \\
n\cdot 1 &\geq (1+d)((n-1)\cdot 1) \\
1 &\geq d(n-1) \\
\frac{1}{d}+1 &\geq n
\end{aligned}$$

Keďže n môže byť ľubovoľne veľké, posledná nerovnosť určite nebude vždy splnená, čo je spor.

b) Najskôr vyriešme špeciálny prípad $n = 1$, pre ktorý zadaná nerovnosť vyzerá takto:

$$x_1^2 \geq p\cdot 0\,.$$

Toto zrejme platí pre ľubovoľné p, preto najväčšie možné p neexistuje.

Ďalej nám už stačí uvažovať len pevne dané $n \geq 2$. Ak ste si pozorne prečítali dôkaz časti a) tejto úlohy, určite ste si všimli, že na ľavej strane nám ostal nevyužitý výraz $x_1^2/2 + x_n^2/2$. Pomocou neho by sa nám mohlo podariť upraviť nerovnosť na súčet štvorcov aj pre niektoré $p > 1$, v ideálnom prípade do asi takéhoto tvaru:

$$(a_1x_1 - b_1x_2)^2 + (a_2x_2 - b_2x_3)^2 + \dots + (a_{n-1}x_{n-1} - b_{n-1}x_n)^2 \geq 0\,.$$

To sa samozrejme nedá vždy, my sa však pokúsime zistiť, či to pre nejaké $p > 1$ predsa len nepôjde. Keďže tento tvar chceme dostať úpravou pôvodnej nerovnosti, získame roznásobením nasledujúce vzťahy:

$$2a_i b_i = p\,, \quad b_i^2 + a_{i+1}^2 = 1\,, \quad a_1^2 = 1\,, \quad b_{n-1}^2 = 1\,.$$

Vyjadrime si teraz b_i pomocou a_i a a_{i+1} rekurentne pomocou predchádzajúcich a_i:

$$b_i = \frac{p}{2a_i}$$

$$a_{i+1}^2 = 1 - b_i^2 = 1 - \frac{p^2}{4a_i^2}$$

$$\frac{2a_{i+1}^2}{p} = \frac{2}{p} - \frac{p}{2a_i^2}$$

$$c_{i+1} = \frac{2}{p} - \frac{1}{c_i}$$

$$\frac{1}{c_i} + c_{i+1} = \frac{2}{p}$$

V predposlednom kroku sme z čisto estetických dôvodov zaviedli substitúciu $\frac{2a_i^2}{p} = c_i$. Ak si ešte dodefinujeme $a_n^2 = 1 - b_{n-1}^2$ a pomocou neho aj c_n, dostávame z $a_1^2 = 1$ a $b_{n-1}^2 = 1$ počiatočné a koncové podmienky $c_1 = \frac{2}{p}$ a $c_n = 0$. Pomocou nájdeného rekurentného vzťahu by sme teraz už čisto teoreticky mali byť schopní vyjadriť c_n pomocou c_1 a z toho, že c_n poznáme, vyrátať p. Nebude to však vôbec také ľahké, pretože naša rekurencia má síce jednoduchý, ale dosť nepríjemný tvar. Oveľa lepšie by sa nám riešilo niečo, kde by sa neznáme nachádzali len v čitateli a najlepšie všetky len ako lineárne členy. To sa dá dosiahnuť ďalšou substitúciou:

$$\frac{1}{c_i} + c_{i+1} = \frac{2}{p}$$

$$1 + c_i c_{i+1} = \frac{2c_i}{p}$$

$$\pi_{i+1} - \frac{2\pi_i}{p} + \pi_{i-1} = 0$$

kde $\pi_k = \prod_{i=1}^{k} c_i$ a špeciálne $\pi_0 = 1$. Na riešenie takejto linárnej rekurencie už existuje známy postup, stačí nájsť korene λ_1, λ_2 polynómu $x^2 - \frac{2}{p}x + 1$ a riešením rekurencie potom bude každý výraz tvaru $\pi_k = \alpha\lambda_1^k + \beta\lambda_2^k$. (Môžte si dokázať ako cvičenie.) Ak vezmeme do úvahy, že poznáme hodnoty $\pi_0 = 1$ a $\pi_1 = \frac{2}{p}$, budeme vedieť aj jednoznačne určiť koeficienty α, β.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{2}{p} \pm \sqrt{\frac{4}{p^2} - 4}}{2} = \frac{1}{p} \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1}$$

Keďže nás zaujímajú hlavne $p > 1$, môžme si hneď všimnúť, že oba korene budú komplexné čísla – to nás však nemá prečo zastaviť. Väčším problémom je skôr to, že aby sme našli c_n, budeme musieť vypočítať λ_1^n a λ_2^n, čo bude v tom tvare, v akom máme lambdu vyjadrenú, dosť nepraktické. Tu prichádza užitočný trik, ktorý sa často používa aj v iných úlohách. Všimnime si, že $\frac{1}{p} \in (0, 1)$ a že pod odmocninou by sme dostali štvorec, ak by sme použili vhodnú goniometrickú substitúciu. Zvoľme $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ také, že $\cos\varphi = \frac{1}{p}$:

$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

Akousi šťastnou náhodou už takto vyjadrenú lambdu vieme ľahko umocňovať pomocou Moivreovho vzorca – $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) \pm i\sin(n\varphi)$. Z rovností

$$\pi_0 = \alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0$$

$$\pi_1 = \alpha\lambda_1^1 + \beta\lambda_2^1$$

už vieme priamočiaro dopočítať α a β a dostávame tak vyjadrenie pre π_k:

$$\pi_k = \frac{\sin\varphi - i\cos\varphi}{2\sin\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k + \frac{\sin\varphi + i\cos\varphi}{2\sin\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^k$$

$$\pi_k = \frac{(\sin\varphi - i\cos\varphi)(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) + (\sin\varphi + i\cos\varphi)(\cos(k\varphi) - i\sin(k\varphi))}{2\sin\varphi}$$

$$\pi_k = \frac{2\sin\varphi\cos(k\varphi) + 2\sin(k\varphi)\cos\varphi}{2\sin\varphi}$$

$$\pi_k = \frac{\sin((k+1)\varphi)}{\sin\varphi}$$

$$c_k = \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} = \frac{\sin((k+1)\varphi)}{\sin(k\varphi)}$$

Vrámci skúšky správnosti by sme mali tento výsledok ešte overiť matematickou indukciou pre prípad, že by nám opravovateľ neveril, že hore uvedeným postupom skutočne dostaneme riešenie našej rekurencie. Tiež by sme mali skontrolovať, či sme nikde nedelili nulou – musí platiť $\sin(k\varphi) \neq 0$ pre všetky $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Na záver nás zaujíma, kedy je $c_n = 0$. To je práve vtedy, keď $\sin((n+1)\varphi) = 0$, z čoho už máme jednoznačne určené $\varphi = \frac{\pi}{n+1}$ a $p = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$.

Čo sme to teda vlastne urobili? Dokázali sme, že pre $p = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$ môžme členy nerovnosti dať na jednu stranu a upraviť ich na súčet štvorcov, teda nerovnosť bude splnená. Je to však už najväčšie možné také p? Skúsime to dokázať a to opäť sporom. Nech $p = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}} + d$ kde $d > 0$. Nerovnosť môže upraviť do nasledovného tvaru:

$$(a_1x_1 - b_1x_2)^2 + (a_2x_2 - b_2x_3)^2 + \cdots + (a_{n-1}x_{n-1} - b_{n-1}x_n)^2 \geq d(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)\,.$$

Zvoľme teraz prvý člen napríklad $x_1 = 1$ a $x_{i+1} = \frac{a_i x_i}{b_i}$ pre ostatné členy. Ľavá strana tak bude nulová a keďže a_i, b_i sú všetky kladné, tak aj x_i budú kladné a teda pravá strana nerovnosti bude kladná. Nerovnosť nie je splnená, čo je spor.

<u>Úloha č. 15:</u> *Nanešťastie sa nikomu nepodarilo pochopiť zadanie úlohy* 14 *z prvej série tak, ako sme ho my mysleli, preto sme sa rozhodli túto úlohu zadať znova, teraz azda jasnejšie:*
Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby aspoň v jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievať. Pri prelievaní z odmerky A do odmerky B môžeme preliať ľubovoľný objem kvapaliny, ktorý nie je väčší ako objem voľného miesta v odmerke B. Napríklad: v trojlitrových odmerkách A a B sú 1 *a* 2 *litre čučoriedkového džúsu. Potom môžeme z B pokojne preliať $\sqrt{2}$ litra džúsu do A.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ondráč a Krysa)
Najprv by sme si mali dohodnúť nejaké značenie, aby sa nám lepšie pracovalo. Stav každej odmerky (povezdme, že sú litrové) v ľubovoľnom okamihu vieme reprezentovať usporiadanou trojicou kladných reálnych čísel (a, b, c), ktoré vyjadrujú objemy jednotlivých zložiek. Pre a, b, c máme zrejmú podmienky $a + b + c \leq 1$ (aby sa to zmestilo do odmerky). Takúto trojicu môžeme považovať za trojrozmerný vektor a označiť si ju jedným písmenkom, napríklad $\overline{p}$. V nasledujúcom texte budeme vektory značiť s pruhom. Stav odmeriek nám teda charakterizujú tri vektory (pre každú odmerku jeden) $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$ a $\overline{p_3}$.
Ako vektormi popíšeme prelievanie? Ak chceme z $\overline{p_1}$ preliať nejakú časť do $\overline{p_2}$, tak si jednoducho obsah odmerky (vektor) $\overline{p_1}$ rozdelíme na dve časti: $\lambda\overline{p_1}$ a $(1-\lambda)\overline{p_1}$ (reálne číslo λ, $0 \leq \lambda \leq 1$). Prvú časť necháme v prvej odmerke a druhú prelejeme do druhej. Namiesto trojice $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$ budeme mať $\lambda\overline{p_1}$, $\overline{p_2} + (1-\lambda)\overline{p_1}$, $\overline{p_3}$. Musíme si ale dávať pozor na to, aby sa nám to do druhej odmerky zmestilo, teda aby súčet jej zložiek bol aj po preliatí nanajvýš 1. Ešte dôležitejšie (ako sa neskôr ukáže) je, že λ nemôže byť 0, teda že nemôžeme úplne vyprázdniť žiadnu odmerku (premyslite si prečo).
Na čo nám to celé bolo dobré? Minimálne sa vieme o danom probléme rýchlo a presne vyjadrovať a pracujeme s vektormi, o ktorých už čo to vieme. Kľúčovým krokom je všimnúť si, ako naše vektory vyzerjú na začiatku, a ako by vyzerali, keby sme po nejakom čase dostali v nejakej odmerke zmes, v ktorej by sa z každej kvapaliny nachádzalo rovnako veľa. V prvom prípade máme vektory $\overline{p_1} = (3/4, 0, 0)$, $\overline{p_2} = (0, 3/4, 0)$ a $\overline{p_3} = (0, 0, 3/4)$, čiže majú smery osí x, y a z. V druhom prípade máme napr. $\overline{p_1} = (a, a, a)$. Potom $\overline{p_2} + \overline{p_3} = (3/4 - a, 3/4 - a, 3/4 - a)$. Z toho ľahko dostaneme $(3/4 - a)\overline{p_1} - a\overline{p_2} - a\overline{p_3} = 0$, čo znamená, že vektory $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$ sú lineárne závislé[3] (ležia v jednej rovine). A toho sa môžeme chytiť. Na začiatku máme tri lineárne nezávislé vektory (overte si) a dokážeme, že prelievaním sa z nich nemôžu stať lineárne závislé vektory.
Dokážeme to sporom. Nech sa nám po niekoľkých krokoch podarilo dostať lineárne závislé vektory. To znamená, že v nejkom kroku sme mali vektory $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$, ktoré boli lineárne nezávislé a po preliatí (bez ujmy na všeobecnosti prelievajme z prvej do druhej odmerky) už vektory $\lambda\overline{p_1}$, $\overline{p_2} + (1-\lambda)\overline{p_1}$, $\overline{p_3}$ boli lineárne závislé a teda existujú reálne čísla a_1, a_2, a_3 (nie všetky nulové), pričom

$$a_1\lambda + a_2(\overline{p_2} + (1-\lambda)\overline{p_1}) + a_3\overline{p_3} = (0, 0, 0).$$

To však jednoduchou úpravou prevedieme na

$$(a_1\lambda + a_2(1-\lambda))\overline{p_1} + a_2\overline{p_2} + a_3\overline{p_3} = (0, 0, 0).$$

Ak ak by $a_2 = a_3 = 0$, potom $a_1\lambda + a_2(1-\lambda) = a_1\lambda \neq 0$ a teda nie všetky koeficienty pri vektoroch môzu byť nulové a preto aj vektory $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$ sú lineárne závislé, čo je spor s predpokladom. Preto sa nám nemôže stať, že by vznikla zmes, kde bude všetkých zložiek rovnako veľa.

[3] Tri vektory $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ a $\overline{q_3}$ z nášho trojrozmerného priestoru sú lineárne závislé ak existujú reálne čísla a_1, a_2 a a_3 (nie všetky nulové) také, že $a_1\overline{q_1} + a_2\overline{q_2} + a_3\overline{q_3} = (0, 0, 0)$. Ak nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú lineárne nezávislé.

Poznámka: Treba si všimnúť, že najpodstatnejšie je to, že nemôžeme žiadnu odmerku úplne vyprázdniť. Kvôli tomu nám vektory ostávajú lineárne nezávislé a nevieme dosiahnuť žiadaný cieľ. To, že odmerky majú obmedzenú kapacitu sme žiadnym iným spôsobom nevyužívali.