Korešpondenčný Matematický Seminár

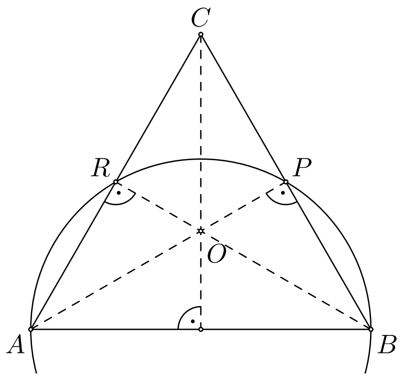
Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2008/2009

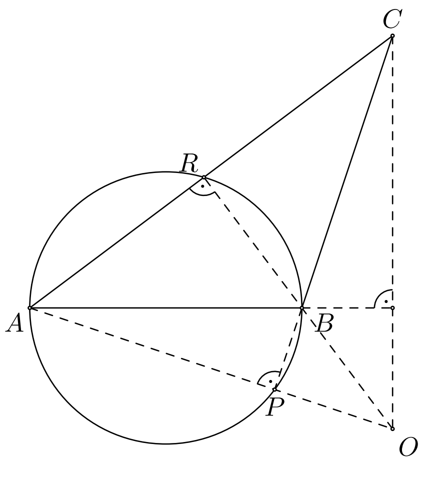
Oznam: Pozor, vo vytlačených zadaniach 3. série sú všetky termíny chybné. Správne majú byť o týždeň skôr (tak ako v kalendári na stránke).

Úloha č. 1: *Daná je kružnica k s priemerom AB. V rovine kružnice k leží bod C taký, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Zostrojte kolmicu z bodu C na úsečku AB len pomocou ceruzky a pravítka. Pravítko nemá mierku a nedajú sa ním robiť kolmice, len rysovať rovné čiary. Nezabudnite dokázať, že skonštruovaná priamka je naozaj kolmica z C na AB.*

Riešenie: (opravovala Stanka)

Priamka BC pretne kružnicu k v dvoch rôznych bodoch, lebo uhol ABC nie je pravý. Priesečník rôzny od B označme P. Podľa Tálesovej vety je uhol APB pravý, lebo AB je priemer k. Úsečka AP je preto výška trojuholníka ABC na stranu BC. (Všimnite si, že to platí, aj keď je uhol ABC tupý.) Obdobne nazvime R priesečník priamky AC s k rôzny od A. (Opäť taký bod existuje, lebo uhol CAB nie je pravý.) Úsečka BR bude výška na stranu AC v trojuholníku ABC, čo platí aj keď uhol BAC je tupý. Priesečník priamok AP a BR, teda ortocentrum, označme O. Cez O prechádza aj priamka, na ktorej leží tretia výška, výška na stranu AB. Teda CO je kolmica z bodu C na priamku AB. Bude päta kolmice ležať na úsečke AB? Áno, lebo keď je trojuholník ABC ostrouhlý, tak bod C musí ležať medzi kolmicou na priamku AB cez A a kolmicou na priamku AB cez B. Túto úvahu ste v riešení nemuseli písať, pretože kolmica na úsečku je to isté ako kolmica na priamku, ale spomíname to, aby bolo jasné, že formulácia „kolmica na úsečku AB“ je intuitívne správna.





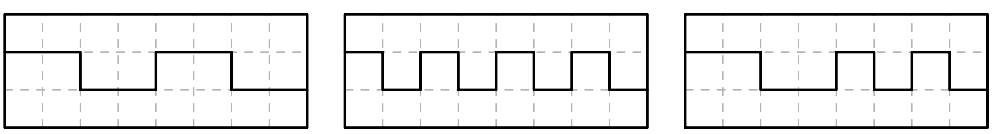
Komentár: Niektorí z vás nerobili príklad vo všeobecnosti, ale uvažovali iba prieniky úsečiek s kružnicou. V tomto prípade by však bolo treba ukázať, že úsečky AB a BC sa pretínajú vo dvoch bodoch s kružnicou k. Skúste si to. (Sporom: Uvažujte prienik priamky CB s k v opačnej polrovine ako je C a prídete na to, že uhly trojuholníka APB sa sčítajú nad 180.)

Úloha č. 2: *Katka bude mať onedlho narodeniny a tak jej Ondrej kúpil darček. Z obchodu ho doniesol v škatuli tvaru kocky s hranou dĺžky 1 m. Netušil však, že doma má už len jediný kus baliaceho papiera obdĺžnikového tvaru s rozmermi $1,5\,\mathrm{m}$ a $4\,\mathrm{m}$. Ondrej chce rozstrihnúť tento kus baliaceho papiera na dva kusy tak, aby doň mohol darček zabaliť. Ako má papier rozstrihnúť?*

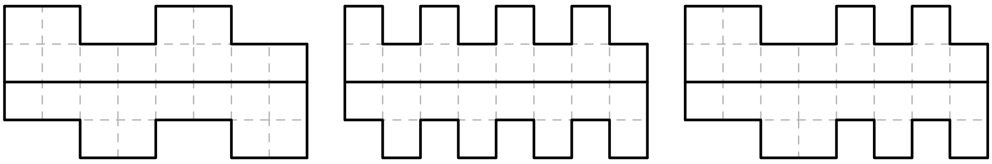
Riešenie: (opravovala Zuzka M.)

Hneď na úvod prezradíme, že možných riešení tejto úlohy je neúrekom, takže Ondro si dokonca môže vybrať. Dôležité je len uvedomiť si, že papier sa pri obaľovaní nesmie prekrývať. Povrch kocky je totiž $6 \times 1 \times 1 = 6\,\mathrm{m}^2$ a my máme k dispozícii presne rovnaké množstvo $(1,5 \times 4 = 6\,\mathrm{m}^2)$ baliaceho papiera.

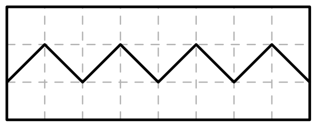
Po tejto úvahe už väčšina z vás vzala do ruky papier a nožnice a po chvíľke tvorivého myslenia prišla napríklad na takéto spôsoby rozstrihnutia:



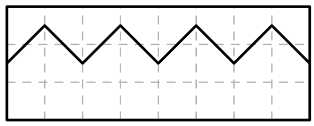
A ako presne sa dá kocka takto rozstrihnutým papierom obaliť? Jednoducho, stačí položiť kusy papiera „chrbtom k sebe“ a dostaneme siete kocky:



Do nich už Ondrovu kockatú škatuľu hravo zabalíme. Treba ešte dodať, že uvedené spôsoby rozstrihnutia zďaleka nie sú jediné. Ďalšie riešenia môžeme dostať modifikáciou výbežkov na sieti, resp. použitím iných geometrických útvarov, napríklad trojuholníkov:

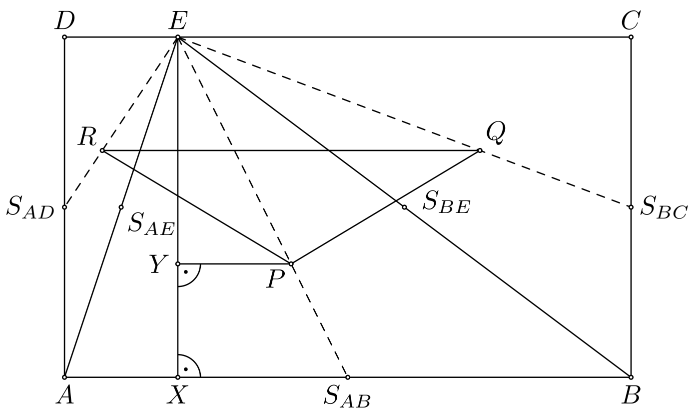


Navyše, strih vôbec nemusí ísť prostriedkom papiera, ale môže byť posunutý, ako na obrázku nižšie. Spôsobov, ako rozstrihnúť baliaci papier, je teda v skutočnosti nekonečne veľa.



__Úloha č. 3:__ *Daný je obdĺžnik $ABCD$ s obsahom $1\,\mathrm{cm}^2$. Na strane CD je zvolený bod E. Písmenami P, Q a R označíme body, ktoré sú po rade ťažiská trojuholníkov ABE, BCE a AED. Vypočítajte obsah trojuholníka PQR. Nezabudnite pritom zdôvodniť správnosť svojho výpočtu.*

__Riešenie:__ (opravoval Katka, Kubo)



Najprv sa pozrime na to, ako by sa dal vypočítať obsah trojuholníka PQR. Nám bude najlepšie vyhovovať vzorec $(|RQ||v_{RQ}|)/2$. Na to budeme potrebovať zistiť veľkosť strany RQ a veľkosť výšky na ňu. (Označujeme ju štandardne, v_{RQ}.)

Ako prvú vypočítame veľkosť strany RQ. Označme si stredy strán AB, BC, DA, AE, BE po poradí S_{AB}, S_{BC}, S_{DA}, S_{AE}, S_{BE}. Pozrime sa teraz na trojuholníky $S_{AD}S_{BC}E$ a RQE. Bod R je ťažisko v trojuholníku AED, preto $|ER| = (2/3)|S_{AD}E|$, a podobne $|EQ| = (2/3)|S_{BC}E|$. Uhol REQ je spoločný, teda trojuholníky ERQ a $ES_{AD}S_{BC}$ sú podobné s koeficientom podobnosti $2:3$. Z toho vyplýva, že aj $RQ \parallel S_{AD}S_{BC}$ a $|RQ| = (2/3)|S_{AD}S_{BC}|$, a preto $|RQ| = (2/3)|AB|$. Tento pomer platí aj pre výšky z bodu E.

Čo sa týka výšky, znova využijeme podobnosť trojuholníkov a vlastnosti ťažiska. Spustime kolmicu z bodu E na stranu AB a priesečník označíme X. Cez bod P veďme rovnobežku s AB a priesečník s EX nazvime Y. Teraz si všimnime, že trojuholníky EYP a EXS_{AB} sú podobné podľa vety *uu*. Platí, že $|S_{AB}P| = (1/3)|ES_{AB}|$, a preto $|XY| = (1/3)|EX|$. Ďalej vieme, že priamky AB, YP a RQ sú rovnobežné, $|YX| = (1/3)|BC|$ a vzdialenosť priamok RQ a CD je $(1/3)|BC|$, z čoho vieme, že výška v trojholníku RPQ je $(1/3)|BC|$.

Keď už poznáme veľkosť strany RQ a výšky na ňu, nie je ťažké vypočítať, že veľkosť nášho trojuholníka je $(1/9)\,\mathrm{cm}^2$.

__Komentár:__ Veľa z Vás pozabudlo dokázať, že $RQ \parallel AB$ a iba ste predpokladali, že to platí, čo rozhodne nestačí. Ešte si treba dať pozor, že ak v riešení používam nejaké písmenká, ktoré sú popísané len na obrázku, nemusí to vždy byť zrozumiteľné pre opravovateľa :) Situácia, že bod E je v strede CD je len špeciálny prípad, rozhodne na nej nemôžme demonštrovať riešenie celej úlohy.

__Úloha č. 4:__ *V trojuholníku XYZ platí $|\sphericalangle XYZ| = 45°$ a $|\sphericalangle YXZ| = 60°$. Vnútri neho sa nachádza bod P taký, že kružnica k so stredom v bode P pretína stranu XY v bodoch A a B, stranu YZ v bodoch C a D a stranu XZ v bodoch E a F. Navyše vieme, že úsečky AB, CD a EF majú rovnakú dĺžku. Aká je veľkosť uhla XPY?*

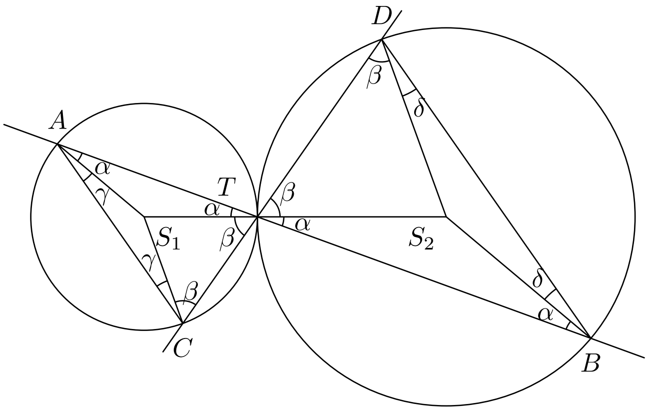
__Riešenie:__ (opravoval Kika, Aďa)

Na začiatok si nakreslíme pekný veľký obrázok. (Nezabudnite na bod P.) Označme si kružnicu zo zadania ako k. Chvíľu sa nad obrázkom zamyslíme. Vidíte tam niečo? Ak nie, skúsme si dokresliť niekoľko ďalších čiar – napríklad

úsečky AP, BP, $\dots$, FP. Všimnime si, že všetky tieto úsečky sú polomery kružnice k, preto budú mať rovnakú dĺžku.
Zo zadania vieme, že úsečky AB, CD a EF sú rovnako veľké. Ak sa na obrázok pozrieme teraz, môžeme si všimnúť zhodnosť trojuholníkov ABP, CDP a EFP. Dôvodom je to, že majú všetky strany zhodných dĺžok. (Veta *sss*.) Navyše vidíme, že sú rovnoramenné.
Teraz zostrojíme v každom zo spomenutých trojuholníkov výšku z bodu P na protiľahlú stranu. Tieto tri výšky sú rovnako dlhé, keďže sme ich zostrojili v troch zhodných trojuholníkoch. Označme si ich dĺžku písmenom a. Všimnime si, že tieto výšky sú kolmé aj na strany trojuholníka XYZ. Napríklad výška na stranu AB, je kolmá na stranu XY, keďže úsečka AB je súčasťou úsečky XY.
Všimnime si bod P. Čo o ňom vieme? V zadaní sa píše, že leží vnútri trojuholníka XYZ. Navyše jeho vzdialenosť od každej zo strán tohto trojuholníka je rovnaká. Pozrime sa na kružnicu so stredom v bode P a s polomerom a. Táto kružnica sa dotýka každej strany trojuholníka XYZ. (Premyslite si to.) Preto je bod P stredom vpísanej kružnice do trojuholníka XYZ. Nakoniec si môžeme všimnúť, že polpriamka XP delí uhol pri vrchole YXZ na polovicu. Tak isto polpriamka YP delí uhol XYZ. Dorátať veľkosť uhla XPY vám už nerobilo problémy.

__Úloha č. 5:__ *Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré majú vonkajší dotyk v bode T. Bodom T prechádzajú dve priamky p a q tak, že sú sečnicami oboch kružníc. Označme A a B priesečníky priamky p s kružnicami k_1 a k_2 a C, D priesečníky priamky q s kružnicami k_1 a k_2, pričom body A, B, C, D sú rôzne od T. Dokážte, že úsečka AC je rovnobežná s úsečkou BD.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ajka, Lucka)
Našou úlohou je dokázať rovnobežnosť úsečiek AC a BD. To spravíme tak, že nájdeme priamku, ktorá pretína úsečky pod rovnakými uhlami. Čiže využijeme vlastnosť striedavých uhlov. Ako to spravíme? Skúsme využiť nejakú priamku zo zadania, ktorá pretína obe úsečky a ukázať, že s nimi zviera rovnaké uhly. Vyberieme si priamku $\overleftrightarrow{AB}$ a uhly $|\sphericalangle CAT| = |\sphericalangle DBT|$. (Rovnako sa to dá spraviť aj s priamkou $\overleftrightarrow{CD}$.)

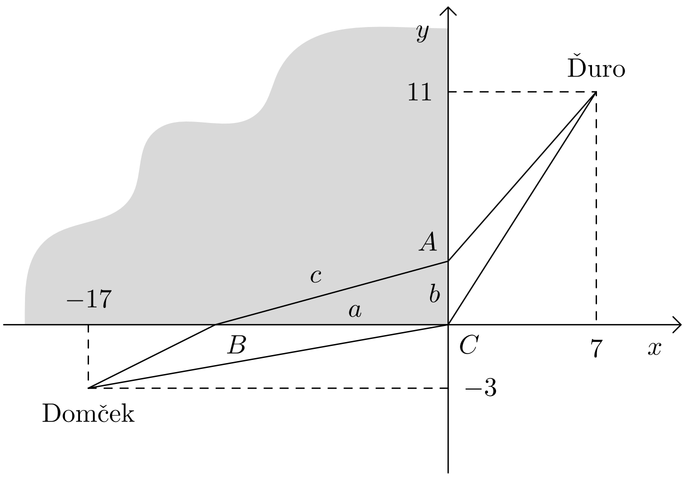


Nakreslíme si obrázok. Okrem vecí zo zadania si doňho dokreslíme aj stredy kružníc S_1 a S_2 a spojnice stredov s bodmi na príslušných kružniciach. (Pozri si obrázok.) Robíme to preto, aby sme získali viac informácií o uhloch v trojuholníku z pomocných trojuholníkov s „peknými“ vlastnosťami. Tieto pomocné trojuholníky sú AS_1T, TS_1C, CS_1A, DS_2T, TS_2B, BS_2D. Všetky sú rovnoramenné, pretože ich ramená tvoria polomery rovnakých kružníc. Na začiatok si označme $|\sphericalangle ATS_1| = \alpha$. Potom aj $|\sphericalangle TAS_1| = \alpha$, pretože ležia oproti ramenám rovnoramenného trojuholníka. Z obrázku vidíme, že uhly ATS_1 a BTS_2 sú vrcholové, teda zhodné, tak aj $|\sphericalangle BTS_2| = \alpha$. A opäť vďaka rovnoramennému trojuholníku je aj $|\sphericalangle TBS_2| = \alpha$.
Teraz si označíme $|\sphericalangle CTS_1| = \beta$ a analogicky dostávame aj $|\sphericalangle TCS_1| = |\sphericalangle DTS_2| = |\sphericalangle TDS_2| = \beta$.
Z vlastnosti o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku vieme, že $2\alpha+2\beta+2\gamma$ v trojuholníku ACT sa rovná $180°$ a to sa rovná $2\alpha + 2\beta + 2\delta$ v trojuholníku BDT (Zamyslite sa, prečo sú v trojuholníkoch AS_1C a BS_2D dva rovnaké uhly γ a δ.) Z tejto rovnosti vidíme, že uhly γ a δ sú zhodné. Čo je super, pretože sa môžeme vrátiť k úvahe z úvodu riešenia. Priamka $\overleftrightarrow{AB}$ zviera s úsečkami AC a BD uhol $\alpha + \gamma$ a $\alpha + \delta$, a tie sú zhodné. Týmto sme našli hľadané striedavé uhly a dokázali, že úsečky sú rovnobežné.

<u>Poznámka:</u> Príklad sa dal riešiť aj inými spôsobmi, napríklad pomocou rovnoľahlosti, alebo cez stredové a obvodové uhly.

__Úloha č. 6:__ *V zošite je nakreslená súradnicová sústava. V bode $[7, 11]$ stojí chrobák Ďuro a chce sa dostať domov do bodu $[-17, -3]$. Po papieri chodí rýchlosťou jeden dielik za sekundu, pričom nemusí chodiť len po vyznačenej štvorčekovej sieti. Napríklad z bodu $[3, 4]$ do bodu $[4, 5]$ vie preliezť najskôr za $\sqrt{2}$ sekúnd. Má to však jeden háčik, štvrtina papiera, kde je x-ová súradnica záporná a y-ová kladná je premočená. Ďuro sa po nej hýbe dvakrát pomalšie, teda rýchlosťou jeden dielik za dve sekundy. Po osiach x a y sa hýbe rýchlosťou jeden dielik za sekundu. Po akej ceste má Ďuro liezť, aby domov prišiel čo najskôr?*

Riešenie: (opravoval Bus, JeFo)



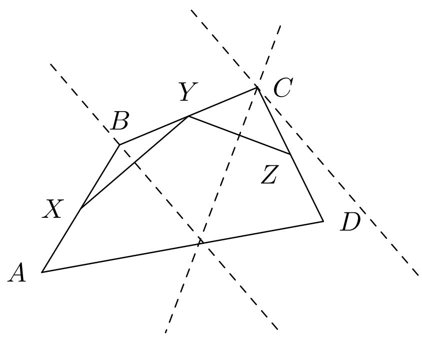
Kadiaľ že sa to Ďurko má vybrať aby sa dostal domov čo najskôr? Pokiaľ by nebola potopa, je to jasné, stále rovno za nosom po priamke zo začiatočnej pozície až domov. Ak má Ďuro prejsť cez mokrú štvrť, musí do nej vojsť v nejakom bode A a prvýkrát vyjsť v bode B. (Prípadne by do mokrej časti mohol ísť aj viackrát.) Ak by body A, B boli na rovnakej nekonečnej hrane mokrej štvrtiny, zrejme sa mu tam vôbec neoplatilo chodiť a mal by to kratšie priamo z A do B. V opačnom prípade si ešte označme bod $[0,0]$ ako bod C. Dostaneme pravouhlý trojuholník ABC (viď. obrázok), jeho strany si označme štandardne a, b, c. Treba si dobre uvedomiť, že $a < c$ a $b < c$. Sčítaním týchto dvoch nerovností dostaneme $a + b < 2c$. Táto nerovnosť nám hovorí, že ísť po stranách a, b je rýchlejšie ako prejsť po strane c, lebo na úseku c sa pohybuje dvakrát pomalšie. Ak by mal teda Ďuro prejsť po mokrej štvrti, je rýchlejšie, ak prejde po osiach x a y. Ďurovi je preto vhodnejšie ísť po suchu a mokrej štvrti sa úplne vyhnúť. Teraz nám už len zostáva nájsť najrýchlejšiu cestu po suchu. Sami si ľahko dokážete, že to je cesta po lomenej čiare, ktorá prechádza bodom $[0,0]$.

Komentár: Nájsť cestu po suchu Vám väčšinou nerobilo problém. V tomto príklade išlo hlavne o to, dokázať nerovnosť $a + b < 2c$, čo sa dalo viacerými spôsobmi, ten z riešenie je asi najjednoduchší. Dalo sa to aj pomocou Pytagorovej vety a úpravou na štvorce.

Poznámka: Ako by mal vyzerať korektný záver tohoto vzoráku? Ďuro zrejme musí prejsť nejakým (aspoň jedným) bodom tvaru $[x, -x]$, $x \geq 0$. Tieto body ležia na polpriamke začínajúcej v bode $[0,0]$. (Nakreslite si.) Cestu zo začiatku do bodu $[x, -x]$ a z tohoto bodu do domčeka Ďuro prejde najrýchlejšie, keď pôjde priamo. Takže predsa pôjde po lomenej čiare. Uvedomte si, že lomená čiara bude najkratšia pre $x = 0$.

Úloha č. 7: *Dané sú tri rôzne body v rovine, ktoré neležia na priamke. Zostrojte štvoruholník, pre ktorý sú tieto body stredmi troch jeho rovnako dlhých strán.*

Riešenie: (opravoval Bebe a Myrec)



Najprv si nakreslíme obrázok. Vyznačíme si v ňom tri dané body X, Y a Z. Zo zadania ľahko odvodíme, že dva vrcholy štvoruholníka, označme ich B a C, ležia na osiach úsečiek medzi vyznačenými bodmi (po rade XY, YZ). Dôvod je jednoduchý. Strany AB, BC a CD sú podľa zadania rovnako dlhé. Navyše X, Y a Z sú stredmi týchto strán. To znamená, že trojuholníky XBY a YCZ sú rovnoramenné a teda ich vrcholy oproti základni ležia na osiach základní. Ešte však pre žiadny vrchol nemáme presnú polohu.
Čo ďalej vieme o stredoch strán? Ak danú stranu zobrazíme podľa jej stredu, tak sa zobrazí jeden jej krajný bod na druhý. Preto ak zobrazíme B podľa stredu Y, zobrazí sa na C. Skúsime to využiť. Pretože nevieme, kde presne B leží, zobrazíme si celú os úsečky XY. (Určite leží na nej.) Takže na jej obraze leží bod C. Teraz však pre C máme dve priamky, na ktorých sa nachádza. Aká je vzájomná poloha týchto dvoch priamok? Ak by boli rovnobežné, tak by museli byť rovnobežné aj úsečky XY a YZ, čo podľa zadania nie je možné. Teda priamky majú práve jeden priesečník a tým je bod C. Takže máme presnú polohu bodu C.
Ak máme bod C, zobrazíme ho stredovo cez Y, Z postupne na B,D, pretože o Y a Z vieme, že sú stredmi príslušných strán. Konečne bod A nájdeme ako obraz bodu B zobrazeného stredovo cez X. Spolu máme štvoruholník $ABCD$.

Komentár: Takýto príklad zväčša vyžaduje aj diskusiu o počte riešení. Keďže ju nikto nemal správne, boli sme k vám zhovievaví. Avšak pre riešiteľov, ktorí si chcú rozšíriť svoje obzory, ju vrelo odporúčame. Viete, že úloha nemusí mať riešenie? Myslíte si, že existuje úloha s troma riešeniami? A čo s jedným či s dvoma? Porozmýšľajte, odmena v podobe množstva zábavy vás isto neminie ;) A nabudúce nezabúdajte na diskusie!

Úloha č. 8: *Drak má v jaskyni zaujímavú dvojicu trojuholníkov. Platí pre ne, že dve strany jedného trojuholníka sú rovnako dlhé ako niektoré dve strany druhého trojuholníka a že trojuholníky sú podobné (ale nie nutne zhodné). Drak hrdo vyslovil nasledujúce tvrdenie: Keby som mal hocijakú dvojicu trojuholníkov s takýmito vlastnosťami, tak koeficient podobnosti týchto trojuholníkov by bolo číslo medzi* $(\sqrt{5}-1)/2$ *a* $(\sqrt{5}+1)/2$ *a nebolo by rovné týmto krajným hodnotám. Dokážte, že drak má pravdu.*

Riešenie: (opravoval Feráč a KatkaP)

Označme si dĺžky strán jednotlivých trojuholníkov a_1, b_1, c_1 a a_2, b_2, c_2 tak, aby platilo

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k,$$

kde $k > 0$ je ich koeficient podobnosti. Vieme, že dve strany prvého trojuholníka sú rovnako dlhé ako niektoré dve strany druhého trojuholníka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že v prvom trojuholníku to sú strany a_1 a b_1, v opačnom príklade nám stačí strany vhodne premenovať. Uvedomme si, že stačí rozobrať týchto šesť prípadov.

$$\begin{array}{llll} (1) & a_1 = a_2,\ b_1 = b_2 & (2) & a_1 = a_2,\ b_1 = c_2 \\ (3) & a_1 = b_2,\ b_1 = a_2 & (4) & a_1 = b_2,\ b_1 = c_2 \\ (5) & a_1 = c_2,\ b_1 = a_2 & (6) & a_1 = c_2,\ b_1 = b_2 \end{array}$$

Pre (1) a (2) dostávame $k = a_1/a_2 = 1$, čo spadá do intervalu $\left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2, \left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)$. Podobne pre (6) $k = b_1/b_2 = 1$. V prípade (3) máme $k = a_1/a_2 = b_2/b_1 = 1/k$, odkiaľ opäť vyplýva $k = 1$.
Ostáva nám už len vyriešiť prípady (4) a (5). V (4) platí

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{b_1}{a_1} a_1 = \frac{b_1}{b_2} a_1 = k a_1, \\ c_1 &= \frac{c_1}{b_1} b_1 = \frac{c_1}{c_2} b_1 = k b_1 = k^2 a_1, \end{aligned}$$

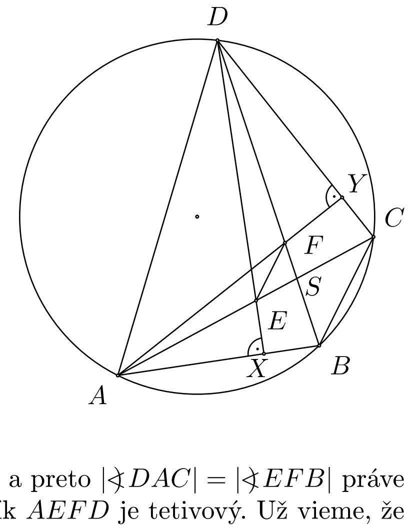
čiže $a_1 : b_1 : c_1 = 1 : k : k^2$. Podobne pre (5) dostávame $a_1 : b_1 : c_1 = k : 1 : k^2$. V oboch prípadoch musia úsečky dĺžok $1, k, k^2$ tvoriť strany trojuholníka (premysli si). Podľa trojuholníkových nerovností potom

$$\begin{aligned} k^2 + k > 1 \quad &\Rightarrow \quad k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ k + 1 > k^2 \quad &\Rightarrow \quad k < \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{aligned}$$

Komentár: Všimnite si, že ak má drak trojuholníky s koeficientom podobnosti k, tak ich vzájomnou zámenou získa vyhovujúce trojuholníky s koeficientom podobnosti $1/k$. Preto musí byť riešenie symetricky rozložené okolo 1. Overte si, že v našom prípade to tak je.

Úloha č. 9: *Uvažujme tetivový štvoruholník $ABCD$. Na jeho diagonále AC zvolíme bod E tak, že DE je kolmá na stranu AB, na diagonále BD zvolíme bod F tak, že AF je kolmá na CD. Dokážte, že EF je rovnobežná s BC.*

Riešenie: (opravoval Rasťo)



Najprv zistíme niečo viac o polohe bodov E, F. Označme S priesešník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$. Kedy bod E leží na úsečke AS a kedy na SC? Na AS sa nachádza práve vtedy, keď päta výšky v trojuholníku ABD z bodu D leží na polpriamke BA a to je práve vtedy, keď uhol ABD nie je tupý. Analogicky, bod F leží na úsečke DS práve vtedy, keď uhol ACD nie je tupý. Uhly ABD a ACD sú ale obvodové uhly nad AD, čiže sú rovnaké. Preto máme len dve možnosti.

a) Nech uhol ABD nie je tupý. Päta kolmice z A (resp. D) je označená X (resp. Y). Našou úlohou je dokázať, že priamky EF a BC sú rovnobežné. Obe tieto priamky pretínajú priamku FB a preto sú rovnobežné len ak s ňou zvierajú rovnaký uhol, čiže len ak $|\sphericalangle EFB| = |\sphericalangle DBC|$. (Uvedomte si, že už teraz sme využili fakt, že E leží na úsečke AS a F na úsečke DS.) Navyše vieme, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový a tak $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DAC|$. Preto nám postačí, ak dokážeme $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle EFB|$.

Všimnime si teraz štvoruholník $AEFD$. Vieme, že $|\sphericalangle DFE| = 180° - |\sphericalangle EFB|$, a preto $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle EFB|$ práve vtedy, keď $|\sphericalangle DAC| = 180° - |\sphericalangle DFE|$, čo je ekvivalentné tomu, že štvoruholník $AEFD$ je tetivový. Už vieme, že na rovnobežnosť EF a BC nám stačí dokázať, že štvoruholník $AEFD$ je tetivový.

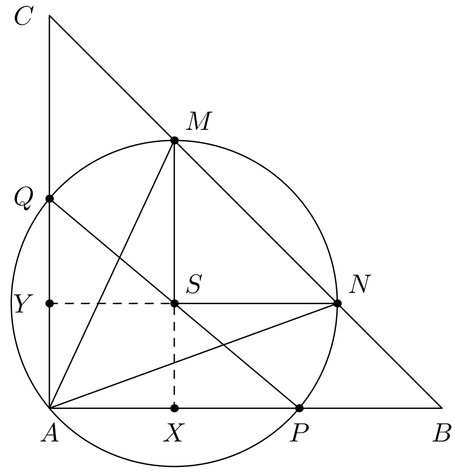
Označme $|\sphericalangle BDC| = \alpha$. Trojuholník DYF je pravouhlý a tak $|\sphericalangle DFY| = 90° - \alpha$. Potom $|\sphericalangle AFD| = 180° - |\sphericalangle DFY| = 90° + \alpha$. Vieme, že $ABCD$ je tetivový, a preto aj $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$. Trojuholník AXE je pravouhlý a tak $|\sphericalangle AEX| = 90° - \alpha$. Potom $|\sphericalangle AED| = 180° - |\sphericalangle AEX| = 90° + \alpha$. Vidíme, že uhly AED a AFD sú rovnako veľké, preto vieme štvoruholníku $AEFD$ opísať kružnicu, je tetivový. Špeciálny prípad môže nastať, ak $|\sphericalangle ABD| = 90°$. Potom Je zrejmé, že $E = F = S$ a tvrdenie je triviálne splnené.

b) Zostáva nám prípad, keď uhol ABD je tupý. Body E a F by boli v našom obrázku napravo od priesečníka uhlopriečok a teda v opačnom poradí. Na ich rovnobežnosť je preto potrebné ukázať, že $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle DBC|$. Rovnakým spôsobom ako v a) vieme dokázať tetivovosť štvoruholníka $AFED$ a potom už platí $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DBC|$.

Komentár: Mnohí z vás rozoberali aj prípady, keď E alebo F ležali mimo štvoruholníka $ABCD$, čo však nebolo potrebné, keďže majú ležať na jeho diagonálach a diagonály štvoruholníka sú len v jeho vnútri, sú to len úsečky a nie priamky.

Úloha č. 10: *Nech ABC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A. Body M a N nech sú vnútri úsečky BC také, že $|\sphericalangle MAN| = 45°$. Kružnica opísaná trojuholníku AMN pretína postupne AB a AC v bodoch P a Q. Dokážte, že $|BP| + |CQ| = |PQ|$.*

Riešenie: (opravoval OndroM)



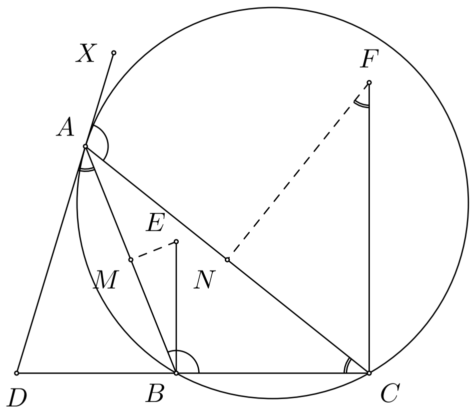
Zadanie úlohy sa zdá až priveľmi pravouhlé. Nakreslime si obrázok a poďme sa pozrieť na uhly, ktoré sa v ňom javia pekne. Na poradí M, N na úsečke BC nezáleží (premysli si), tak nech M je bližšie k bodu C.
Kružnicu opísanú trojuholníku AMN označme k, jej polomer r a stred S. Potom platí $|MS| = |NS| = |PS| = |AS| = |QS| = r$, pretože sú to polomery kružnice k. Navyše PQ bude priemer tejto kružnice, lebo $|PAQ| = 90°$ a body P a Q ležia na nej. Keďže $|\sphericalangle MAN| = 45°$, jemu prislúchajúci stredový uhol MSN bude pravý. Trojuholník MSN je teda rovnoramenný pravouhlý.
Platí, že $|\sphericalangle SMN| = |\sphericalangle ACN|$, preto $MS \| CA$ a $NS \| BA$. Označme X priesečník priamky MS so stranou AB a Y priesečník priamky NS so stranou AC. Potom z rovnobežnosti MX a CA, resp. NY a BA plynie, že $|\sphericalangle YQS| = |\sphericalangle XSP|$, resp. $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle QSY|$ (súhlasné uhly). Trojuholníky QSY a SPX sú preto podobné. Dokonca sú zhodné, pretože $|QS| = |SP|$. Pre ďalšie potreby označme $|YS| = |XP| = a$ a $|QY| = |SX| = b$.
Ak ste náhodou úlohu nevyriešili, skúste sa práve tu na chvíľu zastaviť pri čítaní vzoráku a dokončiť úlohu sami. Od úplného riešenia sme už len na krok.
Do hry by sme konečne mohli zapojiť aj úsečky PB a QC, keďže obidve sa vyskytujú v tvrdení, ktoré chceme dokázať. Úsečka PB je súčasťou rovnoramenného pravouhlého trojuholníka MXB, platí teda $|MX| = |XP| + |PB|$. Podobne $|YN| = |CQ| + |QY|$. Poďme sa teraz konečne pustiť do úpravy súčtu dĺžok CQ a PB

$$\begin{aligned}
|CQ| + |PB| &= (|YN| - |QY|) + (|MX| - |XP|) = \\
&= (|YN| - b) + (|MX| - a) = \\
&= (|YN| - a) + (|MX| - b) = \\
&= (|YN| - |YS|) + (|MX| - |XS|) = \\
&= |SN| + |SM| = 2r.
\end{aligned}$$

Ale $|PQ| = 2r$, pretože je to priemer. Dokázali sme $|PQ| = 2r = |CQ| + |PB|$.

Úloha č. 11: *Nech ABC je trojuholník a nech D je priesečník dotyčnice ku kružnici opísanej trojuholníku ABC v bode A a priamky BC. Nech E je priesečník kolmice na BC v bode B a osi strany BA. Nech F je priesečník kolmice na BC v bode C a osi strany CA. Dokážte, že body D, E a F ležia na jednej priamke.*

Riešenie: (opravoval MišoT)



Chceme dokázať, že body D, E a F ležia na jednej priamke. Keďže body E a F ležia na kolmiciach na úsečku BC, tak úsečky BE a CF sú rovnobežné. Predstavme si, že body D, E a F ležia na jednej priamke. Potom body D, B, C a body D, E, F ležia na priamke a úsečka BE je rovnobežná s úsečkou CF. To znamená, že úsečka BE sa prenesie v rovnoľahlosti so stredom v bode D a koeficientom $k = |DC|/|DB|$ na úsečku CF a zrejme rovnako celý trojuholník DBE sa prenesie na trojuholník DCF. Z toho je zrejmé, že tieto dva trojuholníky sú podobné.
Premyslite si, že táto úvaha funguje aj opačným smerom. Ak dokážeme, že trojuholníky DCF a DBE sú podobné, tak potom už musia body D, E a F ležať na priamke. Na dokázanie podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov nám stačí ukázať, že majú rovnaký pomer odvesien, teda $|CF|/|DC| = |BE|/|DB|$.
Pustime sa do počítania týchto dĺžok, pričom našou snahou bude vyjadriť ich pomocou strán a uhlov trojuholníka ABC. Označme si dĺžky jeho strán ako a, b a c a uhly ako α, β a γ. Označme ďalej M stred strany AB a N stred strany AC. Zrejme úsečka ME je kolmá na AB, keďže leží na osi strany AB. Trojuholník EMB je pravouhlý a podľa známych vzťahov platí

$$|BE| = \frac{|MB|}{\sin|\sphericalangle BEM|}.$$

Platí $|\sphericalangle MBE| = \beta - 90°$ a $|\sphericalangle EMB| = 90°$, z čoho vyplýva $|\sphericalangle BEM| = 180° - \beta$. Vieme, že dĺžka MB je polovicou dĺžky strany AB, teda máme

$$|BE| = \frac{c/2}{\sin(180° - \beta)} = \frac{c}{2\sin\beta}.$$

Všimnime si, že bod F je na rozdiel od bodu E mimo trojuholníka ABC. Preto podobnými výpočtami nedostaneme $|\sphericalangle CFN| = 180° - \gamma$, ale vyjde nám $|\sphericalangle CFN| = \gamma$. Z pravouhlého trojuholníka CFN dostaneme

$$|CF| = \frac{b}{2\sin\gamma}.$$

Ešte potrebujeme spočítať dĺžky úsečiek DB a DC. Zatiaľ sme nevyužili, že DA je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABC. Z obvodových a úsekových uhlov vieme, že

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCA| = \gamma, \quad |\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle ABC| = \beta,$$

pričom bod X využívame len kvôli označeniu uhla.
Podľa sínusovej vety v trojuholníku DBA platí

$$\frac{|DB|}{\sin|\sphericalangle BAD|} = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ADB|} \Rightarrow |DB| = \frac{c\sin\gamma}{\sin|\sphericalangle ADB|}.$$

Podľa sínusovej vety v trojuholníku DCA platí

$$\frac{|DC|}{\sin|\sphericalangle CAD|} = \frac{|CA|}{\sin|\sphericalangle ADC|} \Rightarrow |DC| = \frac{b\sin(180° - \beta)}{\sin|\sphericalangle ADB|} = \frac{b\sin\beta}{\sin|\sphericalangle ADB|}.$$

Vyjadrili sme všetky potrebné dĺžky a ľahko overíme platnosť rovnosti $|CF|/|DC| = |BE|/|DB|$ a k tomu sme sa chceli dostať.
Diskusia: V našom obrázku je uhol ABC väčší ako $90°$. Takto nám vyšlo, že $|\sphericalangle BEM| = 180° - \beta$. Ak by bol uhol ABC nanajvýš $90°$, tak bod E nebude vnútri trojuholníka ABC a dostaneme, že $|\sphericalangle BEM| = \beta$. V ďalšom výpočte to však nerobí problém, keďže počítame len so sínusom tohoto uhla a platí $sin\beta = sin(180° - \beta)$.
Uvažovali sme, že $|AB| < |CA|$, teda bod D je bližšie k bodu B ako k bodu C. V situácii $|AB| = |CA|$ sa nám dotyčnica v bode A nepretne s priamkou BC, tento prípad preto nemusíme uvažovať. Ak $|AB| > |CA|$, tak bod D bude bližšie k bodu C a budeme postupovať analogicky.

Úloha č. 12: *Definujme funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pomocou nasledovnej rekurencie. Nech $f(1) = 1$ a $f(n+1)$ je najväčšie také m, že existuje aritmetická postupnosť prirodzených čísel*

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m = n$$

taká, že

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m).$$

Dokážte, že potom existujú prirodzené čísla a, b také, že platí $f(an + b) = n + 2$ pre každé prirodzené n.
Riešenie: (opravoval Ondráč)
(Podľa Josefa Tkadleca) Po dôkladnom pochopení zadania sa môžeme pustiť do vypisovania prvých členov:

$$1,1,2,1,\quad 2,2,2,3,\quad 1,2,2,3,\quad 2,3,2,4,\quad 1,3,2,5,\quad 1,2,2,6,\quad 1,4,2,7,\quad 1,4,2,8,\quad \ldots$$

Napriek nepravidelnému začiatku vieme nahliadnuť (ak nie, vypíšte si ďalšie členy), že ak si postupnosť rozdelíme na švorice, tak časom dosiahneme len štvorice typu $(1, n, 2, n+4)$, kde n sa postupne zvyšuje, vždy o jedna. Pokúsime sa dokázať pomocou indukcie, že postupnosť (počnúc štvoricou $(1, 4, 2, 8)$) má len členy tohoto typu. Prvý indukčný krok je zrejmý. Predpokladajme, že máme postupnosť

$$\ldots \quad 1,4,2,8,\quad 1,5,2,9,\quad \ldots \quad 1,n,2,n+4$$

,kde $n \geq 4$ a chceme zistiť, aká je ďalšia štvorica. Prvé číslo za $n + 4$ bude určite 1, pretože $n + 4$ je v postupnosti určite len raz. Každá zo štvoríc $(1, m, 2, m+4)$, kde $m \in \{4, 5, \ldots, n\}$ začínala na jednotku a dokonca aj tri štvorice pred $(1, 4, 2, 8)$ začínali rovnako. Preto vieme, že nasledujúci člen je aspoň $3+(n-3)+1 = n+1$. Väčšiu hodnotu by sme teoreticky mohli dosiahnuť s väčšou diferenciou, ktorá by potom musela byť aspoň 8. Jednotka, ktorá nasleduje po $n + 4$ je na $4n + 17$-tej pozícii. Maximálna dĺžka postupnosti s diferenciou aspoň 8 končiaca číslom $4n + 17$ je

$$\left\lfloor \frac{(4n+17)-1}{8} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3.$$

Táto hodnota je však najviac $n + 1$ pre $n \geq 4$, čím sme dokázali, že nasledujúci člen je naozaj $n + 1$. Tretie číslo v nami dopĺňanej štvorici bude 2, pretože číslo $n + 1$ máme v postupnosti (využitím indukčného predpokladu

a štruktúry prvých 28 členov postupnosti) práve dva razy. Posledné číslo bude aspoň $n+5$, pretože všetky čísla na pozíciách tvaru $4k+3$ sú 2 a je ich spolu $n+5$. Zrejme väčšie už nemôže byť.
Tým je indukcia kompletná. Odpoveď na otázku zo zadania je teraz jednoduchá. Je zrejmé, že

$$f(4n+8) = n+2.$$

Úloha č. 13: *$ABCD$ je konvexný štvoruholník. Body P, Q ležia postupne na úsečkách BC, DC tak, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAQ|$. Dokážte, že trojuholníky ABP a ADQ majú rovnaký obsah práve vtedy, keď priamka prechádzajúca cez ich ortocentrá je kolmá na AC.*

Riešenie: (opravoval Feráč)

Označme A_1 a A_2 postupne päty výšok z vrcholu A na priamky BC a DC a nech H_1 a H_2 sú ortocentrá trojuholníkov ABP a ADQ. Ukážeme, že tieto trojuholníky majú rovnaký obsah práve vtedy, keď $|AA_1|\cdot|AH_1| = |AA_2|\cdot|AH_2|$. Nech α značí spoločnú veľkosť uhlov BAP a DAQ, pätu výšky z bodu P na stranu AB označme P_1. Štvoruholník $A_1H_1P_1B$ je tetivový, preto z mocnosti bodu A ku kružnici jemu opísanej vyplýva

$$\begin{aligned} |AA_1|\cdot|AH_1| &= |AB|\cdot|AP_1| \\ &= |AB|\cdot|AP|\cos\alpha \\ &= \frac{2S_{ABP}}{\sin\alpha}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Podobne

$$|AA_2|\cdot|AH_2| = \frac{2S_{ADQ}}{\sin\alpha}\cos\alpha,$$

odkiaľ

$$S_{ABP} = S_{ADQ} \Longleftrightarrow |AA_1|\cdot|AH_1| = |AA_2|\cdot|AH_2|.$$

Teraz je už úloha jednoduchá. Predpokladajme, že priamka AC je kolmá na H_1H_2, ich priesečník označme H. Potom štvoruholníky A_1H_1HC a A_2H_2HC sú oba tetivové, čiže

$$|AA_1|\cdot|AH_1| = |AH|\cdot|AC| = |AA_2|\cdot|AH_2|.$$

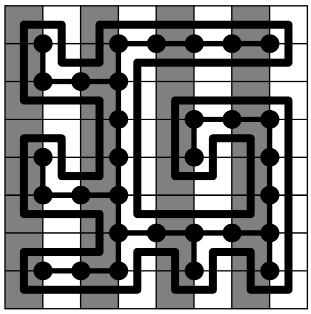
Naopak, ak $|AA_1|\cdot|AH_1| = |AA_2|\cdot|AH_2|$, tak pre päty výšok G_1 a G_2 z vrcholov H_1 a H_2 na priamku AC platí

$$|AG_1|\cdot|AC| = |AA_1|\cdot|AH_1| = |AA_2|\cdot|AH_2| = |AG_2|\cdot|AC|.$$

Teda $G_1 = G_2$ a priamky AC a H_1H_2 sú navzájom kolmé.

Úloha č. 14: *Šachová figúrka princ sa môže pohybovať vodorovne alebo zvislo, vždy práve o jedno políčko. Princom preskáčeme všetky políčka šachovnice 8×8 (na každé skočíme práve raz) a skončíme na políčku, z ktorého sme začínali. Môže sa stať, že počet horizontálnych a vertikálnych skokov bude rovnaký?*

Riešenie: (opravoval Ondráč)



(*Podľa Josefa Tkadleca*) Princ svojou cestou po šachovnici ohraničí nejaký útvar U. Skúsme o ňom niečo zistiť. Ak strana jedného políčka šachovnice má dĺžku 1, tak obvod U je 64. (Princ urobil 64 ťahov.) Obsah môžeme získať jednoducho použitím Pickovej vety. Stredy políčok šachovnice tvoria mrežovú sieť. Zjavne U nemá vnútri žiadny z týchto mrežových bodov a na obvode práve 64. Podľa Pickovej vety je jeho obsah $64/2 - 1 = 31$. Teda ak sa pozrieme na pôvodnú šachovnicu, je v nej práve 31 rohov políčok, ktoré ležia vnútri U. Odteraz ich budeme volať vrcholy. (Na obrázku znázornené plnými krúžkami.) Každé dva vrcholy, ktoré sú vzdialené práve 1 spojíme hranou a dostaneme tak graf o 31 vrcholoch. Keďže princ prešiel cez všetky políčka jedným ťahom, je zrejmé, že tento graf neobsahuje kružnice. To znamená, že sa skladá z niekoľkých stromov. (Takýto graf voláme les.) Nie je ťažké si rozmyslieť si, že ten strom musí byť práve jeden. Takže máme jeden strom s 31 vrcholmi a 30 hranami.
Ofarbime si šachovnicu zvislými pruhmi ako na obrázku. Teraz budeme U a aj celú trasu princa zmenšovať tak, že budeme zo stromu postupne odrezávať listy. Budú nastávať dva rôzne prípady:

- Keď odrežeme list s vodorovnou hranou, tak obvod U skrátime o dva vodorovné úseky dĺžky 1 a cesta prestane prechádzať dvoma políčkami rovnakej farby.
- Keď odrežeme list so zvislou hranou, tak obvod U skrátime o dva zvislé úseky dĺžky 1 a cesta prestane prechádzať jedným čiernym a jedným bielym políčkom.

Keď odrežeme 30 listov, skončíme s jedným vrcholom, 0 hranami, s cestou tvorenou dvoma zvislými a dvoma vodorovnými úsekmi dĺžky jedna na dvomch bielych a dvoch čiernych políčkach.
Teraz predpokladajme, že princ na obvode U spravil 32 zvislých a 32 vodorovných skokov, museli by sme pri orezávaní 15-krát odrezať list s vodorovnou hranou a 15-krát odrezať list so zvislou hranou. Keďže počet orezaných listov s vodorovnou hranou je nepárny, tak počty čiernych a bielych políčok odstránených z princovej cesty pri orezávaní listov, je rôzny. To je však spor, lebo my už vieme, že ten počet je pre obe farby $32 - 2 = 30$. Tým sme dokázali, že počet horizontálnych a vertikálnych ťahov princa nemôže byť rovnaký.

Komentár: Aby ste si preverili, či ste správne pochopili riešenie, môžete skúsiť nájsť všetky ďalšie rozmery šachovníc, kde tento dôkaz bez nejakých vážnejších zmien prejde. Koniec. Hurá!

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Chlebíková Andrea	2.	Brighton UK	4	1		9	9	9		9	9		45	90
2.	Kossaczký Igor	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	8	8			43	88
3.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	8	8			43	86
4.	Kossaczký Pavol	3.	Gamča BA	4	0	9	9		9	8	9			44	85
4.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	7	5			8	9	8	9	8		42	85
6.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	9	5			7	9	9	9	8		42	83
7.	Pavlík Tomáš	4.	GJK PH ČR	4	0		9	3	9	8	9	9		44	80
8.	Le Tuan Anh	2.	Gamča BA	6	1		9	7	9	8	9	8		43	77
9.	Csiba Dominik	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	9	3	8	9			38	72
10.	Šormanová Mária	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	6	9	6	8				38	70
11.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	11	6			9	8	1	9	8		35	69
12.	Midlik Adam	3.	GJAR PO	6	2		9	6	7	8				30	66
13.	Štyráková Kamila	3.	GPOH DK	8	2		9	9	1	9	8			36	64
14.	Kováč Ondrej	2.	GCM NR	5	1		9	7	6		8			30	63
14.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	4	1		9	9	8	8	9			43	63
14.	Szabados Viktor	2.	Gamča BA	6	1		9	9	7	5	2			32	63
17.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	4	1		9	8	9	8	9			43	61
18.	Eiben Eduard	4.	GPoš KE	9	6			9	9	8	9			35	60
19.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9	5			8	9	8	9			34	59
19.	Bačo Ladislav	3.	GPoš KE	9	5			8	9	8	7			32	59
21.	Hozza Ján	2.	GJH BA	4	1		9	8	9	8	3			37	58
21.	Karásková Natália	3.	Gamča BA	9	4			9	9	8	9			35	58
21.	Sládek Filip	3.	GAB NO	6	5						9	7		16	58
21.	Večerík Matej	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	8	6					23	58
25.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	9	5					8	7	9		24	57
25.	Kozák Andrej	2.	Gamča BA	6	1		9	9		8				26	57
27.	Baranová Jana	3.	GAlej KE	6	1		6	9	7	8	2	0		32	56
27.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	3	0	9	9	7	6					31	56
27.	Kukan Marek	3.	Gamča BA	5	1		9		9	8				26	56
30.	Haas Emil	4.	Gamča BA	9	2		9	9	8					26	55
30.	Hagara Michal	3.	GJH BA	8	5			9	9	8	9	9		44	55
32.	Bogár Ján	3.	GĽŠ TN	8	2			3	9	8	8	8		36	54
32.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	5	1		9	6	3					18	54
34.	Múthová Denisa	2.	GbTR ZA	5	0	7	1	4	6					18	53
35.	Sabatovičová Linda	2.	GJH BA	5	0	9	9	6	1					25	52
35.	Töpfer Jakub	4.	GJK PH ČR	5	3			8	9	8	9			34	52
37.	Gregor Viktor	3.	GŠkol PB	6	1		9	4	9					22	49
38.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3	0	8		4		9				21	47
38.	Kubincová Petra	2.	ŠPMNDG BA	5	0	9	9	6						24	47
38.	Phuong Mariana	2.	GJH BA	4	0	9	9	9	6					33	47
38.	Santer Jakub	2.	GMH Trstená	4	0	8	9		6		8			31	47
42.	Masár Juraj	2.	GBil BA	4	0	5	1	3	8	8				25	45

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	k_β	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
42.	Peitl Tomáš	3.	ŠPMNDG BA	8	3			8	8	8				24	45
44.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	6	1		9	8		8				25	44
45.	Mojžišová Hana	2.	GJH BA	4	0	9	9							18	42
46.	Harlenderová Alena	1.	Olomouc ČR	1	0	4	9	9						22	41
46.	Jursa Jakub	4.	GAlej KE	12	5			8	7	8				23	41
48.	Hajdin Michal	4.	GJH BA	7	2		9	7	9					25	40
48.	Matejovičová Lenka	4.	GJH BA	12	8			9	9		5			23	40
50.	Kuklišová Nina	4.	GMet BA	8	1		3	4	7	3	1			18	39
51.	Ziman Michal	3.	GBST LC	7	1			5	7		1			13	36
52.	Herencsár Albert	4.	Gmaď GA	7	3									0	35
52.	Leššová Lívia	2.	GPár NR	4	0	9		9	6					24	35
54.	Dižová Andrea	2.	GKom PE	5	1		9	7						16	32
55.	Bogárová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	4	1	8						13	30
55.	Majdiš Mojmír	3.	GPOH DK	6	1									0	30
57.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	4	0	6	9	3						18	29
58.	Krejčír Andrej	3.	GVBN PD	4	0									0	28
58.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	3	1		9		6					15	28
60.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	4	0	4		8						12	25
61.	Cocuľová Zuzana	3.	GPoš KE	7	1									0	23
62.	Hlavatá Martina	2.	Gamča BA	6	1									0	20
62.	Jakubík Ján	2.	SPŠE PN	4	0	9	9	2						20	20
62.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	4	0									0	20
65.	Bohiniková Alžbeta	2.	Gamča BA	6	1									0	18
66.	Hajdinová Katarína	2.	GJH BA	5	1									0	17
67.	Fodorová Jana	2.	GJGT BB	4	0	9		7						16	16
68.	Dvořák Daniel	4.	Trutnov ČR	4	0									0	14
68.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3	0									0	14
68.	Rigdová Emília	3.	GKuk PP	6	1									0	14
71.	Bartko Matúš	2.	GĽŠ TN	2	0									0	7
72.	Bendová Lenka	4.	GJH BA	7	1									0	6

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Belanová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	2		9	4	8	9		8		70
2.	Bohiniková Lucia	1.	Gamča BA	2			7	4	9				61
3.	Žákovská Uršuľa	1.	Gamča BA	2		9		7	2		7		56
4.	Langer Tomáš	1.	GJH BA	1	9		5	8	9		3		39
5.	Tóth Michal	1.	GJH BA	1	8			9	9	2	8		36
6.	Vlachynská Petra	1.	GBil BA	2									35
7.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3					8		4		27
8.	Rečka Marek	1.	1SG BA	1									17
9.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3									12
10.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3					3	0	1		4

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Horňák Marián	1.	GPár NR	2		9	9	9	8		9		87
2.	Kosec Peter	1.	GĽŠ TN	2		9	8	9	9	9	9		84
3.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	3			6	9	9	9	7		73

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
4.	Švančara Patrik	1.	GĽŠ TN	2			9	8	9	2	1		71
5.	Baxová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2		7	5	9	9	1			63
6.	Koprda Pavol	1.	GAM TT	2		9	1	7		1			58
7.	Šimková Mária	3.	GJF Šaľa	3			7	9	2	0			45
8.	Mariš Andrej	1.	PiarG NR	1	8		0	9					42
9.	Sedlačková Lenka	2.	GPdC PN	2		9	3	4	3	0	2		36
10.	Pappová Danica	1.	GĽŠ TN	1									29
11.	Rajchlová Barbora	3.	GJab MY	3				4					24
12.	Pločeková Andrea	2.	GPdC PN	2									9
13.	Bartko Matúš	2.	GĽŠ TN	2									7

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Galovičová Soňa	1.	GVO ZA	3			9	9	9	9	9		78
2.	Vlček Andrej	1.	ESŠ EG JT LM	2		9	8	9	8				75
3.	Jasenčáková Katarína	1.	GVO ZA	3			9	7	9	9	8		72
4.	Halajová Barbora	1.	GVO ZA	3			6	9	9	9	6		69
5.	Santrová Adriana	1.	GMH Trstená	2		7			6	1			46
6.	Anderle Michal	2.	GBST LC	3									32
7.	Rybár Andrej	2.	GJGT BB	3						1			31
8.	Jacková Dominika	2.	GJGT BB	2									26
9.	Búlik Martin	2.	GJGT BB	2			5			0			22
10.	Kajánek František	1.	GJMH CA	2		9	2	6					21
11.	Lonský Rafael	1.	GPOH DK	1	8		8						16
12.	Makuch Matej	2.	GJGT BB	3									14
13.	Kubišová Barbora	1.	GJGT BB	2	8	3			5				12
14.	Plavák Dušan	2.	GMH Trstená	2									8
15.	Lehotský-Neznámy Juraj	1.	EvG BB	1						0			0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Dupej Peter	1.	GJAR PO	2		9	5	6	5	9	2		76
2.	Marečáková Barbora	1.	GKuk PP	2		9	0	6	9		9		75
3.	Daniláková Monika	1.	GJAR PO	2		9	6	8	9	1			74
4.	Klembarová Barbora	1.	GKuk PP	2		9	0	9	9	1	9		72
5.	Kmeťová Katarína	1.	GKuk PP	2		9	9	9	9	1			56
6.	Faguľová Kristína	1.	GPoš KE	3			6	5	1	3	2		51
7.	Lami Jozef	1.	GPoš KE	2				9	1	0			42

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9						58
2.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	8						70
3.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	9	8	7	7	7		144
4.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	9	8					51
5.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	7	9					76
6.	Kováč Jakub	4.	GCM NR							57

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
7.	Sládek Filip	3.	GAB NO	9	7		7			98
8.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	9	8	7	7	7		140