Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2008/2009

Úloha č. 1: *Po obvode kruhu sedí* 2008 *vedúcich Trojstenu a každý z nich má niekoľko lentiliek. Počet lentiliek každých dvoch susedných vedúcich sa líši o* 2 *alebo o* 3. *Najviac o koľko sa môže líšiť počet lentiliek dvoch vedúcich, ak žiadni dvaja vedúci nemajú rovnako veľa lentiliek?*

Riešenie: (opravovala Katka)

Zdravím všetkých nadšených riešiteľov tohto príkladu. :) Poďme sa pozrieť na to, ako malo vyzerať riešenie. Chceme nájsť dvoch vedúcich, ktorí by mali mať čo najväčší rozdiel v počte lentiliek. Ako sa dopracujeme k čo najväčšiemu rozdielu? Od jedného daného vedúceho sa môže jeho sused líšiť najviac o tri lentilky, ďalší o šesť, ďalší o deväť, ... Znamená to, že naši dvaja vedúci by mali byť od seba čo najďalej. Pri hľadaní maximálnej vzdialenosti dvoch vedúcich sme však obmedzení tým, že vedúci sedia v kruhu. Keď si vezmeme našich dvoch vedúcich, cestou od prvého k druhému musíme pričítať taký istý počet lentiliek, aký odčítame cestou od druhého k prvému. Tomu by vyhovovalo viacero spôsobov rozmiestnenia vedúcich. Maximálny rozdiel dostaneme vtedy, keď budú naši dvaja vedúci (volajme ich A a B) sedieť oproti sebe, teda na priemere kružnice. Prečo nie inak? Predstavme si, že vedúci A zostane na mieste a vedúci B bude sedieť inde, než pôvodne. Počet susedov medzi ním a vedúcim A bude teda určite menší, než pôvodne. (Premyslite si prečo.) Aby bol rozdiel čo najväčší, budeme uvažovať hlavne „trojkové“ rozdiely.

Zostal nám ešte jeden problém - ako zabezpečiť to, aby mal každý vedúci iný počet lentiliek. Keby sme postupovali iba pričítavaním a odčítavaním trojek, vedúci na jednom a druhom polkruhu by mali rovnako veľa lentiliek, vždy po dvojiciach. Aby sme sa tomu vyhli, na jednej aj na druhej polkružnici musíme pričítať/odčítať jednu dvojku. (Jednu preto, aby sme zachovali čo najväčší rozdiel.) Tak sa stane, že zatiaľ čo na jednom polkruhu budeme začínať počtom lentiliek postupne 0, 2, 5, 8, na druhom budeme končiť počtami 9, 6, 3, 0. Dvojky odčítame/pričítame vždy na hranici polkruhov tvorených priemerom AB, tak zabezpečíme, aby sa nám žiadne dve čísla neopakovali. Teraz nám už zostal len samotný výpočet rozdielu. Naši vedúci A a B sedia oproti sebe na 1. a 1005. pozícii. Medzi nimi je 1004 medzier, ktoré predstavujú 1003 rozdielov o 3 lentilky a 1 rozdiel o 2 lentilky. Rozdiel preto bude $1003 \cdot 3 + 2 = 3011$ lentiliek.

Úloha č. 2: *Klokan a vtákopysk vyhrali v tombole čokoládu s rozmermi* 5×16 *dielikov. Povedali si, že ju nezjedia len tak, ale že si s ňou zahrajú hru. Striedajú sa pravidelne v ťahoch. Zvieratko, ktoré je na ťahu, zlomí čokoládu na dva kusy, vyberie si jeden z nich a celý ho zje. Čokoládu pritom môže lámať len po pôvodne naznačených čiarach medzi dielikmi. Zvyšok podá druhému zvieratku, ktoré tak isto zlomí čokoládu, jeden kus zje a druhý podá súperovi. Takto sa to opakuje. Akonáhle niektoré zvieratko vytvorí kus s rozmermi* 1×1, *prehrá. Ako prvý je na ťahu klokan. Ktoré zvieratko vyhrá, ak obidve hrajú najlepšie ako je možné?*

Riešenie: (opravoval JeFo)

Na začiatok bolo vhodné uvedomiť si, aké rozmery (zvyšného kúsku čokolády) sú prehrávajúce. Čo vlastne budeme nazývať prehrávajúci a čo vyhrávajúci rozmer? Vyhrávajúci rozmer je taký, o ktorom vieme povedať, že ak čokoládu s takýmto rozmerom dostaneme do ruky, aj keď náš súper hrá akokoľvek dobre, kým my budeme hrať najlepšie ako sa dá, určite vyhráme. Napríklad $1 \times n$ pre n aspoň 4 je určite vyhrávajúci rozmer, lebo vždy vieme rozdeliť tento kúsok tak aby sme súperovi dali 1×2, ktorý on určite rozdelí na 1×1 a 1×1, teda určite prehrá. Prehrávajúca pozícia je práve opačná.

Zopár z Vás si nevšimlo možnosť 3×1, ktorá je tiež prehrávajúca, lebo 3×1 sa dá rozdeliť len na 2×1 a 1×1. Teda ten hráč, ktorý dostane do rúk čokoládu 2×1 alebo 3×1 už bohužiaľ prehrá. Z toho sa dá postupovať akoby dozadu a prísť na to, že ak dostaneme čokoládu rozmerov $1 \times n$ pre $n > 3$, $2 \times n$ pre $n > 1$ a $3 \times n$ pre $n > 1$, tak vieme určite vyhrať. (Stačí vrátiť súperovi kus čokolády s prehrávajúcimi rozmermi.) Z toho ale vyplýva, že rozmery, z ktorých musí hráč upraviť čokoládu na vyhrávajúce rozmery sú tiež prehrávajúce. To platí pre rozmer 4×4, z ktorého sa dá vrátiť kúsok len s rozmermi 4×3, 4×2, 4×1. (Všetky tieto rozmery sú víťazné.) Z toho ale vyplýva, že rozmer $4 \times n$ pre $n > 4$ je určite víťazný.

Všimnime si teraz rozmer 5×5. Tento rozmer je prehrávajúci, lebo sa z neho dá nahrať súperovi len na rozmery $5 \times n$ pre $n < 5$, čo sú víťazné pozície súpera. Keď sme dospeli k 5×5 už je nám jasné, kto vyhrá, lebo klokan môže svojím prvým ťahom upraviť čokoládu na tvar 5×5 a podať túto prehrávajúcu pozíciu vtákopyskovi. Tomu neostáva nič iné len vrátiť 5×4 aby neprehral hneď v ďalšom kole. Klokan mu dá potom čokoládu 4×4 a chudák

vtákopysk musí vrátiť čokoládu $4 \times n$, kde $n < 4$, ktorú už klokan upraví na jeden z tvarov 2×1 , 3×1 a podá vtákopyskovi. Vtákopysk už musí odlomiť kúsok s rozmermi 1×1. Sláva porazeným, česť a riadny kus čokolády víťazom. (Alebo také niečo… ;))
Komentár: Komu sa príklad páčil, môže si skúsiť rozmyslieť, ako by to dopadlo s ľubovoľnou čokoládou, či by vždy vyhral prvý hráč alebo má šancu aj druhý.

Úloha č. 3: *Nech a a b sú reálne čísla. O číslach ab a $a+b$ vieme, že sú buď obe kladné, alebo obe záporné, alebo aspoň jedno z nich je nulové. Dokážte nerovnosť:*

$$(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie: (opravovala Kika)
Začneme tým, že si výraz najprv roznásobíme a ekvivalentnými úpravami prevedieme na iný tvar. Taký, z ktorého budeme vidieť niečo viac, ako zo zadanej nerovnosti. Roznásobíme ho. To je dobré na to, že hneď v prvých krokoch nám vypadne niekoľko členov, s ktorými sa ďalej netreba trápiť.

$$(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3)$$

$$a^5+a^4b+ab^4+b^5 \geq a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5$$

Čo ďalej? Zase by to chcelo zjednodušiť výraz, na prvý pohľad sa ponúka vydelenie celej nerovnice výrazom ab, ktorým je vynásobený každý člen na pravej aj ľavej strane. To je však trochu nebezpečné - čo ak je $ab = 0$? Radšej budeme preto vynímať pred zátvorku, tým nič nepokazíme a celá nerovnosť sa zjednoduší.

$$a^4b - a^3b^2 + ab^4 - a^2b^3 \geq 0$$

$$ab(a^3 - a^2b + b^3 - ab^2) \geq 0$$

$$ab(a^2(a-b) + b^2(b-a)) \geq 0$$

$$ab(a-b)(a^2-b^2) \geq 0$$

$$ab(a-b)(a+b)(a-b) \geq 0$$

$$ab(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Keďže sme výraz upravovali ekvivalentne, stačí nám dokázať nerovnosť v poslednom riadku. Podľa zadania je ab alebo $a+b$ buď nulové - v tomto prípade nerovnosť platí, stačí dosadiť - alebo majú rovnaké znamienko. Výraz $ab.(a+b)$ je preto stále kladný, poprípade nulový. (Premyslite si.) A čo $(a-b)^2$? Tento výraz je tiež nezáporný, veď je to reálne číslo umocnené na druhú. No a čo sa stane s dvoma nezápornými výrazmi, ktoré spolu vynásobíme? Dostaneme zase len niečo, čo je kladné alebo 0. Druhá časť zadania sa pýtala na rovnosť. Tá nastáva vtedy, ak je aspoň jeden člen z posledného riadku 0. To nastáva v prípadoch $a = 0$, $b = 0$, $a = -b$ alebo $a = b$.

Úloha č. 4: *Škrečok vypestoval hrušku vážiacu 11111 kilogramov. Položil ju na jednu stranu rovnoramenných váh, druhú stranu nechal prázdnu. Na váhu potom zaradom prikladal závažia hmotností 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, …, 2^n kg, … na jednu alebo druhú stranu. Po čase nastala na váhach rovnováha. Na ktorej strane váh (na tej, kde bola hruška, alebo na tej druhej) mohlo byť závažie s hmotnosťou 2048 kg?*

Riešenie: (opravoval Kubo)
Ahoj. Želám pekný deň. Ak sa chystáš čítať tento vzorák bez ceruzky a papiera, podľa mňa o veľa prichádzaš. Ak ti nejaký krok nie je jasný, nepokračuj kým si ho neujasníš. Len tak môže vzorák splniť svoj účel naplno. To podľa mňa platí pre všetky vzoráky;)
Pozrime sa na zadanie: Na rovnoramenných váhach máme na jednej strane hrušku a kôpku závaží (ktorej hmotnosť označíme A) a na strane druhej väčšiu kôpku závaží. (Jej hmotnosť bude B.) Z toho už vieme vyvodiť rovnosť $A + 11111 = B$. Vieme ešte niečo o A a B? Ja veru áno. Konkrétne $A + B = 2^{n+1} - 1$. A odkiaľ? Veď skúste zrátať $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$. Ak nevieš ako, vyskúšaj si to pre pár menších n a ak stále nepôjde, tak pozri napríklad `http://sk.wikipedia.org/wiki/Geometrická_postupnosť`.
Z týchto dvoch vzťahov dostaneme: $A = 2^n - 5556$. Keďže vieme, že $A > 0$ tak aj $n \geq 13$. Treba si uvedomiť, že takéto A sa dá z našich závaží poskladať len jedným spôsobom. (Tak ako sa v desiatkovej sústave dá prirodzené číslo zapísať iba jedným spôsobom.) Aby sme vedeli akým, povieme si niečo o dvojkovej sústave. Ak už vieš v dvojkovej sústave dobre počítať, kľudne ďalší odstavec preskoč.
V desiatkovej sústave máme na zápis 10 číslic. Keď skladáš číslo, pýtaš sa: Koľko stoviek tam vlezie? A koľko desiatok? A koľko jednotiek? Vždy sa ti vlezie maximálne 9 stoviek, (lebo keby sa vliezlo 10 tak to je tisícka a na tú si sa už pýtal(a) predtým a odrátal(a) ju ak sa zmestila) 9 desiatok, atď. A tak isto sa pýtaš aj pri skladaní čísel v dvojkovej sústave, ale na mocniny dvojky. Tie sa však vyskytujú na číselnej osi oveľa hustejšie, ako mocniny desiatky, preto tam nikdy viac ako jedna nevlezie. *(Áno súvisí to so sčítaním radu $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n$.)*

Napríklad číslo 5556 sa dá zapísať ako $2^{12}+2^{10}+2^8+2^7+2^5+2^4+2^2$ a teda sa dá vyjadriť v dvojkovej sústave ako $1010110110100_{[2]}$. Jednoducho na miesto príslušných mocnín v zápise sme dali jednotky. Sčitovanie a odčitovanie je potom podobné ako v desiatkovej sústave. Len používaš iba dve cifry. Jednotku alebo nulu. Ak nevieš ako, určite si to vyskúšaj. Dôjdeš na to aj sám(sama) a určite sa ti to aj v budúcnosti hodí. Ak ti to stále nie je jasné, pozri aj `http://sk.wikipedia.org/wiki/Dvojková_číselná_sústava`.
A naspäť k príkladu. Ako sme povedali, $A = 2^n - 5556$. Čo v dvojkovej sústave pre $n = 13$ vyzerá ako

$$A = 10000000000000_{[2]} - 1010110110100_{[2]} = 101001001100_{[2]}.$$

Tu vidíme, že jedenáste miesto je obsadené jednotkou, teda závažie je v tomto prípade na strane hrušky. Ak by bolo n väčšie, tak na prvých trinástich miestach sa nám nič nezmení, teda $2048kg$ vážiace závažie bude stále na strane hrušky. Premysli si to – 2048 je jedenásta mocnina dvojky, preto sa stačí pozrieť na dvanáste (prvá je nula) miesto v čísle A odzadu. Ešte malý príklad pre ilustráciu $n = 20$,

$$A = 100000000000000000000_{[2]} - 1010110110100_{[2]} = 11111110101001001100_{[2]}.$$

Ak sa ti to zdá stále neuveriteľné, začni jednoduchou úvahou. Na ktorej strane musí byť kilové závažie? Stačí sa zamyslieť nad paritou hmotnosti hrušky, jednotky a ostatných závaží. A keď hrušku dovážime, tak ju potom zjeme. Dobrú chuť. ;)

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Existujú prirodzené čísla a, b, c tak, aby obidva korene rovnice*

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

boli pre ľubovoľný výber znamienok celé čísla?

<u>Riešenie:</u> (opravovala Katka P.)
Máme za úlohu rozhodnúť, či čísla s danými vlastnosťami existujú. Riešenie môže mať preto dve podoby. Ak existujú, nájdeme ich (stačí jednu trojicu) a ukážeme, že pre ne platia podmienky zadania. Môže sa dokonca stať, že ich „uhádneme“, ale vtedy tiež treba napísať aspoň logický postup, ako sme k číslam prišli. Ak sme však predvedčení o tom, že neexistujú, treba to aj dokázať.
A teraz už prejdime k riešeniu úlohy. Pre všetky možné kombinácie znamienok dostaneme 8 rôznych rovníc. Všimneme si však, že niektoré sú len násobkami iných, napríklad

$$ax^2 + bx + c = (-1).(-ax^2 - bx - c).$$

Preto nám stačí pracovať so štyrmi rovnicami namiesto ôsmich. Ďalej pre jednoduchosť na začiatku predpokladajme, že rovnice sú v normovanom tvare, t.j. $a = 1$. (K prípadu, keď to tak nie je, sa vrátime neskôr.)
Pokračujme hľadaním koreňov. Zo školy vieme, že všetky sa dajú vyjadriť pomocou diskriminantu v tvare

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aby to bolo celé číslo, musí diskriminant $\sqrt{b^2 - 4ac}$ byť druhá mocnina celého čísla. Všimneme si, že koeficient b je vo výraze umocnený na druhú, preto je úplne jedno, aké má znamienko. Dokonca aj vo vyjadrení koreňa je to jedno, lebo je to stále celé číslo bez ohľadu na znamienko. Ešte treba spomenúť, že ani delenie dvomi nebude problém, lebo pre hocijakú paritu b je výraz $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ párny.
Zaoberajme sa teda výrazom $-4ac$. Pre rôzne znamienka a a c má diskriminant tvar $\sqrt{b^2 + 4ac}$ a pre rovnaké $\sqrt{b^2 - 4ac}$. A vieme, že oba tieto výrazy sú celé čísla. Navyše b^2 je samo osebe druhá mocnina. Skúsime si teda vypísať pár za sebou idúcich druhých mocnín a budeme hľadať také b^2, ktoré má vo vzdialenosti $4ac$ (samozrejme pre rovnaké a, c) na číselnej osi druhé mocniny. Prvé takéto číslo je 25, lebo $25 - 24 = 1$ a $25 + 24 = 49$, čo sú druhé mocniny. Takže máme prvého kandidáta na výsledok: $a = 1, b = 5, c = 6$. Po dosadení do rovníc zistíme, že takáto trojica zadaniu vyhovuje.
Úlohu sme už vyriešili. Môžeme však skúsiť zistiť niečo viac o číslach, ktoré vyhovujú zadaniu. Posúvaním sa po postupnosti druhých mocnín objavíme aj ďalšie riešenia, napríklad $a = 1, b = 10, c = 24$. Skúste porozmýšľať, ako to bude pokračovať ďalej. A ešte sľúbený prípad $a > 1$. Skúsme si naše prvé riešenie prenásobiť celé napríklad dvojkou. Alebo trojkou. Zistíme, že tiež vyhovuje. Netreba rozmýšľať dlho a zistíte, prečo. :)

<u>**Úloha č. 6:**</u> *V meste býva n ľudí (aspoň štyria). Niektorí z nich sa poznajú. Známosti sú vzájomné, to znamená, že ak Jožo pozná Fera, tak aj Fero pozná Joža. Keď si vyberieme ľubovoľných troch rôznych ľudí, tak sa medzi nimi nájde aspoň jeden, ktorý pozná zvyšných dvoch. Nikto v meste však nepozná všetkých ostatných.*

a) *Nájdite všetky hodnoty n, pre ktoré môže takéto mesto existovať.*

b) *Koľko známostí (dvojíc ľudí, čo sa poznajú) môže existovať v takom meste s n ľuďmi?*

c) *Dokážte, že sa všetci ľudia z mesta vedia postaviť do kruhu tak, že každý pozná oboch svojich susedov.*

Riešenie: (opravovali Lucka a Zuzka C.)
Na začiatok sa poriadne pozrime na zadanie a skúsme z neho vyťažiť čo najviac. Vieme, že v meste nie je nikto, kto pozná všetkých. To znamená, že ku každému obyvateľovi mesta existuje aspoň jeden iný obyvateľ toho istého mesta, ktorého nepozná. Môže sa stať, že niekto nepozná dvoch alebo viacerých ľudí v meste? Majme troch ľudí A, B, C a predpokladajme, že A nepozná B ani C. Zo zadania vieme, že ak vyberieme ľubovoľnú trojicu obyvateľov nášho mesta, bude medzi nimi aspoň jeden, ktorý pozná zvyšných dvoch. V trojici A, B, C sa však zrejme poznajú nanajvýš B a C, a teda v tejto trojici neexistuje človek, ktorý by poznal zvyšných dvoch. Z toho vyplýva, že v našom meste každý nepozná najviac jedného človeka. Nuž - aspoň jeden a zároveň najviac jeden, to je práve jeden. Dostávame teda, že každý nepozná práve jedného človeka v meste. Táto úvaha je kľúčová a riešenie je ďalej vlastne veľmi jednoduché.
a) Keďže každý človek nepozná práve jedného človeka a známosti sú vzájomné, tak obyvateľov mesta možno rozdeliť do dvojíc, v ktorých sa ľudia navzájom nepoznajú. To znamená, že počet obyvateľov musí byť párne číslo. Zároveň si všimnime, že jediné, čo musí dané mesto spĺňať, je to, že každý obyvateľ nepozná práve jedného človeka. Teda ak dokážeme obyvateľov jednoznačne rozdeliť do navzájom rôznych dvojíc (v ktorých sa ľudia navzájom nepoznajú, ale poznajú všetkých ostatných), všetky podmienky zo zadania sú splnené. To znamená, že počet obyvateľov mesta môže byť ľubovoľné párne číslo $n \geq 4$.
b) Keďže každý z n ľudí nepozná seba a práve jedného iného človeka, každý pozná práve $n-2$ ľudí. To znamená spolu $n(n-2)/2$ známostí.
c) Aby sme ukázali, že takéto rozostavenie do kruhu vždy existuje, ideálne je nájsť čosi ako "návod", podľa ktorého sa majú obyvatelia mesta rozostaviť, nech už je n akékoľvek. Jedna z možností, ktorá sa priam natíska, je rozostaviť obyvateľov mesta tak, že dvojice ľudí, ktorí sa nepoznajú, stoja oproti sebe. Keďže $n \geq 4$ a každý nepozná práve jedného, v takomto rozostavení bude každý naozaj poznať oboch ľudí vedľa seba.

Úloha č. 7: *Nech n je kladné celé číslo. Nech $a_k \in \{-1, 1\}$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n$ a nech platí*

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 = 0.$$

Dokážte, že n je deliteľné štyrmi.

Riešenie: (opravoval Bus)
Táto úloha bola pomerne jednoduchá. Keďže každé z čísel a_k mohlo byť len plus alebo mínus jedna, musel byť aj každý zo súčinov a_ka_{k+1} (resp. a_na_1) rovný buď plus alebo mínus jednej. No a ak majú tieto súčiny dávať v súčte nulu, musí byť medzi nimi presne rovnako veľa plus a mínus jednotiek, teda oboch $\frac{n}{2}$. Z toho samozrejme hneď vyplýva, že n je párne číslo.
My by sme ale potrebovali dokázať, že n je deliteľné štyrmi, teda že sčitujeme párne veľa plus jednotiek a párne veľa mínus jednotiek. To sa dá celkom ľahko vidieť, keď si predstavíme, že máme čísla $a_1, \ldots, a_n$ usporiadané do kruhu. Násobíme tak vždy dve susedné čísla. Ich súčin je plus jedna vtedy, ak majú rovnaké znamienka a mínus jedna vtedy, ak sú ich znamienka rôzne. Predstavme si teraz, že začneme napríklad pri čísle a_1 a obídeme dokola celý kruh. Budeme pritom sledovať, či sa nachádzame pri kladnom alebo zápornom čísle. Vždy keď sa zmení znamienko, znamená to, že sa v súčte objavila mínus jednotka. Ale keďže začíname aj končíme pri čísle a_1, musí sa nám celkovo znamienko zmeniť párny počet ráz (aby sme začali aj skončili s tým istým znamienkom), preto je počet mínus jednotiek párny, teda $\frac{n}{2}$ je párne číslo, čo sme chceli dokázať.
Ak by sme chceli trochu jednoduchší a viac matematický dôkaz, stačí si všimnúť identitu

$$(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_na_1) = (a_1a_2\cdots a_n)^2.$$

Tento súčin je kladný, pretože na pravej strane máme štvorec nenulového čísla. To však znamená, že z činiteľov $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1$ je párne veľa záporných, čím opäť dostávame, že $\frac{n}{2}$ je párne číslo.

Úloha č. 8: *Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc celých čísel a, b, c, ktoré sú riešením rovnice*

$$a^2 + b^2 = c^2 + 3.$$

Riešenie: (opravoval Mazo)
Keby sme chceli nájsť všetky riešenia zadanej rovnice, mali by sme vedieť zodpovedať otázku, pre ktoré čísla c sa číslo $c^2 + 3$ dá napísať ako súčet dvoch štvorcov. Takáto otázka je dosť ťažká, napríklad je známe, že sa ako súčet dvoch štvorcov dá napísať každé číslo, ktoré má vo svojom rozklade na prvočísla iba 2 a prvočísla tvaru $4k+1$.[1]
Zadanie však od nás chce ďaleko menej, stačí nájsť nekonečne veľa trojíc, ktoré sú riešeniami.

[1] Viac o tomto sa môžete dočítať na stránkach `http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_theorem_on_sums_of_two_squares` a `http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfLagrangesFourSquareTheorem.html`. Ako cvičenie si skúste dokázať, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa ako súčet dvoch štvorcov napísať nedajú. A dokonca je nekonečne veľa aj čísel, ktoré sa nedajú napísať ani ako súčet troch štvorcov.

Skúsime to tak, že sa pozrieme na jednu z neznámych ako na parameter (konštantu) a overíme, pre ktoré hodnoty tohto parametra vieme nájsť aspoň jedno riešenie rovnice. Pre voľbu c ako parametra sa dostaneme do problémov spomínaných v predošlom odstavci, preto radšej skúsime zvoliť za parameter a. (Alebo b, je to jedno.)
Pre dané číslo a máme zistiť, či rovnica $c^2 - b^2 = a^2 - 3$ s neznámymi b a c má riešenie. Čiže pýtame sa, či sa dva štvorce môžu líšiť o danú hodnotu. Napíšeme si postupnosť štvorcov: $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$. Susedné dvojice štvorcov sa líšia o $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$. Vidíme, že dva susedné štvorce sa môžu líšiť o hocijaké nepárne číslo. Presnejšie, o $2k+1$ sa líšia štvorce $(k+1)^2$ a k^2. Čiže ak za a zvolíme párne číslo, bude $a^2 - 3$ nepárne a zadaná rovnica bude mať aspoň jedno riešenie. Trojice (a, b, c), ktoré takto vzniknú, sa líšia hodnotou a, preto sú navzájom rôzne; je ich nekonečne veľa, lebo párnych čísel je nekonečne veľa. Hotovo.

Iné riešenie:
V úlohách z teórie čísel sa zvyknú počítať zvyšky po delení. Často nám to umožní vyriešiť aj úlohy, ktoré tak na prvý pohľad nevyzerajú.
V našom prípade sa pozrieme, aký zvyšok môžu dávať druhé mocniny celých čísel po delení štyrmi. Je ľahké ukázať, že štvorce párnych čísel dávajú po delení štyrmi zvyšok 0, štvorce nepárnych čísel dávajú zvyšok 1. Pravá strana zadanej rovnice môže teda dávať po delení štyrmi zvyšok 3 alebo 0. Pritom prvá možnosť neprichádza do úvahy, lebo ľavá strana dáva zvyšok 0, 1 alebo 2.
Z povedaného vyplýva, že čísla a a b musia byť párne a číslo c nepárne, teda pre vhodné x, y a z platí $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z + 1$. Zadaná rovnica má s novými premennými tvar

$$x^2 + y^2 = z^2 + z + 1.$$

Keďže hodnoty x, y a z si volíme my, sme pánmi na bojisku. Stačí zvoliť $x = z$ a pritom z zvoliť tak, aby $y^2 = z+1$. Dostaneme tak trojicu (y^2-1, y, y^2-1), ktorá bude riešením pre každé celé číslo y. Takýmto trojiciam zodpovedajú trojice $(a, b, c) = (2y^2 - 2, 2y, 2y^2 - 1)$.

Poznámka: Skúmali ste už niekedy riešenia rovnice $a^2 + b^2 = c^2$ v prirodzených číslach? Jej riešenia sa nazývajú pytagorejské trojuholníky. Viete nájsť nekonečne veľa pytagorejských trojuholníkov, z ktorých žiadne dva nie sú podobné?

Úloha č. 9: *Nech n je nezáporné celé číslo. Dokážte, že číslo $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ má aspoň n rôznych prvočíselných deliteľov.*

Riešenie: (opravovala Hanka)
Nikdy nezaškodí vypísať si ten záhadný súčet zo zadania pre niekoľko najmenších n. Nula je nezaujímavá (aspoň nula prirodzených deliteľov má ozaj každé číslo), preto pokračujme ďalšími

$$\begin{aligned}
n = 1 \qquad & 2^{2^1} + 2^{2^0} + 1 &=& \quad 4 + 2 + 1 = 7,\\
n = 2 \qquad & 2^{2^2} + 2^{2^1} + 1 &=& \quad 16 + 4 + 1 = 3 \cdot 7,\\
n = 3 \qquad & 2^{2^3} + 2^{2^2} + 1 &=& \quad 256 + 16 + 1 = 3 \cdot 7 \cdot 13,\\
n = 4 \qquad & 2^{2^4} + 2^{2^3} + 1 &=& \quad \dots = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 241.
\end{aligned}$$

Vidíme, že delitele sa správajú veľmi „pekne“. Skúsime to presnejšie sformulovať a dokázať. Pre každé prirodzené číslo ozančme $A_n = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$. Chceli by sme ukázať, že A_n delí A_{n+1}. Tak poďme na to. Keďže platí

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2 \cdot 2^n} = \left(2^{2^n}\right)^2 \tag{1}$$

môžeme pre jednoduchosť označiť $a = 2^{2^{n-1}}$, teda podľa (1) platí $2^{2^n} = a^2$ a $2^{2^{n+1}} = \mathrm{a}^4$. Podiel čísel A_{n+1} a A_n vieme zapísať pomocou a a zjednodušiť

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1} = a^2 - a + 1. \tag{2}$$

Neostal nám žiadny zvyšok. Ak mi neveríte, urobte skúšku správnosti.[2] Takže sme práve ukázali, že naša hypotéza bola pravdivá. Aby sme sa nepomýlili v úvahách typu „a potom už naozaj bude všetko tak, ako má byť“ sformulujme si dôkaz celého tvrdenia pomocou matematickej indukcie.
Pre niekoľko prvých n sme hneď na začiatku ukázali, že dané tvrdenie platí, čím sme overili prvý krok matematickej indukcie. Predpokladajme teraz, že pre nejaké n má číslo A_n aspoň n rôznych prvočíselných deliteľov. Podľa (2) vieme, že číslo A_{n+1} je deliteľné všetkými týmito prvočíslami a ešte navyše číslom $a^2 - a + 1$. Problémy, ktoré by mohli nastať, sú dva: buď by sa toto číslo rovnalo jednej alebo by bolo deliteľné len niektorými spomedzi vyššie spomínaných n prvočísel. Keďže $a > 4$, prvý možný problém nás netrápi.
Druhý problém sa dá rýchlo vyriešiť tým, že si všimneme „podobnosť“ medzi číslami $A_n = a^2 + a + 1$ a $a^2 - a + 1$. Keď chceme nájsť ich najväčší spoločný deliteľ, použijeme jeden krok Euklidovho algoritmu

[2] Nemali by ste niekomu len tak veriť, najmä keď ide o delenie.

$$\mathrm{NSD}(a^2+a+1, a^2-a+1) = \mathrm{NSD}(\ (a^2+a+1)-(a^2-a+1)\ , a^2-a+1) = \mathrm{NSD}(2a, a^2-a+1).$$

Číslo $2a$ je deliteľné iba prvočíslom 2 a číslo a^2-a+1 je nepárne. Preto ich najväčší spoločný deliteľ je 1, čiže aj A_n a a^2-a+1 sú nesúdeliteľné. Preto číslo

$$A_{n+1} = A_n(a^2-a+1)$$

bude mať ešte aspoň jedného ďalšieho prvočíselného deliteľa okrem tých čo už má A_n a tým pádom aspoň $n+1$ rôznych prvočíselných deliteľov. A to je vše přátelé!

__Úloha č. 10:__ *Eduaud je odborník na funkcie a iné podivné záležitosti. Keďže je vo svojom odbore jediný, tak hľadá potenciálnych spoločníkov. Ako vstupný test musíte vyriešiť nasledovný príklad. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí*

$$f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

<u>Riešenie:</u> (opravovala Stanka)
(Podľa Jozefa Tkadleca.) Vzťah zo zadania má platiť pre všetky dvojice reálnych čísel x, y, takže môžeme smelo dosadzovať. Pre $x=0$ dostaneme

$$f(f(y)) = f^2(0) + y \tag{3}$$

Premennú y môžeme zvoliť tak, že pravá strana (3) bude rovná ľubovoľnému reálnemu číslu. Preto ľavá strana (3) taktiež nadobúda každú reálnu hodnotu, čiže pre každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $z \in \mathbb{R}$, že platí $f(z) = c$. Nech teda $x_0 \in \mathbb{R}$ je také, že $f(x_0) = 0$. Dosaďme v pôvodnej rovnice $x = x_0$ a dostaneme, že

$$f(f(y)) = y \tag{4}$$

platí pre každé $y \in \mathbb{R}$. Dosaďme do pôvodnej rovnice namiesto x hodnotu $f(x)$. Získame

$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = (f(f(x)))^2 + y,$$

čo využitím (4) vieme upraviť na

$$f(xf(x)+f(y)) = x^2 + y. \tag{5}$$

Spojením (5) a pôdovnej rovnice dostaneme

$$x^2 + y = f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2 + y,$$

čiže pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(f(x))^2 = x^2$, alebo inak $|f(x)| = |x|$. Mohlo by sa zdať, že už to máme, ale ešte nás od kompletného riešenia delí kus cesty. Sami ľahko overíte, že funkcie $f(x) = x$, $f(x) = -x$ spĺňajú $|f(x)| = |x|$ a vyhovujú aj pôvodnej rovnici. (Treba overiť!) Možností je však oveľa viac. Mohlo by sa stať, že $f(x)$ bude niekde rovné x a niekde $-x$. Čo by sa dialo vtedy? (Väčšina z vás tieto prípady nerozobrala.) Nech existuje f, ktoré vyhovuje našej rovnici a navyše máme nejaké nenulové rôzne $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ také, že

$$f(a_1) = a_1, \qquad f(a_2) = -a_2.$$

Dosaďme do pôvodnej rovnice $x = a_1$ a $y = a_2$. Dostaneme

$$f(a_1^2 - a_2) = a_1^2 + a_2.$$

Potom musí platiť $a_1^2 - a_2 = a_1^2 + a_2$ alebo $a_1^2 - a_2 = -a_1^2 - a_2$. Z prvej rovnice dostaneme $a_2 = 0$ a z druhej $a_1 = 0$, takže obe možnosti vedú ku sporu. Preto jedinými riešeniami úlohy sú funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = -x$.

<u>Komentár:</u> Viacerí z vás dokazovali, že f je injektívna[3] a že $f(0) = 0$, ale ako vidíte, v našom riešení to nebolo treba. Niektorí z vás sa pohrávali s myšlienkou, že f je lineárna. Takúto informáciu v zadaní nemáme a jej overenie je asi tak zložité ako vyrátať celú túto úlohu. Na domácu úlohu skúste nájsť funkciu, ktorá nie je lineárna a platí $f(f(x)) = x$. A napokon, väčšina z vás zabudla uvažovať o tom, že f môže byť kombináciu x a $-x$. Nabudúce si dávajte väčší pozor.

[3] Nadobúda každú reálnu hodnotu najviac v jednom bode.

Úloha č. 11: *V rovine sú štyri nerozlíšiteľné kúsky plastelíny, ktoré môžeme presúvať len nasledujúcim spôsobom. Kúsok môžeme presunúť do novej pozície, ak sa presne v strede medzi pôvodnou a novou pozíciou nachádza nejaký iný kúsok plastelíny. Na začiatku sú jednotlivé kúsky na bodoch so súradnicami* $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$*. Vieme po konečnom počte presunutí kúskov plastelíny dostať kúsky na body so súradnicami* $(0,0),(1,1),(3,0),(2,-1)$*?*

Riešenie: (opravoval Foto a Bus)
Najjednoduchší spôsob, ktorým by sa dala táto úloha vyriešiť, by bolo naozaj nájsť postupnosť skokov, ktorou by sme sa zo začiatočného stavu dostali do koncového. Ak ste to však dostatočne dlho skúšali, pravdepodobne ste prišli k záveru, že sa to nebude dať, čo je aj naozaj pravda. Ako vieme čosi také dokázať?
Prvý nápad by mohol byť dokazovať, že sa žiadnou z plastelín nevieme dostať na pozíciu $(3,0)$ alebo $(2,-1)$. Bohužiaľ, na obe z týchto pozícií sa dostať vieme. Dokonca sa vieme dostať aj na každú možnú trojicu koncových bodov, len na ten štvrtý bod sa nám to akosi stále nechce podariť. Skúsme sa pozrieť na túto úlohu od konca.[4]
Predstavme si, že sa nám nejako podarilo dostať do koncového stavu. Aký musel byť posledný krok, ktorý sme spravili? Možností je dosť veľa, a keď si ich aj skúsime vypísať, nevidno na prvý pohľad žiaden dôvod, prečo by sme sa do týchto stavov nemohli dostať. Ak sa však budete pozerať dostatočne pozorne, možno si všimnete jednu zaujímavú vec. Plastelíny máme na konci vo vrcholoch rovnobežníka R, ktorý je tvorený počiatkom súradnicovej sústavy $(0,0)$, dvoma bodmi $(1,1),(2,-1)$ (môžeme ich chápať aj ako vektory) a ich súčtom $(3,0)$. Predstavme si teraz množinu všetkých bodov roviny, ktoré sú nejakým celočíselným násobkom alebo celočíselnou kombináciou vektorov $(1,1),(2,-1)$, teda všetky body ktoré sa dajú napísať ako $a\cdot(1,1)+b\cdot(2,-1)$ pre nejaké celé čísla a,b. Do tejto množiny patria aj všetky štyri vrcholy R. Keď si túto množinu bodov nakreslíte na papier, dostanete pravidelnú „mriežku" – takú istú, ako keby ste sa pokúsili rovnobežníkmi zhodnými s rovnobežníkom R pravidelne vyplniť („vykachličkovať") celú rovinu. Mimochodom, v matematike sa takýmto a podobným množinám bodov naozaj hovorí mriežky. Čo je na tejto mriežke zaujímavé? No na konci preskakovania budú všetky kúsky plastelíny ležať na bodoch mriežky. Jeden krok pred koncom museli tiež ležať všetky kúsky plastelíny na bodoch mriežky – dá sa totiž ľahko všimnúť, že ak po preskočení plastelíny A plastelínou B budú obe ležať v bodoch mriežky, musela plastelína B ležať na nejakom bode mriežky aj pred skákaním. (Plastelína A samozrejme tiež, pretože tá sa nehýbala.) Z toho nám teda vychádza, že všetky kúsky plastelíny museli ležať v bodoch mriežky aj na začiatku, čo však nie je pravda, čím sme dostali spor. Preto sa zo začiatočného stavu nedá dostať do koncového (a ani do žiadneho iného, kde by všetky štyri kúsky plastelíny ležali naraz na bodoch našej mriežky).

Úloha č. 12: *Šachovnica rozmerov* 100×100 *je zafarbená 4 farbami tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je presne 25 políčok každej farby. Dokážte, že v nej existujú štyri políčka navzájom rôznych farieb, ktoré tvoria obdĺžnik so stranami rovnobežnými s okrajom šachovnice.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
(Podľa Jozefa Tkadleca) V každom riadku je práve $100\cdot 75/2=50\cdot 75$ dvojíc rôznofarebných políčok. Pre všetky riadky je to spolu $100\cdot 50\cdot 75$ dvojíc. Existuje presne $100\cdot 99/2=50\cdot 99$ dvojíc stĺpcov na ktorých ležia tie rôznofarebné dvojice políčok. Z Dirichletovho princípu dostaneme, že existujú dva stĺpce, ktoré majú aspoň v 76 riadkoch rôzne farby. Odteraz budeme uvažovať iba tie dva stĺpce. Ak takých dvojíc stĺpcov existuje viac, vyberieme ľubovoľnú z nich.
Máme dva stĺpce, ktoré chápeme ako 100 dvojíc (políčka tvoria dvojicu, keď sú v jednom riadku), z toho aspoň 76 je rôznofarebných. Označme si použité farby a,b,c,d. Máme šesť kombinácií ako môžu vyzerať rôznofarebné dvojice: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Samozrejme, ešte musíme uvažovať aj poradie. Ak by sa v našich dvoch stĺpcoch nachádzali riadky farieb;ab aj cd, tak máme požadovaný obdĺžnik. Rovnako to platí pre dvojice ac a bd, ad a bc. Predpokladajme teda, že z dvojíc farebných kombinácií (ab,cd), (ac,bd) a (ad,bc) sa vyskytuje vždy najviac jedna. Teraz môžu nastať dve možnosti.

- Jedna z farieb a,b,c,d neni v žiadnom rôznofarebnom riadku. Potom sú na aspoň 76 rôznofarebných riadkov použité najviac tri farby a teda jedna sa v našich dvoch stĺpcoch vyskytuje aspoň $\lceil 76\cdot 2/3\rceil = 51$-krát, čo nie je možné.
- V rôznofarebných riadkoch sa nachádzajú všetky štyri farby. Rozmyslite si, že potom musí existovať farba, ktorá sa nachádza v každom rôznofarebnom riadku a preto je tam aspoň 76-krát, čo opäť nie je možné.

Tým sme ukázali, že vždy musí existovať obdĺžnik s vrcholmi rôznej farby. Hotovo.

[4] Môžete si rozmyslieť, že nezáleží, ktorý stav je začiatočný a ktorý koncový, lebo vieme robiť aj „spätné" ťahy, teda ak zo stavu A vieme prejsť do stavu B, tak sa z B vieme aj vrátiť naspäť do A.

Úloha č. 13: *Pre $n > 1$ označme $p(n)$ najväčšie prvočíslo, ktoré delí n. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n spĺňajúcich*

$$p(n) < p(n+1) < p(n+2).$$

Riešenie: (opravoval Ondráč)
(Podľa Jozefa Tkadleca) Budeme hľadať n v špeciálnom tvare. Funkciu p vieme pekne vyčíslovať pre prvočísla a ich mocniny. Skúsme $n = q^2 - 1$, kde q je nepárne prvočíslo. Chceli by sme, aby platilo

$$p(q^2 - 1) < p(q^2) < p(q^2 + 1).$$

Prvá nerovnosť platí pre všetky nepárne prvočísla q, to si sami ľahko dokážete. Tá druhá nanešťastie platiť nemusí. Riešiť, či platí pre nekonečne veľa prvočísel q je asi nad naše sily. Nám teda prekáža, keď

$$p(q^2) = q \geq p(q^2 + 1). \tag{6}$$

Skúsme ďalšiu trojicu: $q^4 - 1, q^4, q^4 + 1$. Vieme, že $(q^4 - 1) = (q^2 - 1)(q^2 + 1)$ a keďže platí (6) je zrejmé, že $(q^4 - 1)$ má prvočíselných deliteľov len menších ako q. Táto druhá trojica je riešením nerovností práve vtedy, keď

$$p(q^4) = q < p(q^4 + 1).$$

Opäť sme tam, kde sme boli. Táto nerovnosť asi nemusí vždy platiť. Myslím však, že už je vám jasné, kam toto riešenie vedie. Ak toto nie je riešením, tak sa posunieme o rád vyššie na trojicu, $q^8 - 1$, q^8, $q^8 + 1\ldots$
Formálne, vezmime najmenšie prirodzené k také, že

$$p\left(q^{2^k}\right) > q.$$

Potom platí

$$p\left(q^{2^k} - 1\right) < p\left(q^{2^k}\right) < p\left(q^{2^k} + 1\right).$$

Musí ale také k existovať? Predpokladajme (dôkaz sporom), že také k neexistuje, čiže čísla tvaru $q^{2^k} + 1$ majú v prvočíselných rozkladoch iba prvočísla menšie ako p. Za domácu úlohu si dokážte, že to nemôže nastať. Pomôže vám, ak ukážete, že čísla takého tvaru majú najäčší spoločný deliteľ rovný dvom.

Úloha č. 14: *Dokážte, že pre $x, y, z > 0$, ktoré spĺňajú $x + y + z = 1$, platí*

$$\frac{1}{x^2 + y} + \frac{1}{y^2 + z} + \frac{1}{z^2 + x} > \frac{13}{2}.$$

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Tento príklad sa nepodarilo vyriešiť nikomu, preto tu riešenie neuvedieme. My sice riešenie poznáme, ale túto príležitosť radi využijeme na vyhlásenie takej malej súťaže. Komu sa ako prvému podarí tento príklad správne vyriešiť, má u mňa fľašu kofoly. Svoje riešenia posielajte buď na adresu KMS, alebo kľudne aj mailom na `ondrob@gmail.com`. Body do gamy za tieto riešenia už nedostanete. Ak by sa dlhší čas neobjavovali žiadne riešenia, začnem na fóre písať nejaké nápovedy, ale tiež aj upíjať z kofoly ;)

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Chlebíková Andrea	2.	Brighton UK	4	1		9	9	9	9	9	9		45	135
2.	Kossaczký Pavol	3.	Gamča BA	4	0	9	9	9	9	9				45	130
3.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	7	5			9	9	8	9	9		44	129
4.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	9	5			9	9	9	8	9		44	127
5.	Kossaczký Igor	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	9				36	124
6.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	7	2		8	9	9	8	1			35	121
7.	Le Tuan Anh	2.	Gamča BA	6	1		8	9	9	8	1			35	112
8.	Pavlík Tomáš	4.	GJK PH ČR	4	0			9	9		9			27	107
9.	Csiba Dominik	2.	ŠPMNDG BA	5	1		8	9	8	8	1			34	106
10.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	11	6			9	9	7	0	9		34	103

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
11.	Kováč Ondrej	2.	GCM NR	5	1		9	9	8	8	1			35	98
12.	Kukan Marek	3.	Gamča BA	5	1		8	9	9	8	7			41	97
13.	Eiben Eduard	4.	GPoš KE	9	6			9	9	9	9			36	96
14.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9	5			9	9	9	9			36	95
15.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	9	5			9	9	8	7	3		36	93
15.	Večerík Matej	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	9	9	8	0			35	93
17.	Kozák Andrej	2.	Gamča BA	6	1		9	9	9	8				35	92
18.	Haas Emil	4.	Gamča BA	9	2		9	9	9	9				36	91
18.	Karásková Natália	3.	Gamča BA	9	4			9	9	8	7			33	91
20.	Múthová Denisa	2.	GbTR ZA	5	0	9	8	8	9	3				37	90
20.	Šormanová Mária	2.	ŠPMNDG BA	4	0	2	9		9					20	90
20.	Štyráková Kamila	3.	GPOH DK	8	2		8	9	9					26	90
23.	Szabados Viktor	2.	Gamča BA	6	1		8	9	9					26	89
23.	Töpfer Jakub	4.	GJK PH ČR	5	3			9	9	8	8	3		37	89
25.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	4	1		9	4	9	5				27	88
26.	Hagara Michal	3.	GJH BA	8	5			9	9	8	6			32	87
26.	Midlik Adam	3.	GJAR PO	6	2			9		4		8		21	87
28.	Baranová Jana	3.	GAlej KE	6	1		4	9	9	8				30	86
28.	Sabatovičová Linda	2.	GJH BA	5	0	9	8	8	9					34	86
30.	Sládek Filip	3.	GAB NO	6	5				9	9	8			26	84
31.	Hozza Ján	2.	GJH BA	4	1			9	9		7			25	83
31.	Phuong Mariana	2.	GJH BA	4	0	9	9	9	9					36	83
33.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	6	1		7	9	9	9	4			38	82
34.	Bačo Ladislav	3.	GPoš KE	9	5			9	9		4			22	81
35.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	3	0	9	9	4						22	78
35.	Santer Jakub	2.	GMH Trstená	4	0		8	9	9	5	0			31	78
37.	Gregor Viktor	3.	GŠkol PB	6	1		9	9	9		0			27	76
38.	Bogár Ján	3.	GĽŠ TN	8	2			9	1		1	9		20	74
39.	Masár Juraj	2.	GBil BA	4	0	9	0	9			7	3		28	73
40.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	5	1		9	9						18	72
40.	Peitl Tomáš	3.	ŠPMNDG BA	8	3			9	9	9	0			27	72
42.	Hajdin Michal	4.	GJH BA	7	2		9	9	9	0		3		30	70
43.	Jursa Jakub	4.	GAlej KE	12	5			9	9	8				26	67
44.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	4	1									0	63
45.	Kuklišová Nina	4.	GMet BA	8	1		8	1	9	5	0			23	62
46.	Majdiš Mojmír	3.	GPOH DK	6	1		9	9	9					27	57
47.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3	0		8							8	55
48.	Kubincová Petra	2.	ŠPMNDG BA	5	0	8						3		11	52
49.	Bogárová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	0	2	2	8			9		21	51
50.	Mojžišová Hana	2.	GJH BA	4	0									0	42
51.	Harlenderová Alena	1.	Olomouc ČR	1	0									0	41
52.	Matejovičová Lenka	4.	GJH BA	12	8									0	40
53.	Ziman Michal	3.	GBST LC	7	1									0	36
54.	Herencsár Albert	4.	Gmaď GA	7	3									0	35
54.	Leššová Lívia	2.	GPár NR	4	0									0	35
56.	Dižová Andrea	2.	GKom PE	5	1									0	32
57.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	29
58.	Krejčír Andrej	3.	GVBN PD	4	0									0	28
58.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	3	1									0	28
60.	Jakubík Ján	2.	SPŠE PN	4	0	0	4	2						6	26
61.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	4	0									0	25
62.	Cocuľová Zuzana	3.	GPoš KE	7	1									0	23
63.	Hlavatá Martina	2.	Gamča BA	6	1									0	20
63.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	4	0									0	20
65.	Bohiniková Alžbeta	2.	Gamča BA	6	1									0	18

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
66.	Hajdinová Katarína	2.	GJH BA	5	1									0	17
67.	Fodorová Jana	2.	GJGT BB	4	0									0	16
68.	Dvořák Daniel	4.	Trutnov ČR	4	0									0	14
68.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3	0									0	14
68.	Rigdová Emília	3.	GKuk PP	6	1									0	14
71.	Bartko Matúš	2.	GĽŠ TN	2	0									0	7
72.	Bendová Lenka	4.	GJH BA	7	1									0	6

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Belanová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	2		7	6	7			9		99
2.	Žákovská Uršuľa	1.	Gamča BA	2		9	9	6		7			87
3.	Bohiniková Lucia	1.	Gamča BA	2		9	9			6			85
4.	Tóth Michal	1.	GJH BA	2	9	9	9	5	9				60
5.	Langer Tomáš	1.	GJH BA	2	9	9	8		8				55
6.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3						8			35
6.	Vlachynská Petra	1.	GBil BA	2									35
8.	Rečka Marek	1.	1SG BA	1									17
9.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3									12
10.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3									4

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Horňák Marián	1.	GPár NR	2		9	9	9	9	9	9		132
2.	Kosec Peter	1.	GĽŠ TN	2		9	6	6	9		9		123
3.	Švančara Patrik	1.	GĽŠ TN	2		9	9	7	9		2		107
4.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	3			5	5	9	9	4		105
5.	Koprda Pavol	1.	GAM TT	2		9	3	7	8	6	2		91
6.	Baxová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2		9	3	5	0		2		82
7.	Šimková Mária	3.	GJF Šaľa	3			5	5	8				63
8.	Mariš Andrej	1.	PiarG NR	1		1	4	3	0	3			53
9.	Rajchlová Barbora	3.	GJab MY	3				5	9				38
10.	Sedlačková Lenka	2.	GPdC PN	2									36
11.	Pappová Danica	1.	GĽŠ TN	1									29
12.	Pločeková Andrea	2.	GPdC PN	2			6			1			16
13.	Bartko Matúš	2.	GĽŠ TN	2									7

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Galovičová Soňa	1.	GVO ZA	3			9	8	9	9	9		122
2.	Halajová Barbora	1.	GVO ZA	3			9	8	9	9	8		112
3.	Jasenčáková Katarína	1.	GVO ZA	3			9	8	9	9	2		109
4.	Vlček Andrej	1.	ESŠ EG JT LM	2		5	9	7		8	2		106
5.	Santrová Adriana	1.	GMH Trstená	2		7	6	4		9	2		74
6.	Anderle Michal	2.	GBST LC	3			9		9				50
7.	Búlik Martin	2.	GJGT BB	2				7		5			34
8.	Rybár Andrej	2.	GJGT BB	3									31

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
9.	Makuch Matej	2.	GJGT BB	3			2	7		7			30
10.	Jacková Dominika	2.	GJGT BB	2									26
11.	Kajánek František	1.	GJMH CA	2									21
12.	Lonský Rafael	1.	GPOH DK	1									16
13.	Kubišová Barbora	1.	GJGT BB	2									12
13.	Lehotský-Neznámy Juraj	1.	EvG BB	1				7		5			12
15.	Plavák Dušan	2.	GMH Trstená	2									8
16.	Kaštan Marek	2.	GJGT BB	3				4					4

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Klembarová Barbora	1.	GKuk PP	2		9	8	7	2	9	9		114
2.	Marečáková Barbora	1.	GKuk PP	2		7	9		0	7	6		104
3.	Daniláková Monika	1.	GJAR PO	2		7	8	9			2		100
3.	Dupej Peter	1.	GJAR PO	2			9			8	7		100
5.	Kmeťová Katarína	1.	GKuk PP	2		9	9		0	6	3		83
6.	Faguľová Kristína	1.	GPoš KE	3			7	6	4	5			73
7.	Lami Jozef	1.	GPoš KE	2									42

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kopf Michal	1.	Opava ČR	2		7	9	7	9		9		113
1.	Žídek Augustin	1.	Frýdlant ČR	2		9	6	6	9	8	8		113
3.	Harlenderová Alena	1.	Olomouc ČR	1									68
4.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	3									17

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	Meno	Roč.	Škola	10	11	12	13	14	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9						67
2.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	1						71
3.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	8	9	0	1	0		162
4.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	0	9					60
5.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	7	3					86
6.	Kováč Jakub	4.	GCM NR							57
7.	Sládek Filip	3.	GAB NO	8						106
8.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	9	9	7	7	0		172