Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2008/2009.

Úloha č. 1: *Koľkými spôsobmi si Kaja, Kika a Katka môžu rozdeliť* 33 *rovnakých čokolád tak, aby niektoré dve z nich mali spolu dvakrát toľko ako tretia?*

Riešenie: (opravoval Janko)
Pre jednoduchosť skúsme považovať Kaju za tú, ktorá je v zadaní označená ako „tretia“. Označme počet čokolád, ktoré dostane Kaja písmenkom c. Zo zadania vieme, že $c + 2c = 33$, z čoho vyplýva, že Kaja bude mať jedenásť čokolád. Zvyšných 22 čokolád si Kika a Katka môžu rozdeliť ľubovoľne, majú dokopy 23 možností. (Rozmyslite si prečo – môžete si to aj vypísať. :))
Zatiaľ sme uvažovali o Kaji ako o „tretej“, my však zo zadania nevieme, ktoré z dievčat bude tretie. Preto musíme zarátať všetky prípady, a tak dostávame $3 \times 23 = 69$ možností. Musíme si však ešte uvedomiť, že sme jednu z možností započítali trikrát. (Ktorú?) To znamená, že ju musíme dvakrát odrátať, aby sme dostali správny výsledok. Preto je celkový počet možností 67.

Úloha č. 2: *Ondrej mal armádu zloženú zo* 100 *hračkárskych katapultov. Postavil ich do radu a spustil paľbu. Najskôr vystrelil každý druhý katapult, potom každý tretí a tak ďalej až po každý stý. (Áno, vtedy vystrelil len ten posledný.) Ktorý katapult vystrelil najviac krát? Koľkokrát to bolo?*

Riešenie: (opravovala Katka P.)
Mnohí z vás si začali kresliť alebo vypisovať 100 čísel a pomýlili sa. (Poklona výnimkám.) Preto si ukážeme, že to šlo riešiť aj krajšie. :) Najskôr, a na to prišli všetci, si musíme uvedomiť, že hľadáme číslo od 2 do 100, ktoré má najviac deliteľov. Ako na to? Vylučovacou metódou. Ako prvú vec je dôležité si uvedomiť, že hľadané číslo musí byť nutne väčšie ako 50. Prečo? Lebo ku každému číslu menšiemu ako 50 existuje číslo (jeho dvojnásobok), ktoré je ešte stále menšie ako 100 a má viac deliteľov ako pôvodné číslo. Druhá istá vec je, že číslo musí byť párne a deliteľné tromi, aby strieľalo často. Ak je niečo deliteľné dvomi aj troma, je to deliteľné šiestimi. Tu sme už dospeli do stavu, keď vyhovujúcich čísel je tak málo (už len osem), že môžeme vyskúšať vypísať delitele všetkých. Keď zistíme, že najväčší možný počet deliteľov je 12 a majú ho čísla 60, 72, 84, 90 a 96, môžeme považovať úlohu za doriešenú.
Ešte pár pekných postrehov na záver. (Lebo správne riešenia boli rôzne a niečo z nich sa vám môže v budúcnosti zísť.)

- Počet deliteľov čísla získame, keď si ho rozložíme na prvočísla (napríklad $72 = 2^3 \cdot 3^2$) a ku exponentom pričítame 1 a navzájom ich vynásobíme: $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$.
- Niektorí pekne ohraničili najväčšie možné exponenty prvočísel v rozkladoch 2^6, 3^5, 5^3 a 7^2, lebo väčšie (napríklad 2^7) už presiahnu 100.

Úloha č. 3: *Čarovné číslo sa skladá z troch rôznych cifier. Z týchto cifier ďalej poskladáme všetky možné trojciferné čísla, pričom každú z cifier použijeme v každom čísle práve raz. Súčet týchto novozložených čísel je 2003. Nájdite všetky čarovné čísla.*

Riešenie: (opravovala Kaja a Zuska)
Najprv sa pozrime, čo nám vlastne hovorí zadanie. Máme čarovné číslo $\overline{abc}$. Toto čarovné číslo obsahuje cifry a, b a c. Vytvoríme z neho všetky možné trojciferné čísla a tie novovzniknuté (čiže všetky *okrem* nášho čarovného čísla) zarátame do súčtu. Tento súčet má byť 2003.
Aké cifry sa môžu na mieste a, b a c nachádzať? Sú to všetky od 0 po 9. Uvedomte si, že ak by bolo čarovné číslo 350, novovzniknuté čísla sú: 305, 503, 530, 053, 035. Podľa zadania z nich potrebujeme len všetky možné trojciferné čísla, preto súčet bude vyzerať takto: $305 + 503 + 530$. Skutočnosť, že vzniknú aj iné ako trojciferné čísla, nám nevadí. Teraz, keď rozumieme zadaniu, sa môžeme pustiť do hľadania čarovných čísel.
Vyriešme najprv len prípad, v ktorom sa žiadna z cifier nerovná nule. Na novovzniknuté čísla sa pozeráme ako na čísla $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cba}$, $\overline{cab}$. Ľahko zostavíme rovnicu[1]

$$221c + 212b + 122a = 2003.$$

Vidíme, že c musí byť nepárna cifra. (Čísla $212b$, $122a$ sú párne a súčet má byť nepárny.) Na mieste c sa preto môžu vyskytnúť cifry 1, 3, 5, 7 a 9.

[1] Pretože číslo $\overline{abc}$ vieme zapísať ako $100a + 10b + c$.

Hodilo by sa nám ešte niečo zistiť, nech sa nemusíme toľko narobiť vypisovaním možností. (Ktorému sa ako správne leniví matematici chceme vyhnúť zubami nechtami.) Skúsme si našu rovnicu upraviť tak, aby nám povedala viac. Na obe jej strany pripočítajme pôvodné čarovné číslo $\overline{abc}$. Dostaneme rovnicu

$$222(a+b+c) = 2003 + \overline{abc}.$$

Pomocou pravej strany si teraz vieme pekne ohraničiť súčet $a+b+c$. Výraz $2003+\overline{abc}$ je určite väčší ako $2003+123 = 2126$ a zároveň je určite menší ako $2003+987 = 2990$. To však musí rovnako platiť aj pre ľavú stranu, takže

$$2126 \leq 222(a+b+c) \leq 2990,$$

a keďže nás zaujímajú len celé čísla, dostávame

$$10 \leq a+b+c \leq 13.$$

Ostali nám už len štyri možnosti ($a+b+c$ rovný 10, 11, 12 alebo 13), ktoré teraz postupne vyskúšame.
Ak $a+b+c = 10$, potom dosadením do rovnice dostávame $222 \cdot 10 = 2003 + \overline{abc}$, čiže $\overline{abc} = 217$. Súčet cifier tohto čísla je naozaj 10, čo znamená, že sme našli prvé čarovné číslo. Kto ešte stále neverí, nech si spraví skúšku.
Ak $a+b+c = 11$, potom dostávame $\overline{abc} = 439$. V tomto prípade sa však $a+b+c = 16$, čiže toto číslo nemôže byť čarovné.
Ak $a+b+c = 12$ alebo 13, potom dostávame $\overline{abc}$ rovné 661 alebo 883, čo nemôžu byť čarovné čísla, keďže nemajú tri rôzne cifry.
Ostáva nám ešte vyriešiť prípad, keď je nejaká z cifier rovná nule. Nemôže to byť a, keďže podľa zadania je číslo $\overline{abc}$ trojciferné. Ak je nejaká z cifier nula, je to b alebo c. Zo súčtu trojciferných čísel vypadnú $\overline{bac}$ a $\overline{bca}$ alebo $\overline{cab}$ a $\overline{cba}$. Ďalej zostavíme rovnicu ako v prvom prípade a podobnou cestou ju vyriešime. Ale to už iste zvládnete sami, veď hlavy na to máte, však?

<u>Úloha č. 4:</u> *Označme $\sigma(n)$ súčet všetkých deliteľov čísla n (napr. $\sigma(10) = 1+2+5+10 = 18$). Nazvime číslo n nákazlivé, ak $\sigma(n) > 2n$. Majme nejaké nákazlivé číslo a a vezmime si ľubovoľné prirodzené číslo b. Ukážte, že číslo $a \cdot b$ je tiež nákazlivé.*
Poznámka: Znak σ je malé grécke písmeno sigma. Týmto písmenom sa tradične označuje okrem iného aj súčet deliteľov daného čísla. Mimochodom, veľká sigma sa píše Σ.

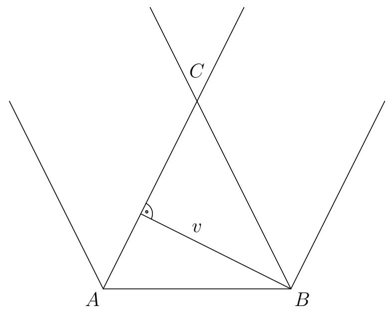
<u>Riešenie:</u> (opravovali Kubo K., Ondro M.)
Milí riešitelia. Toto bol krásny príklad na to aby sme si precvičili narábanie so všeobecnými číslami a deliteľmi, aby sme sa odosobnili od obmedzení konkrétnych príkladov a tak dosiahli neoblomnú istotu o našej pravde. :)
Samozrejme pekne zapísanému riešeniu muselo predchádzať niekoľko pekných postrehov. Dôležitý je práve ten, že prenásobením nášho nákazlivého čísla a kladným prirodzeným číslom b, nestratíme predchádzajúcich deliteľov a navyše nám pribudnú „nové“, ktoré vzniknú ako súčin ľubovoľného starého deliteľa a čísla b. Samozrejme nie všetky takto vzniknuté delitele sú „nové“. Ak bolo a deliteľné číslom b tak veľa z novovzniknutých deliteľov sa už vyskytovalo medzi deliteľmi čísla a (vyskúšaj si napr. pre $a = 12, b = 3$). Poďme sa teraz bližšie pozrieť na čísla a a $a \cdot b$. Číslo a má n deliteľov($n \geq 1$). Označíme ich $d_1, d_2, \ldots, d_n$ kde d_1 je 1 a d_n je a. Vieme, že platí

$$\begin{aligned} \sigma(a) = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n &> 2a, \\ b \cdot d_1 + b \cdot d_2 + b \cdot d_3 + \cdots + b \cdot d_n &> 2a \cdot b, \end{aligned}$$

a zároveň platí $\sigma(a.b) > b \cdot d_1 + b \cdot d_2 + b \cdot d_3 + \cdots + b \cdot d_n$. (Vieš prečo?)
Všimnite si, že vôbec netreba ošetrovať prípady, keď a je súdeliteľné s b, lebo nám na splnenie nerovnosti stačili pôvodné delitele čísla prenásobené b-čkom. (Úprava bola korektná, lebo vieme, že $b > 0$.) Už sa len musíme uistiť, že všetky čísla $d_i \cdot b$ sú rôzne delitele $a \cdot b$. To, že sú delitele necháme na vás, a to že sú rôzne vyplýva z jednoduchej implikácie $d_i \neq d_j \Rightarrow b \cdot d_i \neq b \cdot d_j$.
Na záver krátke pojednanie o novom značení. To že číslo a je deliteľné číslom b označíme $b \mid a$ a čítame: „bé delí á“.

Úloha č. 5: *Máme nekonečne dlhý pásik papiera šírky 2 cm. Prehneme ho tak, že prekrývajúce sa vrstvy papiera vytvoria trojuholník. Aký najmenší obsah môže takýto trojuholník mať?*

Riešenie: (opravovala Katka a Hanka)



Každý si najprv vezmime jeden nekonečný pásik šírky 2 cm a poďme na to. :) Hľadáme prehnutie pásika také, aby vzniknutý trojuholník ABC mal čo najmenší obsah. Od čoho závisí obsah trojuholníka? No predsa od niektorej jeho strany a výšky na túto stranu. Strany sa pri rôznych prehnutiach môžu všetky zmenšovať a zväčšovať, tak sa skúsme zamerať na výšky. Nech ten pásik zložíme akokoľvek, môžeme si všimnúť zaujímavú vec. Veľkosť výšky na stranu AC sa nemení! Je to preto, že výška na stranu AC je vzdialenosť bodu B od priamky AC, čo bude v našom prípade vždy šírka pásika. (Premyslite si prečo.) Keďže výška na stranu AC je konštantná, obsah trojuholníka ABC závisí len od veľkosti strany AC. Aká najmenšia môže byť? Všimnime si, že body A a C ležia na rôznych stranách pásika. Najkratšia možná vzdialenosť medzi nimi je preto šírka pásika. Teraz už len nájsť prehnutie, ktoré spĺňa túto vlastnosť a vyhrali sme. :) Aby bola vzdialenosť medzi A a C rovná šírke pásika, AC musí byť kolmé na strany pásika. Takže keď pásik prehneme tak, aby uhol ACB mal 90°, dostaneme trojuholník s najmenším obsahom, ktorý je $2cm^2$.

Úloha č. 6: *Pán a pani Smithovci boli na večierku, kde sa stretli s troma ďalšími manželskými pármi. Nastalo vzájomné podávanie rúk. Nikto nepodal ruku svojmu manželskému partnerovi, nikto nepodal ruku dvakrát tej istej osobe a samozrejme, nikto nepodal ruku sám sebe. Keď sa podávanie rúk skončilo, pán Smith sa každého vrátane svojej manželky opýtal, koľkokrát podal ruku. Na jeho prekvapenie každý dal inú odpoveď. Koľkokrát podala ruku pani Smithová?*

Riešenie: (opravovali Jefo a Katka K.)

Na večierku boli štyri páry, teda osem ľudí. Každý si mohol podať ruku maximálne šesťkrát (nik si nemohol podať ruku sám so sebou ani so svojim partnerom) a najmenej ani raz. Keďže pán Smith dostal na svoju otázku sedem rôznych odpovedí, musel počuť každé z čísiel 0, 1, 2, 3, 4, 5 a 6 práve raz. Ľudí budeme postupne označovať písmenami A, B, C, D, E, F, G a H. Skúsme sa nezamýšľať nad tým, ktorí z nich sú manželia Smithovci. Vieme, že niekto si podal ruku so šiestimi osobami. Označme ho písmenom A. Nech B je tá jediná osoba, ktorá si s A ruku nepodala. S osobou B si už nikto nemôže podať ruku, inak by neostal nik, kto by mohol povedať pánovi Smithovi nulu. Keďže A si podal ruku so všetkými okrem B, musia byť A a B partneri. Nech C je tá osoba, ktorá si podala ruku práve s piatimi osobami. Nemôže si podať ruku s B a okrem A si podá ruku ešte so štyrmi osobami. Ostane práve jeden človek D, ktorý si podal ruku len raz s A, ale nie s C. S osobou D si už nikto nemôže potriasť rukou, lebo by neostal nikto, kto by povedal pánu Smithovi, že si podal ruku len raz. Keďže C si nepodal ruku len s B a D, tak D musí byť partner C. (Osoby C a B nemôžu byť partneri, lebo B je partner A.) Pokračujeme ďalej. Nech E si podá ruku práve so štyrmi osobami. Nepodá si ruku s B a D a okrem A a C si potrasie rukou ešte s dvoma osobami. Nech F je ten, čo si s E ruku nepodal. Keďže E si nepodal ruku len s B, D a F, tak E a F musia byť partneri. (Ako vieme polygamiu sme zakázali.) Osoba F si podala ruku dvakrát (s osobami A a C) a viac už nemôže, lebo pán Smith by nedostal odpoveď dva. Ostali nám ešte G a H, ktorí nemajú inú možnosť ako byť pár. Ani jeden z dvojice G a H si už nemôže potriasť rukou s nikým z A, B, C, D, E a F, teda obaja majú tri podania ruky s A, C a E. Pán Smith musí byť jeden z dvojice G a H, lebo ak by to bol niekto iný, musel by dostať dve rovnaké odpovede od partnerov G a H. To sa však nemôže stať, pretože zo zadania vieme, že každú odpoveď dostane pán Smith len raz. Ak je pán Smith hociktorý z G a H, tak pani Smithová je druhá z tejto dvojice a musela si podať ruku práve trikrát.

Úloha č. 7: *Obdĺžnik rozmerov $1\times k$, kde k je kladné celé číslo, budeme nazývať zaujímavý. Určte všetky prirodzené n, pre ktoré je možné rozrezať obdĺžnik $2008 \times n$ na niekoľko zaujímavých obdĺžnikov, pričom žiadne dva z nich nie sú rovnaké. Obdĺžniky, ktoré majú rovnaké rozmery, považujeme za rovnaké aj vtedy, keď je jeden z nich orientovaný vodorovne a druhý zvislo.*
Poznámka: Štvorec považujte za špeciálny prípad obdĺžnika.

Riešenie: (opravovala Ajka a Bebe)

Nájsť všetky n, pre ktoré platí zadanie, dá poriadne zabrať. Tak skúsme začať tým, že nájdeme aspoň nejaké. Pustime sa do toho od najmenších, teda od $n = 1$. Obdĺžnik 1×2008 je už sám o sebe zaujímavý, takže $n = 1$ vyhovuje. Aj obdĺžnik 2×2008 vieme vhodne rozdeliť. Napríklad tak, že ho rozdelíme na dva zaujímavé s rozmermi 1×2008 a jeden z nich ešte rozdelíme na dva ďalšie (napr. 1×1 a 1×2007). Takýmto spôsobom vieme vymyslieť rozrezanie aj pre niekoľko ďalších n. Vždy rozrežeme obdĺžnik na n obdĺžnikov s rozmermi 1×2008. Vzápätí každý z nich (okrem prvého) rozdelíme na dva zaujímavé obdĺžniky (budeme ich označovať ZO) tak, aby boli každé dva navzájom rôzne.

Po aké veľké n sa takto vieme dostať? To závisí od toho, na koľko rôznych dvojíc ZO vieme rozdeliť obdĺžnik 1×2008. Delíme ho vždy na nejaké $1 \times k$ a $1 \times (2008 - k)$, kde $k = 1, 2 \dots$. Tie prvé si môžeme nazvať malé ZO a tie druhé veľké ZO. (Malé sú $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots$ a veľké $1 \times 2007, 1 \times 2006, \dots$) Jediná podmienka, ktorú musia spĺňať je, aby k bolo menšie ako $2008 - k$. V takom prípade je každý malý ZO menší ako ľubovoľný veľký, čiže žiadne dva z nich nie sú rovnaké. (Rozmyslite si prečo.) Našli sme podmienku $k < 2008 - k$, ktorej úpravou dostávame $k < 1004$. Takže vieme dostať 1003 rôznych dvojíc ZO. Keď k nim pridáme ZO 1×2008, tak z nich dokážeme vytvoriť obdĺžnik 1004×2008. Tým pádom vieme rozrezať $n \times 2008$ pre ľubovoľné n od 1 do 1004 a to tak, že ich rozrežeme na vhodný počet dvojíc $1 \times k$ a $1 \times (2008 - k)$ a jeden ZO 1×2008.

Pozrime sa na najväčší obdĺžnik ktorý zatiaľ vieme rozrezať. Je to 1004×2008 a rozrezali sme ho na ZO 1×1 až 1×1003 a 1×1005 až 1×2008. Jediný ZO, ktorý sme ešte nepoužili, je 1×1004. Keby sme teraz chceli n zväčšiť, pribudlo by nám minimálne 2008 štvorčekov, ktoré musíme pokryť ZO. Ale my máme navyše len posledný nepoužitý ZO 1×1004. Intuícia nám vraví, že n ďalej nevieme zväčšovať.

Zamyslime sa prečo to tak je. Na to, aby sme obdĺžnik vedeli rozrezať, potrebujeme určité množstvo rôznych ZO. Keby ich bolo málo, nestačili by na pokrytie celého obdĺžnika a museli by sa niektoré opakovať. Preto potrebujeme, aby súčet obsahov ZO, ktoré sa zmestia do nášho obdĺžnika, bol väčší, alebo aspoň rovný ako obsah nášho obdĺžnika $n \times 2008$.

Súčet obsahov ZO dostaneme tak, že sčítame všetky obsahy od najmenšieho $1 \times 1 = 1$ až po najväčší. Ktorý to ale je? Máme dve možnosti. Buď je to obdĺžnik 1×2008, ak je $n \leq 2008$, alebo $1 \times n$, ak platí $n > 2008$. (Premyslite si prečo.) Vezmime si najskôr obdĺžnik $n \times 2008$ v ktorom je $n \leq 2008$. Najväčší ZO, ktorý sa do neho zmestí, je 1×2008, a samozrejme aj všetky od neho menšie. Súčet ich obsahov bude[2]

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 2008 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2008 = \frac{2008 \cdot (2008 + 1)}{2}$$

a ten má byť väčší alebo rovný obsahu obdĺžnika $n \times 2008$. Tým získame nerovnicu

$$\frac{2008 \cdot (2008 + 1)}{2} \geq n \cdot 2008,$$

z ktorej po jednoduchej úprave dostávame $1004,5 \geq n$. Keďže n má byť celé, tak $1005 \geq n$. Práve sme ukázali, že pre $n = 1005, 1006, \cdots, 2008$ neexistuje hľadané rozrezanie, lebo nemáme dosť ZO. Pre $n = 1, 2, \ldots, 1004$ sme už vhodné rozrezania našli vyššie.

Pri obdĺžniku $n \times 2008$, kde $n > 2008$ to bude veľmi podobné. Najväčší ZO, ktorý sa do neho zmestí, je $1 \times n$, a zmestia sa doň aj všetky menšie. Z rovnakých dôvodov ako pred chvíľou chceme, aby bol súčet ich obsahov aspoň taký ako obsah obdĺžnika $n \times 2008$, teda

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \geq n \cdot 2008.$$

Po vykrátení n dostaneme $n + 1 \geq 2008 \cdot 2$, čo dáva podmienku $n \geq 4015$. Práve sme ukázali, že obdĺžniky s $n = 2009, 2010, \ldots, 4014$ sa nedajú vhodne rozrezať, pretože na ne nemáme dostatočné množstvo ZO.

Ostáva ukázať, že obdĺžniky s $n \geq 4015$ sa naozaj dajú rozrezať. (Zatiaľ sme len ukázali, že by sa mohli dať.) Budeme to robiť podobne ako pri obdĺžnikoch s $n \leq 1004$. Obdĺžnik si rozdelíme na 2008 ZO rozmerov $1 \times n$. Prvý z nich necháme celý, druhý rozdelíme na 1×1 a $1 \times (n - 1)$, tretí na 1×2 a $1 \times (n - 2)$ a tak ďalej až po 2008-my, ktorý rozdelíme na 1×2007 a $1 \times (n - 2007)$. Opäť treba overiť či je najväčší malý ZO menší ako najmenší veľký ZO. (Či $2007 < n - 2007$.) Úpravou dostaneme $4014 < n$, čo spĺňa našu druhú podmienku. Takže naozaj vieme každý obdĺžnik $n \times 2008$, kde $n \geq 4015$, rozrezať na rôzne ZO.

Riešením úlohy sú všetky n, ktoré spĺňajú $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 1004\} \cup \{4015, 4016, \ldots\}$.

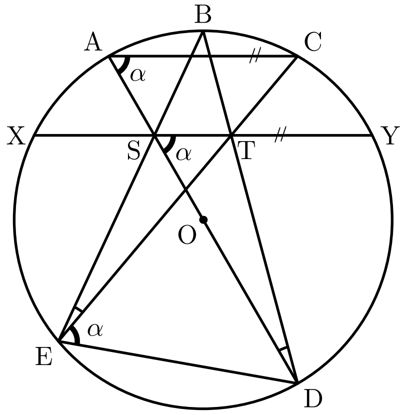
<u>**Úloha č. 8:**</u> *Na kružnici k so stredom O ležia rôzne body A, B, C, D, E v tomto poradí tak, že $|AB| = |BC|$. Označme S priesečník úsečiek BE a AD a T priesečník úsečiek BD a CE. Nech priamka ST pretína kružnicu k v bodoch X a Y. Dokážte, že $|BX| = |BY|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Myrec a Mišáč)

Prvé pekné pozorovanie po nakreslení zadania je, že priamky AC a XY budú asi rovnobežné. Mnohým je možno aj jasné, že ak by sa nám podarilo dokázať túto rovnobežnosť, tak z toho hneď dostaneme $|BX| = |BY|$. To skúsime dokázať ako prvé. Potom urobíme tú zložitejšiu časť, ukážeme, že XY a AC naozaj sú rovnobežné.

Trojuholník ABC je rovnoramenný, preto os strany AC prechádza bodom B. Táto os je zároveň aj osou tetivy AC a os každej tetivy prechádza stredom kružnice O. Ak je XY rovnobežná s AC, tak os XY musí byť rovnobežná s osou AC. (Keďže os je kolmá na tetivu.) Navyše má os XY s osou AC spoločný bod O, preto sú tieto osi zhodné. Priamka BO je potom osou strany XY v trojuholníku BXY, takže $|BX| = |BY|$.

[2] Na sčítanie prvých a prirodzených čísel slúži vzorec $a(a + 1)/2$, môžete sa ho pokúsiť dokázať. Pre lepšiu predstavu si to môžete vyskúšať na konkrétnych súčtoch, napr. od 1 do 10.



Zostáva nám dokázať spomínanú rovnobežnosť. Dôkaz rovnobežnosti dvoch priamok sa zvyčajne robí pomocou súhlasných uhlov. Vyberieme si nejakú priamku a dokážeme, že s priamkami AC a XY zviera rovnaký uhol. Skúsime napríklad priamku AD.
V príklade máme kružnicu, takže nám môžu dosť pomôcť obvodové uhly. Zo zadania vieme, že $|AB| = |BC|$. Veľkosť obvodového uhla k tetivám rovnakej dĺžky je nemenná, preto sú uhly ADB a BEC zhodné.[3] Nasleduje užitočné pozorovanie. Úsečku ST vidno z bodov E, D pod rovnakým uhlom, štvoruholník $STDE$ je z totho dôvodu tetivový (Dá sa mu opísať kružnica.) Veľkosť uhla CAD je rovnaká ako veľkosť uhla CED, pretože sú to obvodové uhly k tetive CD pôvodnej kružnice. Platí $|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle TED| = |\sphericalangle TSD|$, posledná rovnosť vďaka tomu, že štvoruholník $STDE$ je tetivový. To znamená, že $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle TSD|$ a zo súhlasnosti týchto uhlov dostávame rovnobežnosť AC a ST. Preto aj AC a XY sú rovnobežné, keďže priamky ST a XY sú totožné. Týmto je celý dôkaz hotový.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Predstavme si kovovú kružnicu, na ktorej sú rovnomerne rozložené čísla v poradí $1, 2, \ldots, N$. Na nej je položená otáčavá drevená kružnica, na ktorej sú opäť rovnomerne rozložené celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_N$ v tomto poradí. Súčet týchto N čísel je 1. Drevenú kružnicu vieme otočiť do N rôznych polôh tak, aby čísla na nej boli umiestnené práve nad číslami kovovej kružnice. Pre danú polohu drevenej kružnice urobíme súčet N súčinov takých, že vynásobíme číslo na drevenej kružnici s číslom na kovovej kružnici, ktoré sa nachádza pod ním. Keďže rôznych polôh drevenej kružnice je N, tak aj týchto súčtov dostaneme N. Ukážte, že všetky tieto súčty sú rôzne.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Stanka a Lenka)
Zoberme si na začiatku polohu, keď a_1 je nad 1, a_2 nad 2 až a_N nad N. Budeme ju porovnávať s polohou, v ktorej a_1 je nad k, a_2 je nad $k+1$, atď. Aby to malo význam, predpokladajme o prirodzenom čísle k, že $1 < k \leq N$. Označme si ich súčty súčinov postupne S_1, S_k, čiže

$$S_1 = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + (N-1) \cdot a_{N-1} + N \cdot a_N,$$
$$S_k = k \cdot a_1 + (k+1) \cdot a_2 + \cdots + N \cdot a_{N-k+1} + 1 \cdot a_{N-k+2} + \cdots + (k-2) \cdot a_{N-1} + (k-1) \cdot a_N.$$

Skúsime dokázať, že sa tieto dva výrazy nemôžu rovnať. Skúmajme rozdiel $S_1 - S_k$. Po úprave (vyrátaní koeficientov pri členoch a_i) dostaneme

$$S_1 - S_k = (1-k) \cdot a_1 + (1-k) \cdot a_2 + \cdots + (1-k) \cdot a_{N-k+1} + (N-k+1) \cdot a_N - m + 2 + \cdots + (N-k+1) \cdot a_N.$$

Budeme postupovať sporom. Nech platí $S_1 = S_k$. Potom

$$(1-k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-k+1}) + (N-k+1)(a_{N-k+2} + \cdots + a_N) = 0.$$

Na zjednodušenie pričítame ku obom stranám rovnice $(k-1) \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_N)$ a využijeme ešte nepoužitú rovnosť $a_1 + a_2 + \cdots + a_N = 1$, čím dostaneme

$$\begin{aligned} N(a_{N-k+2} + \cdots + a_N) &= (k-1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_N), \\ N \cdot (a_{N-k+2} + \cdots + a_N) &= (k-1). \end{aligned}$$

Z posledného výrazu vieme, že $k-1$ je deliteľné N, čo nie je možné, keďže $1 < k \leq N \Rightarrow 1 \leq k-1 < N$. Dospeli sme k sporu, a preto sa S_1 a S_k nemôžu rovnať.
Podarilo sa nám dokázať, že ak zo začiatočnej polohy otočíme drevený kruh do ľubovoľnej inej, tak zodpovedajúce súčty súčinov sa nemôžu rovnať. Začiatočná poloha však nie je ničím výnimočná, preto to môže byť ktorákoľvek poloha, čím sme dokázali, že žiadne dva možné súčty súčinov nemôžu byť rovnaké.
pagebreak

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Dané sú nenulové celé čísla a, b, c také, že aj*

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

sú celé čísla. Dokážte, že $|a| = |b| = |c|$.

[3] Musíme si dávať pozor, na ktorej časti kružnice ležia spomínané uhly. Tetiva delí kružnicu na dva kružnicové oblúky, pre ktoré prislúchajúce obvodové uhly majú spolu 180°.

Riešenie: (opravovala Katka Š.)
Tento príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi. Ukážeme si dva z nich. Prvý sa spolieha na systematické rozoberanie prípadov a hranie sa s deliteľnosťou a súdeliteľnosťou. Naopak druhý je založený na elegantnom triku s polynómami.
Prvé riešenie: Majme čísla a, b, c a označme d ich najväčší spoločný deliteľ čísel. Hodnota výrazov u a v sa nezmení, ak do nich namiesto a, b, c dosadíme a/d, b/d, c/d. Táto nová trojica má najmenší spoločný deliteľ rovný 1 a ak pre ňu dokážeme $|a/d| = |b/d| = |c/d|$, tak bude platiť aj $|a| = |b| = |c|$. Takže sa vráťme k pôvodnému značeniu a, b, c a predpokladajme, že $NSD(a, b, c) = 1$. (NSD znamená najväčší spoločný deliteľ.) Výrazy u a v si môžeme upraviť na zlomkový tvar

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc},$$
$$v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{abc}\cdot$$

Keďže u a v sú celé čísla, čitateľ musí deliť menovateľ, t.j. abc delí $a^2b + b^2c + c^2a$. Preto aj a delí $a^2b + b^2c + c^2a$, a keďže $a \mid a^2b + c^2a$, musí platiť aj $a \mid b^2c$. Podobnými úvahami dostaneme spolu šesť deliteľností

$$\begin{array}{lll} a \mid c^2b, & b \mid a^2c, & c \mid b^2a, \\ a \mid b^2c, & b \mid c^2a, & c \mid a^2b. \end{array}$$

Teraz rozoberieme dve možnosti, podľa toho, či spomedzi a, b, c vieme alebo nevieme vybrať nesúdeliteľnú dvojicu.

1. Najprv rozoberieme prípad, keď niektoré dve čísla z trojice a, b, c sú nesúdeliteľné. Bez ujmy na všeobecnosti nech najväčší spoločný deliteľ čísel a a b je 1. Potom z $a \mid b^2c$ a $b \mid a^2c$ vyplýva, že $a \mid c$ a $b \mid c$. Čísla a a b sú však nesúdeliteľné, teda musí platiť $ab \mid c$. Inými slovami, existuje celé číslo k také, že $c = kab$. Potom z výrokov $c \mid a^2b$, $c \mid b^2a$ vieme, že $k \mid a$, $k \mid b$, čo kvôli nesúdeliteľnosti a, b implikuje $|k| = 1$. Takže musí platiť $|c| = |ab|$ a do výrazu u môžeme dosadiť $c = \pm ab$, čo nám povie, že
$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{\pm ab} + \frac{\pm ab}{a} = \frac{a^2 \pm b}{ab} \pm b$$
je celé číslo. To ale znamená, že $a \mid b$ aj $b \mid a$ a preto $|a| = |b| = 1 = |ab| = |c|$ a to sme chceli dokázať.

2. Teraz rozoberieme možnosť, keď každá dvojica čísel z trojice a, b, c má spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Nech $NSD(a, b) = k$, $NSD(b, c) = l$, $NSD(a, c) = m$. Potom k, l, m sú po dvoch nesúdeliteľné (ak by neboli, tak by a, b, c boli súdeliteľné). Čísla a, b, c vieme tým pádom napísať ako $a = xkm$, $b = ykl$, $c = zlm$ pre nejaké celé čísla x, y, z. Teraz dokážeme, že $|x| = |y| = |z| = 1$. Výrok $a \mid b^2c$ vieme prepísať ako $xkm \mid (ykl)^2zlm$, po zjednodušení $x \mid y^2zkl^3$. Číslo x je nedúdeliteľné s l (inak by $NSD(a, b, c) \neq 1$) a tiež aj s y a z (inak by sme mali spor s výberom k, l, m). Preto to vieme zjednodušiť na $x \mid m$. Z výroku $a \mid bc^2$ zase dostaneme $x \mid k$, čo dokopy s $x \mid m$ znamená $|x| = 1$. Analogicky dostaneme $|y| = |z| = 1$. Výrazy u a v sú pre trojicu a, b, c rovnaké ako pre trojicu m/y, l/x, k/z. (Overte si to.) Tieto čísla sú ale po dvoch nesúdeliteľné, a preto podľa prvého prípadu vieme povedať
$$1 = \left|\frac{m}{y}\right| = \left|\frac{l}{x}\right| = \left|\frac{k}{z}\right| = |m| = |l| = |k|.$$
Z toho opäť dostávame $|a| = |b| = |c| = 1$.

Druhé riešenie: (podľa Josefa Tkadleca) Zaveďme si substitúciu $x = a/b, y = b/c, z = c/a$. Čísla x, y, z sú potom racionálne. Polynóm $p(t) = t^3 - ut^2 + vt - 1$ má korene x, y, z, pretože sú splnené Viétove vzťahy:

$$\begin{aligned} u &= x + y + z, \\ v &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) xyz = xy + yz + zx, \\ 1 &= xyz. \end{aligned}$$

Ak si racionálne korene polynómu $p(t)$ vyjadríme ako zlomky v základnom tvare, tak musí platiť, že čitateľ tohto zlomku delí absolútny člen polynómu $p(t)$, t.j. -1, a menovateľ delí koeficient pri vedúcom člene polynómu $p(t)$, t.j. 1. Teda čitatele aj menovatele týchto zlomkov musia byť 1 alebo -1, a preto $|x| = |y| = |z| = 1$. Z toho už nutne vyplýva $|a| = |b| = |c|$.

Úloha č. 11: *Nech $p(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a nech c_n je ciferný súčet čísla $p(n)$. Dokážte, že v nekonečnej postupnosti $c_1, c_2, c_3, \dots$ sa nejaká hodnota vyskytne nekonečne veľakrát.*
Riešenie: (opravoval Bus)

Keď som prvýkrát videl túto úlohu, vravel som si, že to určite nemôže platiť. Keď si totiž vezmete ľubovoľný nekonštantný polynóm, jeho hodnoty budú časom rásť do nekonečna (alebo mínus nekonečna), a veľké hodnoty majú obvykle veľký ciferný súčet. Povedal som si, že začnem hľadaním protipríkladu.
Pre konštantné polynómy $p(x) = k$ tvrdenie platí, hodnoty c_n sú totiž všetky rovné cifernému súčtu čísla k. Vezmime si lineárny polynóm $p(x) = x$. Mohlo by sa stať, že nekonečne veľa z čísel $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bude rovnakých? Po chvíľke premýšľania by ste mali prísť na to, že mohlo. Platí totiž

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ c_{10} &= 1, \\ c_{100} &= 1, \\ c_{1000} &= 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Presne to isté platí aj pre ľubovoľný polynóm tvaru $p(x) = x^k$. Bude to preto chcieť nejaký komplikovanejší protipríklad. Vyberme si nejaký skoro úplne náhodný polynóm, napríklad $p(x) = 9x^3 + 41x^2 + 5$. S prekvapením po chvíli zistíme, že aj pre tento polynóm funguje veľmi podobný postup, budeme však musieť začať od $x = 100$:

$$\begin{array}{lcl} p(100) = 9410005 & \Rightarrow & c_{100} = 19, \\ p(1000) = 9041000005 & \Rightarrow & c_{1000} = 19, \\ p(10000) = 9004100000005 & \Rightarrow & c_{10000} = 19, \\ & \vdots & \end{array}$$

Malo by vám byť už asi jasné, že to isté môžeme spraviť pre ľubovoľný polynóm s nezápornými celočíselnými koeficientami. Presnejšie povedané, pre polynóm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \forall i : a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

vezmeme také k, aby $a_i < 10^k$ pre každé i. Potom bude platiť $c_{10^k} = c_{10^{k+1}} = c_{10^{k+2}} = \ldots$ Tento postup funguje tiež v prípade, že sú všetky nenulové koeficienty polynómu $p(x)$ záporné. (Hodnota polynómu bude záporné číslo, ale ciferný súčet tejto hodnoty bude rovnaký, ako keby boli všetky koeficienty kladné.)
Potrebujeme už vyriešiť len prípad, keď majú niektoré z koeficientov polynómu navzájom rôzne znamienka. Toto sa môže na prvý pohľad javiť ako omnoho komplikovanejšia úloha, nie je tomu však tak. Predpokladajme, že vedúci koeficient (t.j. koeficient pri člene s najvyšším exponentom) je kladný. (Opačný prípad sa rieši analogicky.) Všetky záporné koeficienty polynómu $p(x)$ môžeme odstrániť posunutím premennej x o dostatočne veľkú konštantu – čo to znamená sa opäť najľahšie ukáže na príklade:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 - 6x - 11, \\ p(x) &= 2((x-5)+5)^2 - 6((x-5)+5) - 11, \\ p(x) &= 2(x-5)^2 + 20(x-5) + 50 - 6(x-5) - 30 - 11, \\ p(x) &= 2(x-5)^2 + 14(x-5) + 9. \end{aligned}$$

V skutočnosti sme s polynómom nespravili nič, iba ho zapísali v inom tvare. Dôležité však je, že v tomto novom tvare sa pri členoch $(x-5)^k$ objavujú len samé nezáporné koeficienty, môžeme použiť už známy postup – dosadiť do $p(x)$ hodnoty $10^2 + 5, 10^3 + 5, 10^4 + 5, \ldots$ Zatiaľ sme si však uviedli len príklad, potrebujeme ešte dokázať, že každý polynóm sa dá naozaj prepísať do takéhoto tvaru. Formálne by to bol dôkaz matematickou indukciou, najzaujímavejší je indukčný krok:
Nech je najvyšší člen so záporným koeficientom $-a_k x^k$ a nech je vedúci člen nášho polynómu $a_n x^n$ ($n > k$, $a_k > 0$). Koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}$ sú všetky nezáporné. Posuňme premennú x o a_k tak, ako v predchádzajúcom príklade. (Stačilo by aj o menej, ale takto je to jednoduchšie.) Môžete si ľahko overiť, že koeficienty pri $(x - a_k)^n$, $(x - a_k)^{n-1}, \ldots, (x - a_k)^{k+1}$ zostanú aj naďalej nezáporné, dokonca každý z nich (okrem a_n) by sa mal oproti pôvodnému koeficientu zväčšiť. Koeficient pri $(x - a_k)^k$ bude:

$$a'_k = a_n \binom{n}{k} a_k^{n-k} + a_{n-1} \binom{n-1}{k} a_k^{n-1-k} + \cdots - a_k \geq a_n \binom{n}{k} a_k^{n-k} - a_k \geq a_k - a_k = 0$$

Zbavili sme sa teda záporného koeficientu. Ďalej môžeme pokračovať opakovaním tohto postupu.

Úloha č. 12: *Zistite, či existujú funkcie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *také, že pre každé reálne číslo* x *platia rovnosti*

a) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$

b) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$

Riešenie: (opravoval Ondráč a Kuna)
a)Predpokladajme, že také funkcie f a g existujú. Čo o nich vieme povedať? Začnime funkciou f. Z druhej rovnice ľahko dostaneme, že je prostá. Ak totiž $f(x) = f(y)$, potom

$$x^3 = g(f(x)) = g(f(y)) = y^3 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Prvá rovnica nám o f prezradí, že nadobúda všetky kladné reálne hodnoty. A čo funkcia g? Druhá rovnica o nej hovorí, že nadobúda všetky hodnoty z $\mathbb{R}$. Z prvej rovnice zase vieme, že g je prostá na nezáporných reálnych číslach a taktiež na nekladných reálnych číslach (nie však na všetkých naraz). Na tých množinách platí

$$g(x) = g(y) \quad \Rightarrow \quad x^2 = f(g(x)) = f(g(y)) = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Ďalšie informácie vieme získať kombinovaním vzťahov pre skladanie f a g. Napríklad

$$f(g(f(x))) = f^2(x), \qquad f(g(f(x))) = f(x^3),$$

podľa toho, ktorý predpoklad využijeme. Posledný vzťah vieme napísať ako $f^2(x) - f(x^3) = 0$. Ak za x dosadíme hodnoty -1, 0 a 1 (Sú to riešenia rovnice $x = x^3$) dostávame

$$\begin{aligned} f^2(-1) - f(-1) &= 0, \\ f^2(0) - f(0) &= 0, \\ f^2(1) - f(1) &= 0. \end{aligned}$$

Inak povedané, hodnoty $f(-1)$, $f(0)$ a $f(1)$ sú korene polynómu $x^2 - x$. To je polynóm druhého stuňa s dvomi koreňmi a preto sa nejaké dve z tých hodnôt musia rovnať. To je ale v spore s prostosťou funkcie f. Tým sme dokázali, že vhodné funkcie f a g nemôžu existovať.

b) Aj v tomto prípade si treba spraviť analýzu vlastností f a g. (Spravte to.) Znovu môžeme šikovne poskladať funkcie f a g aby sme dostali

$$f(x^4) = f(g(f(x))) = f^2(x), \tag{1}$$
$$g(x^2) = g(f(g(x))) = g^4(x). \tag{2}$$

Teraz sa nám podobný spor ako v prvom prípade nepodarí. Takže zatiaľ by také funkcie mohli teoreticky existovať. Skúte nájsť funkcie f a g, ktoré by sĺňali posledne odvodené vzťahy (1) a (2). A také funkcie veruže existujú. Napríklad sú to

$$f(x) = e^{\sqrt{|\ln|x||}}, \quad g(x) = e^{\ln^2 x^2}.$$

Tie však ešte nie sú riešením, len majú vhodné vlastnosti. Stačí ich však trochu upraviť a dostaneme úplné riešenie, konkrétne

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ e^{-\sqrt{|\ln|x||}} & |x| \in (0,1), \\ e^{\sqrt{\ln|x|}} & |x| \geq 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ e^{-\ln^2 x^2} & |x| \in (0,1), \\ e^{\ln^2 x^2} & |x| \geq 1. \end{cases}$$

V správnom riešení musíte overiť, že tieto (resp. vami nájdené) funkcie naozaj vyhovujú pôvodnému systému rovníc. Túto mechanickú činnosť necháme na chtivého čitateľa.

__Úloha č. 13:__ *Postupnosť* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je definovaná nasledovne:*

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2, \\ a_3 &= 24, \\ a_n &= \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}} \quad \text{pre } n > 3. \end{aligned}$$

Dokážte, že n *delí* a_n *pre každé prirodzené číslo* n.

Riešenie: (opravovala Hanka)

Zaujímavá vec, ktorú je fajn si všímať na podobných rekurenciách je taká nejaká nazvime to homogenita. Keby sme totiž v tom vyjadrení mali všade a namiesto rôznych a_i, tak po vykrátení nám tam ostane práve násobok a. Toto nám tak trošku napovedá, že nemusí byť úplne zlé skúsiť hrať sa s podielmi členov. Upravme dané vyjadrenie $n-$tého člena nasledovne:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 6\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 8\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Urobme substitúciu $b_{n-2} = a_n/a_{n-1}$. (Indexujeme to tak kvôli tomu, aby nová postupnosť začínala prvkami $b_0 = a_2/a_1 = 2$, $b_1 = a_3/a_2 = 12$ za chvíľu uvidíte prečo práve tak.:)) Pre $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ vieme napísať rekurentný vzťah

$$b_n = 6b_{n-1} - 8b_{n-2}.$$

Vieme niečo urobiť s takýmto rekurentným vyjadrením postupnosti? Teraz chvíľku nechajme na pokoji prvé hodnoty postupnosti a pozrime sa len na daný rekurentný vzťah. Keď máme takú jednoduchšiu postupnosť, kde $n-$tý člen je vyjadrený len pomocou $n-1$-ého, vieme všeobecne $n-$tý člen napísať ako mocninu nejakého čisla. Čo tak skúsiť niečo podobné? Skúsme hľadať explicitné vyjadrenie $n-$tého člena našej rekurencie v tvare x^n. Potom musí platiť

$$\begin{aligned} x^n &= 6x^{n-1} - 8x^{n-2} \\ x^{n-2}(x^2 - 6x + 8) &= 0 \end{aligned}$$

Pokiaľ je x koreňom takto vzniknutej kvadratickej rovnice, bude x^n spĺňať daný rekurentný vzťah. Ak má daná rovnica korene dva, budú tento vzťah spĺňať oba a dokonca je asi jasné, že ho bude spĺňať aj ľubovoľná ich lineárna kombinácia. A už sme doma nie? :) Máme predsa dva korene, čiže dva parametre a k nim prvé dva členy postupnosti. V našom konkrétnom prípade je $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ a všeobecné riešenie našej rekurencie je $b_n = c_1 2^n + c_2 4^n$. Hodnoty c_1 a c_2 získame z nasledovnej sústavy rovníc.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= b_0 = 2 \\ 2c_1 + 4c_2 &= b_1 = 12 \end{aligned}$$

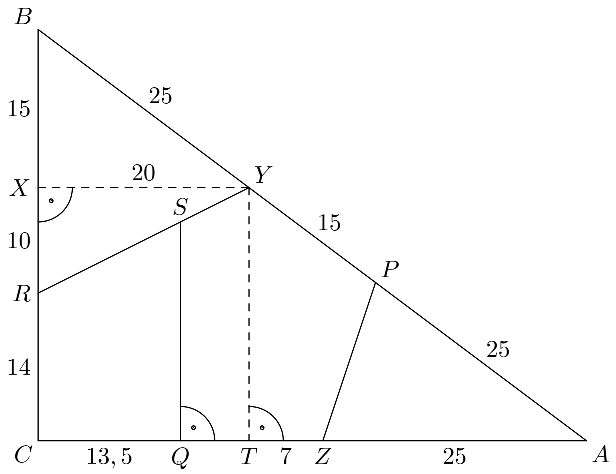
Dostaneme $c_1 = -2$ a $c_2 = 4$ a preto

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= 4^{n-1} - 2^{n-1} \\ a_n &= a_{n-1}2^{n-1}(2^{n-1} - 1). \end{aligned}$$

Fajn, už len ukázať tú deliteľnosť.:) Každé číslo sa dá napísať ako súčin nepárneho čisla a nejakej mocniny čísla 2 ($n = 2^s \cdot r$). Deliteľnosť mocninou dvojky asi vidíme rovno, už teda len tá nepárna časť. Možno poznáte všeobecnejšiu verziu malej Fermatovej vety a to Eulerovu vetu. Tá tvrdí $r | a^{\phi(r)} - 1$ pre $(a, r) = 1$, pričom $\phi(r)$ je počet čísel menších ako r nesúdeliteľných s číslom r. Takže keď formulku pre a_n dôsledne rozpíšeme až po a_2 dostaneme v súčine všetky výrazy tvaru $2^k - 1$ pre $k < n$, a tak tam bude aj naše žiadané $2^{\phi(r)} - 1$. Tak a už to máme, 2^s delí a_n aj r delí a_n, preto aj n delí a_n. Howgh!

Úloha č. 14: *Nájdite rozdelenie pravouhlého trojuholníka so stranami* 3, 4, 5 *na štyri časti s najmenším možným priemerom. Priemer rozdelenia definujeme ako maximum zo vzdialeností medzi bodmi patriacimi do tej istej časti. Napríklad rozdelenie strednými priečkami má priemer* 5/2.

Riešenie: (opravoval Ondráč a Kuna)



Najprv spomenieme niekoľko myšlienok, ktoré je vhodné si uvedomiť, no riešenie sa obíde aj bez nich. Ak chceme lepšie rozdelenie ako uvádza zadanie, malo by minimálne platiť, že vrcholy A, B a C sú v iných častiach. Budeme mať nejaké pracovné číslo r a budeme vytvárať tri oblasti, ktoré budú obsahovať postupne vrcholy A, B a C a budú mať priemer najviac r. Keď budeme r postupne zväčšovať, tak sa nám priestor v trojuholníku, ktorý nezahŕňame do týchto častí bude zmenšovať, až jeho priemer bude tiež r. Takto by sme teoreticky mohli dosiahnuť optimálne rozdelenie a minimálny priemer rozdelenia na štyri časti. Vhodným interpretovaním týchto ideí sa dá dospieť až ku finálnemu elegantnému riešeniu.

(*Riešenie podľa Josefa Tkadleca.*) Dĺžky strán si pre jednoduchosť prenásobíme 13-mi. Vyznačme si body Y a Z ako na obrázku, čiže bude platiť $|BY| = |YZ| = |ZA| = 25$ a všetky ostatné vzájomné vzdialenosti bodov A, B, C, Y, Z sú väčšie. Nejaká dvojica tých bodov musí byť v jednej zo štyroch častí a preto minimálny priemer je aspoň 25. Ukážeme, že rozdelenie s priemerom 25 existuje.

Na úsečke AB zvoľme bod P tak, že $|AP| = 25$ a na úsečke BC bod R tak, že $|BR| = 25$. Označme písmenom Q stred úsečky CZ a S priesečník RY a kolmice na CA z bodu Q. Dokážeme, že vyhovuje rozdelenie na mnohouholníky BRY, $CQSR$, $QZPYS$ a ZAP. Ako nájdeme maximálnu vzdialenosť dvoch bodov pre mnohouholník? Stačí keď budeme uvažovať len vzdialenosti medzi vrcholmi, teda dĺžky strán a uhlopriečok. (V riešení to musíte zdôvodniť.) Teraz už len overiť všetky štyri časti.

- BRY: Platí $|RY| < |RB| = |BY| = 25$.
- $CQRS$: Najdlhšia priečka v tomto štvoruholníku je zrejme CS a pre ňu platí $|CS| = \sqrt{13,5^2 + 20,75^2} < 25$.
- $QZPYS$: Do úvahy pripadajú len uhlopriečky. Platí

$$|SZ| = |CS| < 25, \qquad |ZY| = 25,$$
$$|QP| = \sqrt{13,5^2 + 15^2} < 25, \qquad |PS| = \sqrt{18,5^2 + 5,75^2} < 25,$$
$$|YQ| = \sqrt{24^2 + 6,5^2} < 25.$$

- ZAP: Platí $|PZ| < |ZA| = |PA| = 25$.

Tým sme dokázali, že najmenší možný priemer rozdelenia ja 25, a tak po spätnom predelení strán 13-timi je to 25/13.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Chlebíková Andrea	4.	Brighton UK	5	0	9	9	9		9	9	9		45	45
2.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	6	1		9	9	9	8	9			44	44
2.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	5	0		9	8	9	9		9		44	44
2.	Le Tuan Anh	2.	Gamča BA	5	0	9	8	9	9	9				44	44
5.	Kossaczký Igor	4.	Gamča BA	6	1		9	7	8	9	9			42	42
6.	Peitl Tomáš	3.	ŠPMNDG BA	7	2		9	5	9	9	9			41	41
7.	Hagara Michal	3.	GJH BA	7	4			9	9	9	9	4		40	40
7.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	8	4			7	8	8	9	8		40	40
7.	Kukan Marek	3.	Gamča BA	4	0	9	8	7	7	9				40	40
10.	Szabados Viktor	2.	Gamča BA	5	0	9	9	7	8	6				39	39
11.	Csiba Dominik	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	9	6	7	8				38	38

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
11.	Večerík Matej	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	6	6	9	8				38	38
13.	Gregor Viktor	3.	GŠkol PB	5	0	9	8	9	2	9				37	37
13.	Šormanová Mária	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	8	9	2				37	37
15.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	8	4			9	9	9	9			36	36
15.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	8	4			9	9	9	9	0		36	36
15.	Sládek Filip	3.	GAB NO	5	4			8	9	9	9	1		36	36
18.	Bačo Ladislav	3.	GPoš KE	8	4			8	9	9	9			35	35
18.	Horňák Marián	1.	GPár NR	1	0	9	8	9		9				35	35
18.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	6	4			6	8	9	9	3		35	35
21.	Matejovičová Lenka	4.	GJH BA	11	7			9	9	9	4	3		34	34
21.	Spišiak Michal	4.	Gamča BA	8	7			8	9	8	9			34	34
23.	Hlavatá Martina	2.	Gamča BA	5	0	9	9	7		8				33	33
23.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	4	0	8	9	4	3	9	2	3		33	33
23.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	3	0	9	4	6	7	7				33	33
23.	Štyráková Kamila	3.	GPOH DK	7	1		9	7	8	9				33	33
27.	Majdiš Mojmír	3.	GPOH DK	5	0	9	9	8		6				32	32
28.	Kováč Ondrej	2.	GCM NR	4	0	8	8	7		8	0			31	31
28.	Midlik Adam	3.	GJAR PO	5	1		8	7	7	9				31	31
28.	Töpfer Jakub	4.	GJK PH ČR	5	3			6	9	9	4	3		31	31
28.	Uhrík Jakub	4.	Gamča BA	7	1		6	9	8	8				31	31
28.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	3	0	9	9	9			1	3		31	31
33.	Karásková Natália	3.	Gamča BA	8	3			9	9	9		3		30	30
34.	Bohiniková Alžbeta	2.	Gamča BA	5	0	9	5	7	8					29	29
34.	Kopf Matúš	3.	Opava ČR	7	2		4	6	9	1	9			29	29
34.	Krejčír Andrej	2.	GVBN PD	3	0	8	2	3	9	7				29	29
37.	Batmendijnová Kristína	4.	GTV SL	7	1		9	7	9	1	2			28	28
37.	Hajdinová Katarína	2.	GJH BA	4	0	8	9	4	3	4				28	28
37.	Kozák Andrej	2.	Gamča BA	5	0	9	8	6		5				28	28
37.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	2	0	7	8	5		8				28	28
41.	Haas Emil	4.	Gamča BA	8	1		9	9	0	9				27	27
41.	Kubincová Petra	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	3	1	5				27	27
43.	Bogár Ján	3.	GĽŠ TN	8	2		3	5	9	9				26	26
43.	Buchman Marek	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	3	2	3				26	26
43.	Lešková Andrea	3.	G Lipany	6	0	9	7	4		6				26	26
43.	Phuong Mariana	2.	GJH BA	4	0	9	8	9						26	26
43.	Rigdová Emília	3.	GKuk PP	6	1		8	6	9	3				26	26
48.	Cocuľová Zuzana	3.	GPoš KE	7	1		9	6	9	1				25	25
48.	Sabatovičová Linda	2.	GJH BA	4	0	9	9	5	2					25	25
48.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	3	0	9	8	5		3	0			25	25
51.	Kuklišová Nina	4.	GMet BA	8	1		8	7		9				24	24
51.	Polačko Martin	4.	GAlej KE	11	5			7	9	8				24	24
51.	Santer Jakub	2.	GMH Trstená	4	0	8	9	7						24	24
54.	Bendová Lenka	4.	GJH BA	6	0		9	4	3	7				23	23
54.	Fekiač Jozef	4.	Gamča BA	7	1		9	6		8				23	23
54.	Jursa Jakub	4.	GAlej KE	11	4			8	9	6				23	23
54.	Porembová Alexandra	3.	BiG Sučany	6	1		9	5	9					23	23
58.	Hašík Juraj	3.	Gamča BA	6	0	7	8	7						22	22
58.	Komárková Zuzana	4.	Brno ČR	7	3			8	9	5				22	22
58.	Kotrlová Katarína	4.	GVPT MT	6	0	9	9	4						22	22
58.	Múthová Denisa	2.	GbTR ZA	4	0	2	9	4	6	1				22	22
62.	Hudec Vladimír	4.	GVar ZA	7	1		9	4	8					21	21
62.	Kieferová Mária	4.	GsvFA ZA	6	1		8	5	5	3	0			21	21
64.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	3	0	9	5	4			1			19	19
64.	Masár Juraj	2.	GBil BA	4	0	9	2	7	1					19	19
64.	Ziman Michal	3.	GBST LC	7	1		9	6	2		2			19	19

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
67.	Bogárová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	2	8	4	4					18	18
67.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3	0	8	4	3	2	1				18	18
67.	Štrbová Silvia	2.	GPár NR	5	0	9	6			3				18	18
70.	Baxová Katarína	4.	GĽŠ TN	4	0	4	7	4	2					17	17
70.	Jakubík Ján	2.	SPŠE PN	4	0	2	2	4	2	7				17	17
72.	Dižová Andrea	2.	GKom PE	4	0	9	7							16	16
73.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	10	5			6			9			15	15
74.	Miškovičová Júlia	2.	GJH BA	2	0	4	4	4	2		0			14	14
75.	Jagoš Ľubomír	3.	GVO ZA	6	0		8	5						13	13
76.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	3	0	2	2	6	2					12	12
77.	Kutaj Tomáš	1.	GJH BA	1	0	9	0			1	0			10	10
78.	Kobolková Petra	4.	GVPT MT	5	0	0	8							8	8
79.	Fodorová Jana	2.	GJGT BB	4	0	7	0							7	7
80.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3	0	0	0	4	1	1	0			6	6
80.	Kubinová Mária	2.	GPOH DK	4	0	4	2							6	6
82.	Stripajová Svetlana	4.	GPOH DK	4	0	2	0		2		0			4	4

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Karpišová Iveta	1.	Gamča BA	2		7	9	7	9	9			41
2.	Hozza Ján	2.	GJH BA	3			0	9	9	9	9		36
2.	Mojžišová Hana	2.	GJH BA	3			8	6	9	9	4		36
4.	Belanová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	9	8	0	9		9			35
4.	Rečka Marek	1.	1SG BA	1	8	7	0	6	6	8			35
4.	Vlachynská Petra	1.	GBil BA	1	9	9	0	9		8			35
7.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	3			0	7	9	8	5		29
8.	Sopóci Martin	1.	1SG BA	1	9		5	6		8			28
9.	Polách Juraj	1.	Gamča BA	2		6	0	7	9		5		27
10.	Košík Matúš	1.	1SG BA	1	6	9		3		4			22
11.	Falťan Michal	1.	1SG BA	1	9	7	1	2	2				21
12.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	3					9	4	6		19
13.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	3			0		9	5	4		18
14.	Hirgelová Mária	1.	ŠPMNDG BA	2		5	3		3	6			17
15.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3					8	4	3		15
16.	Ivanov Alexander	2.	Gamča BA	3					4	5	4		13
17.	Miškovičová Júlia	2.	GJH BA	2					4	4	4		12
18.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3			0	2	2	4	3		11
19.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	3					2	2	6		10
20.	Kutaj Tomáš	1.	GJH BA	1					9	0			9
21.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3					0	0	4		4

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Horňák Marián	1.	GPár NR	1	9	7	9	9	9	8	9		45
2.	Kosec Peter	1.	GĽŠ TN	1	8	8	8	9	9	9	5		43
3.	Baxová Zuzana	1.	GĽŠ TN	1	9	9	0	7	5	4			34
4.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	2	9	4	6	9	3	8	4		31
5.	Koprda Pavol	1.	GAM TT	1	9	7	0	6	0	6	2		30
6.	Švančara Patrik	1.	GĽŠ TN	1	8	9			1	7	4		29
7.	Leššová Lívia	2.	GPár NR	3			5	6	3	8			22
8.	Izsák Dávid	2.	SJG KN	3		4	6		1	4	3		14

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k_α**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
9.	Krejčír Andrej	2.	GVBN PD	3					8	2	3		13

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k_α**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
1.	Vlček Andrej	1.	ESŠ EG JT LM	1	9		9	9	9	1	7		43
2.	Jasenčáková Katarína	1.	GVO ZA	2		9	8		9	9	5		40
2.	Santrová Adriana	1.	GMH Trstená	1	8	9	5	9		9			40
4.	Anderle Michal	2.	GBST LC	2	8	5	8	5	9	8	4		35
5.	Galovičová Soňa	1.	GVO ZA	2		9	8		2	8	3		30
5.	Halajová Barbora	1.	GVO ZA	2		9	7	2		8	4		30
7.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	3					9	9	9		27
8.	Matuška Lukáš	2.	GBST LC	2		6	0	9	1	0	3		19
9.	Kajánek František	1.	GJMH CA	1	4	3	3	1	0				11
10.	Kubišová Barbora	1.	GJCh BR	1	1	5	0	2	1	1	1		10
11.	Lonský Rafael	1.	GPOH DK	1	2	1		1	1	4			9
11.	Plavák Dušan	1.	GMH Trstená	1			0			6	3		9
13.	Majerová Karolína	2.	GJCh BR	2		2	0			6			8
14.	Piliarkin Marián	1.	GJCh BR	1	7								7
15.	Latinák Kristián	1.	GJCh BR	1	2	0	0	1	1	0	1		5
15.	Vojtková Veronika	1.	GJCh BR	1	2	2			1	0			5
17.	Sabaka Peter	2.	GJCh BR	2	4				4				4
18.	Šišiaková Alena	1.	GJCh BR	1	1	1			1	0			3
19.	Kuviková Zuzana	1.	GJCh BR	1	0	2	0	0	0	0			2
19.	Maculová Simona	1.	GJCh BR	1	2	0			0	0			2
21.	Beraxa Peter	1.	GJCh BR	1	0	0			0	0			0
21.	Stankoviansky Tomáš	1.	GJCh BR	1	0	0			0	0			0
21.	Trnik Erik	1.	GJCh BR	1	0	0			0	0			0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k_α**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
1.	Daniláková Monika	1.	GJAR PO	1	9	9			9	9	3		39
2.	Ficková Klára	1.	GPoš KE	2		9	0	5	9		7		30
3.	Kmeťová Katarína	1.	GKuk PP	1		9		5	9	4	2		29
4.	Dupej Peter	1.	GJAR PO	1	9	8	0	2		9			28
5.	Klembarová Barbora	1.	GKuk PP	1		9	3	7	3	4	3		26
6.	Faguľová Kristína	1.	GPoš KE	2		9	0	4	4	5	2		24
7.	Marečáková Barbora	1.	GKuk PP	1	3	1	6	1	4	6	3		22
8.	Bajnoková Lenka	3.	GKuk PP	3					8	4			12

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	**$\sum$**
1.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9		1	4	0		14
2.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	9	0	2	6	5		22
3.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA		9	0				9
4.	Hagara Michal	3.	GJH BA	9	4		7			20
5.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	9	8	0	0			17
6.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	2	3	1	5	1		12
7.	Sládek Filip	3.	GAB NO	9	1	3		6		19
7.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	9	3			7		19