Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2008/2009.

Úloha č. 1: *Vezmime si všetky prirodzné čísla menšie ako 211112. Ktorých čísel je medzi nimi viac – tých, ktoré obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré ju neobsahujú?*

Riešenie: (opravovala Kika)
Ukážeme si dva spôsoby riešenia, ktorými postupovala väčšina z vás. Obidva majú spoločnú jednu myšlienku – treba ukázať, či je „jednotkových čísel" viac ako polovica. (Odteraz budeme čísla, ktoré majú v zápise jednotku, volať *jednotkové*.) Bavili sme sa o číslach *menších* (nie menších alebo rovných) ako 211112. Ich počet je 211111, polovica z toho je 105555,5, takže treba dokázať, že jednotkových čísel je 105556 a viac.

Prvý spôsob: O niektorých veľkých skupinách čísel vieme, že 1 v zápise určite obsahujú. Sú to napríklad všetky čísla od 100000 do 199999 (1 určite majú na mieste stotisícok). Je ich presne 100000. (Viete prečo? Skúste sa nad tým zamyslieť.) Ďalšia taká skupina čísel je od 10000 do 19999. Tých je 10000. Takto vieme spolu o minimálne 110000 jednotkových číslach. A to nám stačí, pretože 110000 je viac ako 105556.

Druhý spôsob je komplikovanejší, tu zrátame počet všetkých jednotkových čísel. Poďme na to od podlahy. Koľko čísel od 0 do 99 je jednotkových? Čísla 0–99 vieme po desiatkach rozdeliť na desať častí, 0–9, 10–19, pokračujúc až ku 90–99. Deväť z týchto desiatich častí má v sebe práve jedno jednotkové číslo. Časť 10–19 má v sebe desať jednotkových čísel. Takže od 0 do 99 existuje 19 jednotkových čísel.
Dobre. Koľko je teraz jednotkových čísel od 0 do 999? Analogicky si čísla 0–999 rozdelíme na desať menších častí, od 0–99 až po 900–999. Časť 100–199 je zo samých jednotkových čísel, je ich tu 100. V každej z ostatných deviatich častí je toľko jednotkových čísel, koľko ich je od 0 do 99. Spolu je to $9 \cdot 19 + 100 = 271$ jednotkových čísel v rozmedzí 0–999.
Podobne v rozmedzí od 0 do 9999 ich je 3439, od 0 do 99999 ich je 40951. Tu sa môžeme zastaviť. Po čísle 99999 nasleduje 100000 jednotkových čísel – od 100000 do 199999. Potom nasleduje interval od 200000 do 209999. Toto nám tiež niečo pripomína – jednotkových čísel tu je 3439. A všetky čísla väčšie alebo rovné ako 210000 sú jednotkové (majú 1 na mieste desaťtisícok), je ich 1112. Spolu je to 145502 jednotkových čísel, čo je viac ako polovica všetkých.

Úloha č. 2: *Uvažujme prirodzené čísla, ktoré dávajú zvyšok* 1 *po delení každým z čísel* $2, 3, 4, \ldots, 11$.
a) Nájdite dve rôzne takéto čísla.
b) Najmenej o koľko sa musia takéto dve rôzne čísla líšiť?

Riešenie: (opravovali Janko a Katka)
a) Začneme úvahou o tom, ako majú hľadané čísla vyzerať. Keďže majú dávať zvyšok 1 po delení všetkými číslami 2–11, tak čísla o jedna menšie budú deliteľné všetkými týmito číslami bezo zvyšku. Ľahko nám napadne, že prvé číslo deliteľné 2–11 je 0, čo znamená, že najmenšie číslo vyhovujúce zadaniu je 1. Druhé najmenšie získame tak, že nájdeme najmenší spoločný násobok $nsn(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) = 27720$ a pripočítame k nemu 1. Dostaneme 27721, máme dve čísla a môžeme sa vrhnúť na druhú časť úlohy.
b) Tu mnohí z vás spravili tú chybu, že zistili rozdiel dvoch čísel, ktoré našli a prehlásili ho za najmenší. Zabudli však zdôvodniť, prečo je práve tento rozdiel najmenší.
V predchádzajúcej časti sme už trochu naznačili, ako hľadané čísla vyzerajú. Môžeme ich usporiadať do postupnosti, ktorá bude vyzerať nasledovne: $1, 27221, 55441, 83161, \ldots$ Môžeme si všimnúť, že každé dva po sebe nasledujúce členy sa od seba líšia o 27720. Je to náhoda? Určite nie. :) Ak totiž máme číslo a vyhovujúce zadaniu, dáva a po delení číslami 2–11 zvyšok 1. Ak chceme ďalšie také, musíme k a pripočítať číslo (alebo hocijaký jeho násobok), ktoré je deliteľné číslami 2–11, aby sa nám zachoval zvyšok. Pretože najmenšie takéto číslo je 27720, bude to najmenší možný rozdiel.

Úloha č. 3: *Zapíšte číslo 2008 ako súčet niekoľkých prirodzených čísel, ktorých súčin je maximálny a ukážte, že neexistuje lepšie riešenie.*

Riešenie: (opravovali Kaja a Ondro)
Ahojte. Na úvod by sa patrilo menšie vysvetlenie, prečo je vzorové riešenie tretej úlohy v KMS také dlhé. Táto úloha nebola svojím spôsobom zložitá. Obtiažny bol práve ten popis, prečo je riešenie, ktoré sme našli najlepšie možné. Museli sme totiž vylúčiť všetky rozklady čísla 2008, ktoré nedávali maximálny súčet. My si v riešení ukážeme postup, ako sa postupne dopracovať z ľubovoľného rozkladu k tomu správnemu. Možno to znie na úvod dosť nelogicky, ale naozaj je tomu tak. Dôkladné prečítanie tohto riešenia vám dá strašne veľa. (Naučíte sa rozumieť riešeniam s veľa

neznámymi a niektoré myšlienky z tohto dôkazu sa vám určite hodia do budúcnosti.) Riešenia sme hodnotili podľa toho, že ako dôkladne sa vám podarilo zdôvodniť, že vaše riešenie je to najlepšie možné.
Takže nádych a môžeme sa s plnou chuťou pustiť do riešenia úlohy. Prvé čo bolo treba spraviť, je dať kalkulačku do kúta. Pri riešení tejto úlohy bola zbytočná. Číslo 2008 je dosť veľké, poďme preto venovať našu pozornosť menším číslam. Vhodným kandidátom je napríklad číslo 6. Poďme ho skúsiť rozložiť na súčet niekoľkých čísel, pričom pri každom rozložení si budeme všímať súčin týchto sčítancov. Najlepším rozložením je $6 = 3+3$. Aby sme si rozumeli, pod slovom *najlepšie* myslíme rozloženie na tie sčítance, ktoré majú najväčší súčin. Môžeme si všimnúť pár vecí ktoré platia pre malé čísla, a ktoré nám pomôžu úlohu vyriešiť aj pre väčšie čísla.

1. Rozloženia, ktoré obsahujú veľa jednotiek nie sú dobré, pretože jednotky nezväčšia súčin.

2. Číslo sa nám oplatí rozložiť na čo najmenšie čísla (väčšie ako jeden), vtedy bude ich súčin najväčší.

Tieto tvrdenia nám môžu pomôcť nájsť správne rozloženie. Problém je ten, že ani jedno z nich nemáme dokázané. Poďme to zmeniť. Nezľaknite sa toľkých neznámych, stačí len vedieť čo znamenajú. S takýmito formálnymi zápismi sa budete stretávať čím ďalej tým viac, preto je dobré si ich čo najskôr osvojiť.
Zbavme sa najprv jednotiek v rozklade. Otázka je teraz, čo myslíme pod slovami *zbavme sa*. Ukážeme, že ľubovoľný rozklad čísla obsahujúci l jednotiek vieme zmeniť na taký, ktorý ich obsahuje $l-1$. (A je lepší, t.j. súčin nového rozkladu je väčší ako súčin pôvodného.) Hľadajme rozklad čísla n. Nech náš rozklad je $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, kde k je počet sčítancov. Predpokladajme, že existuje taký index i, že $a_i = 1$. Nech $i > 1$. (Rozmyslite si ako by to vyzeralo pre $i = 1$ a pre $i = k$.) Platí, že $a_1 a_2 \cdots a_k = a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_k$. (Číslo $a_i = 1$ nezmení celkový súčin.) Môžeme preto zmenšiť počet sčítancov o jeden a zároveň zväčšiť celkový súčin. Lepší rozklad čísla n je $n = (a_1+1) + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_k$. Zároveň platí, že $(a_1+1)a_2 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_k > a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_k$. Našli sme to, čo sme hľadali, rozklad čísla n na $k-1$ sčítancov s lepším súčinom. Takto sa postupne môžeme zbaviť všetkých jednotiek v rozklade a postupne zväčšovať súčin.
V druhom tvrdení hovoríme, že v súčine sú lepšie menšie čísla ako tie väčšie. Poďme to dokázať. Môžeme sa inšpirovať tým, ako sme sa zbavovali jednotiek v predchádzajúcom odstavci. Postup bol taký, že sme v súčte našli jednotku, odstránili ju a tým zväčšili súčin. Teraz budeme v súčte hľadať veľké čísla. Tie postupne nahradíme súčtom menších čísel, pričom sa nám zväčší celkový súčin. Po krátkom zamyslení prídeme na to, že ľubovoľné číslo väčšie ako 4 vieme nahradiť súčtom niekoľkých dvojok a trojok, pričom sa nám zlepší súčin. Nech $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ a nech existuje také $0 < i \leq k$, že $a_i > 4$. Musíme rozlíšiť dva prípady. Ak je číslo a_i párne, nahradíme ho súčtom niekoľkých dvojok. Naopak ak je nepárne, tak potom v novom súčte bude jedna trojka a zvyšok dvojky.
Formálne,

$$\begin{aligned} a_i &= \underbrace{2+2+\cdots+2}_{m}, \text{ ak } a_i = 2m \quad \text{a} \\ a_i &= \underbrace{3+2+2+\cdots+2}_{m+1}, \text{ ak } a_i = 2m+1. \end{aligned}$$

Takto postupne nahradíme všetky čísla väčšie ako 4. Poďme si dokázať, že súčin sa naozaj zväčší. Stačí sa zamyslieť iba nad činiteľom a_i, ktorý sa ako jediný zmení.
Potrebujeme dokázať, že pre každé m väčšie ako 2 platí $a_i = 2m < 2^m$. Pre $m = 3$ to platí. Pozrime sa na prechod z m na $m+1$. Ľavá strana sa vynásobí číslom $(2m+2)/(2m)$ a pravá číslom 2. Pravá strana rastie rýchlejšie ako ľavá, preto naša nerovnosť bude platiť aj pre všetky ďalšie $m > 3$. (Spoznali ste indukciu? Skúste ju spraviť poriadne.)
Tu by sa ešte patrilo zdôrazniť, že pre každé m väčšie ako 1 platí $(2m+2)/(2m) < 2$. Dôkaz pre nepárne čísla nechávame ako cvičenie pre vás. Nebojte sa nie je to nič ťažké. Celý dôkaz až na nejaké detaily veľmi podobný tomu pre párne čísla.
Už máme potrebnú delostreleckú prípravu na to, aby sme našli rozklad čísla 2008, ktorý bude mať najväčší súčin. Ukázali sme, že všetky činitele budú čísla z množiny $\{2,3,4\}$. Stále však existuje veľmi veľa vyhovujúcich rozkladov (vieme, že ten najlepší, ktorý hľadáme je niekde medzi nimi). Potrebujeme preto nájsť ešte nejakú podmienku na činitele v rozklade. Zoberme si ľubovoľný rozklad čísla 2008 na niekoľko sčítancov.
Napríklad $2008 = 700 \cdot 2 + 200 \cdot 3 + 2 \cdot 4$, ich súčin je potom $2^{700} \cdot 3^{200} \cdot 4^2$. Poďme tento súčin zväčšiť. Opäť nám pomôžu rozklady malých čísel. Keď sme sa hrali s číslom 6 našli sme dva veľmi podobné rozklady, konkrétne $6 = 2+2+2$ a $6 = 3+3$. Pri prvom je súčin sčítancov 8, pri druhom 9. Týmto vlastne vieme nahrádzať tri dvojky v súčte dvoma trojkami, pričom sa nám celkový súčin zväčší.
Náš rozklad sa zmenil na $2008 = 1 \cdot 2 + (200+466) \cdot 3 + 2 \cdot 4$, a súčin bude $2^1 \cdot 3^{200+466} \cdot 4^2$.
Stále to nie je ono. V súčine sa totiž vyskytujú ešte dve štvorky a jedna dvojka, ktoré by sa dali nahradiť. Keďže platí $4 = 2+2$, tak jednu dvojku a jednu štvorku zo súčinu vieme zmeniť na súčin dvoch trojok. Dostávame rozklad $2008 = (200+466+2) \cdot 3 + 1 \cdot 4$ a súčin je $3^{200+466+2} \cdot 4^1$. Tu sa môžeme zamyslieť nad tým, že číslo 4 vieme nahradiť dvoma dvojkami, pričom sa nám nezväčší súčin. Týmto vlastne dostávame dve riešenia, ktoré sú svojím spôsobom rôzne.

Zrejme je tento rozklad najlepší, keďže v množine $\{2, 3, 4\}$ už nevieme vymyslieť žiadne zväčšenie súčinu pri zachovaní súčtu.

<u>Úloha č. 4:</u> *Bod P leží vnútri štvorca $ABCD$. Označme p a q rovnobežky so stranami tohto štvorca prechádzajúce bodom P. Ďalej označme r a s rovnobežky s uhlopriečkami štvorca opäť prechádzajúce bodom P. Priamky p, q, r a s celkovo rozdelia štvorec $ABCD$ na 8 častí. Ofarbime teraz tieto časti striedavo modrou a červenou farbou tak, aby každé dve časti susediace stranou mali rôznu farbu. Dokážte, že súčet obsahov častí, ktoré sú ofarbené na modro, je polovica z obsahu štvorca $ABCD$.*

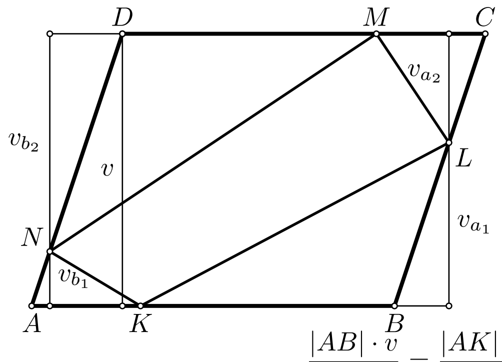
<u>Riešenie:</u> (opravoval Aďa, Mišáč)
Rozoberme si najprv nasledujúce špeciálne prípady.
1. P leží na osi niektorej strany štvorca,
2. P leží na niektorej diagonále.
V prvom prípade je obrázok symetrický podľa osi strany, na ktorej bod P leží. Po zafarbení zistíme, že vďaka symetrii má každý útvar jednej farby príslušný rovnaký útvar opačnej farby. Preto je súčet obsahov červených častí rovnaký ako súčet obsahov modrých častí. Keďže súčet všetkých ôsmich častí tvorí obsah celého štvorca, tak súčet modrých častí tvorí polovicu obsahu štvorca. Prvý prípad sme zdôvodnili. Druhý prípad sa zdôvodní podobne. Diagonála, na ktorej bod P leží, je osou súmernosti pre vzniknuté útvary vo štvorci. Záver zdôvodníme rovnako ako v prvom prípade.
Pokiaľ bod P neleží na žiadnej osi strany ani na diagonále, priamky p, q, r, s rozdelia štvorec na trojuholníky a lichobežníky. Navyše, všetky trojuholníky sú rovnoramenné, pravouhlé a všetky lichobežníky sú pravouhlé, pretože v obrázku máme len pravé a 45-stupňové uhly, keďže všetky priamky sú buď rovnobežné so stranami štvorca alebo jeho diagonálami.
Označme si priesečníky strán štvorca a priamky p P_1 a P_2, podobne s priamkami q, r, s. V tomto prípade vieme vždy nájsť dva najmenšie zhodné trojuholníky, ktoré majú spoločnú stranu. Ležia pri strane štvorca, ku ktorej je bod P najbližšie. Preto si rozdeľme štvorec pomocou diagonál a osí strán na osem zhodných trojuholníkov a vnútri niektorého z nich zvoľme bod P. My sme si ho zvolili v pravom hornom rohu (ako na obrázku). Keďže všetky trojuholníky v obrázku sú rovnoramenné pravouhlé, a navyše tieto majú spoločnú stranu, sú zhodné. V našom prípade sú to P_2PS_1 a P_2PR_2. Označme si veľkosť ramena takéhoto trojuholníka a. Potom $|S_1P_2| = |P_2R_2| = a$. Takisto $|Q_1B| = a$ a $|Q_2C| = a$, lebo PP_2BQ_1 a PP_2CQ_2 sú obdĺžniky. Zvyšné úseky na strane BC si označíme $|BS_1| = b$ a $|R_2C| = c$.
P_1P_2CD je obdĺžnik, preto $|P_2C| = |P_1D| = a + c$. Podobne $|BP_2| = |AP_1| = a + b$, $|P_1P| = a + b + c$.
PP_2CQ_2 je obdĺžnik, takže $|P_2C| = |PQ_2| = a + c$. Ďalej vieme, že trojuholník PQ_2S_2 je rovnoramenný, takže aj $|Q_2S_2| = a + c$. Podobne platí $|BP_2| = |Q_1P| = |Q_1R_1| = a + b$.
Na strane BC vidíme, že strana štvorca $ABCD$ má dĺžku $2a + b + c$, preto vieme doplniť chýbajúce úseky na ostatných stranách – $|AR_1| = c$ a $|DS_2| = b$.
Teraz už vieme vyjadriť obsahy všetkých útvarov vo štvorci. Označme lichobežník P_1PS_2D ako U_1 a zvyšné útvary U_2, $U_3, \dots,$ U_8 postupne v smere hodinových ručičiek. Stačí nám vyjadriť obsah útvarov U_1, U_3, U_5 a U_7 (alebo tých ostatných) a celkový obsah štvorca. Dostávame

$$S_{U_1} = \frac{(a + 2b + c).(a + c)}{2}, \quad S_{U_3} = \frac{(a + 2c).a}{2}, \quad S_{U_5} = \frac{a^2}{2}, \quad S_{U_7} = \frac{(a + b)^2}{2}.$$

Ak to sčítame dokopy a upravíme, dostaneme súčet obsahov týchto útvarov rovný $2a^2 + b^2/2 + c^2/2 + 2ab + 2ac + bc$. Polovičný obsah štvorca $ABCD$ je $(2a + b + c)^2/2$, čo je tiež $2a^2 + b^2/2 + c^2/2 + 2ab + 2ac + bc$. Vidíme, že súčet obsahov útvarov U_1, U_3, U_5 a U_7 je polovica obsahu štvorca, čo sme chceli dokázať.

<u>Úloha č. 5:</u> *Na stranách rovnobežníka $ABCD$ zvoľme postupne body K, L, M, N (na každej strane jeden) tak, že $KLMN$ je štvoruholník s dvakrát menším obsahom ako $ABCD$. Ukážte, že aspoň jedna z uhlopriečok štvoruholníka $KLMN$ je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali JeFo a ZuzkaC.)
Najskôr si dobre uvedomme, čo ideme dokazovať a z čoho máme vychádzať. V zadaní je napísané, že obsah štvoruholníka $KLMN$ je polovica obsahu rovnobežníka $ABCD$ a z toho máme dokázať, že aspoň jedna uhlopriečka štvoruholníka $KLMN$ je rovnobežná so stranami štvoruholníka $ABCD$. Preto nie je najlepší nápad nakresliť si obrázok, na ktorom sú uhlopriečky už rovnobežné a z toho dokázať, že potom je obsah štvoruholníka $KLMN$ polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$. Toto tvrdenie sa síce dokazuje veľmi pekne a jednoducho, no nie je to to, čo chceme. Nás zaujíma opačná implikácia, pozor na to.



Tak a poďme na dôkaz. Obsah rovnobežníka vypočítame ako $|AB| \cdot v$, kde v označuje výšku na stranu AB. Vzhľadom na to, že obsah štvoruholníka $KLMN$ je polovica obsahu rovnobežníka $ABCD$, tak rozdiel ich obsahov musí byť tiež polovica obsahu rovnobežníka $ABCD$. Najprv sa pozrieme na obrázok a vidíme, že rozdiel musí byť súčtom obsahov trojuholníkov AKN, KBL, LCM a NMD. To znamená, že $S_{\triangle AKN} + S_{\triangle KBL} + S_{\triangle LCM} + S_{\triangle NMD} = S_{KLMN} = \frac{S_{ABCD}}{2}$. Obsah trojuholníka vypočítať vieme, tak môžeme napísať

$$\frac{|AB| \cdot v}{2} = \frac{|AK| \cdot v_{a_1}}{2} + \frac{|KB| \cdot v_{b_1}}{2} + \frac{|CM| \cdot v_{b_2}}{2} + \frac{|MD| \cdot v_{a_2}}{2}.$$

Ak $|AB|$ nahradíme $|AK|+|KB|$ a v nahradíme $v_{a_1}+v_{a_2}$ tak sa použitím ekvivalentných úprav dopracujeme k rovnici $|AK|\cdot v_{a_2}+|KB|\cdot(v_{a_1}+v_{a_2}) = |KB|\cdot v_{b_1}+|CM|\cdot v_{b_2}+|MD|\cdot v_{a_2}$. Teraz môžeme nahradiť súčet $v_{a_1}+v_{a_2}$ súčtom $v_{b_1}+v_{b_2}$ a ďalšími ekvivalentnými úpravami sa dopracujeme k rovnici $v_{a_2} \cdot (|AK| - |MD|) = v_{b_2} \cdot (|CM| - |KB|)$. Použijeme ešte rovnosť $|AK| + |KB| = |CM| + |MD|$, z ktorej si vyjadríme $|CM| = |AK| + |KB| - |MD|$. Po dosadení dostávame $v_{a_2} \cdot (|AK| - |MD|) = v_{b_2} \cdot (|AK| - |MD|)$. Môžu nastať dve možnosti. Prvou je, že platí $|AK| = |MD|$. Potom ale uhlopriečka KM musí byť rovnobežná s AD. Ak $|AK| \neq |MD|$, tak potom môžeme rovnicu vydeliť $(|AK| - |MD|)$ a dostaneme rovnosť $v_{a_2} = v_{b_2}$, z ktorej už vyplýva, že uhlopriečka NL je rovnobežná s DC. (Dobre si rozmyslite prečo.) Ukázali sme, že ak je obsah štvoruholníka $KLMN$ polovica obsahu rovnobežníka $ABCD$, tak potom musí byť aspoň jedna uhlopriečka štvoruholníka $KLMN$ rovnobežná so stranami rovnobežníka $ABCD$.

Ukázali sme si priamy dôkaz. Uvedomme si ale, že to, čo dokazujeme, je vlastne implikácia

$$S_{KLMN} = \frac{S_{ABCD}}{2} \Longrightarrow (KM \parallel AD) \vee (LN \parallel AB).$$

Úloha sa dala riešiť aj nepriamo – dôkazom obmenenej implikácie. Budeme predpokladať, že v štvoruholníku $KLMN$ ani jedna strana nie je rovnobežná so žiadnou stranou $ABCD$ a z toho ukážeme, že potom obsah $KLMN$ nie je polovicou obsahu $ABCD$. (Načrtnite si túto situáciu.) Bodmi K, M veďme rovnobežky k, m so stranou AD a bodmi L, N veďme rovnobežky l, n so stranou AB. Označme teraz priesečníky priaok k a l, l a m, m a n, n a k postupne P, Q, R a S. Všimnime si teraz rovnobežník $AKSN$. AK je jeho uhlopriečkou, preto ho delí na dva trojuholníky s rovnakým obsahom, pričom jeden z týchto trojuholníkov leží v štvoruholníku $KLMN$ a druhý nie. Analogickú úvahu možno urobiť aj pre rovnobežníky $KBLP$, $QLCM$, $NRMD$. Ak vezmeme do úvahy celkovú plochu týchto štyroch rovnobežníkov, polovica z nej leží v štvoruholníku $KLMN$ a polovica nie. V strede nám ale ostal štvoruholník $PQRS$, ktorý má nenulový obsah a patrí štvoruholníku $KLMN$, preto $S_{KLMN} > S_{ABCD}/2$. A to je to, čo sme chceli dokázať. Dôležité je poznamenať, že toto je iba jeden z možných prípadov, ktoré tu môžu nastať. Pri inom rozostavení bodov K, L, M, N sa môže stať, že sa nám niektoré zo spomínaných štyroch rovnobežníkov budú prekrývať a v tom prípade bude platiť $S_{KLMN} < S_{ABCD}/2$. Existujú ešte iné možnosti? Skúste si dobre premyslieť, prečo nie. A to je všetko - úloha je vyriešená! Na túto diskusiu na záver ste mnohí zabudli, a to je škoda. Nabudúce na to treba poriadne myslieť.

Úloha č. 6: *Nech n je prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 1. Uvažujme nerovnosť*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú ľubovoľné nezáporné reálne čísla.
a) Dokážte, že daná nerovnosť platí pre $n = 2$.
b) Nájdite všetky ďalšie n, pre ktoré je nerovnosť splnená.

Riešenie: (opravoval Kubo, Ika)

V prípade, že by daná nerovnosť platila pre všetky n, tak by sme sa pokúsili o dôkaz indukciou. Prvý indukčný krok by bol jednoduchý, no druhý sa vám už nepodarí. (Vyskúšajte si to.) Nevzdávame sa a pustíme sa opačným smerom, hľadať n pre ktoré nerovnosť neplatí. S trochou snahy (a intuície) sa dá nájsť nájsť prípad $n = 6$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_5 = 1$, $a_6 = 2$. Po prečítaní zvyšku riešenia sa vám táto voľba bude zdať prirodzenejšia. Rovnako pre ľubovoľné $n \geq 6$ platí opačná nerovnosť, ak dosadíme $a_1 = a_2 = \cdots a_{n-1} = 1$, $a_n = 2$.

Ako vidíme, množinu čísel n, pre ktoré nerovnosť môže platiť, sme zúžili na $\{2, 3, 4, 5\}$. Usilovný riešiteľ sa na tomto mieste potešil, že už má dokázať len 4 nerovnosti a o chvíľu (možno dlhšiu) pribaľoval ďalšie deväťbodové riešenie do obálky. My sa na to pozrieme všeobecnejšie. Roznásobením pravej strany nerovnosti dostaneme

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \quad \geq \quad a_1a_n + a_2a_n + \cdots + a_{n-1}a_n$$

a po odčítaní pravej strany a jednoduchej úprave získame

$$\begin{aligned} a_1(a_1 - a_n) + a_2(a_2 - a_n) + \cdots + a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n^2 &\geq 0, \\ a_1(a_1 - a_n) + a_2(a_2 - a_n) + \cdots + a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) &\geq -a_n^2. \end{aligned}$$

Na ľavej strane teraz máme súčet $n-1$ podobných výrazov. Každý z nich skúsime ohraničiť zdola. Výraz $a_i(a_i-a_n)$ je kvadratický v premennej a_i. Keďže sa rovná nule pre $a_i = 0$ a $a_i = a_n$, tak minimálnu hodnotu nadobúda pre $a_i = a_n/2$. Tá hodnota je presne $-a_n^2/4$. Použitím tohoto odhadu dostávame

$$a_1(a_1-a_n)+a_2(a_2-a_n)+\cdots+a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \geq \underbrace{-\frac{a_n}{4}^2 - \frac{a_n}{4}^2 - \frac{a_n}{4}^2 \cdots - \frac{a_n}{4}^2}_{n-1} = -\frac{n-1}{4}a_n^2.$$

Teraz nám stačí dokázať

$$\begin{aligned} -\frac{n-1}{4}a_n^2 &\geq -a_n^2, \\ \frac{n-1}{4} &\leq 1, \\ n &\leq 5. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že pre $1 < n \leq 5$ nerovnosť platí. Odpoveď v časti b) je $n \in \{2,3,4,5\}$.
Čo dodať. Systematicky sme šli za svojim cieľom, až kým sme nezožali šťavnaté plody úspechu. V tomto prípade šlo o rozpoznanie a vymedzenie okrajového prípadu, kde vstupné hodnoty mohli narušiť platnosť nerovnosti. Ešte by sme radi dali do pozornosti *Fórum o príkladoch* na stránke KMS kde nájdete iný pohľad na riešenie. (Ďakujeme Mišofovi.)

Úloha č. 7: *Klokan má karty, na ktorých sú čísla od* 1 *po* n. *Pozrie sa na prvú kartu. Ak je na nej číslo* k, *zmení zrkadlovo poradie prvých* k *kariet. Takto pokračuje až kým nedostane na prvej karte číslo* 1. *Musí sa mu to vždy po konečnom počte krokov podariť?*

Riešenie: (opravovali Ondro a Katka)
Najprv by sme sa radi ospravedlnili za nejednoznačné zadanie. Myslené bolo tak, že klokan má n kariet, na ktorých sú čísla od 1 po n, každé práve raz. Našťastie väčšina to pochopila správne.
Viacerí z vás písali, že sa zahrali na klokanov a sami nejaké tie karty otáčali. Nič lepšie na začiatok riešenia tohoto príkladu nemôžeme odporučiť. Pri prekladaní sa dajú všimnúť rôzne veci. Napríklad to, že ak sa na prvé miesto dostane karta s veľkým číslom, po otočení sa dostane na vysokú pozíciu. Aby sme ňou ešte niekedy pohli, budeme potrebovať na prvom mieste kartu s ešte väčším číslom. Ďalej ste si mohli všimnúť, že sa väčšinou celkom skoro dohráte, pretože sa na prvom mieste zjaví karta s číslom jedna. Tak sa to pokúsime dokázať.

Prvé riešenie: Použijeme dôkaz sporom. Nech existuje také n a také rozloženie kariet, že klokan nikdy nedostane kartu s číslom jedna na začiatok. Počet rôznych poradí kariet je konečný ($n!$), preto sa nám určite stane, že nejaké rozostavenie klokan uvidí aspoň dvakrát. Medzi tými dvoma razmi je nejaká postupnosť poradí, ktorá sa bude stále opakovať do nekonečna. Dôvod je jednoduchý, každé poradie kariet jednoznačne určuje v akom poradí budú karty v ďalšom kroku. Z toho vieme, že aj karty na prvom mieste sa musia periodicky striedať až do nekonečna. Vyberme spomedzi nich takú, ktorá má najväčšie číslo a označme ho m. Keď sa v prvom cykle dostane karta s číslom m na prvú pozíciu, v nasledujúcom ťahu už bude na m-tej pozícii. V ďalšom cykle sa musí karta s číslom m znova dostať na prvú pozíciu, čo ale znamená, že medzitým sa na ňu musela dostať karta s číslom väčším ako m. To je spor s výberom m ako najväčšej karty vystupujúcej v cykle. Tým sme dokázali, že klokan vždy skončí.

Druhé riešenie: Karta s číslom n sa môže dostať na prvú pozíciu maximálne raz. Potom už zostane na konci. Karta s číslom $n-1$ sa na prvú pozíciu dostane maximálne dvakrát. Po prvom raze skončí na pozícii $n-1$ a aby sa z tadiaľ ju dokáže premiestniť jedine karta s číslom n, ktorá dojde na prvú pozíciu. To sa stane najviac raz, preto pre kartu s číslom $n-1$ najviac dvakrát. Podobne pre kartu $n-2$, platí, že mezdi ľubovoľnými dvoma momentami, keď sa dostane na prvú pozíciu sa na ňu musí dostať nejaká karta s vyšším číslom. Postupne vieme dokázať, že pre ĺubovoľné k, $1 < k \leq n$ sa karta k môže dostať na prvú pozíciu len konečný počet krát. Mezdi každým jej výskytom na tej pozícii sa tam totiž musí vyskytnúť karta s vyšším číslom a tie tam prídu len konečný počet krát. (Formálne je to konečná indukcia smerom nadol od n po 2). Preto po nejakom konečnom čase musí prísť na prvé miesto karta s číslom jedna.

Tretie riešenie: Označme P_0 poradie kariet na začiatku. Po prvom kroku nech je to P_1, ďalej P_2, P_3, …Poradie kariet si *ohodnotíme* funkciou g. Hodnotu $g(P)$ pre poradie P získame tak, že pre každé k, $1 \leq k \leq n$ prirátame 2^k ak karta s číslom k je na pozícii k. Vlastne by sme mohli pod karty, ktoré majú takú hodnotu na akej sú pozícii napísať číslo 1 a pod ostatné 0. Ak ich máme zoradené správnym smerom, tak pod kartami máme napísanú hodnotu $g(P)$ v dvojkovej sústave. Prečo sme to robili? Pretože teraz sami ľahko dokážete[1], že

$$g(P_0) \leq g(P_1) \leq g(P_2) \leq \cdots$$

a rovnosť nastane len vtedy, keď je na prvej pozícii karta 1. Keďže $g(P) < 2^{n+1}$, tak táto neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel musí byť od nejakého členu konštantná, čo neznamená nič iné, ako kartu s číslom jedna na prvej pozícii.

[1] Stačí si uvedomiť, že ak máme na prvej pozícii kartu s číslom $k > 1$, tak po tom ťahu možno z hodnoty funkcie g odrátame všetky tie menšie hodnoty $(1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1)$, ale určite prirátame hodnotu, ktorá je väčšia, a to 2^k

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Nech $a_1, a_2, \dots, a_{83}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \cdots b_{83},$$

kde b_i je väčšie z čísel $\{1, a_i\}$ pre $i = 1, 2, \dots, 83$.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Rúža a Stanka)

Táto úloha sa dá vyriešiť mnohými spôsobmi. Číslo 83 naozaj nie je ničím výnimočné, preto sa kľudne môžete pustiť do dokazovania všeobecnejšieho tvrdenia

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (n-1) + b_1 b_2 \cdots b_n,$$

na ktoré už vieme použiť matematickú indukciu. My však budeme postupovať priamo a ponecháme $n = 83$. Na začiatok urobíme malý trik. Definujeme čísla c_i, $1 \leq i \leq 83$ tak, aby $b_i = 1 + c_i$. Potom vieme, že $c_i \geq 0$, ale aj $1 + c_i \geq a_i$. Potom platí

$$b_1 b_2 b_3 \cdots b_{83} = (1 + c_1)(1 + c_2) \cdots (1 + c_{83}) = 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{83} + Z,$$

kde Z je nezáporné číslo—súčet ostatných členov, ktoré vzniknú roznásobením všetkých zátvoriek. Z toho vieme, že

$$b_1 b_2 b_3 \cdots b_{83} \geq 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{83}.$$

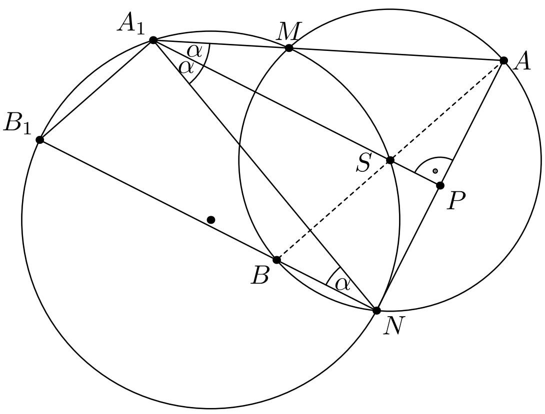
Pričítaním 82 na obe strany dostávame

$$82 + b_1 b_2 b_3 \cdots b_{83} \geq (1 + c_1) + (1 + c_2) + \cdots + (1 + c_{83}) \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{83},$$

čo sme chceli dokázať.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Nech k a ℓ sú dve kružnice také, že stred S kružnice k leží na kružnici ℓ. Navyše sa kružnice k a ℓ pretínajú v dvoch rôznych bodoch M a N. Nech AB je ľubovoľný priemer kružnice k taký, že $|AM| > 0$ a $|BN| > 0$. Označme (v tomto poradí) A_1 a B_1 druhé priesečníky priamok AM a BN s kružnicou ℓ. Dokážte, že dĺžka úsečky A_1B_1 je rovná polomeru kružnice k.*

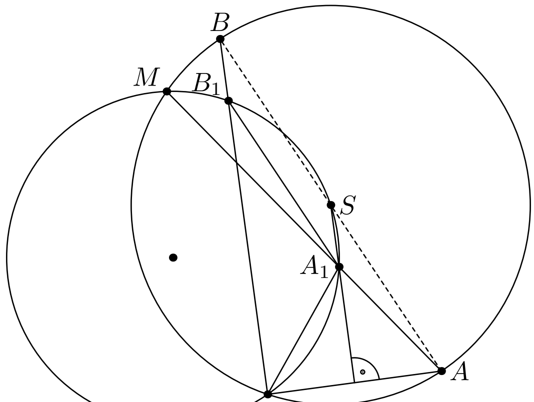
<u>Riešenie:</u> (opravovali Ivka a Kenny)



Úlohu bolo možné vyriešiť viacerými spôsobmi, my skúsime využiť rovnobežnosť, stredové a obvodové uhly. Po chvíľke kreslenia obrázkov zistíme, že ak sa zamyslíme nad úlohou hociako, vždy treba rozoberať viacero možností. Pozrime sa preto na prvý obrázok a poďme dokazovať naše tvrdenie.

Počas kreslenia obrázkov sme získali podozrenie, že A_1S a B_1N sú rovnobežné. Zamyslíme sa nad tým, ako by nám táto rovnobežnosť mohla pomôcť. (Neskôr ju aj dokážeme.) Z rovnobežnosti zistíme, že uhly SA_1N a A_1NB_1 sú striedavé, čiže zhodné. Tieto uhly sú obvodové uhly k úsečkám SN a A_1B_1, z čoho vyplýva, že $|A_1B_1| = |SN| = r$, čo sme chceli dokázať. (Písmenom r budeme označovať polomer kružnice k.) Stačí nám preto ukázať len rovnobežnosť priamok A_1S a B_1N.

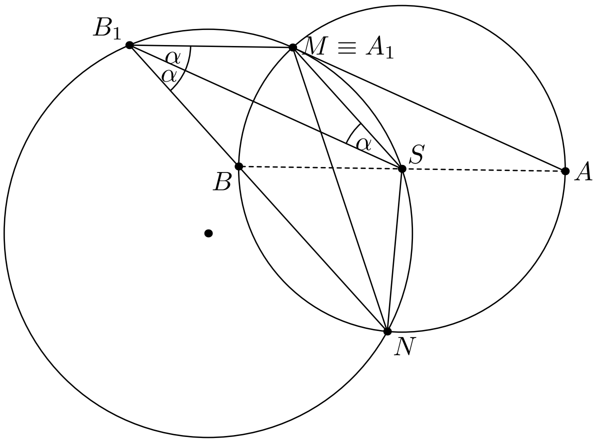
Keďže úsečky MS a NS majú rovnakú veľkosť, budú mať aj obvodové uhly MA_1S a NA_1S rovnakú veľkosť. Trojuholník AA_1N je preto rovnoramenný. Z toho vyplýva, že priamka A_1S je os úsečky AN. Keďže os úsečky je kolmá na úsečku, uhol A_1PN je pravý. Z toho, že AB je priemer kružnice k dostávame, že aj uhol ANB je pravý. Preto sú priamky A_1S a $BN \equiv B_1N$ rovnobežné.



Môže sa stať, že predchádzajúce úvahy nebudú platiť? Áno môže, ak budú body S, A_1, B_1, N na kružnici ℓ v inom poradí. (To znamená, ak bude bod A_1 alebo B_1 medzi bodmi S a N – rozmyslite si prečo.) Potom, po ukázaní rovnobežnosti priamok A_1S a B_1N už nebudú uhly NA_1S a A_1NB_1 striedavé. To nám však nebude vadiť, pretože platí $|\sphericalangle NA_1S| = 180^\circ - |\sphericalangle A_1NB_1|$, čo znamená, že tieto obvodové uhly prislúchajú rovnako veľkým tetivám, preto $|NS| = |A_1B_1|$.

Ešte sa musíme zamyslieť či sa nám v tomto prípade pokazí aj dôkaz rovnobežnosti A_1S a B_1N. Ľahko zistíme, že v prípade, ak je A_1 medzi S a N, uhly MA_1S a NA_1S už nie sú rovnaké, no myšlienka dôkazu sa nezmení. (Dokončite si ho.)

Zamyslíme sa nad tým, ktoré možnosti sme ešte nerozobrali. Začali sme tým, že A_1, B_1 boli na oblúku MN neobsahujúcom S, pokračovali tým, že A_1 alebo B_1 bolo na oblúku MN obsahujúcom S. Sú to všetky možnosti? Rozmyslite si prečo.



Posledná vec, nad ktorou sa musíme zamyslieť, sú „hraničné body“ týchto prípadov. Prípady, keď je bod A_1 na mieste N alebo S, nie sú ťažké. (Rozmyslite si ich. Zamyslite sa nad pozíciou bodu B_1.) Môže byť A_1 na mieste M? Jedine vtedy, ak je AM dotyčnica ku kružnici ℓ. Poďme teraz vyriešiť tento prípad. ¡F4¿ Označme $|\sphericalangle MB_1S| = \alpha$. Potom aj uhol SB_1N má veľkosť α pretože $|MS| = |NS|$. Uhol AMN je úsekový k uhlu MB_1N, preto $|\sphericalangle AMN| = 2\alpha$. Tiež platí, že $|\sphericalangle ABN| = 2\alpha$, pretože oba tieto uhly sú obvodové nad tetiovou AN. Keďže $|\sphericalangle MB_1N| = |\sphericalangle SBN|$, tak priamky B_1M a BS sú rovnobežné. Z tejto rovnobežnosti vyplýva, rovnosť uhlov MB_1S a B_1SB. (Striedavé uhly.)

Ak sa ešte chvíľku budeme hrať s veľkosťami uhlov, zistíme, že uhol MSB má veľkosť 2α. (Dostaneme to z toho, že uhol AMS je úsekový k uhlu MB_1S.) Z toho ale už vyplýva, že uhol MSB_1 má veľkosť α, čo sme chceli ukázať, pretože potom musia byť tetivy B_1M a MS rovnako veľké. A keďže M je A_1 a MS je polomer kružnice k, dostávame tvrdenie zo zadania.

Komentár: Na úplne korektné dokázanie tejto úlohy ste museli rozobrať viacero možností. Rozhodli sme sa dávať dosť bodov (viac ako polovicu) aj za rozobratie jednej možnosti, no plný počet ste mohli dostať len vtedy, ak ste vyriešili všetky prípady. Bohužiaľ väčšina z vás ani len nespomenula, že iný prípad ako ste rozobrali existuje.

Úloha č. 10: *Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existujú kladné celé čísla n, x, y spĺňajúce rovnosť*

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Riešenie: (opravovali Hanka a Myrec)

Prvé riešenie: (Podľa *Tomáša Peitla.*) Začneme tým, že výraz $x^3 + y^3$ rozložíme na súčin $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Pretože sa to má rovnať mocnine prvočísla p, tak aj $(x + y)$ aj $(x^2 - xy + y^2)$ sa musia rovnať nejakej mocnine p. Označíme si

$$\begin{aligned} x + y &= p^r, && (1) \\ x^2 - xy + y^2 &= p^s, && (2) \end{aligned}$$

vyjadríme si y z (1) a dosadíme do (2). Po pár úpravách dostaneme

$$3x^2 - 3p^r x + p^{2r} - p^s = 0.$$

Ak má táto rovnica mať riešenie x, tak jej diskriminant nesmie byť záporný, preto

$$0 \le D = 9p^{2r} - 4 \cdot 3(p^{2r} - p^s).$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme $4 \ge p^{2r-s}$. (Naozaj si tie úpravy urobte na papier.) Pre $p < 4$ vieme nájsť také x,y a n pre každé vyhovujúce prvočíslo

$$\begin{aligned} 2^1 &= 1^3 + 1^3, \\ 3^2 &= 1^3 + 2^3. \end{aligned}$$

Pre $p > 4$ musí taktiež platiť $D \ge 0$, čo v tomto prípade znamená $2r - s \le 0$. Z toho $2r \le s$ a preto $p^{2r} \le p^s$, čo pomocou (1) a (2) vieme napísať ako

$$\begin{aligned} p^{2r} = (x + y)^2 &\le x^2 - xy + y^2 = p^s, \\ 3xy &\le 0. \end{aligned}$$

Toto nemôže nikdy nastať, lebo x a y sú kladné celé čísla. Takže jediné vyhovujúce prvočísla sú 2 a 3.

Iné riešenie: Začneme rovnako, rozložíme si $x^3 + y^3$ na (1) a (2). Aké môžu byť čísla r a s? Osobitne to najprv vyriešime v prípade, ak je niektoré z nich rovné 0. Vieme, že $(x + y) \ge 2$, lebo sú to kladné celé čísla. Preto musí platiť

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

To je ekvivalentné s $(x - y)^2 = 1 - xy$. Vieme, že $(x - y)^2 \ge 0$, čiže musí platiť $1 - xy \ge 0$. Jediná vyhovujúca možnosť je $x = y = 1$. Vtedy dostaneme $p = 2$ a jedno riešenie je na svete.

Ďalej môžeme uvažovať $r > 0$, $s > 0$. Potom musí platiť

$$\begin{array}{rcl} p & | & x+y \\ p & | & (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \\ p & | & (x^2-xy+y^2)+3xy \\ p & | & 3xy \end{array}$$

Z toho vidíme, že buď $p|3$, $p|x$, alebo $p|y$. Ak $p|3$ tak $p = 3$. (Nájsť nejaké riešenie sa každému podarilo.) Ak $p|x$, tak z toho, že $p|x+y$ vyplýva aj $p|y$. (Toto funguje aj naopak.) Potom môžem x a y zapísať $x = px_0$ a $y = py_0$. Potom

$$x^3 + y^3 = p^3x_0^3 + p^3y_0^3 = p^n.$$

Po vydelení p^3 dostávame obdobu pôvodnej rovnice, len s x_0 a y_0 namiesto x a y. Týmto postupom by sme vedeli znižovať x a y delením p, až kým p nebude deliť xy. Z toho už priamo vyplýva, že jedinými riešeniami sú prvočísla 2 a 3.

Komentár: Použitý postup sa nazýva aj Reductio ad absurdum. Ak by pre $p > 3$ existovalo riešenie, tak by sme postupným delením x a y získavali menšie a menšie riešenia. Nakoniec by sme dostali také, kde by x alebo y bolo nedeliteľné p, čo by znamenalo spor. Dá sa to zdôvodniť ešte jednoduchšie, pomocou extremálneho princípu. Nech pre prvočíslo $p > 3$ existuje nejaké riešenie našej rovnice. Spomedzi všetkých riešení vyberme to najmenšie (také pre ktoré je výraz $x+y$ najmenší). Potom však musí plaiť $p|x, p, y$ a aj x/p, y/p (a $n-3$ namiesto n) bude riešenie, ktoré bude navyše menšie od x, y, čo je spor. Preto riešenia pre $p > 3$ neexistujú.

Úloha č. 11: *Nech $d(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla n^2+n+1, kde n je prirodzené číslo. Dokážte, že nerovnosť*

$$d(n) \geq d(n+1)$$

platí pre nekonečne veľa rôznych prirodzených čísel n.

Riešenie: (opravoval Bus)
Začal by som krátkou poznámkou k riešeniam. Veľké množstvo z vás sa vo svojich riešeniach opieralo o domnienku, že nekonečne veľa z čísel n^2+n+1 budú prvočísla. Žiaľ, ani v jednom z riešení nebol uvedený korektný dôkaz tohto tvrdenia. Pokiaľ by niekoho zaujímalo, či toto tvrdenie v skutočnosti platí, budem vás musieť sklamať – jedná sa o otvorený problém (t.j. odpoveď nie je známa).
Poďme k samotnému vzorovému riešeniu. Pokúsime sa o dôkaz sporom, čiže budeme predpokladať, že nerovnosť je splnená iba pre konečne veľa rôznych n. Potom ale jedno z nich musí byť posledné – označme si ho M. (Pre úplnosť by sme mali dodať, že aspoň jedno také n existuje – napríklad $n = 1$.) Číslo M je preto najväčšie také číslo, že

$$d(M) \geq d(M+1).$$

To ale znamená, že pre všetky $n > M$ už musí platiť

$$d(n) < d(n+1),$$

a keďže hodnoty $d(n)$ sú celé čísla, platí pre $n > M$ dokonca aj

$$d(n) + 1 \leq d(n+1).$$

Sčítaním viacerých takýchto po sebe idúcich nerovností dostaneme všeobecnú verziu, ktorá nás bude zaujímať najviac. Pre všetky prirodzené čísla $n > M$ a k platí:

$$d(n+k) \geq d(n+k-1) + 1 \geq \cdots \geq d(n) + k$$
$$d(n+k) \geq d(n) + k.$$

Zamyslime sa teraz nad tým, koľko môže mať deliteľov číslo n^2+n+1. Vo všeobecnosti musí mať každé prirodzené číslo k menej ako $2\sqrt{k}$ deliteľov. Prečo je to tak? Rozdeľme si všetky delitele čísla k na tie, čo sú menšie ako $\sqrt{k}$, a tie, čo sú väčšie. (V prípade, že je k štvorec, máme ešte tretiu skupinu, v ktorej je len samotné $\sqrt{k}$.) Deliteľov v prvej skupine je určite menej ako $\sqrt{k}$ pretože všetkých prirodzených čísel menších ako $\sqrt{k}$ je menej ako $\sqrt{k}$. Pre deliteľov v druhej skupine zas platí, že každý z nich má svoj pár v prvej skupine – ak je totiž k deliteľné číslom $a > \sqrt{k}$, musí byť deliteľné aj číslom k/a a toto číslo je menšie ako $\sqrt{k}$. Čísel v druhej skupine je rovnako veľa ako čísel v prvej skupine, čiže menej ako $\sqrt{k}$, spolu je všetkých deliteľov čísla k menej ako $2\sqrt{k}$. Zabudli sme ešte rozobrať prípad, keď je k štvorcom a má ako deliteľa samotné $\sqrt{k}$, v tom prípade je však v prvej aj druhej skupine najviac $\sqrt{k}-1$ čísel a náš odhad stále platí.
Ak chceme použiť tento odhad na číslo n^2+n+1, mali by sme z neho nájsť odmocninu

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2,$$
$$n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1.$$

Vidíme, že $n^2 + n + 1$ nie je štvorec, v prvej skupine môže mať najviac n deliteľov, celkovo ich môže mať najviac $2n$, čiže $d(n) \leq 2n$. Nám by sa však oveľa viac hodilo, keby sme mali odhad $d(n) \leq cn$ kde $c < 1$ – prečo, to bude jasné už čoskoro.
Všimnime si, že $n^2 + n + 1$ nie je nikdy deliteľné dvomi ani piatimi – toto si môžte dokázať rozobraním všetkých možností zvyšku čísla n po delení dvomi a piatimi. To znamená, že ani žiaden z deliteľov $n^2 + n + 1$ nemôže byť deliteľný dvomi ani piatimi. (Číslo, ktoré má párneho deliteľa, je určite párne, rovnako to platí pre päťku.) Prvú skupinu deliteľov môžeme trochu okresať. Aby sa nám jednoduchšie počítalo, berme do úvahy len také n, ktoré sú deliteľné desiatimi. V takom prípade môže byť medzi číslami od jedna po n najviac $4n/10$ deliteľov čísla n^2+n+1 čím dostávame, že $d(n) \leq 4n/5$. Podobný odhad by sme vedeli nájsť aj pre n ktoré nie sú deliteľné desiatimi, nebude nám to však treba. Vráťme sa späť k tvrdeniu, ktoré sme dokázali na začiatku vzorového riešenia, že pre každé $n > M$ a k platí

$$d(n+k) \geq d(n) + k.$$

Táto nerovnosť nám hovorí, že číslo $d(n)$ musí pre $n > M$ stále stúpať aspoň o jedna. Zároveň sme však pred chvíľou ukázali, že $d(n)$ by sa malo zväčšovať tak priemerne o najviac štyri pätiny, zdá sa, že by sme mali byť schopní prísť ku sporu. Dosaďme do predchádzajúcej nerovnosti najmenšie možné $n - n = M + 1$, a spravme potom substitúciu $M + 1 + k = m$:

$$d(n+k) \geq d(n) + k$$
$$d(M+1+k) \geq d(M+1) + k$$
$$d(m) \geq d(M+1) + m - M - 1$$

Ak si ešte označíme číslo $d(M+1) - M - 1 = c$, dostávame, že pre každé $m > N$ platí

$$d(m) \geq m + c.$$

Keby číslo c nebolo záporné, mali by sme $d(m) \geq m$ a dosadením ľubovoľného $n > M$ deliteľného desiatimi by sme dostali spor s $d(n) \leq 4n/5$. V prípade že c je záporné, budeme musieť dosadiť za m dostatočne veľké číslo – napríklad $m = -10c$ (čo nám mimochodom zaručí deliteľnosť desiatimi):

$$d(m) \geq m + c$$
$$d(-10c) \geq -10c + c$$
$$d(-10c) \geq -9c > -8c = \frac{4(-10c)}{5}$$

To je opäť spor. Tvrdenie zo zadania musí platiť.

__Úloha č. 12:__ *Kúzelníci Miťo a Mazo si pripravili malé vystúpenie. Na začiatku je v miestnosti s divákmi len Mazo. Diváci uložia n mincí do ľubovoľnej postupnosti znakov a hláv a vyberú si jedno číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mazo potom otočí práve jednu mincu naopak a zavolá Miťa zo zákulisia, ktorý sa z rozloženia mincí snaží uhádnuť, aké číslo si diváci vybrali.*

a) *Dokážte, že ak sa toto kúzlo dá spraviť pre n_1 a n_2, potom sa dá spraviť aj pre $n_1 n_2$.*

b) *Nájdite všetky n, pre ktoré sa toto kúzlo dá spraviť.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
a) Nech sa kúzlo dá spraviť pre n_1 a n_2. Predstavme si, že tých $n_1 n_2$ mincí leží v obdĺžniku $n_1 \times n_2$ (n_1 stĺpcov a n_2 riadkov). Mazo a Miťo sa môžu dohodnúť na nejakej bijekcii medzi množinou $\{1, 2, \ldots, n_1 n_2\}$ a množinou dvojíc (k_1, k_2), kde $k_1 \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ a $k_2 \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$. Keď publikum povie číslo m, tak Mazo zoberie ku m prislúchajúcu dvojicu (k_1, k_2). Pozrime sa na stĺpce a každému priraďme hlavu alebo znak, podľa parity počtu hláv v danom stĺpci.[2] Priradených hláv a znakov je dokopy n_1. Zmenením práve jednej hodnoty vie Mazo podľa predpokladu zanechať informáciu o čísle k_1. To znamená, že tam existuje stĺpec, v ktorom ak zmeníme ľubovoľnú mincu, tak stĺpce budú kódovať číslo k_1. (Samozrejme, kúzelníci sa na tom musia predom dohodnúť.) Analogicky, keď sa pozrieme na riadky, vieme nájsť jeden riadok taký, že zmenením ľubovoľnej mince v ňom budú riadky

[2] Môžete si predstaviť hlavy ako jednotky a znaky ako nuly. Potom to čo robíme je, že sčítame mince v stĺpci a urobíme zvyšok po delení dvoma.

kódovať číslo k_2. Vybraný riadok a stĺpec majú spoločnú jednu mincu, ktorú Mazo otočí. Miťo po príchode zistí zo stĺpcov a riadkov hodnoty k_1 a k_2 a tejto dvojici naspäť priradí hodnotu m. A je to.
b) Miťo po príchode do miestnosti nemá iné informácie ako poradie mincí, preto každé poradie musí presne určovať nejaké číslo od 1 po n, ktoré Miťo povie (a ktoré tiež povedali diváci). Zoberme si tie poradia, ktoré určujú číslo jedna. Ak ich je dokopy k, tak takých poradí, z ktorých sa k nim vieme dostať na otočenie práve jednej mince, je najviac nk. My chceme, aby sa z každého začiatočného poradia ku nim dalo dostať, preto žiadame $nk \geq 2^n$, teda $k \geq \lceil 2^n/n \rceil$. Rovnakú úvahu vieme spraviť pre každú z hodnôt 1 až n. Preto máme aspoň

$$n \left\lceil \frac{2^n}{n} \right\rceil \geq 2^n$$

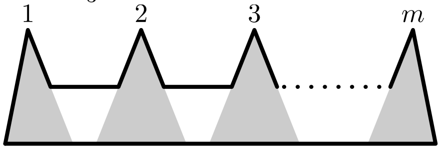
rôznych poradí. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď výraz $2^n/n$ je celočíselný, takže n musí byť mocnina dva. Ak rovnosť nenastáva, dostávame nezmysel, lebo vrcholov nemôže byť viac ako 2^n.
Zostáva už len dokázať, že pre mocniny dvojky to ide. To je však jednoduché, pre $n = 2$ to sami ľahko zvládnete a podľa časti a) to potom ide aj pre mocniny dvojky.

__Úloha č. 13:__ *Stred opísanej kružnice trojuholníka ABC označme O. Priamka prechádzajúca bodom O pretína vnútra strán AB a AC v bodoch M a N. Označme S a R stredy úsečiek BN a CM. Dokážte, že uhly ROS a BAC sú rovnaké.*

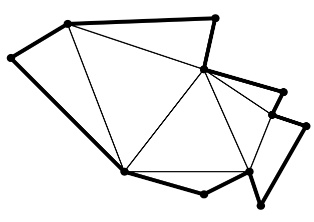
<u>Riešenie:</u> (opravovali Ondráč a Kuna)
Najprv sa zbavíme bodov R a S. Označme postupne X, Y, B', A', C' obrazy bodov M, N, A, B a C v stredovej súmernosti podľa bodu O. Nech ďalej L je priesečník BY a CX. Potom úsečka RO je strednou priečkou v trojuholníku CMX, preto sú priamky RO a CX rovnobežné. Taktiež SO je stredná priečka v trojuholníku BNY, preto sú priamky SO a BY rovnobežné. Zisťujeme, že uhly ROS a CLB sú rovnaké. Našou úlohou je dokázať rovnosť uhlov BLC a BAC, alebo, že L leží na opísanej kružnici trojuholníka ABC[3]. (Je zrejmé, že L leží v správnej polrovine.) Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že L leží mimo kružnice. Potom aj jeho obraz L' v stredovej súmernosti podľa O leží mimo kružnice. Označme L'' priesečník $B'L'$ a kružnice rôzny od B'. Body B, B', L'', C', C, A ležia na kružnici a môžeme na ne (v tomto poradí) aplikovať Pascalovu vetu. Tá hovorí, že priesečníky dvojíc priamok BB' a $C'C$, $B'L''$ a CA, $L''C'$ a AB ležia na jednej priamke. Prvé dva priesečníky poznáme. Sú to O a N. Triviálny prípad $X = O$ si môžete vyriešiť sami. (Trojuholník ABC vtedy musí byť pravouhlý.) Ak $N \neq O$, musí priesečník $L''C'$ a AB ležať na priamke XO a tým pádom sa musia pretínať v bode M. Obe priamky $L''C'$ aj $L'C'$ majú prechádzať bodom M, z čoho máme $L''C' = L'C'$ a preto $L' = L''$. Bod L' leží na kružnici, čo je spor. Dôkaz je hotový.

__Úloha č. 14:__ *Galéria moderného umenia má tvar n-uholníka (nie nutne konvexného). Vedenie galérie sa v nej rozhodlo rozostaviť niekoľko statických kamier so zorným uhlom 360 stupňov. Koľko najmenej (v závislosti od n) kamier potrebujeme, aby sme určite vedeli ustrážiť celú galériu?*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Hanka)
Všetkým je asi jasné, že pokiaľ má miestnosť tvar konvexného mnohouholníka, stačí na stráženie jedna kamera. Dokonca je úplne jedno, kam ju umiestnime. Otázka teraz je, ako veľmi to môžeme „pokaziť“. Zoberme si napríklad taký čudný zúbkovaný útvar ako na obrázku. Všimnime si, že každý z vrcholov 1, 2, $\ldots m$ vidíme len z príslušného vyšrafovaného trojuholníka. Keďže dané trojuholníky sú disjunktné, potrebujeme aspoň m kamier. Takže pre takýto $3m-$ uholník potrebujeme aspoň m kamier. Ak „usekneme“ jeden alebo dva vrcholy, dostaneme galériu s $m-1$ alebo $m-2$ vrcholmi, pričom vidíme, že počet kamier potrebných na pozorovanie celej miestnosti sa zníži o 1, teda bude $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor$. Teraz si ukážeme, že týmto spôsobom sme to „pokazili najviac ako sa dalo“.



Najprv nakreslime do nášho $n-$uholníka $n-3$ nepretínajúcich sa diagonál tak, že vlastne rozdelíme daný $n-$uholník na $n-2$ trojuholníkov. To, že to vždy vieme urobiť si ukážeme neskôr. Teraz sa pozrime na takýto útvar ako na graf; vrcholy $n-$uholníka sú vrcholy grafu a strany $n-$uholníka spolu s uvdokreslenými diagonálami sú jeho hrany.



[3]Odteraz len kružnica.

Tvrdenie: Vrcholy tohto grafu vieme zafarbiť troma farbami tak, že žiadne dva, ktoré sú spojené hranou nebudú mať rovnakú farbu.

Dôkaz: Použijeme indukciu. Pre $n \leq 3$ nie je to triviálne. Pre $n > 3$ si vyberme nejaké dva vrcholy u,v, ktoré sú spojené diagonálou. Táto diagonála rozdelí graf na dva menšie, ktoré oba obsahujú hranu uv. Z indukčného predpokladu oba tieto menšie grafy vieme zafarbiť troma farbami tak, že žiadne dva susedné vrcholy nemajú rovnakú farbu. Dokonca to vieme urobiť tak, že vrcholy u a v budú mať v oboch týchto menších grafoch rovnaké farby. Keď potom spojíme tieto dva menšie grafy vrcholmi u a v dohromady, dostaneme zafarbenie nami požadovaného grafu. Tým je tvrdenie dokázané.
A ako to súvisí s najmenším možným počtom kamier v galérii? :) Kaďže vrcholov máme n, z Dirichletovho princípu je vrcholov aspoň jednej farby najviac $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Čo sa stane keď do týchto vrcholov umiestnime kamery? Každý trojuholník obsahuje vrchol danej farby a teda každý trojuholník môžeme pomocou danej kamery vidieť. A keďže trojuholníky pokrývajú celú galériu, tak sme práve dokázali čo sme chceli. (Premyslite si to poriadne.)
Ešťe nám chýba tá časť, že každý $n-$uholník vieme diagonálami rozrezať na trojuholníky[4] Tento dôkaz nebudeme robiť úplne do detailov, skúste si celú indukciu poriadne premyslieť sami. Urobíme len ten najťažší krok, a to ako z $n-$uholníka, ktorý chceme rozdeliť na trojuholníky urobíme dva menšie útvary (o ktorých to už z indukčného predpokladu môžeme tvrdiť). V podstate potrebujeme ukázať, že tam máme diagonálu, ktorá celá leží v $n-$uholníku. Tak poďme na to. Určite v našom $n-$uholníku máme nejaký vrchol, pri ktorom je uhol menší ako 180° (Súčet uhlov v $n-$uholníku je „len“ $180°(n-2)$.) Vezmime si tento vrchol a jeho susedné vrcholy, ktoré označme B a C. Pokiaľ úsečka BC leží celá vnútri nášho $n-$uholníka, tak sme vyhrali. Ak nie, potom máme v trojuholníku ABC ešte iné vrcholy nášho $n-$uholníka. To čo urobíme je, že budeme akoby posúvať BC smerom k A. Posledný vrchol, na ktorý narazíme spojíme s A. Táto spojnica bude diagonála, ktorá bude celá ležať v danom $n-$uholníku. A máme to, jupí, juchú! :)

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Chlebíková Andrea	4.	Brighton UK	5	0	9	9	9	9		9			45	90
2.	Le Tuan Anh	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9	9				45	89
3.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	6	1		9	9	9	5	9			41	85
4.	Hagara Michal	3.	GJH BA	7	4			9	9	9	9	8		44	84
4.	Kossaczký Igor	4.	Gamča BA	6	1		9	9	8	7	9			42	84
4.	Peitl Tomáš	3.	ŠPMNDG BA	7	2		9	9	9	7	9			43	84
7.	Kukan Marek	3.	Gamča BA	4	0	8	8	9	9		9			43	83
8.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9		2	1		38	82
9.	Szabados Viktor	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9	3				39	78
10.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	8	4			9	9	5	9	4		36	76
11.	Csiba Dominik	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9		9	9	5	4			36	74
12.	Horňák Marián	1.	GPár NR	1	0	9	9	7	9		4			38	73
13.	Sládek Filip	3.	GAB NO	5	4			9	9	9	9			36	72
13.	Večerík Matej	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	9	2	5				34	72
15.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	8	4			9	8	6	9	3		35	71
15.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	6	4			9	9	8	9	1		36	71
17.	Kováč Ondrej	2.	GCM NR	4	0	7	9	8	6		9			39	70
18.	Bačo Ladislav	3.	GPoš KE	8	4			9	9	7	9			34	69
18.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	8	4			9	9	5	8	2		33	69
18.	Hlavatá Martina	2.	Gamča BA	5	0	7	7	5	8		9			36	69
21.	Spišiak Michal	4.	Gamča BA	8	7			9	8	6	7	0		30	64
22.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	4	0	3	8	7	7		5	1		30	63
23.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	3	0	9	3	9	8		2	1		31	62
23.	Šormanová Mária	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	7	2	2	5				25	62
25.	Hozza Ján	2.	GJH BA	3	0	9	6	9	8			1		33	60
25.	Kopf Matúš	3.	Opava ČR	7	2		7	8	8	4	4			31	60
27.	Kozák Andrej	2.	Gamča BA	5	0	9	6		8	5				28	56
27.	Majdiš Mojmír	3.	GPOH DK	5	0		6	9	9					24	56
27.	Matejovičová Lenka	4.	GJH BA	11	7			1	7	5	9	0		22	56
27.	Štyráková Kamila	3.	GPOH DK	7	1		7	9	2	5				23	56
31.	Haas Emil	4.	Gamča BA	8	1		9	9	8	1				27	54

[4] Tento proces sa nazýva aj triangulácia.

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
31.	Karásková Natália	3.	Gamča BA	8	3			9	9	5		1		24	54
31.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	2	0	9	3	8	5		1	0		26	54
34.	Uhrík Jakub	4.	Gamča BA	7	1		6	1	8	5	2			22	53
35.	Hajdinová Katarína	2.	GJH BA	4	0	9	6	2	2	5	1			24	52
36.	Batmendijnová Kristína	4.	GTV SL	7	1		3	9	7	3	1			23	51
36.	Gregor Viktor	3.	GŠkol PB	5	0	7	3		3	1	0			14	51
36.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	3	0	3	6	7	1		1	1		18	51
39.	Bendová Lenka	4.	GJH BA	6	0	7	3		8	5	4	1		27	50
39.	Jursa Jakub	4.	GAlej KE	11	4			9	9	5	4			27	50
41.	Kubincová Petra	2.	ŠPMNDG BA	4	0	7	3	9	3					22	49
41.	Töpfer Jakub	4.	GJK PH ČR	5	3			9	8	1				18	49
41.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	3	0	7	9	7	1					24	49
44.	Bogár Ján	3.	GĽŠ TN	8	2		5	9	2	5				21	47
44.	Polačko Martin	4.	GAlej KE	11	5			9	9		5			23	47
46.	Kieferová Mária	4.	GsvFA ZA	6	1			5	9	5		5		24	45
46.	Midlik Adam	3.	GJAR PO	5	1			9		5				14	45
48.	Bohiniková Alžbeta	2.	Gamča BA	5	0	7	5	0	2		1			15	44
49.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	3	0	8	6	3	6					23	42
50.	Ziman Michal	3.	GBST LC	7	1		4	9	8					21	40
51.	Kuklišová Nina	4.	GMet BA	8	1		9	4		1				14	38
52.	Rigdová Emília	3.	GKuk PP	6	1		2	0		5	4			11	37
52.	Sabatovičová Linda	2.	GJH BA	4	0	7	3		2					12	37
54.	Dižová Andrea	2.	GKom PE	4	0	9	3	0	6		1			19	35
55.	Buchman Marek	2.	ŠPMNDG BA	4	0	3	3			1	1	0		8	34
55.	Múthová Denisa	2.	GbTR ZA	4	0	5	4	0	1	2				12	34
57.	Kotrlová Katarína	4.	GVPT MT	6	0	8	3		0					11	33
57.	Lešková Andrea	3.	G Lipany	6	0	7								7	33
57.	Santer Jakub	2.	GMH Trstená	4	0		9		0					9	33
60.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3	0	1	3	5		5				14	32
61.	Štrbová Silvia	2.	GPár NR	5	0	9	4							13	31
62.	Hašík Juraj	3.	Gamča BA	6	0		6		2					8	30
63.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	10	5				9	3	2			14	29
63.	Krejčír Andrej	2.	GVBN PD	3	0									0	29
65.	Phuong Mariana	2.	GJH BA	4	0									0	26
65.	Polách Juraj	1.	Gamča BA	2	0	0	4		8					12	26
67.	Cocuľová Zuzana	3.	GPoš KE	7	1									0	25
68.	Jakubík Ján	2.	SPŠE PN	4	0	1	3	2		1				7	24
68.	Miškovičová Júlia	2.	GJH BA	2	0	0	1	2		4	3			10	24
70.	Fekiač Jozef	4.	Gamča BA	7	1									0	23
70.	Porembová Alexandra	3.	BiG Sučany	6	1									0	23
72.	Komárková Zuzana	4.	Brno ČR	7	3									0	22
73.	Hudec Vladimír	4.	GVar ZA	7	1									0	21
74.	Eiben Eduard	4.	GPoš KE	9	6			9	6	1	3	1		20	20
75.	Masár Juraj	2.	GBil BA	4	0									0	19
76.	Bogárová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	0								0	18
77.	Baxová Katarína	4.	GĽŠ TN	4	0									0	17
78.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	3	0	4		0						4	16
79.	Jagoš Ľubomír	3.	GVO ZA	6	0									0	13
80.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3	0	0	3	0		2				5	11
81.	Kutaj Tomáš	1.	GJH BA	1	0									0	10
82.	Kobolková Petra	4.	GVPT MT	5	0									0	8
83.	Fodorová Jana	2.	GJGT BB	4	0									0	7
84.	Kubinová Mária	2.	GPOH DK	4	0									0	6
85.	Stripajová Svetlana	4.	GPOH DK	4	0									0	4

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Hozza Ján	2.	GJH BA	3			5	8	9	6	9		73
2.	Belanová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	0	8		8	8		9		68
3.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	3			6	7	7	9	7		65
3.	Vlachynská Petra	1.	GBil BA	1	9	9	5	3		4	1		65
5.	Rečka Marek	1.	1SG BA	1	6	8		2		2	2		55
6.	Mojžišová Hana	2.	GJH BA	3			1		3	3	1		44
7.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	3				8	8	6	3		43
7.	Polách Juraj	1.	Gamča BA	2		7	5		0	4			43
9.	Falťan Michal	1.	1SG BA	1	9	7	4		0	1			42
10.	Karpišová Iveta	1.	Gamča BA	2									41
11.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	3					3	6	7		35
12.	Sopóci Martin	1.	1SG BA	1									28
13.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3					1	3	5		24
14.	Košík Matúš	1.	1SG BA	1									22
15.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	3				3	4		0		17
15.	Hirgelová Mária	1.	ŠPMNDG BA	2									17
17.	Miškovičová Júlia	2.	GJH BA	2					0	1	2		15
18.	Ivanov Alexander	2.	Gamča BA	3									13
19.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3									11
20.	Kutaj Tomáš	1.	GJH BA	1									9
21.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3					0	3	0		7
22.	Košlab Tomáš	2.	GJH BA	3	9	7	1	2	0	2			5

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Horňák Marián	1.	GPár NR	1	9	9	9	8	9	9	7		90
2.	Kosec Peter	1.	GĽŠ TN	1	9	9	4	9	1	3	0		77
3.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	2		9	4	6	7	3	0		60
4.	Baxová Zuzana	1.	GĽŠ TN	1	9	7	6	2	1				59
5.	Koprda Pavol	1.	GAM TT	1	9	9	7	2		1			58
6.	Švančara Patrik	1.	GĽŠ TN	1	9	5	3	2	3				51
7.	Leššová Lívia	2.	GPár NR	3			4		9	3			38
8.	Izsák Dávid	2.	SJG KN	3		6	5	8	7	3	0		37
9.	Krejčír Andrej	2.	GVBN PD	3									13
10.	Rajchlová Barbora	3.	GJab MY	3			1	6		3	0		10

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Jasenčáková Katarína	1.	GVO ZA	2		9	7	8	9	3	5		78
2.	Santrová Adriana	1.	GMH Trstená	1	9	9	5	8		3			74
3.	Vlček Andrej	1.	ESŠ EG JT LM	1	9	9		8	3				72
4.	Galovičová Soňa	1.	GVO ZA	2		9	6	8	9	3	4		66
5.	Halajová Barbora	1.	GVO ZA	2		8	5	8	2	5			58
6.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	3					9	3	9		48
7.	Anderle Michal	2.	GBST LC	2	7	8							43
8.	Matuška Lukáš	2.	GBST LC	2		9	5	3	3	3	0		42
9.	Kajánek František	1.	GJMH CA	1	6	7	2	2	1				29
10.	Kubišová Barbora	1.	GJGT BB	2	5	8	1	1	0	1	0		21
11.	Majerová Karolína	2.	GJCh BR	2		5	2	2	1		0		18

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
12.	Lonský Rafael	1.	GPOH DK	1	1	6	0	1	0				17
13.	Plavák Dušan	1.	GMH Trstená	1		7							16
14.	Sabaka Peter	2.	GJCh BR	2	8	9							13
15.	Buková Nikola	1.	GJGT BB	2		9		1	1		0		11
16.	Piliarkin Marián	1.	GJCh BR	1									7
17.	Latinák Kristián	1.	GJCh BR	1									5
17.	Vojtková Veronika	1.	GJCh BR	1									5
19.	Šišiaková Alena	1.	GJCh BR	1									3
20.	Kuviková Zuzana	1.	GJCh BR	1									2
20.	Maculová Simona	1.	GJCh BR	1									2
22.	Fiľová Lucia	1.	HA BR	1				1	0				1
23.	Beraxa Peter	1.	GJCh BR	1									0
23.	Stankoviansky Tomáš	1.	GJCh BR	1									0
23.	Trnik Erik	1.	GJCh BR	1									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Daniláková Monika	1.	GJAR PO	1	9	7	2	7	5				69
2.	Dupej Peter	1.	GJAR PO	1	9	9	5	2	5	1			58
3.	Marečáková Barbora	1.	GKuk PP	1	9	9	4	7		1	1		52
4.	Klembarová Barbora	1.	GKuk PP	1	6	9	1	1	7	1	1		50
5.	Kmeťová Katarína	1.	GKuk PP	1	3	8	2	2		1	0		45
6.	Faguľová Kristína	1.	GPoš KE	2		9	3	2			1		39
7.	Ficková Klára	1.	GPoš KE	2									30
8.	Bajnoková Lenka	3.	GKuk PP	3									12

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9	3	5	2			33
2.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	8	2	7	0	4		43
3.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	2	1					12
4.	Hagara Michal	3.	GJH BA	9	8					37
5.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	9	4	5				35
6.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	5	1	5		2		25
7.	Sládek Filip	3.	GAB NO	9						28
8.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	9	1	7	6	7		49