Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2008/2009

Úloha č. 1: *Keď bol Ondro malý chlapec, rád chodieval ku svojej starej mame. Jeho stará mama totiž mala rovnoramenné váhy, s ktorými sa dalo hrať. Raz si Ondro doniesol niekoľko rovnakých hrušiek, niekoľko rovnakých broskýň, takisto niekoľko jabĺk a sliviek. Hral sa hral, a prišiel na to, že hruška, slivka, broskyňa a jablko vážia spolu presne toľko, koľko vážia tri jablká. Hral sa ďalej a zistil, že slivka, hruška a jablko sú spolu len o 45 gramov ľahšie ako 5 broskýň. Ešte si všimol, že 11 jabĺk váži presne toľko, čo 17 broskýň. Potom ho to prestalo baviť a kým odišiel od babky, stihol zjesť jednu hrušku a jednu slivku. Koľko gramov ovocia zjedol?*

Riešenie: (opravovala Zuska Molnárová)
Táto úloha naozaj nebola náročná, a to ani na pomery prvej úlohy. Všetci, ktorí sa ju rozhodli riešiť, správne odhalili, že Ondrove pozorovania môžeme zapísať ako rovnice. Potom sa však už riešenia začali líšiť. Niektorí sa vybrali cestou brutálnej sily, ktorá viedla k riešeniu, avšak cestou narazila na dosť nepekné zlomky. Naopak niektorí sa pokúsili čo najviac si situáciu zjednodušiť rôznymi úpravami. My si ukážeme jedno z krajších riešení.
Ondrove pozorovania si vieme zapísať v tvare rovníc

$$
\begin{aligned}
H+S+B+J &= 3J,\\
S+H+J+45 &= 5B,\\
11J &= 17B.
\end{aligned}
$$

Keď tieto rovnice trochu upravíme dostávame

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H & + & S & + & B & - & 2J & = & 0,\\
H & + & S & - & 5B & + & J & = & -45,\\
 & & & - & 17B & + & 11J & = & 0.
\end{array}
$$

Hneď by nám malo udrieť do očí, že máme štyri neznáme a len tri rovnice, čo je problém. Pozrime sa však, na čo sa nás pýta zadanie. Našou úlohou nie je zistiť, koľko vážia jednotlivé ovocia, ale zistiť, koľko vážia hruška a slivka spolu. Ešte si všimnime, že v prvej a druhej rovnici sa vyskytuje súčet $H+S$ a v tretej sa H ani S nevyskytujú. Keďže sa v celej úlohe vyskytujú H a S len ako súčet, môžme sa na $H+S$ pozerať ako na jednu premennú (označíme ju X). A máme po starostiach, lebo sme dostali tri rovnice o troch neznámych

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & + & B & - & 2J & = & 0,\\
X & - & 5B & + & J & = & -45,\\
 & - & 17B & + & 11J & = & 0.
\end{array}
$$

Teraz nám už ostáva len nejako si spríjemniť úpravu tejto sústavy. Tak si pustíme hudbu a odčítame prvú rovnicu od druhej, čím sa úplne zbavíme premennej X. Ostanú nám dve rovnice o dvoch neznámych

$$
\begin{array}{ccccc}
- & 6B & + & 3J & = -45,\\
- & 17B & + & 11J & = 0.
\end{array}
$$

Opäť máme niekoľko možností, ako postupovať, celkom pekné je napríklad vyjadrenie J z prvej rovnice

$$J = 2B - 15.$$

Dosadením do druhej rovnice dostávame $B = 33$, z poslednej spomínanej rovnosti máme $J = 51$. Z prvej Ondrovej rovnice potom dostávame $X + 33 - 2 \cdot 51 = 0$, preto

$$X = H + S = 69.$$

Ondrej zjedol 69 g ovocia.

Úloha č. 2: *Ajka našla na zemi nakreslený kruh a po jeho obvode napísaných 26 čísel. Všimla si, že aritmetický priemer každých troch čísel, ktoré ležia vedľa seba, je vždy rovný číslu 19. Veľmi sa potešila a hneď, ako prišla do školy, to povedala Bebemu. Ten jej povedal, že všetky čísla na obvode kruhu boli rovnaké. To si už ale Ajka nepamätala. Mal Bebe pravdu?*

Riešenie: (opravovali Aďa a Ika)
Prvá vec, ktorá nás napadne po prečítaní zadania je, či Bebe vôbec mohol mať pravdu. Ľahko zistíme, že mohol. Ak by bolo po obvode kruhu napísaných 26 čísel 19, všetko by sedelo. Otázkou teda ostáva, či Ajka mohla nájsť kruh, ktorý má na sebe aspoň dve rôzne čísla.
Predpokladajme najskôr, že máme na kruhu dve rôzne čísla vedľa seba. Označme si ich a, b. Postupujme teraz po kruhu v smere hodinových ručičiek a zisťujme, aké čísla tam musia byť ďalej.
Nech za a, b nasleduje číslo x. Keďže tvoria trojicu, musí platiť $(a + b + x) : 3 = 19$. Odtiaľ ľahko vypočítame $x = 3 \cdot 19 - a - b$. Povedzme, že a bolo prvé, takže v ďalšej trojici nebude. Bude tam b, $3 \cdot 19 - a - b$ a nejaké y. Podobne ako predtým zistíme, že $y = 3 \cdot 19 - b - (3 \cdot 19 - a - b)$, keď sa na to lepšie pozrieme, zistíme, že $y = a$. Tak poďme na ďalšie číslo. Máme trojicu $3 \cdot 19 - a - b$, a a nejaké z, potom $z = 3 \cdot 19 - (3 \cdot 19 - a - b) - a$, a to nie je nič iné ako b. V ďalšej trojici teraz máme a, b a niečo. Táto situácia je nám ale podozrivo povedomá. Niečo zase musí byť $x = 3 \cdot 19 - a - b$. Ďalej to už tiež poznáme. Takže na kruhu sa nám budú opakovať čísla a, b, $3 \cdot 19 - a - b$, a, b, $3 \cdot 19 - a - b$, a, b, $3 \cdot 19 - a - b$, ... To, že sme na kruhu, ale znamená, že raz všetko skončí. Poďme sa teda pozrieť, ako to bude vyzerať, keď táto postupnosť narazí na svoj začiatok. Keďže sme matematici a lepšie počítame než píšeme, nebudeme si na nejaký kruh vypisovať 26 čísel, ale pekne si zrátame, aké vlastne budú posledné dve čísla pred prvým a. Vieme, že $26 : 3 = 8$ zv. 2. To znamená, že sa nám tam zmestí osem celých trojíc a z poslednej trojice len a, b. Keď k tomu pridáme prvé dve čísla postupnosti, dostaneme a, b, a, b. Máme dve trojice a, b, a a b, a, b. Lenže má platiť $(a + b + a) : 3 = 19 = (b + a + b) : 3$ a z toho po pár úpravách dostaneme $a = b$, čo je ale v rozpore s tým, že a, b sú rôzne.
Tak a teraz už len potrebujeme ukázať, že ak sú na kruhu dve rôzne čísla, tak tam musia byť aj dve rôzne čísla pri sebe. Môžeme uvažovať napríklad takto. Nech sú niekde na obvode kruhu napísané dve čísla c a d. Postupujme teraz po obvode kruhu od c k d. Pozrieme sa na prvé číslo za c. Ak je rôzne od c, tak je všetko v poriadku, máme dve rôzne čísla vedľa seba. (To, že to nemusia byť práve c a d nevadí.) Ak je to c, tak pozrieme na ďalšie číslo. Takto postupujeme ďalej a buď cestou narazíme na niečo, čo už nebude c, alebo budeme mať c-éčka až po to d a potom budú zase vedľa seba c a d, ktoré sú rôzne.

Úloha č. 3: *V záhrade rastie pravidelný šesťuholník, ktorý má strany ofarbené po rade svetlomodrou, tmavomodrou, indigovou, belasou, tyrkysovou a teplákovomodrou. Jeho vrcholy sú biele. Na obvode šesťuholníka vyberiem tri body tak, aby z nich mohol vzniknúť trojuholník, pričom žiaden z týchto troch bodov nie je biely. Trojuholník charakterizujem tým, akými farbami sú ofarbené jeho vrcholy. (Teda napr. indigovobelasoindigový trojuholník má dva zo svojich vrcholov na indigovej strane a jeden vrchol na belasej strane.) Trojuholník je charakterizovaný len farbami, nie ich poradím. (Teda napr. tyrkysovo-belaso-teplákový trojuholník je taký istý ako teplákovo-tyrkysovo-belasý.) Koľko existuje trojuholníkov s rôznou charakteristikou?*

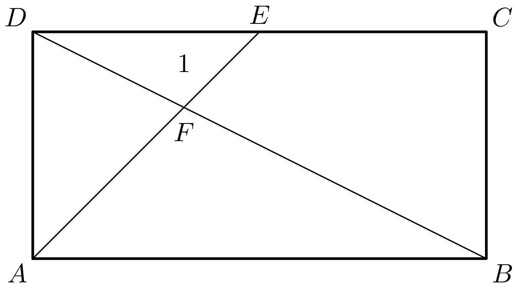
Riešenie: (opravovala Katka P.)
Ak chceme zistiť počet trojuholníkov s rôznou charakteristikou, stačí sa zaoberať farbami ich vrcholov. Keďže ich vyberáme zo strán šesťuholníka, máme pre ne šesť možných farieb. Zo zadania vieme, že biele vrcholy šesťuholníka nevyberáme.
Najprehľadnejšie asi bude, ak si tie trojuholníky rozdelíme. Vidíme, že taký, ktorý by mal všetky tri vrcholy rovnakej farby, určite neexistuje, lebo potom by tieto vrcholy ležali na priamke (strane šesťuholníka) a nebol by to trojuholník. Ďalej môžeme mať trojuholník s dvoma vrcholmi rovnakej farby (1), alebo taký, kde sú všetky tri vrcholy rôzne (2).
Poďme sa najprv venovať prípadu (1). Najskôr si vyberieme farbu dvoch rovnakých vrcholov, na to máme šesť možností a potom farbu toho jedného zvyšného. (Päť možností.) Dokopy je to $6 \cdot 5 = 30$ trojuholníkov takéhoto typu. (Zamyslite sa nad tým, prečo sme žiadny nemohli pri takomto počítaní zarátať viackrát.)
A teraz poďme k prípadu (2). Aj tu môžeme postupovať ako v predošlom prípade, a síce, na výber prvej farby máme šesť, druhej päť a tretej štyri možnosti. To nám dá 120 trojuholníkov. Ale pozor! Podľa zadania ABC je to isté ako CBA alebo CAB, ale my sme ich zarátali všetky. Preto musíme 120 vydeliť počtom možných usporiadaní troch farieb a to je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Potom dostaneme správny výsledok 20.
Toto isté sa dalo urobiť aj jednoduchšie, keď si uvedomíme, že vyberáme neusporiadané trojice zo 6 prvkov, pomocou vzorca na kombinácie:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

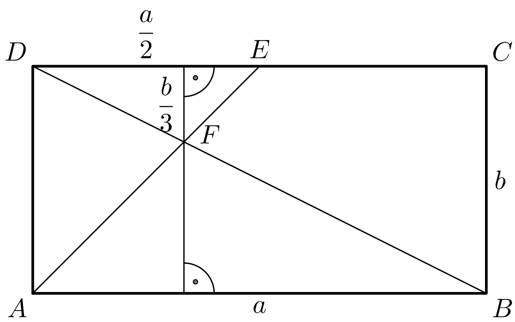
Na záver už asi len dodať, že táto úloha dopadla veľmi dobre. Mnohí z vás ma však sklamali, lebo ju riešili vypisovaním možností. Teraz sa to ešte dalo, ale keby to bol pravidelný stouholník, asi by to nešlo. Preto sa nabudúce skúste nad príkladom viac zamyslieť :)

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Označme E stred strany CD v obdĺžniku $ABCD$ a F priesečník uhlopriečky BD a úsečky AE. Viete, že obsah trojuholníka DFE je $1\,\mathrm{cm}^2$. Zistite aký je obsah štvoruholníka $BCEF$.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Lucka a Kubo)
Ako treba začať geometrickú úlohu? Predsa pekným, veľkým náčrtom.



Označme si dĺžku strany AB ako a a dĺžku BC ako b.
Ná výpočet môžeme použiť podobnosť trojuholníkov DFE a BAF. Tá vyplýva zo zhodností uhlov: $|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle ABF|$ (striedavé), $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle BAF|$ (striedavé) a $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle AFB|$ (vrcholové).
Ešte nám chýba koeficient podobnosti, ktorý vieme určiť z prislúchajúcich strán DE a BA. DE je polovica strany CD a tá je zhodná s AB. Teda aj ich výšky sú podobné s koeficientom 2.
Výšky (na strany ED a AB) sú kolmé na rovnobežné strany obdĺžnika, teda budú rovnobežné s druhým párom strán obdĺžnika, stretajú sa v jednom bode, a teda súčet ich dĺžok bude b.



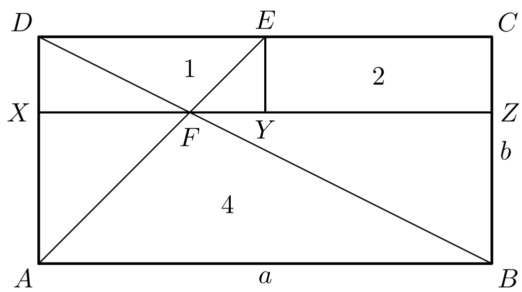
Výška trojuholníka DEF na stranu DE je $b/3$ (kvôli podobnosti s koeficientom 2). A obsah trojuholníka DEF si vyjadríme takto:

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= 1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{1}{2}, \\ 12 &= ab. \end{aligned}$$

A čo je ab? No predsa obsah obdĺžnika $ABCD$. Uhlopriečka BD ho rozdelila na dva zhodné trojuholníky s polovičným obsahom. Ak z trojuholníka BCD uberieme trojuholník DEF tak dostaneme hľadaný útvar, čo nám napovedalo aj ako vypočítať obsah.

$$S_{BCEF} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle DEF} = 6 - 1 = 5.$$

Hurá!!!



<u>Iné riešenie:</u>
Trošku iný spôsob, ako určiť obsah obdĺžnika, začína tiež úvahou o podobnosti trojuholníkov ABF a EDF. Keďže pomer ich strán je $2 : 1$ tak pomer ich obsahov bude $2^2 : 1^2$, z čoho vyplýva že $S_{\triangle ABF} = 4$.
Potom si rozdelíme celý obdĺžnik rovnobežkou so stranou AB cez bod F. Jej priesečník s AD označíme X a priesečník s BC zas Z. Z bodu E spustíme kolmicu na XZ a jej druhý koniec označíme Y. (Uvedomte si, že $EY \| BC$.)
A už len doplníme obsahy vzniknutých obdĺžnikov. Trojuholník ABF je polovica z obdĺžnika $ABZX$, teda jeho obsah je 8. Takisto je trojuholník DEF polovica z $DEYX$ a jeho obsah je teda 2. Ten je zhodný s obdĺžnikom $ECZY$.

$$S_{ABCD} = S_{ABZX} + S_{DEYX} + S_{ECZY} = 8 + 2 + 2 = 12.$$

A už pokračuje úvaha z prvého spôsobu riešenia, teda $S_{\triangle BDC} = S_{ABCD}/2$ a $S_{BCEF} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle DEF}$.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Kráľ mal tri kôpky dukátov. Na prvej bolo 9, na druhej 10 a na tretej 14 dukátov. So svojimi dvoma sluhami hral takúto hru: v každom kole vezme prvý sluha 1 dukát z ľubovolnej kôpky. Druhý sluha vezme dukát z jednej zo zvyšných dvoch kôpok. A kráľ uzatvára kolo pridaním dukátu na kôpku, s ktorou sa v danom kole nič nerobilo. (Samozrejme z kôpky, kde je nula dukátov, sa dukát zobrať nedá.) Po niekoľkých kolách im zostal len jeden dukát. Na ktorej kôpke to mohlo byť?*

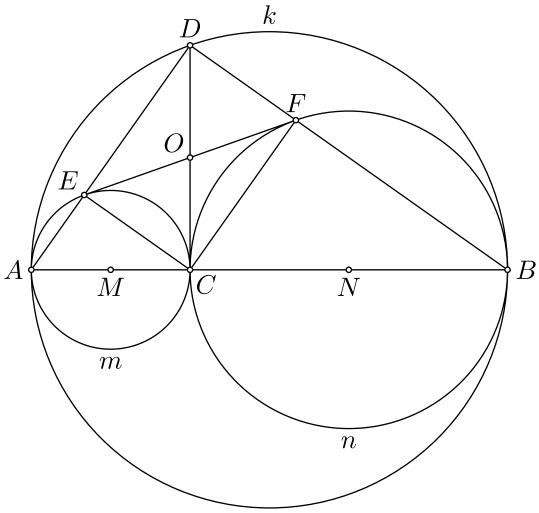
<u>Riešenie:</u> (opravovali Ivka a Kenny)
Ako ste si určite všimli, táto úloha je zadaná ako hra. Skúste si preto zahrať niekoľko kôl tejto hry. Všimnime si, čo sa stane v každom kole. Dvaja sluhovia zoberú z dvoch kôpok po dukáte, kráľ na tretiu kôpku dukát pridá. Z toho vieme zistiť hneď dve vlastnosti tejto hry.

- Po každom kole sa súčet všetkých dukátov na kôpkach zmenší o 1. Na začiatku máme $9 + 10 + 14 = 33$ dukátov, na konci len jeden dukát. Z toho vyplýva, že počet kôl je 32.
- Po každom kole sa počet dukátov na kôpke zmení o jeden. (Buď sa jeden pridá, alebo sa jeden odoberie.) To znamená, že sa zmení parita počtu dukátov na každej kôpke. (Dohodnime sa, že nula je párne číslo.)

Z týchto vlastností už vieme zistiť, na ktorej kôpke mohol ostať jeden dukát. Keďže hra má 32 kôl a v každom kole meníme paritu počtu dukátov na kôpke, na konci hry bude mať každá kôpka rovnakú paritu počtu dukátov ako na začiatku. Preto jediná kôpka, na ktorej mohol ostať jeden dukát, je kôpka s nepárnym počtom dukátov. Správna odpoveď preto je, že dukát ostal na prvej kôpke.
Ak by sme chceli byť dôslední, mali by sme ukázať aj to, že naozaj existuje taký priebeh hry, pri ktorom na konci ostane jeden dukát na prvej kôpke. Skúste si to sami. Jednou z možností ako to dosiahnuť je pridávať dukát na kôpku, ktorá obsahuje najmenej dukátov. (Ak sú také kôpky dve, môžeme si náhodne vybrať jednu z nich.)

Úloha č. 6: *Majme kružnicu k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB leží bod C. Zostrojme kružnice m a n nad priemermi AC a BC a kolmicu na AB cez bod C označme l. Priamka l pretne kružnicu k v dvoch bodoch, ľubovoľný z nich označme D. Úsečky DA a DB pretnú kružnice m a n v bodoch E a F.*
a) Dokážte, že $CFDE$ je pravouholník
b) Dokážte, že EF je spoločná dotyčnica kružníc m a n.

Riešenie: (opravovali Katka a Bus)



Na začiatok vzoráku by bolo dobré spomenúť jednu dôležitú vec. Pri príkladoch z geometrie je veľmi dobré nakresliť obrázok aj do riešenia, ktoré posielate, riešenie je potom oveľa zrozumiteľnejšie :) A teraz k samotnému riešeniu. Vezmime si najprv podúlohu a). Čo je to vlastne ten pravouholník? Je to štvoruholník so štyrmi pravými uhlami. V našom prípade chceme dokázať, že uhly ADB (ktorý sa rovná EDF), DEC, DFC a FCE sú pravé. Väčšina z vás si všimla, že pre trojuholník ABC je kružnica k Tálesova kružnica, čiže $|\sphericalangle ADB| = 90°$. Všimnime si, že podobne sa môžeme dopracovať k uhlom AEC a CFB, keď uvažujeme trojuholníky ACE a CBF a ich Tálesove kružnice m a n. Preto platí, že uhly AEC a CFB sú pravé. No a keďže uhly CED a CFD sú ich doplnkami do 180°, platí $|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CFD| = 90°$. Zostal nám ešte posledný uhol, ECF. Ale keďže súčet uhlov v štvoruholníku je 360°, a naše vypočítané uhly majú spolu 270°, posledný uhol musí byť tiež pravý. Prvá časť úlohy je za nami :)
Druhá časť sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Podstatné bolo všimnúť si, že uhlopriečky, teda úsečky CD a EF, sa rozpoľujú, pretože náš štvoruholník je pravouholník, to znamená obdĺžnik alebo štvorec. Označme si priesečník uhlopriečok O, stred kružnice m M a stred kružnice n N. Úloha sa dala riešiť napríklad tak, že si všimneme zhodnosť trojuholníkov MEO a MCO na základe vety *sss*. (Premyslite si to.) Z toho vidno, že $|\sphericalangle MEO| = |\sphericalangle MCO|$, no a $|\sphericalangle MCO| = 90°$, pretože zo zadania vieme, že $AC \perp CD$. Iný princíp riešenia môže byť založený na výpočte cez uhly na základe rovnoramenných trojuholníkov CAE, CBF, CEF.

Úloha č. 7: *Myrec sa hral na parkovisku s kriedou. Napadlo mu, že by si mohol písať na zem čísla. Keby ich písal zaradom, bolo by to nudné. Preto napísal na betón vedľa seba nejako poprehadzované čísla 1, 2, …, 100. Dostal takto postupnosť čísel $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$. Táto postupnosť sa mu nepáčila, tak si znova zmyslel iné poradie tých istých čísel a opäť ich napísal vedľa seba. Dostal takto postupnosť čísel $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{100}$. Stále sa mu to nepáčilo, ale vymýšľať novú postupnosť čísel sa mu tiež nechcelo. Zistil však niečo zaujímavé. Keď urobil súčiny $a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_{100}b_{100}$, tak medzi nimi našiel také dva, že dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 100. Bola toto náhoda, alebo stalo by sa mu to, nech by postupnosti čísel zvolil akokoľvek?*

Riešenie: (opravovali JeFo a Mišáč)
Na začiatok nezaškodí správne si tipnúť, či išlo o náhodu alebo nie. Čísel v zadaní je až sto, preto si skúšame vypisovať nejaké kratšie postupnosti. (Napríklad z čísel $1,\ 2, \ldots,\ 8$ a berieme zvyšky po delení ôsmimi.) Po určitom čase zrejme dôjdeme k záveru, že to nebola náhoda. Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že existujú také dve postupnosti, že každý zo sto súčinov dáva iný zvyšok po delení číslom 100. (Zvyšky po delení číslom 100 sú $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 99$.) Keďže zvyškov po delení číslom 100 je presne sto, tak každý zo súčinov musí dávať práve jeden z týchto zvyškov. Jediná možnosť ako dosiahnuť, aby súčin dvoch čísel dával *nepárny* zvyšok po delení číslom sto, je zvoliť obidve čísla *nepárne*. Ak by bolo niektoré z čísel v súčine párne, tak aj ich súčin by bol párny a párne číslo dáva párny zvyšok po delení číslom 100. (Premyslite si.) Nepárnych zvyškov je 50, preto 50 zo súčinov musí dávať nepárny zvyšok. Medzi číslami $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{100}$ je 50 nepárnych čísel, jedine tieto čísla môžu byť v súčinoch dávajúcich nepárne zvyšky. Rovnako je to s číslami $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_{100}$. Vidíme, že na nepárne zvyšky spotrebujeme všetky nepárne čísla z oboch postupností. Zvyšné súčiny sú preto súčinmi dvoch párnych čísel, čiže sú deliteľné štyrmi. Takéto čísla aj po vydelení číslom 100 dávajú zvyšok deliteľný štyrmi. (Premyslite si.) To znamená, že žiadny súčin nedáva zvyšok tvaru $4k + 2$ (ako $6, 10, 14, \ldots, 98$). Došli sme k sporu s tým, že tam máme všetky zvyšky. Predpoklad na začiatku bol preto nesprávny a nešlo o náhodu. Vždy nájdeme dva súčiny, ktoré dajú rovnaký zvyšok po delení číslom 100.

Iné riešenie:
Príklad sa dal vyriešiť viacerými spôsobmi. Ak postupujeme dôkazom sporom ako v prvom riešení, tak stovky musíme vynásobiť spolu. (Rozmyslite si prečo.) Potom sa zaujímame, aké zvyšky dávajú súčiny, v ktorých jeden činiteľ je číslo 50. Ak vynásobíme číslo 50 s párnym číslom, dostávame zvyšok 0 po delení stovkou, ktorý už máme v súčine sto krát sto, spor. A keď obe čísla 50 vynásobíme nepárnym číslom, dostaneme dvakrát zvyšok 50 a tiež máme spor.

Úloha č. 8: *Na zabudnutej tabuli v Rasťovej ešte zabudnutejšej tmavej komnate je nakreslených päť už skoro zabudnutých úsečiek. Z každej trojice z týchto úsečiek vieme zložiť trojuholník. Dokážte, že vieme vybrať tri úsečky tak, že trojuholník, ktorý z nich vznikne, je ostrouhlý (na také sa nezabúda).*
Riešenie: (opravoval Buggo)
V zadaní úlohy sa pracuje s dvoma vlastnosťami úsečiek:

1. Z daných úsečiek sa dá zostrojiť trojuholník,
2. z daných úsečiek sa dá zostrojiť ostrouhlý trojuholník.

Pred tým, ako sa pustíme do samotného riešenia úlohy, sa pokúsime tieto vlastnosti čo najlepšie uchopiť. (Zapísať.) Prvá vlastnosť nie je nič náročne – stará známa trojuholníková nerovnosť. Pre dané dĺžky úsečiek a, b, c musí platiť

$$a + b > c\,, a + c > b\,, b + c > a\,.$$

Na zachytenie druhej vlastnosti nám poslúži kosínusová veta. Podľa nej pre ľubovoľné tri strany trojuholníka platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Tu si môžeme uvedomiť, že to je vlastne zovšeobecnená Pytagorova veta. Tiež nám môže po krátkom čase dôjsť, že pre $\gamma < 90^\circ$ je $\cos\gamma > 0$, a preto $-2ab\cos\gamma < 0$. Z toho dostávame zápis zachytávajúci ostrouhlosť trojuholníka, konkrétne

$$c^2 < a^2 + b^2$$

pre všetky kombinácie strán.
Teraz môžeme začať riešiť samotnú úlohu. Možných ciest, ako sa dopracovať k výsledku, je veľa a mnohé vyžadujú množstvo úprav a „dosadzovačiek“. Tu uvádzame pomerne elegantné, čiastočne trikové riešenie, do významnej miery inšpirované *Michalom Spišiakom.*
Budeme dokazovať sporom. Nech $a \geq b \geq c \geq d \geq e$ sú dĺžky našich úsečiek. Nech neexistujú tri úsečky, z ktorých možno zostrojiť ostrouhlý trojuholník. Teda pre každý trojuholník musí platiť, že má neostrý uhol (ktorý bude určite ležať oproti najväčšej strane). Podľa týchto úvah môžeme pre trojuholníky abc, cde a bde napísať sadu nerovností (skúste sa zamyslieť, prečo práve tieto trojuholníky)

$$\begin{aligned} a^2 &\geq b^2 + c^2, \\ c^2 &\geq d^2 + e^2, \\ b^2 &\geq d^2 + e^2. \end{aligned}$$

Po ich sčítaní a upravení dostávame

$$a^2 \geq 2d^2 + 2e^2. \tag{1}$$

Pozrime sa teraz na trojuholník tvorený stranami a,d,e. Pre neho zjavne platí trojuholníková nerovnosť $d + e > a$. Po umocnení oboch strán na druhú (môžeme to spraviť, lebo v nerovnici sú len kladné čísla) dostávame

$$d^2 + e^2 + 2de > a^2. \tag{2}$$

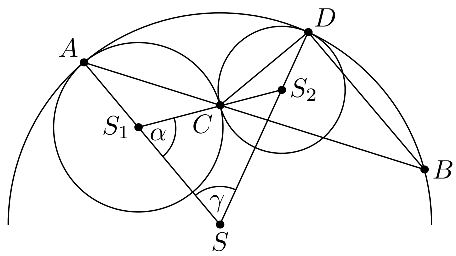
Sčítaním (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} 2de &> d^2 + e^2, \\ 0 &> (d - e)^2, \end{aligned}$$

čo je zjavný spor. Preto musí existovať aspoň jedna trojica úsečiek, z ktorej sa dá zostrojiť ostrouhlý trojuholník.

Úloha č. 9: *Majme kružnice k, l, ktoré majú vonkajší dotyk v bode C. Zároveň nech sa obidve dotýkajú zvnútra kružnice m. Nech k sa dotýka m zvnútra v bode A a nech l sa dotýka m zvnútra v bode D. Priesečník AC s kružnicou m (rôzny od A) nech je B. Dokážte, že CD a DB sú navzájom kolmé.*

Riešenie: (opravoval Ondro M.)



Vyskytlo sa veľa správnych riešení tejto úlohy. My si ukážeme jedno z nich, ktoré pracuje len so základnými vlastnosťami uhlov a v svojej podstate je veľmi jednoduché. Pri čítaní tohoto riešenia odporúčam nespoliehať sa na náš obrázok a kresliť si vlastný. Označme si stredy kružníc m, k, l postupne S, S_1, S_2. Keď sa dve kružnice dotýkajú, tak stredy týchto kružníc spolu s dotykovým bodom ležia na priamke. Preto si môžeme do obrázku dokresliť priamky (určené trojicami bodov) S_1CS_2, SS_2D a SS_1A. Môže sa nám stať jedna nepríjemná vec a to, že aj body S, S_1 a S_2 budú ležať na priamke. Potom by platilo $C = D$ a teda nemôžeme hovoriť o kolmosti CD a BD. Preto predpokladajme navyše, že stredy tých troch kružníc neležia na priamke. Označme si vnútorné uhly v trojuholníku S_1S_2S a pokúsme sa pomocou nich vyjadriť veľkosti ostatných uhlov. Nech $|\sphericalangle SS_1S_2| = \alpha$ a $|\sphericalangle SS_2S_1| = \beta$. Pri vrchole S je uhol $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Hlavným cieľom v nasledujúcej časti bude zistiť veľkosť uhlov v trojuholníku CDB, aby sme vedeli vyjadriť veľkosť uhla BDC. Trojuholník CDS_2 je rovnoramenný ($|CS_2| = |DS_2|$) a preto

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle CDS_2| &= |\sphericalangle DCS_2|, \\
|\sphericalangle CDS_2| + |\sphericalangle DCS_2| &= 180° - |\sphericalangle CS_2D| \;=\; \beta, \\
|\sphericalangle DCS_2| &= \frac{\beta}{2}.
\end{aligned}$$

V trojuholníku CAS_1 bude z rovnakého dôvodu $|\sphericalangle ACS_1| = \alpha/2$ a preto z vlastnosti vrcholových uhlov

$$|\sphericalangle BCS_2| = |\sphericalangle ACS_1| = \frac{\alpha}{2}.$$

Z vety o obvodovom a stredovom uhle vieme $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ASD|/2 = \gamma/2$. Teraz už poznáme skoro všetky uhly v trojuholníku CBD. Platí

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle CDB| &= 180° - |\sphericalangle CBD| - |\sphericalangle DCB|, \\
|\sphericalangle CDB| &= 180° - |\sphericalangle CBD| - (|\sphericalangle DCS_2| + |\sphericalangle S_2CB|), \\
|\sphericalangle CDB| &= 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}, \\
|\sphericalangle CDB| &= 90°.
\end{aligned}$$

Týmto sme dokázali, že uhol CDB je pravý a preto sú na seba priamky CD a DB kolmé.

Úloha č. 10: *Tomáša už veľa nocí trápi nasledujúci problém. Skúste mu pomôcť tým, že tento problém vyriešite. Ukážte, že existuje reálne číslo $c > 1$ také, že ak prirodzené čísla m, n spĺňajú $m/n < \sqrt{7}$, potom $7n^2 - m^2 \geq c$. Zistite tiež, aké najväčšie môže byť také c.*

Riešenie: (opravovala Hanka)

Začnime tým, že si poriadne prečítame zadanie a pokúsime sa ho preložiť do čo najjednoduchšej reči. Úloha od nás vlastne chce nájsť za danej podmienky najmenšiu možnú hodnotu rozdielu $7n^2 - m^2$. Podmienka $m/n < \sqrt{7}$ sa nám po jednoduchých úpravách (všetky budú v tomto prípade ekvivalentné) zmení na

$$7n^2 - m^2 > 0.$$

Poďme teda skúmať hodnotu výrazu $7n^2 - m^2$. O číslach m a n vieme, že sú prirodzené. Takže číslo $7n^2 - m^2$ bude celé a keďže je podľa predpokladu v zadaní kladné, bude dokonca prirodzené. Preto číslo c zo zadania bude tiež prirodzené. (Premyslite si to.)

Prvou úlohou je nájsť c väčšie ako 1. Stačí nám preto ukázať, že $7n^2 - m^2 \neq 1$. Ako na to? Neexistencia riešenia nejakej rovnice sa dá veľmi často dokázať pomocou deliteľnosti. Poďme na to sporom a predpokladajme, že rovnica

$$7n^2 = m^2 + 1$$

má riešenie. (Kvôli prehľadnosti sme m^2 dali na druhú stranu.) V danom výraze máme nejaké druhé mocniny, pričom jedna je vynásobená siedmimi. To tak trochu napovedá, že stojí za pokus vyskúšať deliteľnosť siedmimi. Číslo $7n^2$ dáva zvyšok 0. Číslo m^2 môže dávať zvyšky 0, 1, 2 a 4. (Overte si.) To ale znamená, že $m^2 + 1$ môže dávať len zvyšky 1, 2, 3 a 5, čím sme došli k sporu. Preto daná rovnica nemá riešenie a teda c je aspoň 2. Tým je prvá časť úlohy za nami.

Je 2 najväčšia možná hodnota c? Môžeme sa chvíľu hrať s rôznymi m a n a postupne ich dosádzať a zisťovať hodnotu výrazu $7n^2 - m^2$. Pre $m = 2$ a $n = 1$ dostaneme $7n^2 - m^2 = 7 - 4 = 3$. Odtiaľ vidíme, že $c \leq 3$. (Keby totiž platilo $c > 3$, daná podmienka $7n^2 - m^2 \geq c$ by nebola splnená pre $m = 2$ a $n = 1$.) Ostáva nám už len nejako preveriť možnosť $c = 2$. Buď nájsť nejaké m a n, pre ktoré platí rovnosť $7n^2 - m^2 = 2$ alebo ukázať, že také m a n neexistujú. Opäť si spomenieme si na zvyšky po delení siedmimi. Ľavá strana rovnice

$$7n^2 = m^2 + 2$$

je deliteľná siedmimi a teda musí byť aj pravá. Ako sme už zistili, číslo m^2 môže dávať zvyšky 0, 1, 2 a 4 a teda $m^2 + 2$ môže dávať po delení siedmimi len zvyšky 2, 3, 4 a 6. Keďže 0 medzi nimi nie je, riešenie takejto rovnice neexistuje. Tým sme ukázali, že $c = 3$.

Komentár: V úlohách ako je táto, kde sa vyskytujú prirodzené čísla, alebo ešte lepšie, ich druhé mocniny, naozaj najčastejšie pomáha deliteľnosť. Súvisí to s tým, že napr. po delení ôsmimi môže číslo n dávať osem rôznych zvyškov, číslo n^2 však len tri. Podobne to funguje aj pre rôzne iné čísla. Oplatí sa použiť tie, ktoré sa, podobne ako číslo 7 v tejto úlohe, vyskytujú rovno v zadaní.

Úloha č. 11: *V Žábovciach sa uskutočnil turnaj, ktorého sa zúčastnilo n hráčov. Každý hral s každým práve jeden zápas v žábošachu, pričom zápas vždy skončil výhrou jedného z hráčov. Dokážte, že nech turnaj dopadol akokoľvek, vždy musí nastať jeden z dvoch nasledujúcich prípadov. Buď môžme hráčov rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín A, B tak, že každý hráč z A vyhral nad každým hráčom z B alebo vieme hráčov označiť $P_1, P_2, \dots, P_n$ tak, že P_1 vyhral nad P_2, P_2 vyhral nad P_3, …, P_{n-1} vyhral nad P_n, P_n vyhral na P_1.*

Riešenie: (opravovala Žáborúža)
Žábovický žábošachový žáboproblém je veľmi žábohravý … brekeke–brekeke … a žáboprekvapivo nie zo žábokategórie žábonajťažších. Nuže … kvak–kvak, kvaky–kvak … pozrime sa na jeho žáboriešenie … krk–krk …
Najskôr doplňme zadanie o predpoklad $n \geq 2$. Ďalej nech H označuje množinu všetkých zúčastnených hráčov na turnaji. Pod pojmom ***kružnica*** budeme rozumieť takú množinu k hráčov ($k \geq 3$), pre ktorých existuje označenie $K_1, K_2, \dots, K_k$ také, že K_1 vyhral nad K_2, K_2 vyhral nad K_3, …, K_{k-1} vyhral nad K_k a K_k vyhral nad K_1.
Ak po skončení turnaja existuje hráč, ktorý vyhral všetky svoje zápasy, (označme ho *bocian*,) alebo hráč, ktorý všetko prehral, (označme ho *žubrienka*,) zrejme nastal prvý prípad zo zadania. Stačí dať tohoto špeciálneho jedinca samého do jednej zo skupín.
Ak v H neexistuje ani bocian ani žubrienka (to sa dá až od $n \geq 3$), každý hráč nejaký zápas vyhral a nejaký prehral. Teraz dokážeme, že v H musí existovať kružnica. Vezmime jedného ľubovoľného hráča z H, napr. Žabča. (Označme ho H_1.) Žabčo určite niekoho porazil, napr. Rosničku. (Označme ju H_2.) Aj Rosnička určite niekoho porazila, napr. Ropuchu. (Označme ju H_3.) Takto pokračujme ďalej. Keďže počet hráčov n je konečný, po konečnom počte krokov musíme prísť k hráčovi, ktorého sme už označili ako H_i, pričom i nie je nutne 1. Tým sme vytvorili kružnicu.
Ďalšie kroky dôkazu by sa mohli snažiť túto kružnicu zväčšovať, až by sme do nej dostali všetkých hráčov, alebo našli vhodné delenie na skupiny A a B, čím by sme príklad vyriešili. Celé si to zjednodušíme nasledovne. *Nech K je kružnica s najviac hráčmi.* Ak je takých viac, vyberieme jednu z nich. Označme k počet hráčov K. Ak $k = n$, tak nastal druhý prípad zo zadania. Nech teda $k < n$. Zoberme si hráča H_0 z H, ktorý nie je v K. Ak by nad niektorými hráčmi z K vyhral a nad niektorými prehral, tak potom v kružnici K existujú dvaja po sebe idúci hráči K_j a K_{j+1} takí, že K_j porazil H_0 a H_0 porazil K_{j+1}. (Preverte si.) To znamená, že H_0 môžeme pridať do kružnice, čo je však spor s maximalitou kružnice K. Preto hráči z H, ktorí nie sú v K, buď so všetkými hráčmi z K vyhrali, označme ich ako množina *víťazov V*, alebo so všetkými prehrali, označme ich ako množina *porazených P*. Môže nastať niekoľko možností.

- Ak $V = \emptyset$, tak stačí zvoliť $A = K$ a $B = P$.
- Ak $P = \emptyset$, tak stačí zvoliť $A = V$ a $B = K$.
- Ak V aj P sú neprázdne a zároveň všetci z V vyhrali nad všetkými z P, tak opäť nastal prvý prípad zo zadania a stačí položiť napríklad $A = V$ a $B = K \cup P$. Mohlo by sa stať, že niekto z P porazí niekoho z V? Ak áno, tak pridaním týchto dvoch hráčov (za sebou) na ľubovoľnú pozíciu do kružnice K, sled kružnice nenarušíme a ešte ju zväčšíme. To je spor s jej maximalitou a preto naozaj musí platiť, že všetci z V porazia všetkých z P.

Ukázali sme, že vždy nastane jeden alebo druhý prípad zo zadania. Tým sme úlohu vyriešili.

Úloha č. 12: *Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ je postupnosť celých čísel taká, že každá jej neprázdna podpostupnosť má nenulový súčet. Rozdeľte množinu prirodzených čísel na konečne veľa množín tak, aby pre ľubovoľné $x_1, x_2, \dots, x_n$ z tej istej množiny bol výraz $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ nenulový.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Ako by sme vedeli zaručiť nenulovosť výrazu, do ktorého môžeme dosadzovať ľubovoľné prvky (aj) z nekonečne veľkých podmnožín prirodzených čísel? Mohli by nám pomôcť kongruencie (zvyšky po delení nejakým číslom) a to

ako pri dokazovaní nenulovosti, tak aj pri delení množiny prirodzených čísel na niekoľko podmnožín. Tak poďme na to.
Zoberme si prvočíslo p väčšie ako $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. To, že p je „dostatočne veľké“ nám pomôže časom. Ďalej označme $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Dajme do množiny N_1' všetky prirodzené čísla, ktoré dávajú po delení p zvyšok 1. Ak si zoberieme ľubovoľnú n-ticu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prvkov množiny N_1', tak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S \pmod p$$

Vďaka voľbe prvočísla p platí $-p < S < p$ a zo zadania vieme, že $S \neq 0$. Preto p nedelí S, čo znamená, že výraz

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{3}$$

je nenulový. Analogicky môžeme dodefinovať $N_2', N_3', \ldots, N_{p-1}'$ tak, že N_i' bude obsahovať prirodzené čísla, ktoré dávajú po delení p zvyšok i. Potom, ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú z N_i', tak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \equiv (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)i = Si \pmod p,$$

ale keďže p nedelí ani S ani i, tak výraz (3) je opäť nenulový. Tým sme rozdelili „skoro všetky“ prirodzené čísla do $p-1$ vhodných skupín. Problém máme akurát s číslami deliteľnými p. Nemôžeme všetky dať do jednej skupiny. To by bolo ekvivalentné tomu, dať všetky prirodzené čísla do jednej množiny. (Premysli si.) Môžeme ich však nejako primiešať do už existujúceho rozdelenia na $p-1$ množín. Nech N_i je množina takých čísel $n \in \mathbb{N}$, že

- $n \in N_i'$, alebo
- n sa dá napísať ako $n = p^k m$, kde p nedelí m a $m \in N_i'$.

Je jednoduché dokázať, že takto rozdelíme $\mathbb{N}$ na $p-1$ disjunktných množín $N_1, N_2, \ldots N_{p-1}$. Symbolicky sa to dá napísať ako[1]

$$N_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} p^k N_i'.$$

Dokážeme, že toto rozdelenie je už vyhovujúce.
Majme ľubovoľnú n-ticu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N_i$. Nech maximálna mocnina p, ktorá delí všetky tieto čísla je p^k. Nech $x_1', x_2', \ldots x_m'$ je podpostupnosť tých, ktoré sú deliteľné p^k, ale nie p^{k+1} a nech $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ sú ku nim prislúchajúce páry z výrazu (3). Keď sa na (3) pozrieme modulo p^{k+1} dostaneme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \equiv (a_1'x_1' + a_2'x_2' + \cdots + a_m'x_m') \equiv (a_1' + a_2' + \ldots + a_m')ip^k \pmod{p^{k+1}}.$$

Keďže ľubovoľná podpostupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_m$ má nenulový súčet, v absolútnej hodnote menší ako p, tak nie je deliteľný p. Rovnako ani i nie je deliteľné p, preto posledná kongruencia nemôže byť nulová modulo p^{k+1}, čo opäť implikuje nenulovosť výrazu (3). Stačilo nám teda len $p-1$ množín a dokonca sa nám ich podarilo popísať konštrukčne.

<u>Úloha č. 13:</u> *Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla x, y, z, ktoré spĺňajú rovnosť $x + y + z = 1$, platí*

$$2 \leq (1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2 \leq (1+x)(1+y)(1+z).$$

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ondráč)
Musíme ukázať platnosť dvoch nerovností. Prvá z nich je jednoduchšia a dá sa dokázať iba upravovaním výrazov a opakovaným používaním podmienky $x + y + z = 1$. Ukážeme si trochu poučnejšie riešenie, ktoré používa techniku *mixing variables.* (Podľa *Josefa Tkadleca.*) Označme

$$V(x, y, z) = (1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2.$$

Chceme dokázať $V(x, y, z) \geq 2$. Rovnosť nastáva, keď $x = 1, y = z = 0$ a v ďalších dvoch cyklických prípadoch. Vyzerá to teda, že čím „ďalej“ sú od seba x, y, z, tým je ten výraz menší. Túto vlastnosť vieme nejakým spôsobom napísať aj matematicky, napr. že $V(x, y, z)$ je väčšie ako $V(0, x+y, z)^2$. Skúsime to dokázať

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &\geq V(0, x+y, z), \\ 1 - 2x^2 + x^4 + 1 - 2y^2 + y^4 &\geq 1 + 1 - 2(x+y)^2 + (x+y)^4, \\ 4xy &\geq 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3, \\ 4 &\geq 4(x+y)^2 - 2xy. \end{aligned}$$

[1] Keď A je množina a b číslo, tak pod súčinom bA myslíme množinu všetkých súčinov ba, kde a je ľubovoľný prvok množiny A.

[2] Toto je presne tá technika mixing variables. Premenné x a y sme trochu „vzdialili“ na 0 a $x + y$ (majte na pamäti podmienku $x + y + z = 1$) a keďže sme menili len dve premenné, tak sa nám dokazovanie ešte zjednoduší.

Posledná nerovnosť zrejme platí, lebo $(x+y)^2 \leq 1$. Keďže úpravy boli ekvivalentné, tak platí aj nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať. Použitím tohoto odhadu a symetrickosti výrazu V

$$V(x,y,z) \geq V(0,x+y,z) = V(x+y,z,0) \geq V(0,x+y+z,0) = V(0,1,0) = 2.$$

Tým sme dokázali prvú nerovnosť.
Druhá nerovnosť je náročnejšia a riešenie je o niečo pracnejšie. Najprv si zadefinujeme nejaké rozumné značenia, aby sa nám dobre pracovalo. Nech

$$\begin{aligned} A &= x^2+y^2+z^2, \\ B &= xy+yz+zx, \\ C &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2, \\ D &= xyz. \end{aligned}$$

Sami si ľahko odvodíte, že

$$x^4+y^4+z^4 = A^2-2C = 4B^2-4B+1-2C = 2C-4B+8D+1.$$

Potom vieme výraz $(1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2$ napísať ako

$$3-2A+(2C-4B+8D+1) = 4-2(A+2B)+2C+8D = 2+2C+8D.$$

V poslednom kroku sme využili $A+2B = (x+y+z)^2 = 1$. Všimnime si, že z tohoto zápisu ihneď vyplýva prvá nerovnosť. Pokračujme ďalej. Výraz $(1+x)(1+y)(1+z)$ vieme napísať ako $2+B+D$. Tým pádom chceme dokázať nerovnosť

$$\begin{aligned} 2+2C+8D &\leq 2+B+D, \\ 2C+7D &\leq B. \end{aligned}$$

Pomocou rovnosti $B^2 = C+2D$ vieme nahradiť písmenko C a dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$0 \leq B-2B^2-3D.$$

využitím jednoduchej nerovnosti $A \geq B$ (dokážte si) dostaneme $B-2B^2 = B(1-2B) = BA \geq B^2$. Stačí nám teda dokázať

$$0 \leq B^2-3D,$$

čo sa po opätovnom použití $B^2 = C+2D$ opäť zjednoduší na

$$D \leq C.$$

Viac sa nám to už zjednodušiť nepodarí a tak opäť prejdime k premenným x, y a z. Dostaneme

$$xyz \leq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$

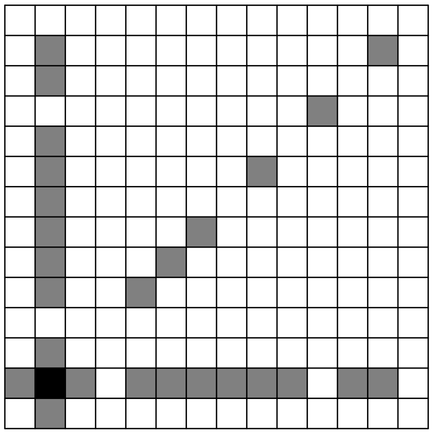
Po prenásobení ľavej strany $x+y+z$ a jemnej úprave dostaneme

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2 \geq xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy,$$

čo je opäť skrytá jednoduchá nerovnosť ekvivalentná s $A \geq B$. Tým sme dokázali aj druhú nerovnosť. Toto zďaleka nie je jediný postup, ale je to návod ako veľmi úsporne zapísať pracné riešenie.

<u>**Úloha č. 14:**</u> *Ondro a Feráč majú nekonečnú šachovnicu a hrávajú na nej nasledovnú hru. Každý hráč ovláda jedného koňa, Ondrejov začína na políčku* $(0,0)$*, Feráčov na* (X,Y)*. Hráči sa striedajú v ťahoch, prvý ťahá Feráč. V jednom ťahu je dovolené spraviť ľubovoľný (nenulový) počet normálnych šachových krokov pre koňa, všetky však musia byť presne v tom istom smere a vzájomná euklidovská vzdialenosť medzi oboma koňmi sa musí každým krokom zmenšiť. Hráč prehrá vtedy, keď nemôže spraviť žiadny krok. Predpokladajte, že obaja hráči hrajú optimálne. Kto vyhrá?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Feráč)



Úloha sa nám trošku zjednoduší, keď si uvedomíme, že kroky šachového koňa sú vo všetkých ôsmych smeroch symetrické. Odtiaľ vyplýva napríklad to, že ak navzájom vymeníme pozície oboch koňov, tak sa herná situácia nezmení. Toto bude platiť aj keby sme kone menili po každom ťahu. Preformulujeme si teda úlohu tak, že obaja hráči striedavo ťahajú jedným a tým istým koňom, pričom v každom kroku sa musia priblížiť k políčku $(0,0)$.

Na obrázku sú znázornené pozície v prvom kvadrante: tmavé políčka sú prehrávajúce a biele vyhrávajúce. Políčko $(0,0)$, ktoré je tiež prehrávajúce, je znázornené čiernou. Všimnite si, že všetky prehrávajúce pozície ležia v riadku $y=0$, stĺpci $x=0$ alebo na diagonálach $x=y$ a $x=-y$ (na obrázku vidíme len prvú z nich). Dokážeme, že to tak bude vždy.

Zaveďme si nasledovnú terminológiu: políčka spĺňajúce $x=0$, $y=0$, $x=y$ alebo $x=-y$ nazveme *okrajové*, všetky ostatné políčka budeme volať *vnútorné*. Zo symetrie nám stačí pracovať len v jednom oktante, zoberme si $0 \le x \le y$. Dokážeme, že

- Z každej vyhrávajúcej okrajovej pozície sa dá dostať do prehrávajúcej pozície pomocou dovolených krokov v smere $(-1,-2)$.
- Každá vnútorná pozícia je vyhrávajúca.

Postupovať budeme indukciou podľa vzdialenosti pozície od nuly. Takto budeme totiž môcť predpokladať, že tvrdenie platí pre všetky pozície, do ktorých sa vieme dostať. Skontrolujeme, že tvrdenie platí pre všetky pozície na obrázku, stačí nám teda pokračovať v indukcii len pre dostatočne veľké y (napr. ≥ 12).

Predpodkladajme, že sme vo vyhrávajúcej pozícii $(0,n)$. Z definície vyhrávajúcej pozície odtiaľto musí existovať postupnosť dovolených krokov v tom istom smere vedúcich do prehrávajúcej pozície. Až na symetriu máme dva rôzne dovolené smery: $(+2,-1)$ a $(-1,-2)$. Ukážeme, že prvý z nich určite do prehrávajúcej pozície nevedie. Podľa indukčného predpokladu sú všetky vnútorné pozície, do ktorých sa vieme dostať, vyhrávajúce. Stačí nám teda ukázať, že krokmi $(+2,-1)$ sa nevieme dostať do žiadnej okrajovej pozície. Je to tak preto, že po určitom počte krokov sa naša vzdialenosť od nuly začne zväčšovať, a toto sa stane skôr ako vôbec stihneme prísť na diagonálu $x=y$. Po k krokoch stojíme na políčku $(2k, n-k)$. Ďalší krok môžeme spraviť pokiaľ

$$\begin{aligned}(2k+2)^2+(n-k-1)^2 &< (2k)^2+(n-k)^2\\ (2k)^2+8k+4+(n-k)^2-2(n-k)+1 &< (2k)^2+(n-k)^2\\ 10k+5 &< 2n.\end{aligned}$$

Čiže môžeme urobiť najviac $n/5$ krokov. Na to aby sme sa dostali na diagonálu ich potrebujeme ale až $n/3$. To znamená, že týmto smerom sa nevieme dostať do žiadnej okrajovej pozície, preto do prehravajúcej pozície musí viesť smer $(-1,-2)$.

Teraz predpokladajme, že sme vo vyhrávajúcej pozícii (n,n). Tak ako minule, zasa máme až na symetriu dva rôzne smery, ktoré zmenšia vzdialenosť od nuly. Sú to $(-2,+1)$ a $(-1,-2)$. Pozrime sa na prvý z nich. Ak sme už spravili k krokov, tak ďalší môžeme spraviť len ak

$$\begin{aligned}(n-2k-2)^2+(n+k+1)^2 &< (n-2k)^2+(n+k)^2\\ (n-2k)^2-4(n-2k)+4+(n+k)^2+2(n+k)+1 &< (n-2k)^2+(n+k)^2\\ 10k+5 &< 2n,\end{aligned}$$

čo je opäť málo na to, aby sme narazili na okrajovú pozíciu (tentokrát potrebujeme až $n/2$ krokov na to, aby sme dosiahli stĺpec $x=0$). Do prehrávajúcej pozície musí preto viesť smer $(-1,-2)$.

Ostáva nám už len dokázať, že vnútorná pozícia (x,y) je vyhrávajúca, teda že sa z nej vieme dostať do prehrávajúcej pozície. To už nie je ťažké. Jednoducho začnime robiť kroky $(-1,-2)$ a po istom čase určite narazíme na okrajovú pozíciu (pamätajte, že pracujeme v $0 \le x \le y$). To preto, že každým krokom sa vzdialenosť od stĺpca $x=0$ aj od diagonály $x=y$ zmenší presne o jedna, teda ich nemôžeme preskočiť. Máme dve možnosti: buď je táto pozícia

prehrávajuca (a môžeme skončiť tu) alebo je vyhrávajúca. V druhom prípade však podľa indukčného predpokladu stačí pokračovať v tomto smere ďalej a určite narazíme na prehrávajúcu pozíciu.
Tak to by bolo. Teraz už vieme, že všetky vnútorné pozície sú vyhrávajúce. Tiež sme dokázali, že okrajová pozícia je vyhrávajúca len vtedy, keď sa z nej dá krokmi $(-1,-2)$ dostať do prehrávajúcej pozície. Ukážeme, že takáto prehrávajúca pozícia, ktorá musí byť tiež okrajová, je vždy najviac jedna (pre políčka dostatočne ďaleko od nuly).
Najprv sa pozrime na políčko $(0,n)$. Smer $(-1,-2)$ je symetrický k $(1,2)$, pre jednoduchosť si zoberme druhý z nich. Rovnako ako v predošlom dôkaze môžeme počítaním krokov ukázať, že týmto smerom vždy vieme prísť po diagonálu $x=y$, riadok $y=0$ už ale dosiahnuť nevieme. Na to, aby sme doskočili presne na diagonálu, potrebujeme, aby n bolo deliteľné tromi, inak ju netrafíme. Jediné okrajové políčko, ktoré teda vieme dosiahnuť z $(0,n)$, je $(n/3,n/3)$, a aj to len vtedy, keď n je deliteľné tromi.
Podobne, jediné okrajové políčko (až na symetriu) dosiahnuteľné z (n,n) je $(0,n/2)$, a to len v prípade, keď n je párne.
Pre dostatočne veľké n teda dostávame, že

- Pozícia $(0,n)$ je vyhrávajúca práve vtedy, keď n je deliteľné tromi a $(n/3,n/3)$ je prehrávajúca.
- Pozícia (n,n) je vyhrávajúca práve vtedy, keď n je párne a $(0,n/2)$ je prehrávajúca.

V okolí nuly naša analýza zlyháva, ručne skontrolujeme, že jediné výnimky sú vyhrávajúce pozície $(0,2)$ a $(1,1)$. Teraz by vám už dokončenia riešenia nemalo robiť problémy. Zistíte, že vyhrávajúce okrajové pozície sú práve tie tvaru $(0,2\cdot 6^k),(0,3p\cdot 6^k)$ a $(6^k,6^k),(2q\cdot 6^k,2q\cdot 6^k)$, kde $k\geq 0$, $p\neq 1$ a p je nepárne, $q\neq 2$ a q nie je deliteľné tromi. V ostatných oktantoch je riešenie symetrické.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Chlebíková Andrea	2.	Brighton UK	3	0	9	9	9	9		9			45	135
2.	Le Tuan Anh	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	8	8				43	132
3.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	6	1		9	9	9	8	9			44	129
3.	Kossaczký Igor	4.	Gamča BA	6	1		9	9	9		9	9		45	129
5.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9	9				45	127
5.	Kukan Marek	3.	Gamča BA	4	0	9	9	9		8	9			44	127
7.	Szabados Viktor	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	8		9			44	122
8.	Csiba Dominik	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	9	8		9			44	118
9.	Horňák Marián	1.	GPár NR	1	0	9	9	9	9	8				44	117
9.	Sládek Filip	3.	GAB NO	5	4			9	9	9	9	9		45	117
11.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	6	4			9	8	9	9	9		44	115
12.	Kováč Ondrej	2.	GCM NR	4	0	9	9		7	9	9			43	113
13.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	8	4			7	9	9	9	8		42	111
13.	Peitl Tomáš	3.	ŠPMNDG BA	7	2		9	9			9			27	111
15.	Večerík Matej	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	2	9	8		9			37	109
16.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	8	4			9	9	9	9			36	107
16.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	4	0	9	9	9	8		9	1		44	107
16.	Spišiak Michal	4.	Gamča BA	8	7			9	7	9	9	9		43	107
19.	Hlavatá Martina	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9					36	105
19.	Kopf Matúš	3.	Opava ČR	7	2		9	9	9	9	9			45	105
21.	Hagara Michal	3.	GJH BA	7	4			9			9			18	102
22.	Kozák Andrej	2.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9	9				45	101
23.	Bačo Ladislav	3.	GPoš KE	8	4			9	9	6	6			30	99
24.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	3	0	9	9	9	9					36	98
25.	Hozza Ján	2.	GJH BA	3	0	9	9	9	7					34	94
26.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	8	4						9	7		16	92
26.	Majdiš Mojmír	3.	GPOH DK	5	0	9	9	9			9			36	92
28.	Karásková Natália	3.	Gamča BA	8	3			9	9	9	9			36	90
29.	Haas Emil	4.	Gamča BA	8	1		9	9	7			9		34	88
30.	Hajdinová Katarína	2.	GJH BA	4	0	9	9		7	9		0		34	86
30.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	3	0	9	9	9	8					35	86

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
32.	Matejovičová Lenka	4.	GJH BA	11	7			9	8	8	0	4		29	85
33.	Batmendijnová Kristína	4.	GTV SL	7	1		9	9	7					25	82
33.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	2	0	9	9		7		0	3		28	82
35.	Kieferová Mária	4.	GsvFA ZA	6	1		9	9	6	2	2			28	81
36.	Midlik Adam	3.	GJAR PO	5	1		9	9	7	9				34	79
36.	Uhrík Jakub	4.	Gamča BA	7	1		6	9	5	6				26	79
36.	Štyráková Kamila	3.	GPOH DK	7	1		9	9	5					23	79
39.	Jursa Jakub	4.	GAlej KE	11	4			9	9	8				26	76
40.	Bendová Lenka	4.	GJH BA	6	0	2	9		4	9	0			24	75
41.	Gregor Viktor	3.	GŠkol PB	5	0	9	9	1	4					23	74
41.	Töpfer Jakub	4.	GJK PH ČR	5	3			9	8		8			25	74
43.	Dižová Andrea	2.	GKom PE	4	0	9	9	3	8	8				37	72
44.	Bogár Ján	3.	GĽŠ TN	8	2		9	6		9				24	71
44.	Bohiniková Alžbeta	2.	Gamča BA	5	0	9	7	9	2					27	71
46.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	3	0	9	3	9						21	70
47.	Kuklišová Nina	4.	GMet BA	8	1		9	9	5	6				29	67
48.	Polačko Martin	4.	GAlej KE	11	5			9	9	0				18	65
49.	Sabatovičová Linda	2.	GJH BA	4	0	9	9			9				27	64
50.	Rigdová Emília	3.	GKuk PP	6	1		9	9		8				26	63
51.	Cocuľová Zuzana	3.	GPoš KE	7	1		9	9	8		2			28	62
51.	Šormanová Mária	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	62
53.	Santer Jakub	2.	GMH Trstená	4	0	9	3	9	7					28	61
54.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	3	0	9	9							18	60
55.	Ziman Michal	3.	GBST LC	7	1		3	9	3					15	55
56.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3	0	4	9			9				22	54
57.	Phuong Mariana	2.	GJH BA	4	0	9	9	9						27	53
58.	Kotrlová Katarína	4.	GVPT MT	6	0	9	9							18	51
58.	Lešková Andrea	3.	G Lipany	6	0	9	9							18	51
60.	Kubincová Petra	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	49
61.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	10	5				8	3		6		17	46
62.	Polách Juraj	1.	Gamča BA	2	0	9	9							18	44
63.	Miškovičová Júlia	2.	GJH BA	2	0	1	9		2	5		0		17	41
64.	Buchman Marek	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	34
64.	Múthová Denisa	2.	GbTR ZA	4	0									0	34
66.	Jakubík Ján	2.	SPŠE PN	4	0	0	9							9	33
67.	Štrbová Silvia	2.	GPár NR	5	0									0	31
68.	Hašík Juraj	3.	Gamča BA	6	0									0	30
69.	Baxová Katarína	4.	GĽŠ TN	4	0	9	3							12	29
69.	Krejčír Andrej	2.	GVBN PD	3	0									0	29
71.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	3	0		9							9	25
72.	Fekiač Jozef	4.	Gamča BA	7	1									0	23
72.	Porembová Alexandra	3.	BiG Sučany	6	1									0	23
74.	Komárková Zuzana	4.	Brno ČR	7	3									0	22
75.	Hudec Vladimír	4.	GVar ZA	7	1									0	21
76.	Eiben Eduard	4.	GPoš KE	9	6									0	20
77.	Masár Juraj	2.	GBil BA	4	0									0	19
78.	Bogárová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0									0	18
79.	Fodorová Jana	2.	GJGT BB	4	0		9							9	16
80.	Jagoš Ľubomír	3.	GVO ZA	6	0									0	13
81.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3	0									0	11
82.	Kutaj Tomáš	1.	GJH BA	1	0									0	10
83.	Kobolková Petra	4.	GVPT MT	5	0									0	8
84.	Kubinová Mária	2.	GPOH DK	4	0									0	6
85.	Stripajová Svetlana	4.	GPOH DK	4	0									0	4

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Hozza Ján	2.	GJH BA	3			6	9	9	9	9		115
2.	Belanová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9		9	9			113
3.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	3			9	9	9	3	9		104
4.	Vlachynská Petra	1.	GBil BA	1	9	2	8	8	9	3			102
5.	Mojžišová Hana	2.	GJH BA	3			9		9	9			71
5.	Polách Juraj	1.	Gamča BA	2		3	1	6	9	9			71
7.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	3					9	9	9		62
8.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	3					9	9			61
9.	Rečka Marek	1.	1SG BA	1		1	1		0				57
10.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3			9	9	4	9			55
11.	Falťan Michal	1.	1SG BA	1	8		1						51
12.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	3			6	9		9			41
12.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3			3	9	9	9			41
12.	Karpišová Iveta	1.	Gamča BA	2									41
15.	Sopóci Martin	1.	1SG BA	1	2	3	1			3			37
16.	Hirgelová Mária	1.	ŠPMNDG BA	2		1	5		9				32
17.	Miškovičová Júlia	2.	GJH BA	2			5		1	9			30
18.	Košík Matúš	1.	1SG BA	1									22
19.	Ivanov Alexander	2.	Gamča BA	3									13
20.	Kutaj Tomáš	1.	GJH BA	1									9
21.	Ďurikovičová Lucia	2.	GsvU BA	3									7
22.	Košlab Tomáš	2.	GJH BA	3									5

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Horňák Marián	1.	GPár NR	1	9	9	9	9	9	9	9		135
2.	Kosec Peter	1.	GĽŠ TN	1	9	9	9	9	9	3	9		122
3.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	2		9	8	9	9	8	9		104
4.	Baxová Zuzana	1.	GĽŠ TN	1	9	6	8	9	9				100
5.	Švančara Patrik	1.	GĽŠ TN	1	9	9	9	9			9		96
6.	Koprda Pavol	1.	GAM TT	1	9	2	4				9		82
7.	Izsák Dávid	2.	SJG KN	3		5	8	8	2	4			59
8.	Leššová Lívia	2.	GPár NR	3			8	9		3			58
9.	Krejčír Andrej	2.	GVBN PD	3									13
10.	Rajchlová Barbora	3.	GJab MY	3									10

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Jasenčáková Katarína	1.	GVO ZA	2		9	8	9	9	4	9		122
2.	Vlček Andrej	1.	ESŠ EG JT LM	1	9	9	9	9	9				117
3.	Galovičová Soňa	1.	GVO ZA	2		9	8	9	9	4	9		110
4.	Santrová Adriana	1.	GMH Trstená	1	9	5	8	9	2				107
5.	Halajová Barbora	1.	GVO ZA	2		3	9	9	9	9			97
6.	Anderle Michal	2.	GBST LC	2	9	9	9	9	9	3			82
7.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	3					9	9	9		75
8.	Kajánek František	1.	GJMH CA	1	9	6	9	9	1				63
9.	Matuška Lukáš	2.	GBST LC	2		4	8	8					62
10.	Kubišová Barbora	1.	GJGT BB	2	1	7	3	6	0	3	0		40
11.	Lonský Rafael	1.	GPOH DK	1	9	2		3	2				33

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
12.	Búlik Martin	1.	GJGT BB	1			8	8	9	3			28
13.	Makuch Matej	2.	GJGT BB	3			9	8	9	1			27
14.	Buková Nikola	1.	GJGT BB	2		1	8		2	3	1		26
14.	Plavák Dušan	1.	GMH Trstená	1		3	7						26
16.	Sabaka Peter	2.	GJCh BR	2		3	5			1			22
17.	Majerová Karolína	2.	GJCh BR	2									18
18.	Piliarkin Marián	1.	GJCh BR	1									7
19.	Latinák Kristián	1.	GJCh BR	1									5
19.	Vojtková Veronika	1.	GJCh BR	1									5
21.	Šišiaková Alena	1.	GJCh BR	1									3
22.	Kuviková Zuzana	1.	GJCh BR	1									2
22.	Maculová Simona	1.	GJCh BR	1									2
24.	Fiľová Lucia	1.	HA BR	1									1
25.	Beraxa Peter	1.	GJCh BR	1									0
25.	Stankoviansky Tomáš	1.	GJCh BR	1									0
25.	Trnik Erik	1.	GJCh BR	1									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Daniláková Monika	1.	GJAR PO	1	4	8	9	8	2	9			107
2.	Klembarová Barbora	1.	GKuk PP	1	8	6	9	9			9		91
3.	Dupej Peter	1.	GJAR PO	1	9	2	9	8		1			87
4.	Marečáková Barbora	1.	GKuk PP	1	9	1	9			4	9		84
5.	Kmeťová Katarína	1.	GKuk PP	1	9	6	2		9	3			74
6.	Faguľová Kristína	1.	GPoš KE	2		9	9	3	9	3			72
7.	Ficková Klára	1.	GPoš KE	2									30
8.	Bajnoková Lenka	3.	GKuk PP	3									12

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	Meno	Roč.	škola	10	11	12	13	14	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9						42
2.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	9	8	7	7	6		80
3.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA							12
4.	Hagara Michal	3.	GJH BA	9						46
5.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	9	7					51
6.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	9	1	0	7	1		43
7.	Sládek Filip	3.	GAB NO	9	9	0	4			59
8.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	9	9	1	7			75