Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2009/2010

Úloha č. 1: *Katka, Škrečok a Filip majú radi čokoládu. Mamke vzali a zjedli päť čokolád, čo mala na varenie. Keď mamka zisťovala, kto jej ich zjedol, deti povedali:*

Katka: „Nezjedla som žiadnu čokoládu.“
Škrečok: „Ani ja som nezjedol žiadnu čokoládu.“
Filip: „Ja som tiež nezjedol žiadnu čokoládu.“
Katka: „Škrečok zjedol viac než Filip.“
Škrečok: „Katka v predchádzajúcej vete klame!“
Filip: „Katka so Škrečkom zjedli všetko.“
Katka: „Filip v predchádzajúcej vete klame!“

Keď sa deti napokon priznali, zistilo sa (o tých siedmich tvrdeniach), že každý klamal toľkokrát, koľko čokolád zjedol. Koľko čokolád zjedol každý z nich?

Riešenie: (opravovala Katka)
Očíslujme si pre jednoduchosť tvrdenia číslami od jedna po sedem tak, ako za sebou nasledujú v zadaní. Väčšina z vás si správne všimla, že ak sa zjedlo päť čokolád, musí byť práve päť tvrdení nepravdivých. Ďalej sa dalo postupovať rôzne. Jedným zo spôsobov je pozrieť sa na to, či si niektoré tvrdenia navzájom neodporujú. Tak zistíme, že sa navzájom vylučujú tvrdenia číslo 4 a 5 a podobne aj tvrdenia 6 a 7. To znamená, že práve dve z tvrdení 4, 5, 6, 7 sú pravdivé. Z toho zároveň vyplýva, že tvrdenia 1, 2 a 3 musia byť nepravdivé, pretože pravdivé tvrdenia sú práve dve — a tie, ako sme zistili, sú medzi tvrdeniami 4, 5, 6, 7. Z prvých troch tvrdení teda vieme, že každé dieťa vzalo a zjedlo aspoň jednu čokoládu. Z toho vieme, že Filipovo tvrdenie číslo 6 je nepravdivé a o Filipovi už vieme povedať, že zjedol aspoň dve čokolády, lebo klamal vo výrokoch 3 aj 6. Ak by bolo pravdivé Katkine tvrdenie číslo 4, Škrečok by musel zjesť viac než Filip, teda aspoň tri čokolády. To ale určite nie je pravda, pretože jednak Škrečok tri tvrdenia nemá a jednak by už na Katku žiadna čokoláda nezvýšila. Preto môžeme povedať, že tvrdenie číslo 4 je nepravdivé, Katka teda klamala dvakrát a zjedla aj dve čokolády. Na chudáka Škrečka potom už zostala len jedna, aj keď mu slúži ku cti, že vzal mamke menej čokolád, než Katka s Filipom, ktorí vzali po dve. Celý výsledok si ešte treba skontrolovať, či skutočne sedí počet čokolád s počtom klamstiev. A to už nechám na vás.

Úloha č. 2: *Dokážte, že aspoň jedno zo štyroch prirodzených čísel $p, q, p+q, p-q$ je deliteľné tromi.*

Riešenie: (opravoval Lenika, Kubo)
Keď sa stretnete s príkladom, v ktorom pracujete so zvyškami čísel, je dobré poznať niekoľko základných pravidiel, ktoré sa dajú pri práci so zvyškami použiť. Na začiatok si niektoré ukážeme.
Ak sčítame dve čísla, ich súčet dá rovnaký zvyšok po delení tromi, ako súčet ich zvyškov. Ukážeme si prečo. Napríklad číslo 16 vydelíme tromi so zvyškom. Výsledok je 5 a zvyšok 1. Teraz to zapíšeme vo zvyškovom tvare ako $16 = 3\cdot5+1$. Podobne 13 zapíšeme ako $13 = 3\cdot4+1$. Ak sčítame čísla 16 a 13 dostaneme 29. To dáva po delení tromi a zvyšok 2. Ak ich prepíšeme do zvyškového tvaru dostaneme: $16+13 = (3\cdot5+1)+(3\cdot4+1) = 3\cdot9+1+1 = 3\cdot9+2$. Ako vidíme, zvyšky sa nám sčítali a vytvorili zvyšok súčtu. Podobné pravidlo platí aj pre odčítanie a násobenie zvyškov. Vedeli by ste si ich odvodiť?
A teraz už k samotnému riešeniu. Po delení tromi nám každé z čísel p a q dá zvyšok 0, 1 alebo 2. Ak by bol niektorý zo zvyškov nula, tak je to číslo deliteľné tromi a už nemáme čo skúmať.
Predpokladajme preto, že ani jedno z čísel p a q nie je deliteľné tromi. Čísla p a q teraz môžu dať po delení tromi len zvyšky 1 alebo 2. Aby to bolo prehľadné, napíšeme si do tabuľky hodnoty všetkých možných kombinácií zvyškov p a q po delení tromi. Do ďalších stĺpcov dopočítame zvyšky ich súčtu a rozdielu pomocou na začiatku spomínaného pravidla.

p	q	$p+q$	$p-q$
1	1	2	0
1	2	3(zvyšok 0)	-1(zvyšok 2)
2	1	3(zvyšok 0)	1
2	2	4(zvyšok 1)	0

Ako vidíme, v každom riadku sa nám nejaká nula vyskytuje. A keďže sme vyčerpali všetky možné kombinácie zvyškov po delení tromi[1], môžeme s istotou prehlásiť, že ak budú čísla volené akokoľvek, vždy bude niektoré z nich (alebo ich súčet alebo rozdiel) deliteľné tromi.

Úloha č. 3: *Ika má 4 pravé a 4 falošné diamanty, ktoré nevie rozlíšiť. Našťastie má špeciálny prístroj, ktorým môže robiť nasledovné meranie. Vloží doň ľubovoľný počet diamantov a prístroj jej povie, koľko z vložených diamantov je pravých. Ika by chcela (nevedno prečo) dva diamanty, z ktorých je jeden pravý a druhý falošný. Poraďte jej, ako ich môže nájsť na dve merania prístrojom. Koľko diamantov treba vložiť do prístroja pri prvom meraní?*

Riešenie: (opravoval Igor, Lenka)
Najprv sa skúsime zaoberať otázkami, či si úlohu môžeme nejak zjednodušiť, a či exituje viac rôznych riešení. Skúsime ich zodpovedať.
Po chvíli skúšania prídeme na zaujímavú vec. Keď dáme do prístroja napríklad tri diamanty, tak zistíme, koľko je medzi nimi pravých a koľko falošných. Okrem toho zistíme aj to, koľko falošných a koľko pravých diamantov ostalo medzi zvyšnými piatimi naváženými diamantami. (Dokopy máme štyri pravé a štyri falošné diamanty.) Keby sme dali do prístroja päť diamantov, tak by sme získali rovnakú informáciu ako pri troch. Vedeli by sme, koľko je falošných mincí vo váženej pätici aj v neváženej trojici. Preto stačí, ak rozoberieme štyri prípady pre prvé meranie, a to 1, 2, 3 alebo 4 vážené diamanty. (Ako sme už povedali, keby sme vážili päť diamantov, je to rovnaké ako tri diamanty, pre šesť diamantov je to ako ako pre dva, a pre sedem ako pre jeden.) Ešte si uvedomme, že aj v druhom meraní musíme skontrolovať všetky možnosti. Nestačí nám nájsť jednu dobrú, lebo ak je tam aj zlá, môže sa stať, že nám prístroj vráti zlú.
Poďme sa pozrieť na jednotlivé prvé merania:

Prvý prípad: V prvom meraní vážime jeden diamant. Ak bol pravý, tak vo zvyšku sú ešte 3 pravé a 4 falošné. Ak pri druhom meraní dáme do prístroja zase len 1 diamant zo zvyšku a bude falošný, tak máme vyhraté. Ale ak bude pravý, nič nám to nepomôže, lebo budeme mať dva pravé a šesť o ktorých nevieme nič povedať. Preto nemôže byť pri druhom meraní len jeden diamant. Ak pri druhom meraní vhodíme dva diamanty a oba budú pravé, tak opäť nebudeme vedieť vybrať vhodnú dvojicu. (Budeme mať tri pravé a neidentifikovanú päticu.) Tak isto to nefunguje aj keď vhodíme tri. Nevyhovuje možnosť ak budú dva falošné a jeden pravý. (Nevieme ktorý je ktorý.) Viac ako tri už nemusíme skúšať, pretože ak vhodíme štyri kamene, tak sa dozvieme aké sú tri nevhodené a tým pádom je to to isté ako predošlý prípad. A podobne je to pri piatich (rovnako ako pri dvoch) a pri šiestich. (Rovnako ako pri jednom.) Ak bol diamant v prvom meraní falošný, vymeníme len slová pravý a falošný a riešime ten istý príklad čo pred chvíľou. Takže pri prvom meraní nemôžeme mať len jeden diamant, pretože nám to nemusí vyjsť.

Druhý prípad: Tentokrát budeme v prvom meraní vážiť dva diamanty. Ak sú oba pravé, vieme, že vo zvyšku máme už iba 2 pravé a 4 falošné. Teraz nám stačí v druhom meraní hodiť do prístroja dva diamanty zo zvyšku. Ak budú oba pravé, tak ich dáme na kôpku k pravým diamantom z prvého merania. Diamanty budú rozdelené na pravé a falošné a už si stačí vybrať po jednom z každého druhu. Ak budú oba falošné, zoberieme jeden z nich a pravý zoberieme z tých z prvého merania. Ak budú diamanty z druhého merania rôzne, tak máme presne to, čo sme chceli. Rovnako ak je jeden diamant z prvého merania pravý a jeden falošný, tak máme rovno to, čo sme chceli.

Tretí prípad: V prvom meraní vážime tri diamanty. V tomto prípade môžeme postupovať nasledovne. Zapamätáme si aké tieto diamanty sú a jeden z nich odoberieme. Vyberieme aj jeden diamant zo zvyšných a dáme do prístroja spolu s odobratým. Ak sú tieto dva rôzne, máme čo sme chceli. Ak sú oba rovnaké, tak vieme, aký bol diamant odobratý z troch z prvého merania. Takže si vieme vypočítať, aké sú ostatné dva diamanty z prvého merania. Takto sme zistili, aké sú diamanty v dvoch dvojiciach. A to už stačí na to, aby sme vedeli vybrať správne diamanty. Stačí, ak uvažujeme rovnako ako v prípade dvoch diamantov v prvom meraní. (Aj tu sa dajú prejsť všetky možnosti, ako bude vyzerať prvé trojica, ale spomínaný postup funguje pre všetky. Rozmyslite si to.)

Štvrtý prípad: Aj keď vážime štyri diamanty, dokážeme dostať to čo chceme — znova si zapamätáme koľko je medzi nimi falošných a koľko pravých. Ľubovoľné dva z nich vyberieme a znova odmeriame. Takto zistíme nielen to, aké sú tie dva diamanty, ale aj to, aké sú zvyšné dva diamanty z prvého merania. A to je už opäť rovnaké ako v prípade dvoch diamantov v prvom meraní.

Po prebratí všetkých možností sme zistili, že ak budeme mať pri prvom meraní dva (šesť), tri (päť) alebo štyri diamanty, tak vieme vhodným druhým meraním získať jeden pravý a jeden falošný diamant. Čo sme chceli dokázať.

[1] Na nuly sme nezabudli, len sme už slovne opísali, že v takých prípadoch je podmienka deliteľnosti tromi automaticky splnená.

Úloha č. 4: *Na výlete daroval každý chlapec každému dievčaťu jeden keksík a každé dievča darovalo každému chlapcovi jeden rezeň. Neskôr zjedol každý chlapec dva svoje rezne a každé dievča zjedlo tri svoje keksíky. Ukázalo sa, že deti spolu zjedli štvrtinu zo všetkých darčekov. Najviac koľko detí sa mohlo na výlete zúčastniť? Zdôvodnite tiež, prečo ich nemohlo byť viac.*

Riešenie: (opravovala Kika)
Označme si počet dievčat d a počet chlapcov c. Každý chlapec dostal po jednom rezni od každého dievčaťa, teda každý mal d rezňov. Keďže chlapcov je c, dokopy majú cd rezňov. Podobne dievčatá spolu dostali tiež cd keksíkov. (Rozmyslite si.) Takže dokopy bolo $2cd$ darčekov. Každý z c chlapcov zjedol dva svoje rezne, spolu zjedli $2c$ rezňov. Dievčatá zjedli $3d$ keksíkov. Spolu zjedli štvrtinu zo všetkých darčekov, čo môžeme vyjadriť rovnicou

$$\begin{aligned} 2c + 3d &= \frac{2cd}{4} = \frac{cd}{2} \qquad\qquad / \cdot 2 \\ 4c + 6d &= cd \end{aligned}$$

Toto je rovnica, ktorá priamo vyplýva zo zadania. Treba ju vyriešiť tak, aby c a d boli prirodzené čísla (c a d sú počty detí) a aby $c + d$ bolo čo najväčšie. Sem sa väčšina z vás úspešne dostala. Postupným upravením rovnosti $4c + 6d = cd$ na $4c = cd - 6d$ a vyjadrením c a d dostaneme

$$d = \frac{4c}{c-6} \qquad \text{a tiež} \qquad c = \frac{6d}{d-4}.$$

Všetky úpravy boli ekvivalentné, až na poslednú, kde treba samostatne prešetriť prípad $c = 6$ a $d = 4$. (Aby sme nedelili nulou.) Z posledných dvoch vzťahov je okrem toho vidieť, že ak na výlete nechceme záporný počet chlapcov alebo dievčat, musí byť $c > 6$ a $d > 4$.
V tomto momente väčšina z vás začala dosádzať za c a d nejaké čísla. Dosadzovanie (vám sympatických) čísel pri rátaní príkladu nie je na škodu, je pravdepodobné, že si popri tom všimnete nejakú vlastnosť, ktorá môže pomôcť. Ale tú vlastnosť potom treba poriadne dokázať! Väčšine riešiteľov to robilo problémy, práve preto si tu ukážeme takýto „skúšajúci“ postup.
Poďme dosádzať pekne skraja. Dajme do prvého vzťahu $c = 7$. Získame $d = 28$. Dosaďme ďalej, $c = 8$. Dostaneme $d = 16$. Dva pokusy sú predsa len málo, dosaďme ešte $c = 9$ a dostaneme $d = 12$. Tak. Všimli sme si niečo? Ak nie, tak nie je hanbou skúsiť ešte niekoľko čísel. Ak ale niečo tušíme, môžeme to skúsiť dokázať, a ak to dokážeme, môžeme to ďalej používať.
Z týchto troch výpočtov to napríklad vyzerá tak, že čím väčší je počet chlapcov, tým menší je celkový počet detí. No skúsme sa zamyslieť, či to tak naozaj môže byť. Pre $c = 9$ a $d = 12$ je na výlete 21 detí. Koľko bude detí, ak do vzťahu pre výpočet dievčat dosadím nejaké $c > 21$? Počet dievčat bude určite kladný, lebo $c > 6$. A počet detí na výlete bude určite viac ako 21, lebo už len tých chlapcov je tam viac než 21.
Tento tip nám nevyšiel. To sa stáva, a práve preto je veľmi dôležité, aby ste si každú svoju domnienku poriadne dokázali. Ale nevzdávajme sa, z našich troch výpočtov sa dá všimnúť aj niečo iné. Konkrétne to, že čím viac je chlapcov, tým menej je dievčat. Opäť to skúsme overiť. Pozrime sa na nasledujúcu rovnosť:

$$d = \frac{4c}{c-6}.$$

Je ozaj škaredá a nie je z nej nič vidieť, preto ju treba nejako upraviť. Bolo by fantastické, keby sa nám podarilo z menovateľa alebo z čitateľa odstrániť c. Potom by sme si vedeli ľahšie predstaviť, ako sa mení d, keď c rastie. Tak to skúsme takto:

$$d = \frac{4c}{c-6} = \frac{4(c-6+6)}{c-6} = \frac{(4c-24)}{c-6} + \frac{24}{c-6} = 4 + \frac{24}{c-6}$$

Z tohto je jednoznačne vidieť, že čím väčšie je c, tým je menší zlomok $24/(c-6)$ a teda aj d. (A naopak.) Super, môžeme pokračovať v dosadzovaní čoraz väčšieho c až dovtedy, kým nám d neklesne na päť. (Menšie už byť nemôže.) Vtedy prestaneme dosádzať, lebo iné riešenia s celočíselným d už neexistujú. Mimochodom, aké bude to maximálne c? No dosadíme do vzťahov na začiatku najmenšie možné d (čiže päť) a dostaneme $c = 30$. Stačí už iba vyskúšať všetky možnosti pre c od 7 do 30 a vybrať z nich tú, kde je najviac detí. Najviac detí vyšlo 35 a možnosti, ako mohli byť rozdelené, boli dve. Jedna $c = 7, d = 28$ a druhá $c = 30, d = 5$.

Úloha č. 5: *Kika holduje hazardným hrám. Má dva rovnaké balíčky 32 sedmových kariet. Každý z nich samostatne zamieša a položí jeden balíček na druhý. Teraz pre každú z 32 dvojíc rovnakých kariet spočíta počet iných kariet medzi kartami z tejto dvojice v takto vytvorenej kope. Určte súčet týchto počtov. (Nájdite všetky možné hodnoty tohto súčtu a dokážte, že iné neexistujú.)*

Riešenie: (opravoval Bus)
Nie každý hneď na prvý raz pochopil zadanie tejto úlohy, skúsme si ho preto trochu vysvetliť. Kika má dva balíčky po 32 kariet, oba zamieša a položí ich na seba. Vznikne jej tak kôpka 64 kariet v ktorej sa nachádza každá sedmová

karta dvakrát. Teraz začne Kika počítať nasledujúcu vec. Zistí, kde v kôpke sa nachádzajú dve srdcové sedmičky. Spočíta počet kariet medzi nimi a zapíše si ho na papier. Napríklad ak by boli srdcové sedmičky na vrchu a na spodku kôpky, zapísala by si číslo 62. Ak by boli v kôpke hneď za sebou, zapísala by si nulu. To isté spraví aj pre srdcové osmičky, srdcové deviatky a tak ďalej pre všetkých 32 sedmových kariet. Našou úlohou je zistiť súčet čísel, ktoré si Kika zapísala.

Teraz k samotnému riešeniu. Postupovať sa dalo viacerými spôsobmi, my si ukážeme riešenie v ktorom sa použije veľmi užitočný trik. Tento trik je dobré si zapamätať, pretože je často pointou rôznych (na prvý pohľad ťažkých) kombinatorických úloh. Namiesto toho, aby sme pre každú dvojicu rovnakých kariet zisťovali počet kariet medzi nimi, budeme počítať niečo iné. Pre každú kartu zistíme, koľkokrát sa nachádza medzi nejakými dvoma rovnakými kartami. Vyberieme si napríklad pätnástu kartu balíčka a vypíšeme si všetky dvojice kariet, medzi ktorými leží. Ak napríklad leží niekde medzi dvoma zelenými dolníkmi, vypíšeme zeleného dolníka. Ak sa nachádza aj medzi dvoma guľovými esami, vypíšeme si guľové eso. Nakoniec spočítame, koľko takýchto dvojíc sme našli — v tomto prípade to boli dve — a zapíšeme si tento počet na papier. Spravíme to pre všetky karty v kôpke a čísla nakoniec sčítame. Treba si uvedomiť, že dostaneme ten istý súčet ako dostala Kika. Kika totiž započítala každú kartu vždy, keď ju našla medzi nejakými dvoma rovnakými kartami. My sme pre každú kartu rovno spočítali, koľkokrát ju Kika započíta. V súčte je to to isté číslo.

Teraz nám už stačí iba zistiť, koľkokrát sa každá z kariet nachádza medzi dvoma rovnakými kartami. Mohlo by sa zdať, že sme si úlohu veľmi nezjednodušili, no v skutočnosti sa to už spočíta veľmi ľahko. Prvá karta na kope nie je medzi žiadnymi dvoma kartami, pretože je navrchu. Druhá karta sa nachádza práve medzi jednou takou dvojicou — vrchnou kartou a jej párom. Tretia karta leží medzi dvoma dvojicami — vrchnou kartou a jej párom a druhou kartou (zhora) a jej párom. Vo všeobecnosti teda bude n-tá karta ležať medzi $n-1$ dvojicami rovnakých kariet, a to medzi každou z $n-1$ kariet nad ňou a jej párom. Počkať ale, vezmime si opäť pätnástu kartu. Nemohlo by sa stať, že prvá karta má svoj pár napríklad na siedmom mieste? Potom už nemôžeme tvrdiť, že pätnásta karta leží medzi prvou kartou a jej párom, pretože pätnásta karta neleží medzi prvou a siedmou. Toto sa však našťastie stať nemôže — prvých 32 kariet je totiž z jedného balíčka, a teda medzi nimi nemôžu byť dve rovnaké karty. Každá z prvých 32 kariet má svoj pár až medzi druhými 32 kartami. Preto karta na n-tej pozícii pre $n \leq 32$ leží vždy medzi $n-1$ dvojicami rovnakých kariet. Pre $n > 32$ môžeme použiť rovnakú úvahu, ale budeme počítať karty odspodu. Ak je karta viac ako tridsiata druhá odvrchu, musí byť k-ta odspodu pre $k \leq 32$ a opäť nám vyjde, že leží medzi $k-1$ dvojicami rovnakých kariet. Nakoniec teda na papieri budeme mať čísla $0, 1, 2, \ldots, 30, 31, 31, 30, \ldots, 2, 1, 0$. Ich súčet vypočítame pomocou vzorca na súčet čísel od jedna po n,

$$0 + 1 + \cdots + 31 + 31 + \cdots + 1 + 0 = \frac{31 \cdot 32}{2} + \frac{31 \cdot 32}{2} = 31 \cdot 32 = 992.$$

Nech sú teda karty zamiešané akokoľvek, Kike môže vyjsť a vždy vyjde jedine súčet 992.

Úloha č. 6: *Nech a, b, c sú celé čísla, ktoré vyhovujú rovnosti $ab + bc + ca = 1$. Dokážte, že číslo*

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

je druhou mocninou celého čísla.

Riešenie: (opravoval Bebe)

V tomto príklade si ukážeme dve riešenia. Prvé, ktoré našla väčšina z vás, bude priamočiare a druhé naopak trošku trikové. Tak hor sa do čítania.

Každý z vás sa zrejme zamyslel nad tým, či je rovnosť $ab + ba + ca = 1$ v zadaní vôbec potrebná. Skúsme preto zistiť, či daný výraz nie je druhá mocnina aj pre čísla nespĺňajúce túto rovnosť. Dosadením $a = b = c = 1$ máme

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8,$$

čo nie je druhá mocnina celého čísla. Náš pokus síce nevyšiel, ale aspoň vieme, že náš výraz naozaj nebude druhou mocninou pre ľubovoľné čísla. Nejakým spôsobom teda budeme musieť využiť rovnosť $ab + bc + ca = 1$.

Dá s to napríklad tak, že vyjadríme jednu z premenných a dosadíme ju do zadaného výrazu. Vyjadrime premennú a

$$\begin{aligned} a(b + c) &= 1 - bc, \\ a &= \frac{1 - bc}{b + c}. \end{aligned}$$

Pred ďalšími výpočtami by mal každý z vás zhrozene skríknuť a snažiť sa zistiť, či sme náhodou nedelili nulou. Skúsme to zistiť spoločne. Ak $b + c = 0$, tak $b = -c$ a z našej pôvodnej rovnosti máme

$$ab + bc + ca = a(b + c) + bc = a \cdot 0 + bc = bc = -c^2 = 1.$$

Posledná rovnosť však zrejme nemá zmysel, lebo $-c^2$ je záporné číslo alebo nula, a preto sa nemôže rovnať jednotke. (Rozmyslite si prečo!) Teraz už bez obáv môžeme pokračovať v ďalších úpravách. Dosaďme do výrazu $1 + a^2$ naše vyjadrenie za a a postupne upravujme

$$\begin{aligned} 1+a^2 &= 1+\left(\frac{1-bc}{b+c}\right)^2 = \frac{(b+c)^2+(1-bc)^2}{(b+c)^2} = \frac{b^2+2bc+c^2+1-2bc+b^2c^2}{(b+c)^2} = \\ &= \frac{b^2+c^2+1+b^2c^2}{(b+c)^2} = \frac{b^2(1+c^2)+(1+c^2)}{(b+c)^2} = \frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(b+c)^2}. \end{aligned}$$

Pred tým, ako dosadíme tento výraz do skúmaného výrazu je potrebné si uvedomiť, že $1+a^2$ je celé číslo a teda aj $(1+b^2)(1+c^2)/(b+c)^2$ je celé číslo. Posilnení touto vedomosťou pokračujme ďalej

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = \frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(b+c)^2}(1+b^2)(1+c^2) = \left(\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(b+c)}\right)^2 \tag{1}$$

Získali sme vyjadrenie skúmaného výrazu v tvare druhej mocniny. Otázkou je, či je to druhá mocnina celého čísla. Už vieme, že $(1+b^2)(1+c^2)/(b+c)^2$ je celé číslo. Tým pádom bude celé aj číslo $(1+b^2)(1+c^2)/(b+c)$, lebo vznikne vynásobením dvoch celých čísel. (Rozmyslite si ktorých.) Teda $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ vieme zapísať ako druhú mocninu celého čísla, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie:
Pripočítajme k obom stranám našej počiatočnej rovnosti $ab+bc+ca=1$ výraz c^2

$$\begin{aligned} ab+bc+ca+c^2 &= 1+c^2 \\ b(a+c)+c(a+c) &= 1+c^2 \\ (a+c)(b+c) &= 1+c^2 \end{aligned}$$

Posledná rovnosť je pre nás výhodná, pretože sme získali pekné vyjadrenie jedného z členov v skúmanom výraze. Ak vyjadríme rovnakým spôsobom ešte aj $1+a^2$ a $1+b^2$ a všetko napokon dosadíme do skúmaného výrazu, tak

$$\begin{aligned} (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) &= (a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(a+c)(b+c) \\ &= (a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2 = [(a+b)(a+c)(b+c)]^2, \end{aligned}$$

čo je určite druhá mocnina celého čísla (rozmyslite si to) a to sme chceli ukázať.

Úloha č. 7: *Petržlen bol u Ondreja na izbe a zbadal jeho prešibanú krysu. Nedalo sa nevšimnúť, že mala niečo za lubom. (Vlastne ako vždy.) Ofarbovala prirodzené čísla rôznymi farbami*[2] *tak, aby platilo: Ak je rozdiel dvoch rôznych prirodzených čísel prvočíslo, tak tieto čísla majú rôznu farbu. S akým najmenším počtom rôznych farieb sa to mohlo kryse podariť? Vysvetlite tiež, prečo by jej menej farieb nestačilo.*

Riešenie: (opravoval JeFo, Droopy)
Poďme pekne zaradom. Vezmime si papier, pero, pastelky, tí lenivejší môžu pastelky nahradiť písmenkami, prípadne čísielkami. Po troche kreslenia ľahko prídeme na to, že jedna ani dve farby nám určite nestačia, dá sa to ľahko overiť. Keď začneme ofarbovať troma farbami, po počiatočnom nadšení nás zastaví už vypísanie prvých siedmych čísiel, pokojne si to vyskúšajte. Ako to však napísať tak, aby sme nemuseli rozoberať všetky možnosti? (Čo je síce tiež správne, ale menej elegantné.) Chceli by sme nájsť štyri čísla tak, aby rozdiel každých dvoch čísel bolo prvočíslo. Po pár pokusoch nájsť takú štvoricu nám prídu na um čísla n, $n+2$, $n+5$, $n+7$. (Konkrétne napríklad 1, 3, 6, 8.) Ako vidno, rozdiel každých dvoch čísel je prvočíslo, a preto sú výborným dôkazom toho, že tri a menej farieb nám nestačí.
Poďme na štyri farby. Po chvíli skúšania nás prepadne dobrý pocit, že toto je to pravé, už to len dokázať. Vieme, že rozdiel dvoch čísiel rovnakej parity je vždy párny, čo je fajn, keďže existuje len jedno párne prvočíslo. Rozdeľme čísla teda do dvoch skupín na párne a nepárne. Už sa len potrebujeme zbaviť rozdielu dva. To spravíme tak, že párne aj nepárne čísla rozdelíme do dvoch skupín „napreskačku“, tak aby v každej z nich bol rozdiel dvoch čísel násobkom štvorky. (Teda spolu budú $2, 6, 10, \dots$, ďalej $4, 8, 12, \dots$, atď.) Áno, násobky štvorky, heuréka, to bude ono, čísla zafarbíme podľa toho, aký zvyšok dávajú po delení štvorkou. Teda tie čo dávajú zvyšok 1 budú modré, zvyšok 2 budú zelené, zvyšok 3 budú červené a zvyšok 4 budú žlté. (Vznešene sa tomu hovorí: Ak je číslo n kongruentné s 1 tak ho zafarbíme na modro, atď., čo znamená, že číslo n je tvaru $4k+1$.) Keďže teraz je rozdiel ľubovoľných dvoch čísiel zafarbených rovnakou farbou vždy deliteľný štyrmi, tak to nikdy nebude prvočíslo. Teda sme pre krysu našli dobré ofarbenie štyrmi farbami.

Komentár: Väčšine z vás sa podarilo nájsť ofarbenie štyrmi farbami, ale nemali ste dobrý dôkaz, že tri farby nestačia. Tvrdenie, že keby sme pomiešali párne čísla s nepárnymi, tak by nám určite raz vzniklo prvočíslo veľmi neobstojí. Určite treba nájsť konkrétny prípad, kedy to nebude fungovať.

[2] každé číslo práve jednou farbou

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Rozdeľovanie cukríkov do nádob je Edova obľúbená činnosť vo voľnom čase. Nerobí to však hocijako. Na začiatku si zoberie n nádob, pričom n je minimálne štyri. Potom do týchto nádob rozdelí niekoľko cukríkov, pričom spolu dá do nádob aspoň štyri cukríky. Následne v každom ťahu odoberie z dvoch rôznych nádob po jednom cukríku a obidva dá do nejakej tretej nádoby. Edo sa snaží dostať všetky cukríky do jednej nádoby po konečnom počte ťahov. Podarí sa mu to vždy, nech je začiatočné rozloženie cukríkov v nádobách akékoľvek?*

<u>Komentár:</u> Na začiatok si ujasnime zopár vecí. V tomto príklade treba rozhodnúť, či pre ľubovoľné začiatočné usporiadanie cukríkov existuje konečná postupnosť povolených ťahov, ktorými všetky cukríky dáme do (práve) jednej nádoby. Po nejakom tom skúšaní by ste mali nadobudnúť presvedčenie, že to vždy ide. Dokážeme to tak, že pre Eda skonštruujeme *algoritmus* (postupnosť inštrukcií), ktorý ho za každých okolností dovedie do úspešného konca. To sa podarilo aj drvivej väčšine z vás. Bolo ale nutné rozoberať zopár situácií a tam ste sa často motali až zamotali. Preto dobrá rada do budúcnosti znie nasledovne. Ak máte nejaké skoro-riešenie v hlave, tak si to ešte trocha premyslite (alebo si napíšte hlavné kroky dôkazu na papier) a snažte sa to zjednodušiť a premyslieť si, či je to vôbec dobre. Skrátite tým dĺžku svojho dôkazu, zmenšíte počet chýb a nejasných pasáží, no a hlavne vás potom pochválime za pekné riešenia. :) Poďme na vzorové riešenie.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Petržlen, Beren)
Niektoré ťahy (resp. postupnosti ťahov) sa nám na presúvanie cukríkov veľmi hodia, budeme ich volať finta FN a finta DZ.
<u>Finta FN</u>. Ak existujú aspoň tri rôzne neprázdne nádoby, tak môžeme z dvoch nádob vybrať po jednom cukríku a dať ich do tretej. Poradie zvolíme tak, aby tretia nádoba bola tá najplnšia z nich.
<u>Finta DZ</u>. Ak sú *práve dve* nádoby neprázdne, tak rozlíšime dva prípady podľa toho, či má každá nádoba najviac dva cukríky (prípad a)), alebo existuje nádoba s viac ako dvoma cukríkmi (prípad b)).

a) Predpokladajme, že v oboch nádobách sú najviac dva cukríky. Zo zadania vieme, že máme dokopy aspoň štyri cukríky a podľa predpokladu v každej z dvoch neprázdnych nádob sú najviac dva cukríky, takže v oboch nádobách musia byť práve dva cukríky. Túto situáciu prevedieme na prípad b) nasledovne:

$$(2,2,0,0) \to (1,1,2,0) \to (3,1,0,0).$$

Usporiadané štvorice vyjadrujú počty cukríkov v dvoch neprázdnych nádobách a v ďalších dvoch nádobách, ktoré boli na začiatku prázdne. Pre $n > 4$ nádob by sme tieto štvorice mohli doplniť na n-tice $n-4$ nulami.

b) Nech dve neprázdne nádoby obsahujú postupne x a y cukríkov, pričom $x \geq y \geq 1$, $x \geq 3$. Situáciu symbolicky zapíšeme podobne ako v prípade a) pomocou štvorice $(x, y, 0, 0)$. V tomto prípade bude finta DZ nasledujúca postupnosť krokov:

$$(x,y,0,0) \to (x-1,y-1,2,0) \to (x-2,y-1,1,2) \to (x-3,y+1,1,1) \to (x-1,y,1,0) \to (x+1,y-1,0,0).$$

Môžeme to spraviť, pretože máme aspoň štyri nádoby a tiež $x \geq 3$.

Keď sme si definovali takéto skvelé finty, stačí ich už len správne použiť a dať Edovi jasné inštrukcie, ako má postupovať. Keďže máme konečný počet nádob (n), tak existuje nádoba s najväčším počtom cukríkov. Označíme si ju ako BB („big boss"). Kým máme aspoň tri neprázdne nádoby, používame fintu FN, ktorou zoberieme dva cukríky z dvoch nádob a dáme ich do BB. BB bude mať stále najviac cukríkov, pretože počet cukríkov v BB sa len zvyšuje a v ostatných nádobách sa počet cukríkov len znižuje. Ak už nevieme použiť fintu FN (tzn. máme najviac dve neprázdne nádoby), skúsime fintu DZ. Každým použitím finty DZ sa počet cukríkov v BB zväčší o jedna. Keď už sa nebude dať použiť finta DZ, budeme mať len jednu nádobu a teda sme úspešne skončili.

Algoritmus v skratke: Zvolíme nádobu BB a používam fintu FN na plnenie BB, kým sa dá. Potom používam fintu DZ na postupné presúvanie cukríkov do BB, kým sa dá. Koniec.

Diskusia o konečnom počte krokov algoritmu: Finty FN aj DZ zvyšujú počet cukríkov v BB aspoň o jedna a obe finty majú konečný počet krokov. Keďže Edo má konečný počet cukríkov, tak sa algoritmus zastaví.

Správnosť algoritmu: Keď nemám práve jednu neprázdnu nádobu, tak algoritmus pokračuje vo svojom behu a zastaví sa až v požadovanej pozícii. Ukázali sme, že algoritmus sa vždy zastaví, takže zostane práve jedna neprázdna nádoba.

<u>Komentár:</u> Z niektorých vašich riešení sme mali pocit, že ich vymýšľate počas písania. Potom ste definovali nové pojmy a finty práve vtedy, keď ste ich potrebovali. Počas toho ste si spomenuli, že ste na jeden prípad zabudli a začali ste sa motať. (Prípadne písať viackrát to isté.) Preto vám chceme ukázať jednu možnosť, ako tomu predísť a to najprv si definovať všetky pojmy a potom sa na ne len odvolávať. Tým dosiahnete to, že riešenie je prehľadné a neopakujete sa. Toľko poučenie k tomuto príkladu, všetkých beťárov zdravíme starouhorskou riekankou: „Piros, fehér, zöld; ez a magyar föld, Ki!"

Úloha č. 9: *Jefo si myslí, že určite každého z vás nadchne nasledujúca úloha. Chceme zapísať čísla* $1, 2, \ldots, 100$ *za sebou v takom poradí, aby pre každé číslo platilo, že má pred sebou len také čísla, ktoré sú od neho väčšie, alebo len také čísla, ktoré sú od neho menšie. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?*
Poznámka: Keby sme takto zapisovali za sebou iba čísla $1, 2, 3, 4, 5$*; tak vyhovujúce poradie je napríklad* $4, 5, 3, 2, 1$.

Riešenie: (opravoval Mišáč)
Usporiadaniu čísel, ktoré spĺňa podmienku zo zadania, budeme hovoriť *správne usporiadanie.* Na začiatok je prirodzené nájsť nejaké správne usporiadanie. Neviem ako vám, ale mne sa sto čísel vypisovať nechcelo. :) Preto to môžeme skúsiť napríklad s číslami od 1 do 10:

$$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 4,\ 3,\ 10,\ 2,\ 1.$$

Čo je zaujímavé na takomto usporiadaní? Keď nájdeme aj iné správne usporiadania, zistíme, že na konci je vždy číslo 1 alebo číslo 10. Predstavme si, že by na konci bolo nejaké iné číslo, označme ho a. Potom by malo a niekde pred sebou číslo 1 (menšie ako a) a aj číslo 10 (väčšie ako a). To znamená, že takéto usporiadanie by nebolo správne.
Trochu si úlohu zovšeobecníme. Predstavme si, že máme n navzájom rôznych prirodzených čísel (nie nutne 1 až n). Koľkými spôsobmi ich vieme správne usporiadať? Označme si tento počet $p(n)$.[3] Už sme si zdôvodnili, že na konci musí byť najmenšie číslo alebo najväčšie číslo, čiže zvolíme nejaké z týchto dvoch čísel a dáme ho na koniec. Ostáva nám nejako zoradiť zvyšných $n-1$ navzájom rôznych čísel. Toto môžeme urobiť $p(n-1)$ spôsobmi. To znamená, že správnych usporiadaní n čísel s najmenším číslom na konci je $p(n-1)$ a s najväčším číslom na konci je tiež $p(n-1)$. Keďže iné správne usporiadania n čísel neexistujú, tak

$$p(n) = p(n-1) + p(n-1) = 2p(n-1).$$

Tento vzťah platí pre ľubovoľné prirodzené číslo n, preto môžeme písať

$$p(n) = 2p(n-1) = 2.2p(n-2) = 2^2p(n-2) = \cdots = 2^{n-1}p(1).$$

Našou úlohou je vlastne zistiť $p(100)$. Keďže $p(1) = 1$, tak správnych usporiadaní čísel 1 až 100 je 2^{99}.

Komentár: Tento postup nám vysvetľuje ako vytvoriť nejaké správne usporiadanie, keď postupujeme odzadu. Na posledné miesto dáme najväčšie číslo (100) alebo najmenšie číslo (1). Na predposledné miesto môžeme dať zase len najväčšie alebo najmenšie zo zvyšných čísel. Na tretie miesto od konca opäť dáme najväčšie alebo najmenšie nepoužité číslo a takto postupujeme ďalej.

Úloha č. 10: *U Miša v chladničke sa dobre darí istej geometrickej postupnosti. Vieme o nej, že jej prvý, desiaty a tridsiaty člen je prirodzeným číslom. Dokážte, že aj jej dvadsiaty člen musí byť prirodzeným číslom.*

Riešenie: (opravoval Myrec)
Tento príklad veľa z vás vyriešilo úspešne. Problém u tých, ktorým sa to nepodarilo, mohol byť s dobrým „uchopením“ pojmu geometrická postupnosť.
Postupnosť reálnych čísel je *geometrická*, ak podiel každých dvoch po sebe nasledujúcich členov je rovnaký. Tento podiel sa označuje q a nazývame ho kvocient. Postupnosť $a_1, a_2, a_3, a_4\ldots$ je geometrická s kvocientom q, ak

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

Pri takejto definícii predpokladáme, že každý člen geometrickej postupnosti musí byť nenulový a teda aj $q \neq 0$.
Správny nápad je vyjadriť si každý člen geometrickej postupnosti pomocou prvého členu a kvocientu, napríklad

$$a_{10} = qa_9 = q^2a_8 = \cdots = q^9a_1.$$

Ak a_{10} aj a_1 sú prirodzené, tak $q^9 = a_{10}/a_1$ je kladné racionálne (zlomok). Podobne aj $a_{30} = q^{29} \cdot a_1$ a aj q^{29} je kladné racionálne číslo. Poďme sa bližšie pozrieť na kladné racionálne čísla. Súčet, súčin aj podiel kladných racionálnych čísel je kladné racionálne číslo. Na čo je nám táto vlastnosť? Ak q^{29} a q^9 sú kladné racionálne tak je kladné racionálne aj $q^{29}/q^9 = q^{20}$. Rovnako je aj $q^{20}/(q^9q^9) = q^2$ kladné racionálne a potom aj $q^9/(q^2q^2q^2q^2) = q$ je kladné racionálne číslo. Takže q sa dá zapísať ako $q = m/n$, kde m a n sú kladné celé nesúdeliteľné čísla.
Vieme, že

$$a_{30} = a_1q^{29} = \frac{a_1m^{29}}{n^{29}}.$$

Pretože m a n sú nesúdeliteľné, musí n^{29} deliť a_1. Z toho vidíme, že

$$a_1 = k \cdot n^{29} = (k \cdot n^{10})n^{19}$$

[3] Mohli by ste protestovať, že číslo $p(n)$ nie je definované korektne. Veď počet správnych usporiadaní by mohol záležať nie len od počtu čísel, ale aj od toho, ktoré čísla uvažujeme. Ale ako mnohí iste tušíte, teraz vás len zavádzam. Počet správnych usporiadaní naozaj závisí len od počtu čísel, ktoré uvažujeme. Premyslite si to.

pre nejaké k prirodzené. A konečne

$$a_{20} = \frac{a_1 m^{19}}{n^{19}} = \frac{kn^{29}m^{19}}{n^{19}} = kn^{10}m^{19}$$

a to je súčin prirodzených čísel, preto aj a_{20} je prirodzené číslo.

Úloha č. 11: *Medzi vedúcimi KMS je istá skupina ľudí obľubujúcich konzumáciu Horaliek po šírke. Je známe, že týchto zaujímavých ľudí je aspoň päť. Niektorí ľudia v tejto skupine sa poznajú, iní zas nie. Vzťah poznania sa je vzájomný, teda ak Bus pozná Fofa, tak aj Fofo pozná Busa. Povedzme si niečo viac o tejto skupine. Vieme, že ak sa v nej dvaja ľudia poznajú, tak nemajú žiadnych spoločných známych. Ľubovoľní dvaja ľudia, ktorí sa nepoznajú, majú presne dvoch spoločných známych. Zistite, koľko najmenej ľudí môže byť v tejto skupine.*

Riešenie: (opravoval Edo a Hanka)
Zabudnime na všetkých iných ľudí a uvažujme len o skupine ľudí obľubujúcich konzumáciu Horaliek po šírke (skratka SĽOKHpoŠ) a vzťahoch medzi nimi. Všimnime si Busa, ktorý, ako vieme zo zadania, obľubuje jedenie Horaliek po šírke. O Busovi vieme povedať, že určite pozná aspoň dvoch iných vedúcich s touto vlastnosťou. Prečo? Okrem Busa sú v skupine aspoň štyria ďalší vedúci. Ak by všetkých poznal, tak pozná aspoň štyroch ľudí. Ak by niekoho spomedzi ostatných nepoznal, musí s ním mať práve dvoch spoločných známych a teda opäť Bus pozná aspoň dvoch členov skupiny.
Označme P skupinu ľudí, ktorých Bus pozná a N, ktorých Bus nepozná. V skupine P sa žiadni dvaja vedúci nemôžu poznať, pretože majú spoločného známeho Busa. Takže ľubovoľní dvaja vedúci z P majú práve dvoch spoločných známych. Jedným takýmto spoločným známym je Bus, druhý teda musí byť z N.
Ak si vyberieme dve rôzne dvojice z P, tak spoločný známy prvej dvojice v N nemôže byť ten istý človek ako spoločný známy druhej dvojice v N, pretože by s ním mal Bus aspoň troch spoločných známych. Preto ku každej dvojici v P musí v N existovať človek, ktorý pozná v P iba danú dvojicu a nikoho iného. Keď si označíme k počet ľudí v P, potom počet dvojíc ľudí z P je $\binom{k}{2}$ a teda v N musí byť aspoň $\binom{k}{2}$ ľudí.
Predstavme si situáciu, že by v N bolo viac ako $\binom{k}{2}$ ľudí. Keďže nik z N nepozná Busa, tak musí mať každý z N s Busom spoločných práve dvoch známych. Títo dvaja budú určite z P a teda každý človek z N pozná práve dvoch ľudí z P. Ak je ľudí v N viac ako $\binom{k}{2}$, tak z Dirichletovho princípu nutne niektorí dvaja z N poznajú rovnakú dvojicu z P. To už je spor, lebo táto dvojica z P by mala troch spoločných známych. Preto v N musí byť presne $\binom{k}{2}$ ľudí.
Už sme niekoľkokrát využili fakt, že ľudia v SĽOKHpoŠ sa delia na ľudí, ktorí Busa poznajú, ľudí, ktorí Busa nepoznajú a samotného Busa. Ukázali sme, že ich je spolu $1 + k + \binom{k}{2}$. Všimnime si, že ak by sme si na začiatku zvolili iného vedúceho ako Busa (napríklad v zadaní spomínaného Fofa) a označili počet jeho známych l, tak by sme dostali, že SĽOKHpoŠ má $1 + l + \binom{l}{2}$ členov. Potom ale musí platiť $l = k$, teda každý vedúci pozná rovnako veľa ľudí.
A sme znovu pri Busovi:) Takže, Bus pozná k vedúcich z P a nepozná $\binom{k}{2}$ vedúcich z N. Zároveň každý vedúci z P pozná Busa a ďalších $k-1$ vedúcich z N, čo je spolu očakávaných k. Ostávajú nám vedúci v N. Každý z nich pozná zatiaľ práve dvoch vedúcich v P. Busa nepoznajú a teda musí každý z nich poznať práve $k-2$ iných vedúcich z N. Zároveň, dvaja vedúci z N, ktorí majú spoločného známeho v P, sa poznať nemôžu. Teda vedúci z N môže poznať iba takého vedúceho z N, ktorý nepozná ani jedného z jeho známych v P. Takých vedúcich v N je toľko, koľko je dvojíc medzi $k-2$ vedúcimi z P a to je $\binom{k-2}{2}$. Preto, aby každý vedúci z N mohol poznať k vedúcich, musí platiť $\binom{k-2}{2} + 2 \geq k$, z čoho vyplýva $k \geq 5$ (alebo $k \leq 2$, ale vtedy je počet vedúcich menej ako päť). Túto časť si poriadne premyslite.
Pre $k = 5$ sú pre každého z N práve tri možnosti, koho z N môže poznať a zároveň každý z N musí poznať práve troch z N. Preto je jednoznačne určené, kto musí koho poznať. Teraz nám stačí overiť, či si niektoré známosti neodporujú so zadaním. Ak nie, tak sme vyhrali, pretože sme ukázali, že vedúcich môže byť najmenej $1+5+\binom{5}{2} = 16$ a zároveň, že ich 16 byť môže.
O známostiach medzi Busom a P, vnútri P a medzi Busom a N sme už ukázali, že sú v súlade so zadaním. Označme si ľudí v P ako $P_1, \ldots, P_5$. Ľudí v N ako $N_{1,2}, N_{1,3}, \ldots, N_{4,5}$ podľa toho, ktorú dvojicu z P daný človek pozná. Človek $N_{i,j}$ pozná človeka $N_{k,l}$ práve vtedy, keď $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. Poďme teraz riešiť vzťahy v skupine N a medzi skupinami N a P.
Dvaja ľudia z N sa poznajú iba vtedy, ak nemajú spoločného známeho v P. Problém nastane, ak by mali nejakého spoločného známeho v N (vtedy by podmienka zadania nebola splnená). Zoberme si dvoch z N, ktorí sa poznajú, napríklad $N_{1,2}$ a $N_{3,4}$. Aby existoval ešte nejaký človek $N_{i,j}$, ktorý ich pozná oboch, museli by byť čísla i a j navzájom rôzne a tiež rôzne od čísel $1, 2, 3$ a 4. To však nejde, keďže máme len čísla do 5. Vezmime si teraz takú dvojicu z N, ktorá sa navzájom nepozná, napríklad $N_{1,2}$ a $N_{1,3}$. V P majú spoločného známeho iba P_1 zároveň v N môžu poznať iba človeka, ktorý nemá s ani jedným z nich ani jeden index rovnaký a to je jedine $N_{4,5}$. Túto úvahu vieme zopakovať pre ľubovoľnú dvojicu z N, ktorá sa nepozná. Preto dvaja vedúci z N, ktorí sa nepoznajú, majú dvoch spoločných známych, čiže všetko je ako má byť.
Ak jeden z P pozná jedného z N, tak už nemajú žiadnych spoločných známych, pretože v P sa navzájom ľudia nepoznajú a človek z N pozná iba takých ľudí z N, ktorých jeho známy z P nepozná.

Ostala nám posledná možnosť na overenie, teda čo ak sa človek z N a človek z P nepoznajú? Vezmime si takú dvojicu. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to P_1 a $N_{2,3}$. V P spoločných známych nemajú, lebo P_1 nepozná nikoho z P. V N pozná P_1 ľudí $N_{1,2}$,$N_{1,3}$, $N_{1,4}$, $N_{1,5}$ a $N_{2,3}$ pozná $N_{1,4}, N_{1,5}, N_{4,5}$, teda spoločných známych majú $N_{1,4}, N_{1,5}$, čo sú presne dvaja.
Ukázali sme, že takáto skupina šestnástich vedúcich vyhovuje podmienkam zo zadania, čiže šestnásť je aj minimálny počet vedúcich, ktorí môžu byť v SĽOKHpoŠ.

Úloha č. 12: *Prirodzené číslo nazvime huňaté, ak žiadne prvočíslo v jeho rozklade nemá exponent rovný jedna. Dokážte, že existuje nekonečne veľa dvojíc po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú obe huňaté. (Napríklad* $(8, 9)$ *je taká dvojica.)*

Komentár: S riešením tohoto príkladu ste zjavne nemali žiadny problém, preto len v skratke spomenieme dve z nich.

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Ak $(a, a+1)$ je dvojica po sebe idúcich huňatých čísel, tak $(4a^2+4a, 4a^2+4a+1)$ je tiež dvojica po sebe idúcich huňatých čísel, ktorá je určite väčšia než tá prvá. Počnúc dvojicou $(8, 9)$ vieme takýmto spôsobom vygenerovať ľubovoľne veľa dvojíc po sebe idúcich huňatých čísel.

Iné riešenie:
Uvažujme Diofantovskú rovnicu $x^2 - 8y^2 = 1$. Z teórie o Pellových rovniciach vieme, že má nekonečne veľa riešení v prirodzených číslach. Pre každé takéto riešenie (x, y) tvorí dvojica $(8y^2, x^2)$ pár po sebe idúcich huňatých čísel.

Úloha č. 13: *V rovine je nakreslený konvexný mnohouholník P aj so všetkými jeho uhlopriečkami, ktoré ho delia na menšie konvexné mnohouholníky. Vieme, že dĺžky všetkých strán aj uhlopriečok mnohouholníka P sú racionálne čísla. Ukážte, že aj všetky strany menších konvexných mnohouholníkov majú racionálne dĺžky.*

Riešenie: (opravoval Foto)
Foto nedodal vzorák na čas a preto ... vám ho možno dodá s ďalšou sériou.

Úloha č. 14: *Nech $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Nájdite počet bijektívnych funkcií $f : S \to S$ takých, že pre všetky $n \in S$ platí*

$$f(n) = f(g(n))f(h(n)),$$

kde $g(n), h(n)$ sú (jednoznačne určené) prirodzené čísla spĺňajúce $g(n) \le h(n)$, $g(n)h(n) = n$ a $h(n) - g(n)$ je najmenšie možné.

Komentár: K vyriešeniu tohoto príkladu stačí pár myšlienok, horšie je to so spísaním korektného postupu. V tomto vzorovom riešení si ukážeme, ako sa to dá napísať naozaj precízne. Pre krátkosť a zrozumiteľnosť dôkazy niektorých rutinných krokov vynecháme. Aj keď je tento vzorák dlhý a plný „chrobákov", neľakajte sa, nehryzie.

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Vyriešime všeobecnejšiu úlohu. Zvoľme si ľubovoľné prirodzené číslo N a zmeňme množinu S v zadaní na $S = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Najprv si uvedomme, že funkcia $f : S \to S$ spĺňa podmienku zo zadania práve vtedy, keď je bijektívna a *úplne multiplikatívna.*[4] Úplnu multiplikativitu funckie f môžeme zo zadania dokázať napr. (konečnou) indukciou. Ak $n \in S$ a $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ je kanonický rozklad čísla n na prvočísla, tak vďaka úplnej multiplikativite funkcie f máme

$$f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}) = f(p_1)^{a_1} f(p_2)^{a_2} \cdots f(p_s)^{a_s}. \tag{2}$$

Z výpočtu $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = f(1)^2$ vyplýva $f(1) = 1$. Označme P množinu prvočísel, ktoré nie sú väčšie než N. Ukážeme, že f musí zobraziť množinu P na seba. Ak by neplatilo $f(P) = P$, tak by existovalo $p \in P$ také, že pre žiadne z prvočísel $q \in P$ neplatí $f(q) = p$. Potom za pomoci (2) ľahko ukážete, že nemôže existovať také $s \in S$, že $f(s) = p$. Za predpokladu $f(P) \neq P$ sme dokázali, že f nemá v obore hodnôt $p \in S$ a teda nie je bijekcia. Preto musí platiť $f(P) = P$.

Ukážeme ešte niečo viac. Pre $k \in S$ označme

$$M_k = \left\{ p \in P \,\middle|\, \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor = k \right\}. \tag{3}$$

Zrejme

$$P = \bigcup_{k \in S} M_k$$

je disjunktný rozklad množiny P, pričom niektoré množiny M_k môžu byť aj prázdne. Ďalšiu myšlienku zhrnieme do *Lemy 1.*

[4]Funkciu $f : S \to S$ budeme nazývať úplne multiplikatívnou, ak $f(mn) = f(m)f(n)$ pre každé $m, n \in S$ také, že $mn \in S$.

Lema 1. Ak $k, l \in S$, $k < l$, $p \in M_k$, $q \in M_l$, tak nemôže platiť $f(q) = p$.

Dôkaz. Ak za daných predpokladov platí $f(q) = p$, potom vieme, že množina

$$\{q, 2q, 3q, \ldots, lq\} \subset S$$

sa použitím f zobrazí na

$$\{f(1)p, f(2)p, f(3)p, \ldots, f(l)p\} \subset S. \tag{4}$$

V množine (4) musí vďaka bijektívnosti f existovať prvok, ktorý je aspoň lp. Keďže však $l > k$ a $p \in M_k$, z (3) dostávame $lp > N$, čo je spor.

Zo vzťahu $f(P) = P$ a *Lemy 1* dostaneme, že pre každé $k \in S$ platí množinová inklúzia

$$f(M_k) \subset \bigcup_{i=k}^{N} M_i,$$

z čoho jednoduchou úvahou[5] zistíme, že musí platiť $f(M_k) = M_k$ pre každé $k \in S$. Dokázali sme, že f musí permutovať prvočísla v rámci množín M_k.

Ukážeme, že ak máme danú *permutáciu*[6] $\sigma : P \to P$ takú, že $\sigma(M_k) = M_k$ pre každé $k \in S$, potom existuje jediná úplne multiplikatívna bijekcia $f_\sigma : S \to S$ taká, že $f_\sigma(p) = \sigma(p)$ pre všetky $p \in P$. Ak sa nám to podarí, potom zrejme počet hľadaných bijekcií je rovný počtu permutácií s danou vlastnosťou, čo je presne

$$\prod_{k=1}^{N} |M_k|!. \tag{5}$$

Nech $\sigma : P \to P$ je ľubovoľná, pevne zvolená permutácia, pre ktorú platí $\sigma(M_k) = M_k$ pre každé $k \in S$. Jeden zo základných poznatkov o permutáciách (ak ste sa s ním ešte nestretli, skúste si ho dokázať) je, že každú permutáciu vieme vyjadriť ako zloženie veľmi jednoduchých permutácií, tzv. transpozícií. Transpozícia je permutácia, ktorá „vymieňa“ dva prvky a všetky ostatné fixuje. Presnejšie, ak $k \in S$, $p, q \in M_k$, $p \neq q$, tak transpozíciou nazveme permutáciu $\sigma_{pq} : P \to P$ definovanú

$$\sigma_{pq}(s) = \begin{cases} s, & s \notin \{p, q\}, \\ p, & s = q, \\ q, & s = p. \end{cases}$$

Teraz si už len uvedomíme, že na poskladanie σ pomocou transpozícií, si vystačíme s transpozíciami, ktoré „vymieňajú“ dva prvky, ktoré patria rovnakej množine M_k. Takže pre naše σ musí existovať konečná postupnosť (p_1, q_1), (p_2, q_2), …, (p_j, q_j) taká, že pre každé $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le j$ existuje $l \in S$ také, že $p_i, q_i \in M_l$, $p_i \neq q_i$ a navyše pre každé $p \in P$ platí

$$\sigma(p) = \sigma_{p_j q_j}(\sigma_{p_{j-1} q_{j-1}}(\cdots(\sigma_{p_1 q_1}(p))\cdots)).$$

Ku zvolenej permutácii σ skonštruujeme hľadanú funkciu $f_\sigma : S \to S$. Ak by σ bola transpozícia, asi by to nebolo až také zložité, že? Funkcia f by „vymieňala“ dve prvočísla v prvočíselnom rozklade a snáď by to bola aj úplne multiplikatívna bijekcia. Pre ľubovoľné σ by sme mohli dostať f_σ poskladaním takýchto funkcií (podobne ako nám to funguje s permutáciami). Spravíme to formálne. Nech $k \in S$, $p, q \in M_k$, $p \neq q$. Funkciu $f_{pq} : S \to \mathbb{N}$ definujeme pre $n \in S$ predpisom

$$f_{pq}(n) = f_{pq}(p^b q^c r_1^{a_1} r_2^{r_2} \cdots r_s^{a_s}) = p^c q^b r_1^{a_1} r_2^{r_2} \cdots r_s^{a_s}, \tag{6}$$

kde $n = p^b q^c r_1^{a_1} r_2^{r_2} \cdots r_s^{a_s}$ je kanonický rozklad čísla n na prvočísla. Funkcia f_{pq} „vymení“ prvočísla p, q v prvočíselnom rozklade. Sami si ľahko ukážete, že funkcia f_{pq} je úplne multiplikatívna a injektívna. Ukážeme, že obor hodnôt je podmnožina S, z čoho bude plynúť aj bijektívnosť f. Nech $m \in S$, $b \in \mathbb{N}$. Potom vďaka $p, q \in M_k$ a (3) dostaneme

$$p^0 q^b m \in S \;\Leftrightarrow\; p^1 q^{b-1} m \in S \;\Leftrightarrow\; p^2 q^{b-2} m \in S \;\Leftrightarrow\; \cdots \;\Leftrightarrow\; p^b q^0 m \in S.$$

Z toho vieme, že funkcia f_{pq} zobrazuje z množiny S do množiny S a teda $f_{pq} : S \to S$ je bijekcia.

Teraz stačí definovať f_σ ako zloženie týchto funkcií, presnejšie

$$f_\sigma(s) = f_{p_j q_j}(f_{p_{j-1} q_{j-1}}(\cdots(f_{p_1 q_1}(s))\cdots)),$$

pre každé $s \in S$. Keďže skladaním úplne multiplikatívnych a bijektívnych funkcií získame úplne multiplikatívnu bijekciu (overte si), stačí si už len rozmyslieť, že $f_\sigma(p) = \sigma(p)$ pre každé $p \in P$.

Dokázali sme, že výsledok je daný vzťahom (5), takže odpoveď pre $N = 100$ už ľahko dorátate. Pre úplnosť, je to $2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 10! = 348364800$.

[5] Napríklad konečnou indukciou pre k rovné postupne $N, N-1, N-2, \ldots, 1$.

[6] Pre naše účely môžeme permutáciu chápať ako bijektívnu funkciu z nejakej (konečnej) množiny do tej istej množiny. Aj f by sme mohli volať permutácia, ale aby sa nám to neplietlo, volajme f naďalej funkcia.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	12	9			9	9	9	9	9		45	45
1.	Galovičová Soňa	2.	GVO ZA	6	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Hagara Michal	4.	GJH BA	11	9			9	9	9	9	9		45	45
1.	Horňák Marián	2.	GPár NR	5	2		9	9	9	9	9	9		45	45
1.	Chlebíková Andrea	3.	Brighton UK	7	3			9	9	9	9	9		45	45
1.	Kossaczký Pavol	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	8	4			9	9	9	9	9		45	45
1.	Phuong Mariana	3.	GJH BA	7	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Tóth Róbert	4.	GAlej KE	6	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	3	1	9	9	9	9	9	9	9		45	45
11.	Balog Matej	3.	Gamča BA	6	1		9	9	8	9	9			44	44
11.	Dupej Peter	2.	GJAR PO	4	0	9	9	9		9	8			44	44
11.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	7	2		9	9	8	9	9			44	44
14.	Kováč Ondrej	3.	GCM NR	8	3			9	9	7	9	9		43	43
14.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2	0	9	7	9		9	9	1		43	43
16.	Csiba Dominik	3.	ŠPMNDG BA	8	3			9	9	9	9	6		42	42
16.	Ficková Klára	2.	GPoš KE	3	0	9	7	9	6	9	8	1		42	42
16.	Le Tuan Anh	3.	Gamča BA	9	3		8	9	6	9	9	9		42	42
16.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	3	0	9	7	9	8	9				42	42
20.	Hlavatá Martina	3.	Gamča BA	8	2		8	9	6	9	9			41	41
20.	Klembarová Barbora	2.	GKuk PP	5	1		6	9	8	9	9			41	41
20.	Konečný Jakub	4.	Gamča BA	12	8			5	9	9	9	9		41	41
20.	Macháč Juraj	3.	GJH BA	5	0	9		9	9	9	5			41	41
24.	Floriánová Michaela	4.	GJH BA	8	0	8	9	9	5	9	4			40	40
24.	Kozák Andrej	3.	Gamča BA	9	3			9	9	9	9	4		40	40
26.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	2	0	7		8	3	9	9	6		39	39
26.	Kosec Peter	2.	GĽŠ TN	5	1		8	9	9	9	4			39	39
26.	Šormanová Mária	3.	ŠPMNDG BA	6	1		7	9	7	9	7			39	39
29.	Žídek Augustin	2.	Frýdlant ČR	5	1		9	7	9	9	4			38	38
30.	Anderle Michal	3.	GBST LC	5	0	9		9	6	9	4			37	37
30.	Kopf Michal	2.	Opava ČR	5	1		9	9	9	9	1			37	37
30.	Szabados Viktor	3.	Gamča BA	9	3			9	8	9	9	2		37	37
30.	Tóth Michal	2.	GJH BA	5	1		7	9	8	9	4			37	37
34.	Barančok Peter	3.	Gamča BA	4	0	9	9	7	5		6			36	36
34.	Baxová Zuzana	2.	GĽŠ TN	5	1		9	9		9	9			36	36
34.	Belanová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	5	1			9	9	9		9		36	36
34.	Bogár Ján	4.	GĽŠ TN	10	3			9	8	9	9	1		36	36
34.	Guričan Pavol	3.	GJH BA	8	3			9	9	9	9			36	36
34.	Jasenčáková Katarína	2.	GVO ZA	6	1		5	9	9	9	4			36	36
34.	Karásková Natália	3.	GJH BA	10	8			9	9	9	9			36	36
34.	Koprda Pavol	2.	GAM TT	5	1		9	7	4	9	7			36	36
34.	Midlik Adam	4.	GJAR PO	9	4			9	9	9	9			36	36
34.	Večerík Matej	3.	ŠPMNDG BA	8	3			9	9	9	9			36	36
34.	Vlček Andrej	2.	EvSŠ LM	5	1		9	9		9	9			36	36
45.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	3	1		9	8	8	9				34	34
45.	Marečáková Barbora	2.	GKuk PP	5	1		9	6	8	9	2			34	34
45.	Sabatovičová Linda	3.	GJH BA	7	1		7	9		9	9			34	34
48.	Faršang Štefan	3.	SJG KN	6	2			9	9	9	6			33	33
48.	Hamaš Matej	3.	Gamča BA	4	0	9	9	6	9					33	33
48.	Langer Tomáš	2.	GJH BA	5	1		5	9	9	9	1			33	33
51.	Faguľová Kristína	2.	GPoš KE	6	1		9	6	5	9	2			31	31

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
52.	Hozza Ján	3.	GJH BA	7	5			9	9	9	1	2		30	30
53.	Halajová Barbora	2.	GVO ZA	6	1		5	9	8	4	3			29	29
53.	Vlachynská Petra	2.	GBil BA	4	0	9	8		9	3				29	29
55.	Štyráková Kamila	4.	GPOH DK	10	3			9	4	9	6			28	28
55.	Švančara Patrik	2.	GĽŠ TN	4	0	8	9	6		5				28	28
57.	Kopcová Monika	3.	Gamča BA	4	0	9	9	9						27	27
57.	Peitl Tomáš	4.	ŠPMNDG BA	10	4			9		9	9			27	27
59.	Daniláková Monika	2.	GJAR PO	4	0	9		8		9		0		26	26
60.	Masár Juraj	3.	GJH BA	6	1		7			9	9			25	25
60.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	2	0	9	3	6	6		1			25	25
60.	Rigdová Emília	4.	GKuk PP	7	1		7	9		9				25	25
60.	Santrová Adriana	2.	GMH Trstená	4	0	9	8	6	2					25	25
64.	Kubincová Petra	3.	ŠPMNDG BA	7	1		9	6		9				24	24
65.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	0	9		6		3	5	0		23	23
66.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	3	0	9		9		3		0		21	21
67.	Kmeťová Katarína	2.	GKuk PP	5	1		6	9		4				19	19
68.	Sládek Filip	4.	GAB NO	8	8						9	9		18	18
69.	Gonda Tomáš	1.	Gamča BA	2	0	9	5			3				17	17
69.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	4	0	4	9		0	4		0		17	17
69.	Šimková Mária	4.	GJF Šaľa	4	0	9	6	2						17	17
72.	Jakubík Ján	3.	SPŠE PN	6	0	9		2						11	11
73.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3	0	9			1					10	10
74.	Majdiš Mojmír	4.	GPOH DK	7	1			9						9	9
75.	Pločeková Andrea	3.	GPdC PN	4	0	2		2						4	4
76.	Lami Vincent	4.	SJG KN	6	3		8			3				3	3
77.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3	0				1					1	1
78.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	2	0						0			0	0

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Matejovičová Tatiana	1.	Gamča BA	2		9	6	9	9	8	9		44
2.	Kavický Dušan	1.	GJH BA	1	8	9	9	8	9	3			43
2.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2		9	8	9	9	8	7		43
4.	Strakáčová Jana	1.	Gamča BA	2		9	6	3	9	8	9		41
5.	Hledík Michal	1.	GJH BA	2		9	6	7	9	9			40
6.	Bock Michal	1.	Gamča BA	3			6	6	9	9	9		39
6.	Kurdelová Alžbeta	1.	GLN BA	1	9	9	6	6	9	5			39
6.	Žitňanský Tomáš	1.	GJH BA	1	9	7	6	2	9	8	2		39
9.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	3			6	6	9	7	9		37
9.	Smolík Michal	1.	Gamča BA	3			6	4	9	9	9		37
11.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	2	0	9	6	6	9	3	6		36
11.	Smolík Martin	1.	Gamča BA	3			6	4	9	8	9		36
11.	Šteis Lukáš	1.	ŠPMNDG BA	2		7	7	7	9		6		36
14.	Gonda Tomáš	1.	Gamča BA	2		9	6	6	9	5			35
15.	Hraška Peter	1.	Gamča BA	2		4	6	8	9	5			32
16.	Petrucha Jaroslav	1.	GMet BA	2		9	6	7	9				31
17.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	2		7	7	6	6		4		30
17.	Páleník Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2		9	6	6	4	3	5		30
19.	Smolík Milan	1.	Gamča BA	3			6	4	8	8	2		28
20.	Jamrichová Lucia	1.	ŠPMNDG BA	2		9	6			7			22
21.	Krajčovič Matej	1.	GJH BA	2		9	6	2		1	1		19

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
22.	Hadvab Peter	1.	GCSL BA	1	6	8	4	0					18
22.	Krajčovič Michal	1.	GJH BA	2		7	7		4				18
24.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	3						9	8		17
25.	Štofová Gabriela	1.	ŠPMNDG BA	1		4	6						10
26.	Holíková Zuzana	1.	GCSL BA	2	0	0	2	1			0		3

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Glončák Vladan	1.	GĽŠ TN	1	9	9	9	8	9		4		44
2.	Cibulka Samuel	1.	GAV LV	2		8	6	6	9		6		35
2.	Kútny Miloš	1.	GPár NR	1	9	9	6	2	4	0	7		35
4.	Očkay Štefan	1.	GPár NR	1	6	9	6	2	6	0	5		32
5.	Sitkey Matúš	3.	GGol NR	3			9	4	9	8	0		30
6.	Tunová Anna	1.	GPár NR	2		9	6	4	4		6		29
7.	Kováčová Milada	1.	GCM NR	2		9	8	3	7				27
8.	Puček Samuel	1.	GĽŠ TN	1	9	5	7	1	4				26
9.	Horváth Matúš	1.	GPár NR	1	4	9	5	2	4	0	3		25
10.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	3					9		9		18
11.	Ištván Mário	1.	GKom PE	1	9		6	1					16

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Macko Vladimír	1.	GĽŠ ZV	2		9	9	6	9	9	9		45
2.	Benešová Katarína	1.	GAS BB	2		9	7	6	9	9			40
3.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	2		9	9	6	7		8		39
4.	Nociarová Jela	1.	GBST LC	2		9	6		9	6	5		35
5.	Santer Martin	1.	GMH Trstená	2		9	6		9	9			33
6.	Hrašková Veronika	1.	GBST LC	1	9	9	6	2	4				30
6.	Šubjak Ján	1.	GPOH DK	2		9	9	0	8		4		30
8.	Surovčík Juraj	1.	GPOH DK	2		9	7	0	9		4		29
9.	Bahyl Jakub	1.	GVar ZA	1		8		2	5	5			20
10.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3					9				9
11.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	2	0	3	1						4
12.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	3			9	9	9	9	9		45
2.	Ficková Klára	2.	GPoš KE	3			9	9	9	7	9		43
2.	Hanzely Filip	1.	GAP SB	2		9	9	7	9		9		43
2.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2	0	9	6	9	9	7	9		43
5.	Semanišinová Denisa	1.	GAlej KE	3			8	8	9	8	7		40
6.	Hlaváčik Matúš	1.	GAlej KE	3			9	8	9		9		35
7.	Koľveková Veronika	1.	GPoš KE	2			6	6	9	5			26
8.	Pistráková Alexandra	1.	GPoš KE	2			6	0	9	6			21
9.	Tokárová Natália	1.	GJAR PO	2		0	7	2	5	2			16
10.	Motešický Ján	2.	GDax VT	2		0	6	0	5	1	0		12

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Hagara Michal	4.	GJH BA	9	9	7	5	7		90
2.	Horňák Marián	2.	GPár NR	9	9	7	7	7		68
3.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	9	9	7	7	7		90
4.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	9		7		7		53
5.	Sládek Filip	4.	GAB NO	9	9	7	7	7		150
6.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	9	1			1		17

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.