<u>Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2009/2010</u>

<u>Úloha č. 1:</u> *Do gule s objemom* 1 m^3 *vpíšeme kocku. Do tejto kocky zase vpíšeme guľu. Vypočítajte objem tejto menšej gule.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Igor)

Nazvime si stranu vpísanej kocky a. Prvá vec ktorú si uvedomíme, je že polomer gule ktorá je do tejto kocky vpísaná má dĺžku $r = a/2$, čo je polovica dĺžky strany kocky. Aký je polomer gule ktorá je tejto kocke opísaná? Jej priemer je telesová uhlopriečka kocky (maximálna vzdialenosť dvoch vrcholov kocky). Veľkosť telesovej uhlopriečky (u) môžeme vypočítať z Pytagorovej vety $u^2 = a^2 + e^2$, kde a je strana kocky a e je uhlopriečka steny kocky. Podobne platí, že $e^2 = a^2 + a^2$. Potom dosadením dostávame $u^2 = 3 \cdot a^2$ a odtiaľ konečne vzorec na výpočet veľkosti telesovej uhlopriečky a teda aj priemeru opísanej gule $u = \sqrt{3 \cdot a^2} = \sqrt{3} \cdot a$. Polomer opísanej gule R je potom $R = (\sqrt{3} \cdot a)/2$.

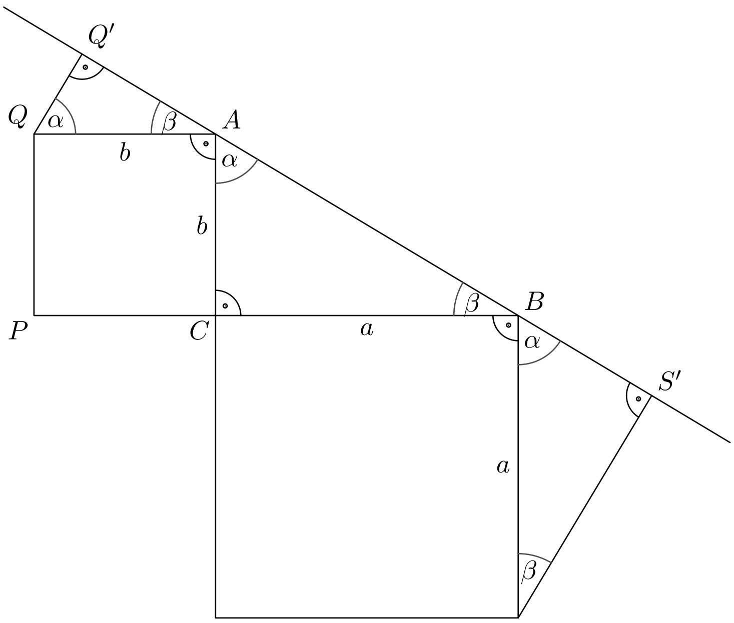
Vzorec na výpočet objemu gule je $\frac{4}{3}\pi r^3$. Po dosadení $\frac{a}{2}$ za polomer dostávame objem vpísanej gule $V = \frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3$. Podobne po dosadení $\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}$ za polomer dostávame objem opísanej gule $W = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3 \cdot (\sqrt{3})^3$. Vidíme teda, že platí $W = V \cdot (\sqrt{3})^3$. Potom platí $V = \frac{W}{(\sqrt{3})^3}$. Objem opísanej gule W ale poznáme, je to 1 m^3. Objem vpísanej gule bude teda

$$V = \frac{1}{(\sqrt{3})^3}\ \mathrm{m}^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}\ \mathrm{m}^3.$$

<u>Úloha č. 2:</u> *Nad odvesnami pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C sú zvonku zostrojené štvorce $ACPQ$ a $BCRS$. Nech Q' a S' sú päty kolmíc z bodov Q a S na priamku AB. Dokážte, že $|S'B| = |AQ'|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Janko)

Základom každej geometrickej úlohy je pekný, prehľadný obrázok. Poďme si nejaký taký nakresliť. Označme si uhly a strany v trojuholníku ABC. Pri vrchole A bude uhol α a oproti nemu odvesna a, pri vrchole B bude uhol β a oproti nemu odvesna b a preponu nazvime c. Teraz si doplníme niektoré ďalšie uhly. Uhol SBS' je tiež α, pretože súčet vyznačených uhlov pri bode B má byť $180°$ a vieme že α a β dávajú dokopy $90°$ (vďaka tomu, že trojuholník ABC je pravouhlý). Podobným spôsobom vieme ukázať, že uhol QAQ' má veľkosť β. Potom trojuholníky $SS'B$, BCA a $AQ'Q$ sú podobné, podľa vety uu (majú dva a teda aj všetky tri uhly zhodné). V podobných trojuholníkoch platí, že pomery zodpovedajúcich si strán sú rovnaké. Takže v našom prípade $|S'B| : a = b : c$ vďaka podobnosti trojuholníka ABC s trojuholníkom BSS' a $|AQ'| : b = a : c$ vďaka podobnosti trojuholníka QAQ' s trojuholníkom ABC. Po vyjadrení si $|S'B|$ a $|AQ'|$ dostaneme vzťah $|S'B| = ab/c = |AQ'|$, čo sme chceli dokázať.

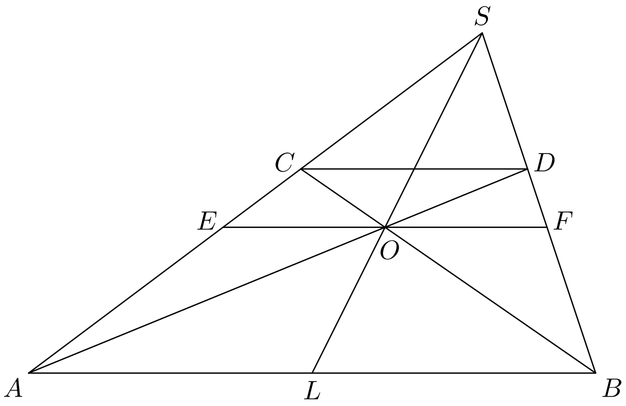


__Úloha č. 3:__ *Majme dve rovnobežné úsečky AB a CD, ktoré neležia na jednej priamke. K dispozícii máme iba ceruzku a pravítko bez rysky a bez mierky. Nájdite pomocou týchto dvoch nástrojov stred úsečky AB a stred úsečky CD, ak*

a) $|AB| \neq |CD|$,

b) $|AB| = |CD|$.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Stanka)

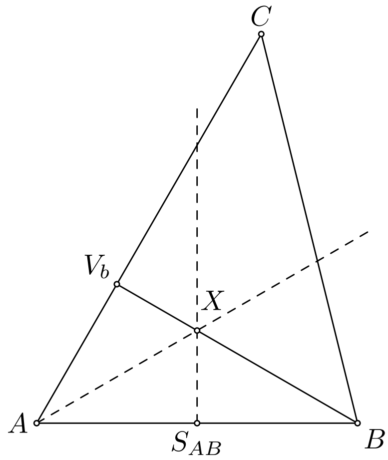


Veľa z vás pri tomto príklade spomínalo rovnoľahlosť. Čo to teda tá rovnoľahlosť je a kde v príklade ju nájdeme? Hovoríme, že dva geometrické útvary ("vzor" a "obraz") sú rovnoľahlé s koeficientom rovnoľahlosti k a stredom S ak sú podobné, a ak vzdialenosť od S k nejakému bodu obrazu je k-krát vzdialenosť k zodpovedajúcemu bodu vzoru. Každé dve rôzne dlhé rovnobežné úsečky majú dva stredy rovnoľahlosti, na našom obrázku sme ich označili O a S. Keď sa spojíme tieto dva body a nakreslíme priamku OS, vyzerá to tak, že priamka idúca cez ne, by mohla deliť dané úsečky na polovicu (pozri obrázok). Skúsme to teda dokázať.
a) Najskôr si urobme náčrtok zadania. Treba si uvedomiť, že záleží aj na poradí vrcholov C a D. Dajú sa síce preznačiť, ale je dobré spomenúť, že ste si uvedomili, že by to mohlo zmeniť situáciu. Takže sa dohodnime, že C a A budú „vľavo“ a D a B budú „vpravo“. Spojme teraz body A s D, a B s C. Tam kde sa nám tieto priamky pretnú dostaneme bod O. A podobne, keď pretneme priamku idúcu cez A a C, a priamku idúcu cez B a D, tak dostaneme bod S.
Ešte je dobré zamyslieť sa, či sa tieto priamky naozaj pretnú. Intuitívne to je jasné, a keď ste to spomenuli, tak som body nestrhávala, ale pre kompletnosť by sa patrilo to ukázať. Nefungovalo by to, len ak by boli niektoré zo spomínaných priamok rovnobežky. Ale to môžu byť len ak by bolo $|AB| = |CD|$. Takže to si na nás brúsi zuby až v časti b).
Už môžeme dokazovať, že priamka idúca cez O a S delí zadané úsečky na polovice. Začneme tým, že si v obrázku označíme všetko písmenkami a ešte aj niečo dokreslíme. Označme L, K zaradom priesečníky AB s OS a CD s OS. Nakreslime si rovnobežku s AB cez bod O a nazvime ju EF, kde bod E bude leží na AC a bod F na BD. Chceme ukázať, že $|AL| = |LB|$. Keby sme ukázali, že $|EO| = |OF|$, tak by sme boli už v suchu, pretože trojuholník ALS je podobný trojuholníku EOS s rovnakým koeficientom podobnosti ako je trojuholník LBS podobný trojuholníku OFS. Takže $AL : EO{=}LB : OF$. Takže ak bude $|EO| = |OF|$, tak bude aj $|AL| = |LB|$. Podobne z $|EO| = |OF|$ dostaneme aj $|CM| = |CD|$. Posledným krokom teda bude ukázať, že $|EO| = |OF|$.
Vieme, že $ABDC$ je lichobežník. Vďaka tomu majú trojuholníky ABC a ABD rovnaký obsah (spoločná základňa a rovnaká výška). Potom ale majú rovnaký obsah aj trojuholníky AOC a BOD (ich obsahy dostaneme, keď od predošlých trojuholníkov odoberieme obsah trojuholníka ABO). Skúsme si teraz tieto obsahy vyjadriť pomocou dĺžok EO a OF. Úsečka EO delí trojuholník AOC na dva menšie trojuholníky AOE a EOC. Ich obsahy viem vyjadriť ako dĺžku strany EO krát výška na ňu deleno dva. No a keďže je EO rovnobežná so základňami $ABDC$, tak tieto výšky budú na ňu aj na základne kolmé. A súčet týchto dvoch výšok bude celková výška trojuholníka (označme ju v). Takže obsah trojuholníka AOC je $(|EO| \cdot v)/2$. Tak isto ukážeme, že obsah trojuholníka BOD je $(|OF| \cdot v)/2$. A keďže sme si ukázali, že obsahy týchto trojuholníkov sú rovnaké, tak nám z toho vyplýva, že $|EO| = |OF|$. Čo sme potrebovali ukázať.
b) Tu si stačilo uvedomiť, že môžeme zopakovať postup z časti a), akurát ho treba trošku upraviť. Na priamke AB zoberieme namiesto bodu A bod X rôzny od A aj od B. Potom pre CD a AX riešime úlohu a). Takto nájdeme stred CD (a AX, ale ten nás nezaujíma). No a stred AB zase nájdeme, keď napr. bod C nahradím bodom Y ležiacim na CD a rôznym od C aj D a prevedením na úlohu a).
Komentár: Viacerí z vás písali riešenia bez dostatočného zdôvodnenia. Ďalší problém bol so zapisovaním matematických vzťahov slovami. Ono je to fajn v prípade, ak je to jasnejšie, ale vo väčšine prípadov je zrozumiteľnejší a použiteľnejší symbolický zápis. Tak, pekný príklad, nie?

Úloha č. 4: *V trojuholníku ABC sa os uhla pri vrchole A, os strany AB a výška z bodu B sa pretínajú v jednom bode. Dokážte, že aj os uhla pri vrchole A, os strany AC a výška z bodu C sa pretínajú v jednom bode.*

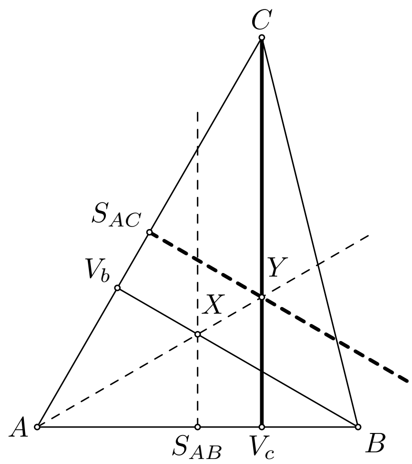
Riešenie: (opravovala Katka J.)

Na začiatok sa pozrime na to, čo vieme zistiť o zadanom trojuholníku. To nám neskôr pomôže vyriešiť úlohu a dokázať tvrdenie zo zadania.



Po niekoľkých viac-menej úspešných pokusoch by sa nám mohlo podariť nakresliť si náčrt, ktorý zároveň obsahuje údaje zo zadania, ale stále je čo najvšeobecnejší (obr. 1). Označme si S_{AB} stred strany AB a V_b pätu výšky z bodu B. Priesečník osi uhla BAC, osi strany AB a výšky z bodu B si označme X. Všimnime si, že trojuholníky $AS_{AB}X$ a $BS_{AB}X$ sú zhodné podľa vety *sus* (premyslite si). Zhodné sú aj trojuholníky $AS_{AB}X$ a AV_bX, tento krát podľa vety *usu* (opäť si to môžete premyslieť).

Teraz už vieme niečo o našom trojuholníku ABC. Poďme sa pozrieť na to, čo chceme dokázať. Dokreslime si do obrázka výšku z bodu C s pätou V_c. Stred strany AC označme S_{AC} a urobme naň kolmicu – os strany AC. Priesečník výšky z bodu C a osi uhla BAC nazvime Y(obr.2). Chceme dokázať, že bod Y patrí osi strany AC. Kedy platí, že os strany trojuholníka prechádza protiľahlým vrcholom? Predsa iba vtedy, keď je trojuholník rovnoramenný (alebo rovnostranný, čo je iba špeciálny prípad rovnoramenného). Potom stačí dokázať, že trojuholník AYC je rovnoramenný, teda platí $|AY| = |YC|$. To by sa nám mohlo podariť, ak dokážeme, že $|\sphericalangle YAC| = |\sphericalangle YCA|$.



Ak veľkosť uhla YAC označíme α, potom uhol BAC má veľkosť 2α. V trojuholníku ABV_b už poznáme všetky uhly. Konkrétne $|\sphericalangle BAV_b| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ABV_b| = \alpha$ (lebo $AS_{AB}X$ a $BS_{AB}X$ sú zhodné) a $|\sphericalangle BV_bA| = 90°$. Z toho vidno, že $\alpha = 30°$, takže aj $|\sphericalangle YAC| = 30°$. Teraz už vieme vyrátať aj veľkosť uhla YCA, pretože v trojuholníku CV_cA je veľkosť uhla CAV_c 2α, teda $60°$ a uhol CV_cA je pravý, preto $|\sphericalangle V_cCA| = |\sphericalangle YCA| = 30°$.

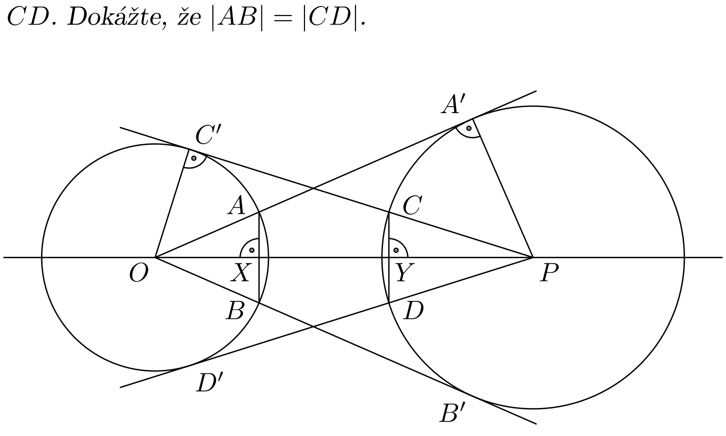
Dokázali sme, že uhly YAC a YCA sú rovnako veľké, trojuholník AYC je preto rovnoramenný ($|YA| = |YC|$). Ak teda zo stredu úsečky AC zostrojím os strany, bude sa zároveň jednať o výšku v trojuholníku AYC. Táto výška prechádza protiľahlým vrcholom k strane AC, teda bodom Y, čo bolo treba dokázať.

Aby bolo riešenie úplné, treba spomenúť, že aj v prípade, že je trojuholník ABC tupouhlý (bod C je na úsečke AV_b), dá sa použiť rovnaký dôkaz.

Komentár: : Veľa z Vás si namiesto čo najvšeobecnejšieho trojuholníka nakreslilo trojuholník rovnostranný, ktorý síce spĺňa podmienky zo zadania, ale jedná sa iba o riešenie konkrétneho prípadu zadanej úlohy. Rovnako neúplné je aj riešenie úlohy, v ktorom tvrdíte, že tvrdenie platí, pretože ste si ho viackrát narysovali a „vyšlo Vám to“. To je dobré na overenie, či je zadanie vôbec konštruovateľné, ale dôkaz ešte samozrejme treba urobiť.

Úloha č. 5: *Dané sú kružnice k_1 a k_2. Body O a P sú v tomto poradí stredy kružníc k_1 a k_2. Dotyčnice z bodu O ku kružnici k_2 pretínajú kružnicu k_1 v bodoch A a B tak, že body O a P sú v rôznych polrovinách určených priamkou AB. Podobne dotyčnice z bodu P ku kružnici k_1 pretínajú kružnicu k_2 v bodoch C a D tak, že body O a P ležia v rôznych polrovinách určených priamkou CD. Dokážte, že $|AB| = |CD|$.*

Riešenie: (opravovala Hanka a Kubo)



Najprv si nakreslíme veľký obrázok a označíme v ňom niekoľko ďalších bodov. Priesečníky úsečiek AB a CD s priamkou OP označíme X a Y. Dotyčnice z bodu O sa kružnice k_2 dotýkajú v bodoch A' a B', dotyčnice z bodu P sa kružnice k_1 dotýkajú v bodoch C' a D', ako na obrázku. Toto označenie a pomenovanie bodov netreba vynechať. Obrázok nám pomáha veci pekne vidieť a uvedomiť si súvislosti, ale riešenie príkladu sa nesmie naň spoliehať, lebo niektoré vlastnosti z neho zdanlivo zrejmé môžu na ňom platiť len preto, že zachytáva nejaký špeciálny prípad. Preto treba všetky objekty na obrázku opísať a ich použité vlastnosti dokázať.

Užitočné bude, ak si hneď na začiatku uvedomíme, že celá situácia je vlastne symetrická podľa priamky OP. Prečo je to tak? Niektorým je to možno hneď jasné (veď sme tam predsa kreslili len kružnice so stredmi v O a P a potom

vždy obe dotyčnice), iní mi to snáď len tak nezhltnú a skúsia si to dokázať:) V ďalšom riešení sa zameriame na "hornú" časť obrázku, v "spodnej" sa bude diať to isté, len symetricky.
Vďaka symetrii vieme, že platí $|AB| = 2|AX|$ a $|CD| = 2|CY|$, a navyše priamky AB a CD sú kolmé na priamku OP. Trojuholníky AXO a CYP sú teda pravouhlé. Keď sa poriadne pozrieme na obrázok zbadáme, že tam máme ešte ďalšie pravé uhly. Priamka PA' je kolmá na OA' (lebo OA' je dotyčnica kružnice k_2 a teda je kolmá na polomer PA' kružnice $k2$) a podobne PC' je kolmá na OC'. Preto aj trojuholníky $PA'O$ a $OC'P$ budú pravouhlé.
Pozrime sa bližšie na trojuholníky AXO a $PA'O$. Vieme, že sú pravouhlé a navyše majú spoločný uhol AOX. Teda sú podobné a pre veľkosti ich strán vieme napísať

$$\frac{|AX|}{|AO|} = \frac{|PA'|}{|PO|}, \qquad \text{teda} \qquad |AX| = \frac{|PA'||AO|}{|PO|}.$$

Podobnou úvahou dostaneme, že trojuholníky CYP a $OC'P$ sú podobné a platí

$$\frac{|CY|}{|CP|} = \frac{|OC'|}{|OP|}, \qquad \text{teda} \qquad |CY| = \frac{|OC'||CP|}{|OP|}.$$

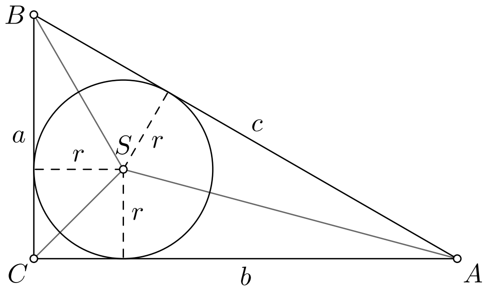
Chceli by sme ukázať, že AX a CY sú rovnako veľké. Keď sa na tie dve výrazy na pravej strane poriadne pozrieme, tak vidíme, že menovatele sa rovnajú a v čitateli je vždy súčin polomerov kružníc k_1 a k_2 (len sú vždy zamaskované za iné úsečky). Tým sme ukázali, že $|AX| = |CY|$ z čoho vyplýva rovnosť $|AB| = |CD|$.

<u>**Úloha č. 6:**</u> *Majme pravouhlý trojuholník, kde r je polomer vpísanej kružnice, R polomer opísanej, s je obvod a c je dĺžka prepony. Dokážte, že platí*

$$\frac{s}{c} - \frac{r}{R} = 2$$

Takisto zistite, pre ktoré pravouhlé trojuholníky nadobúda pomer r/R najväčšiu hodnotu a určte túto hodnotu.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ajka, Bebe)



Označme vrcholy trojuholníka postupne ako A, B, C (pravý uhol je pri C). Ďalej označme dĺžky strán ako na obrázku. Najskôr ukážeme, že platí rovnosť $s/c - r/R = 2$. To spravíme tak, že vyjadríme dĺžky s, r, R pomocou dĺžok a, b, c a dosadíme ich do nášho vzťahu.
Obvod s vyjadríme ľahko ako $s = a + b + c$. Ani polomer opísanej kružnice R nebude ťažké vyjadriť. Stačí si uvedomiť, že v pravouhlom trojuholníku je opísaná kružnica Tálesová kružnica [1], takže prepona trojuholníka je priemerom opísanej kružnice. Potom polomer opísanej kružnice bude polovica prepony $R = c/2$.
Nakoniec ešte potrebujeme vyjadriť r. Tu nám pomôže obrázok. Dokreslíme si osi uhlov a tam, kde sa pretnú, bude stred vpísanej kružnice S. Vieme, že kolmá vzdialenosť zo stredu S ku stranám trojuholníka je r. Osi uhlov delia trojuholník na tri menšie trojuholníky (ako na obrázku). Obsah každého z nich vieme vyjadriť pomocou dĺžky strany veľkého trojuholníka a výšky na ňu, čo je r. Potom obsah celého trojuholníka ABC je súčet obsahov týchto troch menších trojuholníkov. Okrem toho ešte vieme, že $S_{ABC} = ab/2$, pretože sme v pravouhlom trojuholníku. Takto dostávame

$$\frac{ab}{2} = S_{ABC} = S_{ASB} + S_{BSC} + S_{CSA} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}.$$

Odtiaľto vieme vyjadriť polomer vpísanej kružnice ako $r = (ab)/(a + b + c)$. Keď už máme všetko vyjadrené, tak to dosadíme do pôvodného vzorca a upravíme

$$\frac{s}{c} - \frac{r}{R} = \frac{a+b+c}{c} - \frac{\frac{ab}{a+b+c}}{\frac{c}{2}} = \frac{a+b+c}{c} - \frac{2ab}{c(a+b+c)} =$$

dáme oba zlomky na spoločného menovateľa a roznásobíme

$$= \frac{(a+b+c)^2 - 2ab}{c(a+b+c)} = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2ab}{ca+cb+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2bc+2ca}{ca+cb+c^2} =$$

teraz ešte využijeme Pytagorovu vetu a $a^2 + b^2$ nahradíme c^2

$$= \frac{c^2+c^2+2bc+2ca}{ca+cb+c^2} = \frac{2(ca+cb+c^2)}{ca+cb+c^2} = 2.$$

[1] Ak ste sa ešte neučili o Tálesovej kružnici, tu je iné vysvetlenie, prečo $R = c/2$. Stred opísanej kružnice leží na priesečníku osi strán. Pozrime sa na osi strán odvesien. Idú zo stredu strany a sú na túto stranu kolmé (nakreslite si ich). To ale znamená, že sú rovnobežné s druhou odvesnou. Takže tieto osi tvoria stredné priečky trojuholníka. Tie by mali prechádzať aj stredom tretej strany (prepony). Takže stred opísanej kružnice je v strede prepony a preto je jej polomer $R = c/2$.

Pri upravovaní si treba dať pozor, či robíme len ekvivalentné úpravy. Nám sa to podarilo (nikde sme nenásobili niečím, čo by mohlo byť nula a podobne :-). Takže prvá časť príkladu je dokázaná.

V druhej časti chceme zistiť, kedy je r/R najväčšie. Skúsme využiť prvú časť príkladu. Podľa nej vieme, že

$$\frac{r}{R} = \frac{s}{c} - 2 = \frac{a+b+c}{c} - 2 = \frac{a+b}{c} - 1.$$

Hodnota r/R je najväčšia práve vtedy, keď je najväčšia hodnota $(a+b)/c$.
V ďalšom kroku budeme potrebovať trošku intuície alebo dostatočne veľa nakreslených obrázkov. Ak by sme si ich nakreslili, zistili by sme, že hľadaný výraz je najväčší ak $a = b$. To samozrejme ešte neznamená, že to tak aj naozaj je! Kreslením obrázkov sme si iba vytvorili domnienku (že maximum sa nadobúda ak $a = b$) a tú teraz dokážeme. Pre tieto trojuholníky nadobúda výraz hodnotu

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a+a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Na to, aby sme dokázali našu domnienku, potrebujeme ukázať, že za predpokladu $a \neq b$ platí $(a+b)/c < \sqrt{2}$. Upravme túto nerovnosť. Najskôr sa zbavme odmocniny. Celú nerovnosť môžeme umocniť na druhú, pretože platí $(a+b)/c > 0$. Dostaneme

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2} < 2.$$

Ďalej využijeme Pytagorovu vetu a zbavíme sa menovateľa na pravej strane (je väčší ako nula, takže ním môžeme obe strany prenásobiť)

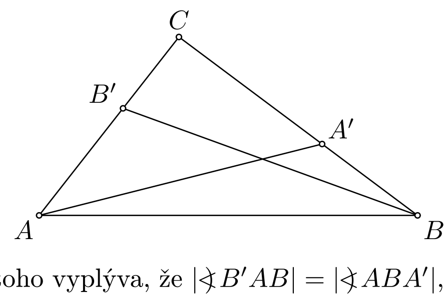
$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &< 2a^2+2b^2, \\ 0 &< a^2-2ab+b^2, \\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Vyšlo nám, že druhá mocnina nenulového čísla je kladná, čo je pravdivé tvrdenie. Keďže sme použili ekvivalentné úpravy, tak musí byť pravdivé aj tvrdenie, z ktorého sme vychádzali. Ukázali sme, že $(a+b)/c$ môže byť najviac $\sqrt{2}$ a zistili sme aj kedy nastáva rovnosť. Takže výraz $(a+b)/c$ a teda aj r/R má najväčšiu hodnotu pre trojuholníky v ktorých $a = b$, čo platí pre rovnoramenné trojuholníky. Napokon túto hodnotu vyjadríme

$$\frac{r}{R} = \frac{s}{c} - 2 = \frac{a+b}{c} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1.$$

Úloha č. 7: *Daný je trojuholník, ktorý nie je rovnostranný ani rovnoramenný. Uvažujme spojnice vrcholov trojuholníka s vnútornými bodmi príslušných protiľahlých strán. Koncové body každej z týchto spojníc rozdeľujú obvod trojuholníka na dve rovnako dlhé časti. Musia byť nutne tieto tri spojnice rôzne dlhé?*

Riešenie: (opravoval JeFo)



Ukážeme, že spojnice spomínané v zadaní musia byť rôzne dlhé. Poďme dokazovať sporom. Nech trojuholník ABC nie je rovnoramenný (každý rovnostranný je aj rovnoramenný) a aspoň dve spojnice spomínané v zadaní sú preň rovnaké. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to AA' a BB', teda $|AA'| = |BB'|$ (viď obrázok). Všimnime si trojuholníky ABA' a BAB'. Ukážeme, že sú zhodné. Zrejme platí, že $|AB| = |BA|$. Vieme, že $|AB| + |BA'|$ je polovička obvodu trojuholníka ABC a taktiež aj $|B'A| + |AB|$ je polovička. Potom musí platiť $|B'A| = |BA'|$. Z predchádzajúcich troch rovností je teraz vidieť, že trojuholníky ABA' a BAB' sú zhodné podľa vety sss. Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle B'AB| = |\sphericalangle ABA'|$, čiže trojuholník ABC je rovnoramenný a to je spor (pretože sme predpokladali, že rovnoramenný nie je). Dokázali sme, že spomínané spojnice musia byť v nerovnoramennom trojuholníku všetky tri rôzne dlhé.

Komentár: Príklad veľa z vás vyriešilo správne, až na malý detail a to ten, že ste postupovali ako pri dôkaze sporom (presne ako v riešení), ale nikde ste nenapísali, že budete postupovať sporom. Ak dokazujete sporom, jasne napíšte čo predpokladáte a kedy ste dostali sporné tvrdenie.

Úloha č. 8: *Uvažujme kružnicu k so stredom S. Nech AB je ľubovoľná tetiva tejto kružnice. Označme CD priemer kružnice kolmý na AB a nech sa pretína s AB v bode M. Nech E je ľubovoľný bod vnútri kratšieho oblúka BC kružnice k. Ďalej P je priesečník EM s kružnicou k a L je priesečník ED s tetivou AB. Označme Q priesečník CL s kružnicou k. Dokážte, že úsečky AP a BQ sú rovnako dlhé.*

Riešenie: (opravoval Edo, Beren)

Na tomto príklade bolo najpodstatnejšie správne si načrtnúť situáciu, najväčším problémom bolo priveľa bodov, ktoré v zadaní vystupovali. Po správnom načrtnutí to už väčšina z vás zvládla.
Podstatným pozorovaním pre vyriešenie príkladu bolo, že štvoruholník $CMLE$ je tetivový. Štvoruholníku $CMLE$ sa dá opísať kružnica, pretože uhol $|\sphericalangle CML|$ je pravý zo zadania (AB je kolmé na CD) a $|\sphericalangle CEL| = |\sphericalangle CED| = 90°$, pretože CD je priemer kružnice k (Tálesova veta). Takže súčet protiľahlých uhlov štvoruholníka $CMLE$ je $|\sphericalangle CML| + |\sphericalangle CEL| = 90° + 90° = 180°$.
Najťažšie máme za sebou, pretože teraz sa už stačí len pohrať s nejakými obvodovými uhlami a ukázať napríklad, že $|\sphericalangle EML| = |\sphericalangle EPQ|$. Platí $|\sphericalangle EPQ| = |\sphericalangle ECQ|$, pretože sú to obvodové uhly nad tetivou EQ. Ďalej $|\sphericalangle ECQ| = |\sphericalangle ECL| = |\sphericalangle EML|$, tentokrát vďaka tetivovosti štvoruholníka $CMLE$. Z dokázanej rovnosti ($|\sphericalangle EML| = |\sphericalangle EPQ|$) vyplýva, že priamky AB a PQ sú rovnobežné a teda štvoruholník $APQB$ je lichobežník, ktorému sa dá opísať kružnica. (Uvedomte si, že body L, Q sú v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku EP.) Lichobežník, ktorému sa dá opísať kružnica už nutne musí byť rovnoramenný (preverte si!) a preto majú ramená AP a BQ rovnakú dĺžku. Koniec.

Komentár: Okrem takéhoto riešenia nám došlo ešte pár iných, no všetky boli založené na tom, že štvoruholník $CMLE$ je tetivový. Niektorý z vás si napríklad všimli, že v kružnici k sú nad tetivami PD a QD rovnaké uhly ($|\sphericalangle PED| = |\sphericalangle DCQ|$), preto $|PD| = |QD|$, keďže body P, Q aj D ležia na kružnici, tak ak si to poriadne premyslíme, z toho už vyplýva, že P a Q sú osovo súmerné podľa priemeru kružnice prechádzajúceho bodom D, teda podľa priamky CD. Keďže aj A je obrazom B v osovej súmernosti podľa priamky CD, tak vlastne celá úsečka AP je obrazom BQ v osovej súmernosti podľa priamky CD. Keďže osová súmernosť je zobrazenie, ktoré zachováva dĺžky, tak $|AP| = |BQ|$.
Nakoniec by som vám ešte odporučil premyslieť si, či sa nejako zmení riešenie podľa polohy priamky AB a voľby bodu E.

Úloha č. 9: *Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB kratšou ako ramená. Nech X a Y sú v tomto poradí body na ramenách AC a BC, pričom XY má rovnakú dĺžku ako AB. Nech Z je taký bod v rovine, že trojuholník XYZ je zhodný s trojuholníkom ABC. Určte geometrické miesto bodov v rovine, ktoré vyplnia body Z pre všetky možné polohy trojuholníka XYZ.*

Riešenie: (opravoval Petržlen, Myrec)
Ospravedlňujeme sa za nejasné zadanie príkladu, kvôli ktorému sa veľa z vás trápilo s prípadom, ktorý sme po vás nepožadovali.
(*Podľa Natálie Karáskovej.*) Najprv uvažujme len tie polohy bodov X, Y, pre ktoré platí $|XA| > |YB|$. Keďže trojuholníky ABC a XYZ majú byť zhodné, tak body C, Z sú v rovnakej polrovine určenej priamkou XY. (Inak by boli zhodné trojuholníky ABC a YXZ.) Tiež si premyslite, že bod Z bude ležať v polrovine opačnej ku BCA. Uhly CAB, CBA, ZXY a ZYX sú rovnako veľké, označme ich α. Uhly ACB a XZY zase označme β. Vieme, že $|AB| < |AC|$ a v trojuholníku je oproti väčšej strane väčší uhol (vyplýva to napr. zo sínusovej vety), takže platí $\beta < \alpha$. Keďže $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XCY|$, tak XZY a XCY sú rovnaké uhly nad tetivou XY, čiže štvoruholník $XYZC$ je tetivový.
Z vety o obvodových uhloch nad tetivou YZ vieme, že $|\sphericalangle YXZ| = |\sphericalangle YCZ| = \alpha$. Keďže $|\sphericalangle ZCY| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$, tak priamky CZ a AB zvierajú s priamkou BC rovnaký uhol (a navyše A a Z sú v opačných polrovinách určených priamkou BC), čiže priamky CZ a AB sú rovnobežné. Zistili sme, že všetky vyhovujúce body Z budú určite ležať na polpriamke q, rovnobežnej s polpriamkou AB a začínajúcej v bode C. Poďme zistiť, kde všade na q môže ležať bod Z, rozoberieme niekoľko prípadov podľa veľkosti $|ZC|$:

- Ak $|BC| < |ZC|$, tak vzdialenosť Z od ramena AC je väčšia než $|BC|$, takže tento prípad nemôže nastať.
- Ak $|ZC| = |BC|$, tak musí platiť $X \equiv C$. (C je jediný bod ramena AC, ktorý od Z nie je ďalej než $|BC|$.)
- Ak $|AB| < |ZC| < |BC|$, tak sa zdá, že vhodné body X a Y budú existovať. Overíme to neskôr.
- Ak $|ZC| = |BA|$, tak musí platiť $Y \equiv B$. (B je jediný bod ramena BC, ktorý ku Z nie je bližšie než $|BC|$.)
- Ak $0 < |ZC| < |BA|$, tak skúmajme trojuholník BZC. Z nerovnosti $|ZC| < |BA|$ ľahko odvodíme, že $|\sphericalangle BZC| > \alpha$. Vieme, že $|\sphericalangle ZCB| = \alpha$, takže $|\sphericalangle CBZ| < \beta < \alpha$. Najväčší uhol trojuholníka BZC je teda $\sphericalangle BZC$. V každom trojuholníku je najdlhšia strana oproti najväčšiemu uhlu. Najdlhšia strana trojuholníka BZC je BC, takže všetky body úsečky BC sú od Z vzdialené menej ako $|BC|$. (Poriadne si to premyslite!) Vidíme, že neexistuje vhodný bod Y na ramene BC.
- Ak $|ZC| = 0$. Potom $Z \equiv C$ a nutne $Y \equiv A$ a $X \equiv B$, čo odporuje $|AX| > |BY|$.

Ak ste pozorne sledovali, zistili sme, že (za predpokladu $|XA| > |YB|$) jediné možné vyhovujúce body Z sú také, pre ktoré $Z \in q$ a navyše $|AB| \leq |ZC| \leq |BC|$. Hotovo? Nie! Ešte treba ukázať, že naozaj takéto body vyhovujú. Preto nájdeme spätnú konštrukciu, tj. priradíme každému takému Z, nejaké X a Y. Zoberme si nejaký vyhovujúci bod $Z \in q$, $|AB| \leq |ZC| \leq |BC|$. Spravme si kružnicu K so stredom v Z a polomerom $|BC|$. Ak mi pretne obe strany AC a BC, tak som hotový (lebo potom ku každému Z existujú vyhovujúce X, Y). Také X,Y naozaj vyhovujú, lebo $XZCY$ je tetivový a z toho $|\sphericalangle ZYX| = |\sphericalangle ZCX| = \alpha$ a rovnako $|\sphericalangle XCY| = |\sphericalangle XZY| = \beta$. Takže trojuholník XZY je zhodný s trojuholníkom BCA. A naozaj mi K pre každé Z pretne tie dve ramená? To vám zostáva na domácu úlohu ako cvičenie.

Na začiatku sme predpokladali, že platí $|XA| > |YB|$. Prípad $|XA| < |YB|$ by sme vyriešili analogicky, akurát by sme dostali množinu bodov Z na polpriamke opačnej ku q. Prípad $|XA| = |YB|$ je jednoduchý, vyhovujúci trojuholník XYZ je totožný s trojuholníkom ABC. Odpoveďou na úlohu znie nasledovne. Geometrické miesto bodov Z je množina bodov Z, ktoré ležia na priamke prechádzajúcej C, rovnobežnej s AB a platí pre ne $Z \equiv C$ alebo $|AB| \leq |ZC| \leq |BC|$.

Úloha č. 10: *Majme trojuholník ABC a nech r je os vonkajšieho uhla ABC, ďalej P a Q sú päty kolmíc z bodov A a C na priamku r. Označme M priesečník priamok CP a BA, označme N priesčník priamok AQ a BC. Ukážte že priamky MN, r a AC prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné.*

Riešenie: (opravoval Bus)

Drvivá väčšina správnych riešení využívala analytickú geometriu. Niet sa čomu čudovať, v zadaní vystupuje veľa navzájom kolmých úsečiek, ktoré sa priam ponúkajú, aby sme si rovnobežne s nimi zaviedli súradnicovú sústavu. Ak postupujeme vhodným spôsobom, dá sa táto úloha vyriešiť analyticky relatívne bez problémov. Vzorové riešenie sa bude tomu analytickému trochu podobať, budú sa v ňom totiž počítať dĺžky niektorých úsečiek podobne, ako by sme v analytickom riešení počítali súradnice bodov. Dúfam však, že takéto riešenie bude prívetivejšie.

Potrebujeme rozobrať dva prípady. Prvý je ten, keď je priamka r rovnobežná s úsečkou AC. Os vnútorného uhla je vždy kolmá na os vonkajšieho uhla, preto je aj os vnútorného uhla ABC (označme si ju o) kolmá na priamku r. Tým pádom je tiež kolmá na stranu AC, čo znamená, že ABC je rovnoramenný trojuholník. Teraz by už malo byť ľahko vidno, že celý obrázok je osovo súmerný podľa osi o, a teda aj body M, N sú osovo súmerné. Priamka MN je kolmá na os o a tým pádom rovnobežná s r aj AC.

Ostáva nám možnosť, keď sa priamky r a AC pretínajú. Tento prípad už nebude taký jednoduchý. Prvá vec, čo asi väčšina z vás skúsila, bolo dopočítať si uhly na obrázku. Problém ale je, že o bodoch M a N len pomocou uhlov nevieme takmer nič povedať. Ak ste si však obrázok načrtli dosť presne, alebo ste si ho skúsili aj narysovať, mali by ste si všimnúť, že priesečník úsečiek AQ a CP leží na osi o. Asi nie je vôbec jasné, či nám tento fakt bude na niečo dobrý. Keď vám však po niekoľkých hodinách pozerania sa do obrázku začnú dochádzať nápady, každá podobná zaujímavosť stojí za preskúmanie. Pokúsme sa to dokázať.

Označme T priesečník AQ a CP. Priamky AP, CQ a o sú všetky navzájom rovnobežné. Ak chceme dokázať, že bod T leží na priamke o, stačí nám dokázať, že jeho vzdialenosť od priamok AP a CQ je rovnaká, ako je vzdialenosť o od týchto priamok. Priamka o je totiž práve množina všetkých bodov, ktoré sú od AP vzdialené $|PB|$ a od CQ vzdialené $|BQ|$. Vypočítajme teda vzdialenosť bodu T od priamky AC a od priamky BQ. Tieto vzdialenosti sú presne rovné výškam v trojuholníkoch APT a TQC. Tieto dva trojuholníky sú navyše vďaka rovnakým uhlom podobné. Označme si pre jednoduchosť $|AP| = a$ a $|CQ| = b$. Pomer podobnosti trojuholníkov je $a : b$, teda ich výšky budú mať dĺžky ka a kb, kde k je nejaké kladné reálne číslo. Vzdialenosť priamok AP a CQ potom musí byť $k(a + b)$. Ale aj trojuholníky APB a CQB sú podobné, a to opäť v pomere $a : b$. Preto aj pomer dĺžok $|PB|$ a $|BQ|$ musí byť $a : b$ a ich súčet sa rovná vzdialenosti priamok AP a CQ, ktorá je $k(a + b)$. Z toho dostávame, že $|PB| = ka$ a $|BQ| = kb$, čiže bod T naozaj patrí priamke o.

Keď sa nám už takto pekne podarilo nájsť polohu bodu T, prečo nedopočítať aj polohy bodov M a N? Mali by sme si totiž ľahko všimnúť, že tak ako je bod T priesečníkom uhlopriečok v pravouhlom lichobežníku $APQC$, tak sú aj body M a N priesečníkmi uhlopriečok v pravouhlých lichobežníkoch $APBT$ a $TBQC$. Ak by sme poznali $|BT|$, vedeli by sme úplne rovnakým postupom nájsť vzdialenosť bodov M a N od priamok AP, BT a CQ. Túto dĺžku vieme jednoducho vypočítať napríklad z podobnosti trojuholníkov PBT a PQC. Sú podobné v pomere $ka : k(a + b)$, teda platí

$$|BT| = \frac{ka}{k(a+b)} \cdot |QC| = \frac{ab}{a+b}.$$

Označme si päty kolmíc z bodov M, N na priamku r ako X, Y. V predchádzajúcich dvoch odstavcoch sme presne vypočítali, aká je v pravouhlom lichobežníku $APQC$ s dĺžkami základní a a b poloha priesečníka uhlopriečok. Je to vo vzdialenosti $ab/(a + b)$ od strany PQ a v pomere $a : b$ medzi základňami AP a CQ. Lichobežník $APBT$ je tiež pravouhlý, len so základňami dĺžok a a $ab/a + b$. Pre priesečník uhlopriečok M teda bude platiť

$$\begin{aligned} |MX| &= \frac{a \cdot \frac{ab}{a+b}}{a + \frac{ab}{a+b}} = \frac{a^2 b}{a(a+b) + ab} = \frac{ab}{a+2b}, \\ |XB| &= k \cdot |MX| = \frac{kab}{a+2b}. \end{aligned}$$

Podobne pre bod N dostaneme

$$|NY| = \frac{ab}{2a+b},$$
$$|YB| = \frac{kab}{2a+b}.$$

Čaká nás už len posledná náročná časť – dokázať, že všetky tri priamky sa pretnú v tom istom bode. Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že $a > b$. Potom priesečník V priamky AC s priamkou r bude bližšie k C ako k A. Z podobnosti trojuholníkov APV a CQV sa budeme snažiť vypočítať vzdialenosť $|BV|$,

$$\frac{|PV|}{|AP|} = \frac{|QV|}{|CQ|},$$
$$\frac{|BV|+ka}{a} = \frac{|BV|-kb}{b}$$

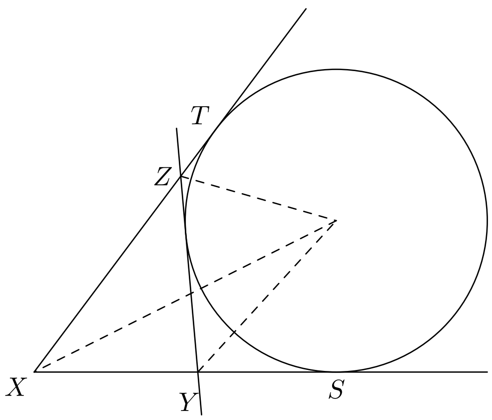
a z tejto rovnosti už ľahko vyjadríte $|BV|$ ako

$$|BV| = \frac{2kab}{a-b}.$$

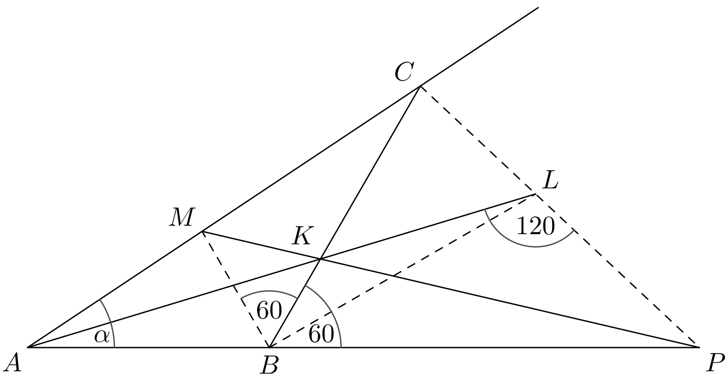
Podobným spôsobom by sme vedeli nájsť polohu priesečníka W priamok MN a r. Výpočet by obsahoval trochu viac písmeniek ale ináč by vyzeral úplne rovnako a dostali by sme rovnaký výsledok. To znamená, že body V a W musia byť ten istý bod a teda všetky tri priamky sa pretínajú v jednom bode.
Úloha sa dala riešiť aj čisto pomocou podobností, ak by sme si označili priesečníky priamky MN s úsečkami AP a CQ a dokazovali, že tieto priesečníky delia úsečky AP a CQ v rovnakých pomeroch. Tiež sme mohli obísť niektoré z našich výpočtov ak by sme použili Cévovu vetu v trojuholníku ABV a dokázali tak, že body M, N a V ležia na jednej priamke. No a nakoniec úplne najjednoduchší dôkaz sa dal napísať za pomoci perspektívneho zobrazenia, ktorým sa dal nerovnobežný prípad zredukovať na prípad rovnobežný, ktorý je už úplne jednoduchý.

__**Úloha č. 11:**__ *V trojuholníku ABC má vnútorný uhol pri vrchole B veľkosť $120°$. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode M a os vonkajšieho uhla BCA pretína priamku AB v bode P. Úsečka MP pretína stranu BC v bode K. Dokážte, že uhly AKM a KPC majú rovnakú veľkosť.*

Riešenie: (opravoval Mišáč)
V zadaní sa vysktytuje os vnútorného uhla ABC a os vonkajšieho uhla BCA trojuholníka ABC. Uvidíme, že práve vonkajšie a vnútorné uhly trojuholníkov zohrávajú v tomto príklade kľúčovú úlohu. Využijeme aj poznatky o pripísaných kružniciach k trojuholníku, ktorým je venovaný nasledovný odstavec. Kto má pripísané kružnice v malíčku, môže ho preskočiť.



Predstavme si ľubovoľný trojuholník XYZ. Zostrojme kružnicu k, ktorá sa dotýka polpriamok XY, XZ a zvonka sa dotýka strany YZ trojuholníka XYZ. Rozmyslite si, že takúto kružnicu vieme vždy zostrojiť. Označme dotykové body kružnice s polpriamkami XY a XZ poporadí S a T. Všimnime si uhol ZXY. Kružnica k je vpísaná do tohoto uhla, takže jej vzdialenosť od ramien uhla je rovnaká, preto jej stred leží na osi uhla ZXY. Táto kružnica je ale vpísaná aj do uhlov ZYS a TZY, takže jej stred leží aj na osiach týchto uhlov. Zistili sme, že stred tejto kružnice leží na osi vnútorného uhla pri vrchole X a na osiach vonkajších uhlov pri vrcholoch Y a Z v trojuholníku XYZ. Kružnica k sa nazýva pripísaná kružnica k strane YZ. V riešení príkladu budeme využívať, že spomínané tri osi uhlov sa pretínajú v jednom bode (už vieme, že v strede pripísanej kružnice).



Na začiatok si všimneme veľkosti uhlov, ktoré vieme hneď určiť. BM je os uhla ABC, takže $|\sphericalangle MBC| = 60°$. Ďalej uhol CBP je susedný k uhlu CBA, takže $|\sphericalangle CBP| = 60°$.
Zamerajme sa na trojuholník MBC. Uhol pri vrchole B má veľkosť $60°$, čiže vonkajší uhol pri tomto vrchole má veľkosť $120°$. Keďže $|\sphericalangle CBP| = 60°$, tak BP je osou tohoto vonkajšieho uhla. Vieme tiež, že CP je osou vonkajšieho uhla pri vrchole C. To znamená, že bod P leží na osiach dvoch vonkajších uhlov v trojuholníku MBC. Bod P je teda stred pripísanej kružnice k trojuholníku MBC. Z toho vyplýva, že MP je osou uhla CMB.
Prejdime s pozornosťou k trojuholníku ABM. Uvedomte si, že pred chvíľou sme vlastne zistili že MK je os vonkajšieho uhla pri vrchole M. Je zrejmé, že BK je os vonkajšieho uhla pri vrchole B. Teda K je stred pripísanej kružnice k trojuholníku ABM. AK musí byť os vnútorného uhla MAB.
Označme L priesečník polpriamky AK a úsečky PC. Pre zmenu si všímajme trojuholník ABC. Bod L leží na osi vnútorného uhla pri vrchole A a na osi vonkajšieho uhla pri vrchole C. Zo znalosti vlastností pripísanej kružnice môžeme usúdiť, že aj os vonkajšieho uhla pri vrchole B musí prechádzať bodom L. Čiže $|\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle LBP| = 30°$.
Ďalej budeme počítať nejaké uhly a dôjdeme k tomu, že štvoruholník $BPLK$ je tetivový. Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha$. Súčet uhlov v trojuholníku ABC je $180°$, takže $|\sphericalangle BCA| = 60° - \alpha$. Vonkajší uhol v trojuholníku ABC pri vrchole C má veľkosť $120° + \alpha$ a keďže CP je jeho osou, tak $|\sphericalangle PCB| = 60° + \alpha/2$. Z trojuholníka AKC ľahko dorátame $|\sphericalangle AKC| = 120° + \alpha/2$. Susedný uhol CKL má veľkosť $60° - \alpha/2$. V trojuholníku KLC ľahko dorátame, že $|\sphericalangle KLC| = 60°$. Susedný uhol PLK k tomuto uhlu má potom veľkosť $120°$. Vidíme, že súčet protiľahlých uhlov v štvoruholníku $BPLK$ je $180°$, čiže skutočne ide o tetivový štvoruholník.
Z obvodových uhlov v tomto štvoruholníku vieme, že $|\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle KBL| = 30°$ a $|\sphericalangle LKP| = |\sphericalangle LBP| = 30°$. Uhol AKM je vrcholový k uhlu LKP, takže $|\sphericalangle AKM| = |\sphericalangle LKP| = 30°$. Obidva uhly spomínané v zadaní majú veľkosť $30°$, teda sú zhodné. Hotovo.

Úloha č. 12: *Čísla* $1, 2, 3, \ldots, 100$ *sú usporiadané po obvode kruhu tak, že každé číslo je buď väčšie od svojich oboch susedov alebo je od oboch menšie. Ak vymazanie dvojice susedných čísel nenaruší túto charakteristiku, takúto dvojicu nazveme* superdvojica. *Určte najmenší možný počet* superdvojíc.

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Riešenie je dosť priamočiare, preto tu nájdete len zoznam hlavných krokov riešenia bez technických detailov. Riešenie poslali len dvaja statoční, presnejšie *Martin Bachratý* a *Filip Sládek*. Podľa nich je aj vzorové riešenie. Navyše, namiesto čísla 100 v zadaní uvažujme ľubovoľné párne $n = 2k > 0$.
Ak dvojica susedných čísel nie je superdvojica, nazveme ju *badvojica*. Ak mám šesticu po sebe idúdich čísel na obvode $a_i < A_i > a_{i+1} < A_{i+1} > a_{i+2} < A_{i+2}$, tak dvojica a_{i+1}, A_{i+1} je badvojica, práve keď platí $a_i < A_i < a_{i+2} < A_{i+2}$. Keby nejaké číslo bolo v dvoch badvojiciach, tak bez ujmy na všeobecnosti nech je to A_{i+1}. Potom musí zároveň $a_i < A_i < a_{i+2} < A_{i+2}$ a $A_i > a_{i+1} > A_{i+2}$ čo spor. Takže žiadné čislo nie je naraz v dvoch badvojiciach. Dostávame, že badvojíc je maximálne k, takže superdvojíc je minimálne k. (Superdvojíc a batdvojíc dokopy je n.)
Ďalej ukážeme, že badvojíc je menej ako k. Sporom. Keby ich bolo k (väčší počet sme už vylúčili) tak každé číslo je v práve jednej badvojici. Bez ujmy na všeobecnosti,[2] nech je badvojica $a_{i+1} < A_{i+1}$. Potom je aj $a_{i+2} < A_{i+2}$ badvojica a tak ďalej. Z toho získame nerovnosti typu $a_{i+1} < a_{i+2}$, ktorá musí platiť pre každé i. Keďže čísla sú usporiadané cyklicky, dostávame $a_{i+1} < a_{i+1}$ čo je spor.
Takže minimálny počet superdvojíc je $k+1$ (pretože maximálny počet badvojíc je $k-1$). Ukážeme, že to stačí tak, že skonštruujeme prípad, ktorý vyhovuje. Keď si zoberieme postupnosť $1, 2, 3, \ldots, n$ a prehodíme postupne čísla $(2, 3)$, $(4, 5)$, … tak dostaneme postupnosť

$$1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \ldots, n-1, n-2, n.$$

Vidíme, že badvojice sú $(2, 5)$, $(4, 7)$, …, $(n-4, n-1)$ a ešte $(n, 1)$. To je práve $k-1$ badvojíc. Ukázali sme, že badvojíc je maximálne $k-1$ a existuje také rozloženie, Takže superdvojíc je minimálne $k+1$, v našom príklade 51. No vidíte, ani to nebolelo.

Úloha č. 13: *Pre každé prirodzené číslo* $n > 1$ *nájdite najväčšie možné reálne číslo* p *také, že nerovnosť*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

platí pre všetky n*-tice nezáporných reálnych čísel* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

[2] Keby bola badvojica „opačne“ (tj. väčší člen je skôr), tak si môžem pomôcť napr. substitúciou $b_i = n+1-a_i$ a mám známy prípad ktorý viem riešiť.

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Zrejme stačí ak ku každému $n > 1$ nájdeme také p, že nerovnosť zo zadania bude platiť a zároveň bude existovať vhodná n-tica, $x_1, \ldots, x_n$, kedy nastane rovnosť. Pre $n = 2, 3, 4$ sa dá ľahko ukázať, že platí $p = n$. (Vyskúšajte si to!) Pre $n > 4$ je to zaujímavejšie. Ak si dosadíme $x_1 = x_2 = 1$ a $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$, dostaneme, že musí platiť $4 \geq p$, teda p je najviac 4.
(Podľa Martina Bachratého) Matematickou indukciou dokážeme, že pre $n \geq 4$ platí $p = 4$. Prvý indukčný krok ($n = 4$) už máme. Nech teda pre každú $n - 1$-ticu ($n \geq 5$) nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_1). \tag{1}$$

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je ľubovoľná n-tica nezáporných reálnych čísel. Cyklickou zámenou premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nezmeníme hodnoty na ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti, preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že x_n je najmenšie spomedzi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, presnjšie $x_n \leq x_j$ pre každé j, $1 \leq j \leq n$. Postupne odvodíme nerovnosti

$$\begin{aligned}
2x_1x_{n-1} &\geq 2x_1x_n,\\
2x_1x_{n-1} &\geq 2x_{n-1}x_n,\\
2x_n(x_1 + x_{n-1}) + 4x_1x_{n-1} &\geq 4x_1x_n + 4x_{n-1}x_n,\\
x_n^2 + 2x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) &\geq 4x_1x_n + 4x_{n-1}x_n - 4x_1x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sčítaním poslednej nerovnosti spolu s indukčným predpokladom (1) dostaneme

$$x_n^2 + 2x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1),$$

čo je po úprave ľavej strany na štvorec dôkaz, že pre dané n platí $p \geq 4$, čo s úvahami zo začiatku riešenia implikuje $p = 4$. Tým je indukcia kompletná a príklad vyriešený. Hurá!

Úloha č. 14: *Vrcholom pravidelného šesťuholníka sú priradené nezáporné celé čísla, ktorých súčet je 2009. Dráčik si môže vybrať jeden vrchol a jeho číslo nahradiť absolútnou hodnotou rozdielu čísel priradených susedným vrcholom. Dokážte, že konečnou postupnosťou takýchto krokov môže Dráčik dosiahnuť, že vo všetkých vrcholoch bude číslo 0.*
Riešenie: (opravoval Ondráč)
Tento príklad sa nikomu nepodarilo kompletne vyriešiť. Aby ste sa s ním ešte mohli pohrať, dodávame len stručný návod. Môžete postupovať v dvoch krokoch (oba sú netriviálne):

- Ukážte, že ak súčet čísel vo vrcholoch je nepárny, tak Dráčik vie konečným počtom krokov dosiahnuť, že práve jedno z čísel bude nepárne.

- Ak práve jedno z čísel vo vrcholoch je nepárne, označme najväčšie z Dráčikových čísel ako M. Dokážte, že Dráčik vie pomocou konečného počtu vhodných krokov dôjsť na pozíciu, kde každé číslo bude menšie než M.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	3	1	9	9	9	9	9	9	9		45	135
2.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	12	9			9	9	9	9	9		45	134
3.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	8	4			9	9	8	9	9		44	132
4.	Horňák Marián	2.	GPár NR	5	2		9	9	9	9		9		45	131
5.	Kossaczký Pavol	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	9		9		45	130
6.	Hagara Michal	4.	GJH BA	11	9			9	9	8	9	9		44	129
7.	Phuong Mariana	3.	GJH BA	7	2		9	9	9	9	9			45	127
8.	Csiba Dominik	3.	ŠPMNDG BA	8	3			8	9	9	9	1		36	121
8.	Chlebíková Andrea	3.	Brighton UK	7	3			9	9	9	9	4		40	121
10.	Balog Matej	3.	Gamča BA	6	1		9	9	9	8				35	115
11.	Hamaš Matej	3.	Gamča BA	4	0	4	9	9	7	8				37	111
12.	Barančok Peter	3.	Gamča BA	4	0	9	6	9		6				30	109
12.	Galovičová Soňa	2.	GVO ZA	6	1		9	9		9		1		28	109

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
12.	Le Tuan Anh	3.	Gamča BA	9	3			6	8	5	9	1		29	109
12.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	7	2		9	9	9	8				35	109
16.	Karásková Natália	3.	GJH BA	10	8			9	9	9				27	108
16.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	3	0	5	9	8	6	8				36	108
16.	Szabados Viktor	3.	Gamča BA	9	3			9	8	5	9	2		33	108
19.	Klembarová Barbora	2.	GKuk PP	5	1		9	9	9	8	1			36	107
19.	Kopf Michal	2.	Opava ČR	5	1		9	9	9	6	8			41	107
21.	Kozák Andrej	3.	Gamča BA	9	3			9	9	9	9	1		37	104
22.	Dupej Peter	2.	GJAR PO	4	0	4	9	2	9	8		1		32	102
22.	Hlavatá Martina	3.	Gamča BA	8	2		6	4	7	7				24	102
24.	Konečný Jakub	4.	Gamča BA	12	8			9	9		9	8		35	101
25.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	3	1		9	9	9	8	9			44	100
26.	Tóth Michal	2.	GJH BA	5	1		9	3	9	8	7	1		36	99
27.	Kováč Ondrej	3.	GCM NR	8	3			9	8	9	9			35	98
28.	Sabatovičová Linda	3.	GJH BA	7	1		9	9	9	7				34	97
29.	Midlik Adam	4.	GJAR PO	9	4			9	9	7	9			34	96
30.	Jasenčáková Katarína	2.	GVO ZA	6	1		9	4	9	8		2		32	92
31.	Guričan Pavol	3.	GJH BA	8	3			4	9	9				22	91
31.	Žídek Augustin	2.	Frýdlant ČR	5	1		6	9	2	8		1		26	91
33.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2	0	9	2	2			9	0		22	90
34.	Šormanová Mária	3.	ŠPMNDG BA	6	1		9	9	9					27	88
35.	Faguľová Kristína	2.	GPoš KE	6	1		9	3	7	7	4	0		30	87
35.	Marečáková Barbora	2.	GKuk PP	5	1		8	1	6	8	4			27	87
37.	Ficková Klára	2.	GPoš KE	3	0	9	1	9						19	85
37.	Floriánová Michaela	3.	GJH BA	6	0		9	9	1	4				23	85
37.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	2	0	9	2	2	2		5			20	85
37.	Langer Tomáš	2.	GJH BA	5	1		9	2	7	8	2			28	85
37.	Tóth Róbert	4.	GAlej KE	6	1									0	85
42.	Baxová Zuzana	2.	GĽŠ TN	5	1		9	2	9	2				22	84
43.	Belanová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	4	7					20	80
43.	Peitl Tomáš	4.	ŠPMNDG BA	10	4			5	9	9	9			32	80
43.	Večerík Matej	3.	ŠPMNDG BA	8	3		1	9	8		9			26	80
46.	Faršang Štefan	3.	SJG KN	6	2		9	9	7					25	73
47.	Švančara Patrik	2.	GĽŠ TN	4	0	5	9							14	71
48.	Bogár Ján	4.	GĽŠ TN	10	3			4	0					4	70
48.	Macháč Juraj	3.	GJH BA	5	0	2	6	1						9	70
50.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	2	0	8	9	2						19	68
51.	Kosec Peter	2.	GĽŠ TN	5	1									0	67
52.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2	0	8	4	3	2					17	64
53.	Koprda Pavol	2.	GAM TT	5	1									0	61
54.	Daniláková Monika	2.	GJAR PO	4	0									0	58
55.	Hozza Ján	3.	GJH BA	7	5									0	54
56.	Vlček Andrej	2.	EvSŠ LM	5	1									0	53
57.	Štyráková Kamila	4.	GPOH DK	10	3									0	49
58.	Halajová Barbora	2.	GVO ZA	6	1									0	47
58.	Kubincová Petra	3.	ŠPMNDG BA	7	1									0	47
60.	Gonda Tomáš	1.	Gamča BA	2	0			9						9	42
61.	Anderle Michal	3.	GBST LC	5	0									0	40
61.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	0									0	40
63.	Kmeťová Katarína	2.	GKuk PP	5	1									0	38
64.	Santrová Adriana	2.	GMH Trstená	4	0	4	1	2						7	32
65.	Jakubík Ján	3.	SPŠE PN	6	0	3	1	2						6	29
65.	Vlachynská Petra	2.	GBil BA	4	0									0	29
67.	Sládek Filip	4.	GAB NO	8	8									0	28
68.	Kopcová Monika	3.	Gamča BA	4	0									0	27

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
69.	Masár Juraj	3.	GJH BA	6	1									0	25
69.	Rigdová Emília	4.	GKuk PP	7	1									0	25
71.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	4	0									0	21
71.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	3	0									0	21
73.	Šimková Mária	4.	GJF Šaľa	4	0									0	17
74.	Búlik Martin	3.	GJGT BB	4	0	9	0	1						10	12
75.	Makuch Matej	3.	GJGT BB	4	0	8	0	1						9	11
76.	Lehotský Juraj	3.	GJGT BB	4	0	9		1						10	10
76.	Leitner Matej	3.	GJGT BB	4	0	9		1						10	10
76.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3	0									0	10
79.	Kaštan Marek	3.	GJGT BB	4	0	8	0	1						9	9
79.	Majdiš Mojmír	4.	GPOH DK	7	1									0	9
81.	Dragošek Joel	3.	GJGT BB	4	0	6	0	1						7	7
82.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3	0	5	0							5	6
83.	Černák Adam	3.	GJGT BB	4	0	4	0	1						5	5
83.	Rešutík Peter	3.	GJGT BB	4	0	4	0	1						5	5
85.	Koroncziová Dominika	3.	GJGT BB	4	0	3	0	1						4	4
85.	Pločeková Andrea	3.	GPdC PN	4	0									0	4
87.	Lami Vincent	4.	SJG KN	6	3									0	3
88.	Makk Jakub	3.	GJGT BB	4	0		0	1						1	1
89.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	2	0									0	0

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Kavický Dušan	1.	GJH BA	1	9	7	9	8	8	2	4		117
2.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	2		9	8		8	9	2		112
3.	Gonda Tomáš	1.	Gamča BA	2		9	9	6			9		109
4.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2		7	8	6	8	4	3		105
5.	Petrucha Jaroslav	1.	GMet BA	2		9	9		9	5	4		95
6.	Hraška Peter	1.	Gamča BA	2		8	4	8	9		9		92
7.	Matejovičová Tatiana	1.	Gamča BA	2		5		6	8		1		90
8.	Kurdelová Alžbeta	1.	GLN BA	1	3	9	6				3		86
9.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	3					5	9	8		85
10.	Strakáčová Jana	1.	Gamča BA	2		7		7			3		81
11.	Smolík Milan	1.	Gamča BA	3			7	8	9	4	9		80
12.	Bock Michal	1.	Gamča BA	3		9	7	7	4	0			79
13.	Hledík Michal	1.	GJH BA	2		9	9	8	9	9	9	x0	78
13.	Smolík Michal	1.	Gamča BA	3			7	7	9	9	9		78
15.	Páleník Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2		6	5		8	1	1		73
16.	Smolík Martin	1.	Gamča BA	3			6	7	1	6	4		60
17.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	2		7	2				9		57
18.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	3						9	9		52
19.	Žitňanský Tomáš	1.	GJH BA	1									39
20.	Hadvab Peter	1.	GCSL BA	1									38
21.	Šteis Lukáš	1.	ŠPMNDG BA	2									36
22.	Jamrichová Lucia	1.	ŠPMNDG BA	2									22
23.	Krajčovič Matej	1.	GJH BA	2									19
24.	Krajčovič Michal	1.	GJH BA	2									18
25.	Štofová Gabriela	1.	ŠPMNDG BA	1									10
26.	Holíková Zuzana	1.	GCSL BA	2									3

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Glončák Vladan	1.	GĽŠ TN	1	2	6	9	6	4				94
2.	Kútny Miloš	1.	GPár NR	1	9	9	6		4	1	1		91
3.	Cibulka Samuel	1.	GAV LV	2		4	6	7	4		1		85
4.	Očkay Štefan	1.	GPár NR	1	3	9	6	0	0	1	2		80
5.	Tunová Anna	1.	GPár NR	2		7	4		4	0	1		68
6.	Horváth Matúš	1.	GPár NR	1	4	9	4	0	4	0	1		65
7.	Kováčová Milada	1.	GCM NR	2		9							57
7.	Sitkey Matúš	3.	GGol NR	3			6		7	1	1		57
9.	Puček Samuel	1.	GĽŠ TN	1	3								40
10.	Choongeun Park	1.	SJG KN	1									22
11.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	3									18
12.	Ištván Mário	1.	GKom PE	1									16

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Macko Vladimír	1.	GĽŠ ZV	2		9	6	7	9	9	9		121
2.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	2		4	6	8	9	2	2		109
3.	Nociarová Jela	1.	GBST LC	2		9	6		4		8		94
4.	Benešová Katarína	1.	GAS BB	2		5	6		5	2	3		91
5.	Surovčík Juraj	1.	GPOH DK	2		6	5		9	9	1		83
6.	Santer Martin	1.	GMH Trstená	2		9	9	8			3		75
7.	Šubjak Ján	1.	GPOH DK	2		6	6		4		2		71
8.	Bahyl Jakub	1.	GVar ZA	1	9	7	6				1		70
9.	Hrašková Veronika	1.	GBST LC	1									30
10.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3									9
11.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3					5	0			5
12.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	2									4

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	3			9	9	9	9	9		135
2.	Ficková Klára	2.	GPoš KE	3			9	8	9	1	9		119
2.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2		7	7	9	9	2	2		119
4.	Hanzely Filip	1.	GAP SB	2		7	6		4	6	2		105
5.	Semanišinová Denisa	1.	GAlej KE	3			9	4	3	0			85
6.	Pistráková Alexandra	1.	GPoš KE	2		7	4						48
7.	Tokárová Natália	1.	GJAR PO	2		7	6		2	1			45
8.	Hlaváčik Matúš	1.	GAlej KE	3									35
9.	Koľveková Veronika	1.	GPoš KE	2									26
10.	Motešický Ján	2.	GDax VT	2									12

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	9	9					146
2.	Hagara Michal	4.	GJH BA	9	9					126
3.	Horňák Marián	2.	GPár NR		9					86
4.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	9	9					126
5.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená							53
6.	Sládek Filip	4.	GAB NO							176
7.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	9	0					26

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.