Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2009/2010

Úloha č. 1: *Mravčekovia našli včera na lúke čísla* 1 *až* 50. *Vybrali si z nich* 25 *čísel a odniesli ich do mraveniska. Dnes našli na lúke čísla* 51 *až* 100 *a z nich si tiež vybrali* 25 *čísel a odniesli do mraveniska. Doma zistili, že medzi žiadnymi dvoma číslami v mravenisku nie je rozdiel* 50, *a že žiadne dve čísla nie sú rovnaké. Zistite, aký môže byť súčet čísel, ktoré si doniesli do mraveniska.*

Riešenie: (opravovala Katka J.)
Pozrime sa na to, z akých čísiel si mravčekovia mohli vyberať.

1. deň	1	2	3	...	49	50
2. deň	51	52	53	...	99	100

Keď si ich zapíšeme takto pekne pod seba, môžeme si všimnúť zaujímavú vec. Pod sebou máme napísané práve tie čísla, ktorých rozdiel je 50. To znamená, že z každého stĺpca si mravčekovia vybrali iba jedno číslo — horné alebo dolné, obidve mať nemôžu. Vieme, že mravčekovia si do mraveniska priniesli spolu 50 čísiel — 25 prvý deň a 25 druhý. Z toho vyplýva, že z každého stĺpca si mravčekovia vybrali práve jedno číslo a odniesli ho do mraveniska.
Nakreslime si teraz našu tabuľku trochu inak:

1. deň	1	2	3	...	49	50
2. deň	$50+1$	$50+2$	$50+3$	...	$50+49$	$50+50$

Našim cieľom je zistiť súčet čísiel v mravenisku. Určite vieme, že čísiel, ktoré sú tvaru $50+a$ si mravčekovia vybrali práve 25 — preto bude v našom súčte člen $25 \cdot 50$. Navyše vieme, že z každého stĺpca si vybrali vždy práve jedno číslo. Keďže päťdesiatky už neberieme do úvahy, môžeme povedať, že z prvého stĺpca si vždy vyberú 1, z druhého 2 atď. až po posledný, päťdesiaty stĺpec. Celkový súčet bude teda mať tvar

$$(1+2+3+\cdots+50)+25\cdot 50.$$

Takto vyjadrený súčet už ľahko dopočítame - napríklad vďaka vzorcu

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

Správna odpoveď teda znie, že pre akékoľvek čísla, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania, je súčet čísiel v mravenisku 2525.

Úloha č. 2: *Húsenica dostala tri reálne čísla a, b, c. Spravila z nich tri nové čísla*

$$a-b+2010, \quad b-c+2010, \quad c-a+2010.$$

Zistila, že tieto nové čísla tvoria trojicu po sebe idúcich celých čísel (možno v inom poradí, ako sú napísané). Ktoré tri po sebe idúce čísla to môžu byť? Nájdite všetky riešenia.

Riešenie: (opravoval Igor)
Nazvime si tri nové po sebe idúce čísla $k-1$, k, $k+1$. Tieto tri čísla sú podľa zadania rovné číslam $a-b+2010$, $b-c+2010$ a $c-a+2010$, ale nevieme presne v akom poradí. Vieme však, že ak sčítame čísla $k-1$, k a $k+1$, musíme dostať to isté, ako keď sčítame čísla $a-b+2010$, $b-c+2010$ a $c-a+2010$. Veď sčitujeme tie isté tri čísla a pri sčitovaní na poradí nezáleží. Získame tak rovnosť

$$(k-1)+k+(k+1)=(a-b+2010)+(b-c+2010)+(c-a+2010),$$

z čoho jednoduchou úpravou dostávame

$$3\cdot k=6030.$$

Obe strany predelíme tromi, čím zistíme, že platí $k = 2010$. Takže nové čísla, ktoré húsenica dostala úpravou čísel a, b, c sú 2009, 2010, 2011. Ostáva nám ešte zistiť, či také čísla a, b, c vôbec existujú. Po chvíli skúšania ľahko nájdeme nejakú vyhovujúcu trojicu čísel, napríklad $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$.

Tri hľadané po sebe idúce čísla sú 2009, 2010, 2011.

Úloha č. 3: *Majme tri prirodzené čísla. Pre každú dvojicu z nich urobíme rozdiel ich súčinu a súčtu (od súčinu odčítame ich súčet). Pre jednu dvojicu vyjde kladný, pre druhú záporný. Určte, či vyjde tento rozdiel pre tretiu dvojicu kladný alebo záporný. Svoju odpoveď zdôvodnite.*

Riešenie: (opravoval Ku-bo)

Najdôležitejšie na tejto úlohe je vedieť si dobre a prehľadne zapísať, čo nám zadanie hovorí a vyťažiť z toho čo najviac informácií. Celý čas sa budeme rozprávať o nejakých troch prirodzených číslach. Je dôležité vedieť, čo sú to prirodzené čísla a zároveň si ich dobre označiť, aby sa nám neskôr nepletli. Písmená a, b a c sú dobrí kandidáti, lebo sa nepíšu až tak podobne a aj sa rôzne vyslovujú[1]. Po takomto zápise by mohla vyzerať úloha nasledovne:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b - (a + b) &> 0 && (1)\\
b \cdot c - (b + c) &< 0 && (2)\\
c \cdot a - (c + a) &\ ?\lesseqgtr 0 && (3)
\end{aligned}
$$

Ako vidíme, sformulovali sme tri nerovnosti. Teraz nasleduje dolovanie informácií. V tomto kroku ste mali mnohí veľmi dobrý postreh, že rozdiel súčinu a súčtu dvoch prirodzených čísel je záporný vtedy, keď je práve jedno z nich jednotka. Problém ale je, že toto je tvrdenie, o ktoré sa opiera celé riešenie príkladu a práve ste ho sformulovali. Aby sme vám takéto riešenie mohli uznať, treba ukázať aj to, prečo takéto tvrdenie platí. To mnohí z vás neurobili alebo urobili len zčasti.

Najprv treba ukázať, že ak je jedno z čísel jednotka, tak náš rozdiel bude záporný. To ide pomerne ľahko. Veď $b \cdot c - (b + c) = b \cdot 1 - (b + 1) = b - b - 1 = -1 < 0$. To ukazuje, že ak by bolo c rovné jednej, tak druhá nerovnosť platí. Takisto z toho vyplýva, že v prvej nerovnosti sú a aj b väčšie od jednotky, inak by bol rozdiel na ľavej strane prvej nerovnosti záporný, a nie kladný.

S tým sa už mnohí z vás uspokojili, čo je škoda, lebo na úplné dokončenie príkladu treba ukázať aj to, že ak nebude jedno z dvojice čísel v nerovnosti jednotka, tak ľavá strana bude určite nezáporná (t.j. nebude záporná). Môžeme si to ukázať vylúčením ostatných možností.

Nech b a c sú väčšie ako jedna. Preznačíme si ich takto: $a = 2 + x$ a $b = 2 + y$, kde x a y sú nezáporné celé čísla. Dosaďme to do ľavej strany nerovností a dostaneme výraz: $(2 + x).(2 + y) - (2 + x + 2 + y)$, ktorý vieme upraviť na výraz $x + y + xy$. Ten je ale stále kladný alebo nulový[2], čo znamená, že záporný rozdiel súčinu a súčtu dvoch čísiel bez jednotky nedostaneme.

Zbytok príkladu je jednoduchý. Ukázali sme, že z prvej nerovnosti vyplýva, že $a > 1$ a $b > 1$. Z druhej nerovnosti, z toho že $b > 1$ a z nášho dôkazu o tom, že jedno z čísel b a c musí byť jednotka, zistíme, že $c = 1$. Potom ale platí:

$$c \cdot a - (c + a) = 1 \cdot a - (1 + a) = -1 < 0.$$

Už len sformulovať nejaký pekný záver o tom, čo sme zistili. Ale to už zvládnete.

Vidíme sa na sústredení. Kto nepríde môže banovať. :)

Úloha č. 4: *V miestnosti KMS na stole leží* 2002 *kariet očíslovaných od* 1 *po* 2002 *(každé číslo je použité presne raz). Šváb a pavúk s kartami hrajú hru. Pavúk začína. Striedavo si berú karty, až kým sa všetky karty na stole neminú. Na konci hry si každý spočíta súčet čísel na všetkých kartách, ktoré si zobral. Vyhráva ten, ktorého súčet má na mieste jednotiek vyššiu cifru. Môže šváb alebo pavúk hrať tak, aby určite vyhral? Ak áno, ako? Nezabudnite svoje tvrdenie poriadne dokázať.*

Riešenie: (opravovala Ika B.)

Tak ako pri každom príklade, aj teraz bolo treba pri riešení prejsť tromi fázami: pochopiť zadanie, vymyslieť riešenie, napísať riešenie. Tento príklad bol zaujímavý tým, že prvá a tretia fáza boli o dosť náročnejšie než obvykle. Naopak, samotné riešenie až tak náročné nebolo. Preto som hodnotila aj to, ako sa Vám podarilo príklad spísať. Uvidíme, ako sa to podarí mne.

Najskôr si všimnime, že súčet čísel od 1 do 2002 je 2005003. Posledná cifra (cifra na mieste jednotiek) celkového súčtu je 3. To bude aj posledná cifra súčtu pavúkovej a švábovej poslednej cifry. Súčet dvoch cifier môže byť najviac 18, takže súčty, ktoré sa končia na 3 sú len 3 a 13. Výsledok 3 dostaneme ako $2 + 1$ alebo $3 + 0$ a výsledok 13 ako $4 + 9$, $5 + 8$ alebo $6 + 7$. Ak sa nám podarí docieliť, že posledná cifra nášho súčtu bude 2, potom bude posledná súperova cifra 1, a teda sme vyhrali. Rovnako to bude fungovať, ak bude posledná cifra nášho súčtu 3, 7, 8 alebo 9. Potom súperova posledná cifra musí byť 0, 6, 5 alebo 4, takže sme vyhrali.

[1] Uznajte že dôkazy s p, q a o sú oveľa neprehľadnejšie.

[2] lebo sme použili nezáporné čísla x a y

My si ukážeme, ako môže začínajúci pavúk docieliť, že posledná cifra jeho súčtu bude 2. Stratégia je jednoduchá, stačí keď si pavúk najskôr zoberie 2 a potom vždy, keď sa dá, potiahne kartičku s rovnakou poslednou cifrou ako šváb. Ak už žiadna taká kartička nie je, môže si zobrať kartičku, akú chce. Toto je víťazná stratégia pre pavúka.
Otázka je, prečo to funguje. Poslednú cifru súčtu ovplyvňujú len posledné cifry jednotlivých sčítancov. Takže oveľa dôležitejšie, než to, že máme kartičky s číslami od 1 po 2002 je, že máme 200 kartičiek s číslami končiacimi na každú z cifier 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 a 201 kartičiek s číslami končiacimi na 1, respektíve 2. My si máme zobrať polovicu - 1001 kartičiek a chceme, aby posledné cifry na nich dali dokopy súčet 2. Prvú si vezmeme 2, potom ešte potrebujeme zobrať 1000 kartičiek tak, aby bola posledná cifra ich súčtu 0. To vieme spraviť napr. tak, že si pre každú cifru zoberieme presne 100 kartičiek, ktoré sa na ňu končia. Zabezpečí nám to vyššie spomínaný postup?
Rozdeľme si všetky kartičky na 20 kôpok - desať pavúkových a desať švábových. Na prvej pavúkovej kôpke je sto 1, na druhej je sto jedna 2, na ďalšej sto 3, a tak ďalej, až na poslednej je sto 0. Na prvej švábovej kôpke je sto jedna 1, na druhej je sto 2 a tak ďalej až na poslednej je sto 0. Pavúkov cieľ je jednoduchý - zobrať všetky svoje kôpky. Súčet čísel na kôpkach potom bude $100 \cdot 1 + 101 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 100 \cdot 5 + 100 \cdot 6 + 100 \cdot 7 + 100 \cdot 8 + 100 \cdot 9 + 100 \cdot 0 = 5502$. Posledná cifra je 2, čo sme chceli dosiahnuť.
Ak chce šváb pokaziť pavúkovu výhernú stratégiu, musí sa mu podariť zobrať nejakú kartičku z pavúkovej kôpky (aby ju pavúk nevzal celú). To ale môže spraviť, len keď už má svoju kôpku pre dané číslo prázdnu (inak si môže pavúk doplniť chýbajúce kartičky zo švábovej kôpky). Šváb teda chce, aby nastala situácia, že má celú kôpku pre danú cifru vzatú a pavúk na kôpke pre tú istú cifru ešte niečo má.
Ale to sa nestane, pretože pavúk berie vždy to isté ako šváb. Takže ak napríklad šváb zoberie postupne 100 trojok, tak pavúk zoberie tiež 100 trojok. Toto funguje pre všetky cifry okrem 1 a 2. Ale ak si pavúk zoberie v prvom ťahu 2, tak to funguje aj pre dvojkovú kôpku. No a pri jednotkovej kôpke má šváb o jednu kartu viac (tú dvesto prvú), ale to nevadí, lebo pavúk potrebuje len 100, teda polovicu zo zvyšných.
Ak by sa stalo, že pavúk opakovať nemôže (keď šváb zoberie poslednú jednotku), tak si zoberie hocijakú kartu z niektorej svojej kôpky. A opäť bude opakovať v ďalších ťahoch.
Ukázali sme, že sa pavúkovi podarí vybrať všetky svoje kôpky a dostať poslednú cifru dva a vyhrať. Hurá.

Úloha č. 5: *Lúčny koník Ferko píše test, ktorý sa skladá z* 30 *otázok. V každej otázke sú dve možnosti A a B, z ktorých je vždy správna práve jedna. Prešibaná lienka mu poradila, že počet otázok so správnou odpoveďou A nie je* 15*. Ferko má niekoľko pokusov na to, aby napísal test úplne správne. Pri každom teste Ferko musí odpovedať na všetky otázky. Po každom odovzdanom teste sa dozvie, na koľko otázok odpovedal správne. Nevie však, ktoré to sú.*

a) Ako má Ferko odpovedať na otázky, aby vyplnil test bezchybne na 31*. pokus?*

b) Ako má Ferko odpovedať na otázky, aby vyplnil test bezchybne na 30*. pokus?*

V úlohách a) i b) popíšte postup, ktorým Ferko zistí, ako má odpovedať pri 30*. resp.* 31*. pokuse.*
Pomôcka: Po každom odovzdanom teste sa Ferko dozvie nejakú ďalšiu informáciu o teste, ktorú môže využiť pri ďalšom pokuse.

Riešenie: (opravoval Myrec)
Úlohu *a*) ste skoro všetci úspešne vyriešili. Poradím, že to šlo aj bez rady od lienky a prvý test mohol odpovedať samé A. Pred ďalším čítaním si túto časť skúste vyriešiť.
Komu sa to nepodarilo, návod je tu. Najskôr dáme samé odpovede A. Tým určíme počet otázok so správnou odpoveďou A. Ďalej musíme zistiť, pri ktorých otázkach sú tieto odpovede A. V ďalších pokusoch vždy na jednej pozícii zvolíme B a ostatné necháme A. Ak sa celkový počet správnych odpovedí zväčší, tak na skúšanej pozícii ma byť odpoveď B, inak je to A. Pozor! Máme len 30 pokusov, takže by sme nestihli vyskúšať všetky možné pozície B. Avšak na poslednú pozíciu sa nemusíme pýtať osobitne. Po 30. pokuse už vieme správne odpovede na všetky okrem poslednej otázky a počet správnych A. Z toho ľahko vieme aj odpoveď na poslednú otázku a na 31. pokus vyplníme test správne. Druhá časť si vyžadovala využiť aj dodatočnú podmienku. Čo nám to hovorí? Odpovedí A a B nemôže byť rovnako veľa. Koľko ich tam teda je, zistíme prvým pokusom- samé A. Po prvom pokuse vieme, že je v teste n správnych odpovedí A a m správnych B. Máme už len 28 pokusov, ktoré môžu byť neúspešné. Preto nemôžem sledovať každú odpoveď osobitne. Ale skúsme sledovať dvojice. Na druhý pokus vyskúšame na prvej a druhej pozícií B a na ostatných A.

- Ak počet správnych odpovedí pri druhom pokuse ostal nezmenený, tak na prvú a na druhú otázku sú rôzne odpovede.
- Ak sa počet zdvihol o dva, tak na prvú a druhú otázku budú odpovede B.
- Ak sa počet klesol o dva, tak na prvú a druhú otázku budú odpovede A.

Takto pokračujem aj pre dvojice 2 a 3, 3 a 4,. . . , 28 a 29. Takto použijeme ďalších 28 pokusov, ktoré môžu byť zlé. Na čo sme však prišli? Ak niektorá dvojica bola jasne určená ako AA alebo BB, tak pomocou sledovania „zmien“ vieme určiť všetky odpovede od 1 po 29. Tridsiatu odpoveď určíme zo znalosti celkového počtu. Ak však žiadna dvojica nebola jasne určená, tak vieme, že prípustné odpovede od prvej do 29. otázky sú $ABABAB\ldots$ alebo $BABABA\ldots$ To je 15-krát A a 14-krát B alebo 14-krát A a 15-krát B. Keďže poznáme m a n (z prvého pozorovania) a nesmú byť rovné 15, tak už ľahko rozhodneme ktorá z predchádzajúcich možností je správna.

Úloha č. 6: *Určte, pre ktoré dvojice prirodzených čísel x, y platí rovnosť $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^x = 3^y$.*

Riešenie: (opravovali Zuska a Katka :P)
Ako prvú vec si všimnime, že na ľavej strane rovnice je geometrická postupnosť, ktorú vieme zjednodušiť na

$$1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^x = 2^{x+1} - 1.$$

Táto rovnosť je Vám pomerne známa. Ak aj nepoznáte vzorec na súčet geometrickej postupnosti, po chvíli hrania si ju iste zvládnete odvodiť aj sami (vyskúšajte si to, možností je veľa). Rovnicu zo zadania sme previedli do tvaru

$$2^{x+1} - 1 = 3^y. \tag{4}$$

Keďže pravá strana rovnice (4) je deliteľná tromi, to isté musí platiť aj pre ľavú stranu. Rýchlo vieme zistiť, že mocniny dvojky dávajú po delení tromi zvyšky 1 (párne mocniny) a 2 (nepárne mocniny). Preto $x + 1$ musí byť párne.
Vďaka tomuto zisteniu vieme ľavú stranu (4) rozložiť podľa vzorca $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ na

$$(2^{\frac{x+1}{2}} - 1)(2^{\frac{x+1}{2}} + 1) = 3^y. \tag{5}$$

Na ľavej strane (5) máme súčin dvoch čísel, ktorých rozdiel je dva. Preto aspoň jedno z nich určite nie je deliteľné tromi (toto si premyslite). Aby celý súčin bol mocninou trojky (pravá stana (5)), musia byť aj oba jeho činitele mocninami trojky. Jediné číslo, ktoré je zároveň mocninou trojky a nie je ňou deliteľné je 3^0, čiže 1. Logicky, jednotke musí byť rovný ten menší z výrazov, v našom prípade $2^{(x+1)/2} - 1$. Po úprave dostaneme, že $x = 1$ a k nemu prislúchajúce $y = 1$. Táto usporiadaná dvojica je jediným riešením úlohy.
Niektorí riešitelia uvádzali ako riešenie aj dvojicu $x = 0$, $y = 0$, ktorá síce vyhovuje rovnici (4), ale podľa nás nevyhovuje zadaniu (nula nie je prirodzené číslo). Ale nebojte sa, body sme za riešenie $x = 0, y = 0$ určite nestrhávali.

Iné riešenie:
Niektorí riešitelia využili zvyšky po delení číslom 8. Ľavá strana rovnice (4) pre $x > 2$ dáva po delení osmičkou vždy zvyšok 7, kým pravá strieda zvyšky 1 a 3 (opäť podľa parity mocniny).
Príklad sa, samozrejme, dal riešiť aj viacerými komplikovanými spôsobmi, napríklad prevodom rovnice do inej (dvojkovej, trojkovej) sústavy. Také riešenie tu uvádzať nebudeme, skúste si ho sami.

Úloha č. 7: *Na kružnici je rovnomerne rozmiestnených 20 jednotiek a 30 dvojok tak, že žiadne tri po sebe idúce čísla nie sú všetky rovnaké. Nájdite súčet súčinov všetkých trojíc po sebe idúcich čísel. (Takýchto súčinov je 50.)*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Najdôležitejšie pri riešení bolo pochopiť, čo vlastne treba vypočítať, čiže čo znamená *súčet súčinov trojíc*. Ukážeme si tri spôsoby riešenia tohto príkladu. Prvé je jednoduchšie a zvyšné dve riešenia sú trochu trikové.
Prvé riešenie: Všimnime si, že existujú práve dva *typy* trojíc po sebe idúcich čísel. Budeme hovoriť, že trojica po sebe idúcich čísel (na kružnici), ktorá obsahuje práve jednu dvojku, je *trojica prvého typu*. Trojice prvého typu sú 112, 121 a 211. Súčin čísel trojice prvého typu je $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$. Podobne, *trojice druhého typu* sú také trojice po sebe idúcich čísel (na kružnici), ktoré obsahujú práve jednu jednotku. Sú to 122, 212 a 221 a súčin každej trojice druhého druhu je $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.
Okolo kružnice je 50 trojíc po sebe idúcich čísel. Nech sa tam nachádza a trojíc prvého typu a b trojíc druhého typu. Každá trojica po sebe idúcich čísel musí spadať do jedného typu, preto musí platiť

$$a + b = 50. \tag{6}$$

Vieme, že číslo 2 je na kružnici tridsaťkrát. Počet dvojok vieme vyjadriť aj iným spôsobom. V každej trojici prvého typu je práve jedna dvojka a v každej trojici druhého typu sú práve dve dvojky. Takže výraz $a + 2b$ vieme chápať ako súčet všetkých dvojok vo všetkých trojiciach. Každú dvojku zarátame presne v troch trojiciach, takže platí, že počet dvojok na kružnici je $(a + 2b)/3$ alebo

$$a + 2b = 90. \tag{7}$$

Vyriešením sústavy rovníc (6), (7) dostávame $a = 10$ a $b = 40$. Už zostáva zrátať iba súčet súčinov všetkých po sebe idúcich trojíc. Trojice prvého typu prispejú súčinom 2 a trojice druhého typu súčinom 4, preto výsledok bude $2a + 4b = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 40 = 180$.
Druhé riešenie: Preformulujeme si úlohu. Namiesto jednotiek si napíšeme nuly a namiesto toho, aby sme násobili, budeme sčítavať. Hodnoty trojíc sa nezmenia, pretože $1 \cdot 1 \cdot 2 = 0 + 0 + 2 = 2$ a $1 \cdot 2 \cdot 2 = 0 + 2 + 2 = 4$. Takže netreba rátať súčet súčinov, stačí zrátať súčet súčtov, teda vlastne počet dvojok na kružnici vynásobený troma, pretože každú dvojku sme zarátali práve trikrát. Dostaneme $2 \cdot 3 \cdot 30 = 180$.

Tretie riešenie: Zo zadania vieme, že v každej trojici je aspoň jedna jednotka a aspoň jedna dvojka. V každom člene nášho súčtu ich teda môžeme vyňať. Vznikne tvar súčinu $1 \cdot 2 \cdot (\dots)$, pričom v zátvorke je dokopy 50 čísiel. Vieme, že počet jednotiek použitých v súčinoch je 60. Z nich je 50 jednotiek použitých vo vynímaní pred zátvorku, ďalších 10 bude preto vo vnútri zátvorky. V zátvorke je dokopy 50 členov, a keďže jednotiek je 10, dvojok bude 40. Z toho už dostávame známu rovnosť $1 \cdot 2 \cdot (10 \cdot 1 + 40 \cdot 2) = 180$.

Komentár: Vo vašich riešeniach často chýbal dôkaz, že vaše konštrukcie pokryjú naozaj všetky rozostavenia jednotiek a dvojok na kružnici vyhovujúce zadaniu. Vo vzorovom riešení je tento tento problém vyriešený tak, že každé možné rozostavenie musí spĺňať sformulované rovnosti.

Úloha č. 8: *Nech n a m sú prirodzené čísla. Predstavme si, že máme v lese nekonečne veľkú šachovnicu. Šachová figúrka roháč sa v jednom ťahu pohne najprv o n políčok vodorovne alebo zvislo a potom o m políčok v kolmom smere. Skočí vlastne v tvare písmena L. Roháč skáče ľubovoľne po šachovnici a nikdy ho to neomrzí. Dokážte, že nekonečnú šachovnicu vieme ofarbiť čiernou a bielou farbou tak, že roháč po každom ťahu zmení farbu svojho políčka. Zdôvodnite toto tvrdenie pre ľubovoľné prirodzené čísla m a n.*

Riešenie: (opravoval Mišo, Edo)
Budeme uvažovať tri rôzne prípady, podľa toho, akú paritu majú m a n.

a) Nech m a n majú rôznu paritu. Šachovnicu vyfarbíme rovnako ako klasickú šachovnicu. Pri priamom pohybe o ľubovoľný párny počet políčok sa farba políčka, na ktorom roháč stojí, nezmení. Pri pohybe o nepárny počet políčok sa farba zmení. Skombinovaním týchto 2 pohybov dostaneme žiadaný pohyb, pri ktorom dôjde k zmene farby.

b) Nech m a n sú obidve nepárne. V tomto prípade by nám klasické šachovnicové ofarbenie nepomohlo. Pri pohybe v oboch smeroch by sa totiž farba zmenila, čiže celkovo by ostala rovnaká. Musíme teda zabrániť zmene farby v jednom z možných smerov. Skúsme šachovnicu ofarbiť tak, že každý druhý stĺpec bude čierny a každý druhý biely. Pri zvislom pohybe sa farba nezmení, pretože roháč ostane v tom istom stĺpci. Pri vodorovnom pohybe sa farba zmení, pretože roháč skočil o nepárny počet políčok. Celkovo sa teda farba vždy zmení.

c) Nech m a n sú obidve párne. Pre tieto čísla nevieme hneď vymyslieť riešenie, tak ako v predchádzajúcich prípadoch. Môžeme sa ale pokúsiť zmeniť ho na prípad, ktorý už riešiť vieme. Ako sa dostaneme do stavu, keď m aj n nie sú obidve párne? No predsa začneme „deliť“ číslom 2, až kým nedôjdeme k prípadu, ktorý už poznáme, teda aspoň jedno číslo z dvojice m a n bude nepárne. Povedzme, že sa nám to podarí po a krokoch. Takže existujú prirodzené čísla m_0 a n_0, že platí

$$m = 2^a \cdot m_0, \quad n = 2^a \cdot n_0,$$

pričom aspoň jedno z čísel m_0, n_0 je nepárne. Šachovnicu ofarbíme tak, ako by sme to spravili pre m_0 a n_0 a potom ju celú „natiahneme“ 2^a-krát v oboch smeroch. Vzniknú teda buď štvorčeky $2^a \times 2^a$ alebo stĺpce široké 2^a políčok, ofarbené rovnakou farbou. Naozaj to bude fungovať, veď čo sa týka zmeny farby, je úplne jedno, či sa pohnem o m_0 políčok na klasicky ofarbenej šachovnici alebo o $m_0 \cdot 2^a$ políčok na šachovnici, kde štvorce jednej farby majú 2^a políčok (rovnako to platí aj pre ofarbenie stĺpcov).

Ukázali sme, že pre každé m a n vieme šachovnicu ofarbiť požadovaným spôsobom, čím je náš dôkaz hotový. Hor sa na prázdniny.

Úloha č. 9: *Kladné reálne čísla x, y, z spĺňajú vzťah*

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Dokážte, že potom platí

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} < \frac{1}{3}.$$

Riešenie: (opravoval Bebe)
Základom úspechu je v tomto prípade začať počítať. Príklad síce vyzerá na prvý pohľad odstrašujúco, ale skoro ľubovoľný postup vedie k správnemu riešeniu. My si ukážeme jeden z nich.
V prvom rade si musíme poriadne popozerať výrazy v zadaní. Rovnosť zo zadania je škaredá a dokazovaná nerovnosť ešte škaredšia. Upraviť rovnosť na nerovnosť sa zdá byť skoro nemožné. Jediné, s čím vieme rozumne pracovať, sú výrazy na pravých stranách, teda zlomky 1/2 a 1/3. To síce nevyzerá veľmi nádejne, ale nejako začať musíme. Skúsme teda na základe týchto čísel dostať do vzťahu ľavé strany výrazov. Chceme dokázať, že platí

$$\frac{3}{2(x^3+2)} + \frac{3}{2(y^3+2)} + \frac{3}{2(y^3+2)} < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1},$$

čo vieme prepísať do krajšieho tvaru

$$\frac{1}{2x^3+4}+\frac{1}{2y^3+4}+\frac{1}{2y^3+4}<\frac{1}{3x^2+3}+\frac{1}{3y^2+3}+\frac{1}{3z^2+3}.$$

Na prvý pohľad sme si vôbec nepomohli. Veď nerovnosť, ktorú máme dokázať teraz, vyzerá ešte zložitejšie, ako pôvodné zadanie. V takomto prípade sa musíme zamerať na menší prípad. V nerovnosti vystupujú tri členy, takže sa pozrieme, ako by to vyzeralo pre jeden z nich. Preto chceme viac zistiť o nerovnosti

$$\frac{1}{2x^3+4}<\frac{1}{3x^2+3}.$$

Keďže $x>0$, menovatele výrazov sú kladné, a preto sa môžeme bez obáv zbaviť zlomkov a ďalej upraviť

$$\begin{aligned}3x^2+3 &< 2x^3+4,\\ 3x^2 &< 2x^3+1,\\ 0 &< 2x^3+1-3x^2,\\ 0 &< (2x+1)(x-1)^2.\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je zjavne platná pre kladné x, okrem prípadu $x=1$. Avšak ak $x=1$, tak v zadanej rovnosti by

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Navyše v tejto rovnosti sú všetky zlomky kladné, takže ak by bol niektorý zo zlomkov rovný $1/2$, tak by rovnosť neplatila. Vráťme sa späť k nerovnosti $0<(2x+1)(x-1)^2$ a postupujme úpravami opačným smerom. Ak si uvedomíme, že sme robili iba ekvivalentné úpravy, dokázali sme vlastne nerovnosť

$$\frac{1}{2x^3+4}<\frac{1}{3x^2+3}.$$

Táto nerovnosť však platí ako pre x, tak aj pre y a z, preto sčítaním nerovností

$$\frac{1}{2x^3+4}<\frac{1}{3x^2+3},\quad \frac{1}{2y^3+4}<\frac{1}{3y^2+3}a\quad \frac{1}{2z^3+4}<\frac{1}{3z^2+3}$$

dostávame požadovanú nerovnosť.

Úloha č. 10: *Na reálnej číselnej osi máme daných n uzavretých intervalov, pričom $n\geq 2$. Pre prirodzené číslo k platí $2\leq k\leq n$. Medzi každými k intervalmi (z daných n intervalov) vieme nájsť dva s neprázdnym prienikom. Dokážte, že vieme zvoliť $k-1$ reálnych čísel tak, aby každý z daných n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel.*

Riešenie: (opravoval JeFo)

Tento príklad sa dal vyriešiť viacerými peknými spôsobmi. My si ukážeme riešenie pomocou matematickej indukcie (iný pekný postup môžete nájsť vo fóre k tomuto príkladu). Predpokladajme, že $k\geq 2$ je pevne dané a matematickú indukciu použijeme na n ($n\geq k$). Poďme na to.

1° Prvý indukčný krok je teraz (netradične) ukázať platnosť tvrdenia pre $n=k$. Vtedy z predpokladu vieme, že aspoň dva z n intervalov musia mať neprázdny prienik. Vyberme jedno číslo z tohoto prieniku a ostatných $n-2$ čísiel vyberme po jednom zo zvyšných $n-2$ intervalov. Vybrali sme $1+n-2=k-1$ reálnych čísel, ktoré zrejme spĺňajú podmienku zo zadania.

2° Teraz predpokladáme $n>k$ a máme n intervalov, ktoré spĺňajú dané podmienky. Spomedzi týchto n intervalov vyberme ten, ktorý má najmenšie minimum (budeme ho označovať okrúhlymi zátvorkami ()) a spomedzi zvyšných $n-1$ opäť vyberme taký, ktorý má najmenšie minimum (budeme ho označovať hranatými zátvorkami []). Tieto dva intervaly môžu ležať spoločne v nasledujúcich pozíciách:

a)	([ ])	Interval [] je celý vnútri intervalu ().
b)	([ )]	Intervaly [] a () majú spoločný prienik, ale nenastáva možnosť 1.
c)	( ) [ ]	Intervaly [] a () nemajú spoločný prienik.

V prípade a) najprv zabudneme na interval (). Pre zvyšných $n-1$ intervalov vieme podľa indukčného predpokladu zvoliť $k-1$ čísel tak, aby každý z daných n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel. Keď si teraz vezmeme všetkých n intervalov, vidíme, že interval () musí obsahovať to isté číslo ako interval [], čím je prípad a) vyriešený.

V prípade b) si najprv nevšímame interval [] a opäť budeme vedieť použiť indukčný predpoklad (platnosť tvrdenia pre $n-1$). Keď si vezmeme všetkých n intervalov a náhodou sa stane, že najmenšie vybrané číslo, ktoré je určite v intervale (), nepatrí do intervalu [], tak ho beztrestne nahradíme číslom z prieniku intervalov () a [].

Ak nastane tretia možnosť, tak interval () preskočíme a celú úvahu zopakujeme. Zo zvyšných $n-1$ intervalov vyberieme dva, ktoré majú najmenšie možné minimá a pre ne môžu opäť nastať prípady a), b), c). Prípady a) a b) už však máme vyriešené, preto nastane problém ak opäť nastane prípad c). Keďže určite existujú dva intervaly so spoločným prienikom, tak vyraďovanie takýchto intervalov, ktoré nemajú so žiadnym iným intervalom neprázdny prienik, určite skončí a skôr či neskôr nastane možnosť a) alebo b). Vždy teda vieme zvoliť $k-1$ čísel tak, aby každý z n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel.

Komentár: Pre správne pochopenie zadania bolo dobré si zadanie viackrát prečítať a vyskúšať si to pre malé n a k. Niektorí by ste sa tým možno boli vyhli chybe, že ste zadanie pochopili tak, že podmienka platí pre všetky k súčasne (takto by to bol predsa len trochu ľahký príklad). A občas je tiež dobré hľadať aj pekné riešenie, nielen príklad narýchlo vyriešiť a poslať nám ho. Narýchlo písané riešenia sú väčšinou ťažkopádne formulované, Vám sa zle spisujú a nám horšie opravujú.

Úloha č. 11: *Prirodzené číslo b je väčšie ako jedna. Pre kladné reálne číslo a platí $1/a + 1/b > 1$. Dokážte, že nekonečná postupnosť čísel $\lfloor a\rfloor, \lfloor 2a\rfloor, \lfloor 3a\rfloor, \ldots$ obsahuje nekonečne veľa celočíselných mocnín čísla b.*
Poznámka: $\lfloor x\rfloor$ predstavuje tzv. dolnú celú časť z x, t. j. najväčšie celé číslo a s vlastnosťou $a \le x$.

Riešenie: (opravoval Mišáč)
V prvom rade si všimnime, že v zadaní máme dolné ohraničenie pre číslo a, presnejšie $a > 0$. Z rovnice v zadaní ekvivalentnými úpravami prídeme aj k hornému ohraničeniu a, a to

$$a < \frac{b}{b-1} = 1 + \frac{1}{b-1}. \tag{8}$$

Podmienky zo zadania môžeme teda preformulovať takto: Dané je prirodzené číslo b a kladné reálne číslo a, pre ktoré platí nerovnosť (8). Pustime sa do dokazovania.
Najprv sa venujme prípadu $0 < a \le 1$. Odôvodníme si, že v postupnosti $\lfloor a\rfloor, \lfloor 2a\rfloor, \lfloor 3a\rfloor, \ldots$ je každé prirodzené číslo. Nech by sa nejaké prirodzené číslo n v tejto postupnosti nenachádzalo. To znamená, že uvedená (neklesajúca) postupnosť ho „preskočí“, teda pre nejaké prirodzené čísla k a $k+1$ platia nerovnosti

$$ka < n \quad \text{a} \quad (k+1)a \ge n+1.$$

Avšak toto pre $a \le 1$ nemôže nastať. Preto postupnosť obsahuje všetky prirodzené čísla a teda aj nekonečne veľa mocnín čísla b.
Teraz uvažujme, že platí

$$1 < a < 1 + \frac{1}{b-1}.$$

Úlohu dokážeme sporom. Predpokladajme, že sa v postupnosti $\lfloor a\rfloor, \lfloor 2a\rfloor, \lfloor 3a\rfloor, \ldots$ nachádza len konečne veľa mocnín čísla b. Označme n také prirodzené číslo, že b^n a ani žiadna vyššia mocnina b sa v postupnosti už nenachádza. Potom pre nejaké po sebe idúce prirodzené čísla k a $k+1$ platia nerovnosti

$$ka < b^n \quad \text{a} \quad (k+1)a \ge b^n + 1.$$

Ak ste tak ešte neurobili, tak v tejto chvíli vrelo odporúčam kresliť si obrázok (číselnú os a znázorňovať si na nej spomínané čísla). Bude tak jednoduchšie sledovať zmysel niektorých na prvý pohľad magických výpočtov. Vráťme sa k riešeniu.
Z uvedených nerovností vyplýva, že keď k číslu ka menšiemu ako b^n pripočítame a, tak toto číslo bude aspoň b^n+1. To znamená, čísla ka a b^n nemôžu byť od seba vzdialené o viac ako $a-1$, teda

$$b^n - ka \le a - 1. \tag{9}$$

Vidíme, že číslo ka je pomerne blízko k číslu b^n. Vďaka tejto vlastnosti a podmienkam v zadaní ukážeme, že keď zoberieme číslo bka, tak toto číslo bude dosť blízko k číslu b^{n+1}. Presnejšie povedané, zdôvodníme si, že bka je najväčší násobok čísla a, ktorý je menší ako b^{n+1}. Na to nám stačí ukázať, že $0 < b^{n+1} - bka \le a$. Prvá nerovnosť je zrejmá a druhá platí, lebo

$$b^{n+1} - bka = b(b^n - ka) \le b(a-1) \le a,$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z podmienky v zadaní (platí dokonca ostrá nerovnosť).
Keďže člen b^{n+1} sa v postupnosti nenachádza, tak musí platiť

$$(bk+1)a \ge b^{n+1} + 1.$$

To ale znamená, že číslo bka musí byť dosť blízko k číslu b^{n+1}, čiže podobne ako predtým musí platiť

$$b^{n+1} - bka \leq a - 1. \tag{10}$$

Všimnime si nerovnosti (9) a (10). Dostali sme sa zo situácie pre b^n do podobnej situácie pre b^{n+1}. Takto môžeme pokračovať aj ďalej a dostaneme

$$b^{n+2} - b^2ka \leq a - 1.$$

Označme $b^n - ka = r$. Vieme, že $r > 0$. Opakovaním vyššie uvedeného postupu vo všeobecnosti dostaneme pre ľubovoľné prirodzené číslo i vzťah

$$b^{n+i} - b^i ka = b^i r \leq a - 1. \tag{11}$$

Keďže rb^i rastie exponenciálne a $b > 1$, tak pre dosť veľké i dosiahne rb^i hodnotu väčšiu ako $a - 1$. To ale nemôže nastať kvôli nerovnosti (11). Došli sme k hľadanému sporu, čím sme vyriešili pôvodnú úlohu.
Poznámka: Všimnite si, že náš postup sa dal interpretovať aj trochu inak. Ak predpokladáme, že nejaká mocnina b^n sa v postupnosti nenachádza, tak opakovaním nášho postupu dostatočný počet krát nájdeme mocninu od nej vyššiu, ktorá sa v postupnosti už nachádza. Z toho vyplýva, že sa v postupnosti nachádza nekonečne veľa mocním čísla b.

Keďže úlohy kategórie GAMA nikto neriešil, vzorové riešenia neuverejňujeme.

<u>Úloha č. 12:</u> *Na obrázku je nakreslených $2n+1$ priamok tak, že žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, žiadne dve nie sú na seba kolmé a žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Najviac koľko ostrouhlých trojuholníkov (v závislosti od n) môže byť na obrázku?*

<u>Úloha č. 13:</u> *Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná rekurentne vzťahmi*

$$a_1 = 20,$$
$$a_2 = 30,$$
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \text{ pre } n \geq 1.$$

Nájdite všetky n, pre ktoré je $1 + 5a_n a_{n+1}$ štvorcom prirodzeného čísla.

<u>Úloha č. 14:</u> *Daný je kosoštvorec $ABCD$ s vpísanou kružnicou k. Vnútri uhla BAD mimo kosoštvorca $ABCD$ leží bod P. Rovnobežka s priamkou CD prechádzajúca bodom P pretína priamku BC v bode K, rovnobežka s priamkou BC prechádzajúca bodom P pretína priamku CD v bode L. Uvažujme z bodov K a L dotyčnice ku kružnici k rôzne od priamok BC a CD. Tieto dotyčnice sa pretínajú v bode M. Dokážte, že body A, M a P ležia na priamke.*

<u>Výsledková listina</u>

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kavický Dušan	1.	GJH BA	1	9	7	9	8	8	2	4		117
2.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	2		9	8		8	9	2		112
3.	Gonda Tomáš	1.	Gamča BA	2		9	9	6			9		109
4.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2		7	8	6	8	4	3		105
5.	Petrucha Jaroslav	1.	GMet BA	2		9	9		9	5	4		95
6.	Hraška Peter	1.	Gamča BA	2		8	6	8	9		9		94
7.	Matejovičová Tatiana	1.	Gamča BA	2		5		6	8		1		90
8.	Kurdelová Alžbeta	1.	GLN BA	1	3	9	6				3		86
9.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	3					5	9	8		85
10.	Strakáčová Jana	1.	Gamča BA	2		7		7			3		81
11.	Smolík Milan	1.	Gamča BA	3			7	8	9	4	9		80
12.	Bock Michal	1.	Gamča BA	3		9	7	7	4	0			79
13.	Hledík Michal	1.	GJH BA	2		9	9	8	9	9	9	x0	78
13.	Smolík Michal	1.	Gamča BA	3			7	7	9	9	9		78
15.	Páleník Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2		6	5		8	1	1		73
16.	Smolík Martin	1.	Gamča BA	3			6	7	1	6	4		60

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
17.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	2		7	2				9		57
18.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	3						9	9		52
19.	Žitňanský Tomáš	1.	GJH BA	1									39
20.	Hadvab Peter	1.	GCSL BA	1									38
21.	Šteis Lukáš	1.	ŠPMNDG BA	2									36
22.	Jamrichová Lucia	1.	ŠPMNDG BA	2									22
23.	Krajčovič Matej	1.	GJH BA	2									19
24.	Krajčovič Michal	1.	GJH BA	2									18
25.	Štofová Gabriela	1.	ŠPMNDG BA	1									10
26.	Holíková Zuzana	1.	GCSL BA	2									3

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Glončák Vladan	1.	GĽŠ TN	1	2	6	9	6	4				94
2.	Kútny Miloš	1.	GPár NR	1	9	9	6		4	1	1		91
3.	Cibulka Samuel	1.	GAV LV	2		4	6	7	4		1		85
4.	Očkay Štefan	1.	GPár NR	1	3	9	6	0	0	1	2		80
5.	Tunová Anna	1.	GPár NR	2		7	4		4	0	1		68
6.	Horváth Matúš	1.	GPár NR	1	4	9	4	0	4	0	1		65
7.	Kováčová Milada	1.	GCM NR	2		9							57
7.	Sitkey Matúš	3.	GGol NR	3			6		7	1	1		57
9.	Puček Samuel	1.	GĽŠ TN	1	3								40
10.	Choongeun Park	1.	SJG KN	1									22
11.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	3									18
12.	Ištván Mário	1.	GKom PE	1									16

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Macko Vladimír	1.	GĽŠ ZV	2		9	6	7	9	9	9		121
2.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	2		4	6	8	9	2	2		109
3.	Nociarová Jela	1.	GBST LC	2		9	6		4		8		94
4.	Benešová Katarína	1.	GAS BB	2		5	6		5	2	3		91
5.	Surovčík Juraj	1.	GPOH DK	2		6	5		9	9	1		83
6.	Santer Martin	1.	GMH Trstená	2		9	9	8			3		75
7.	Šubjak Ján	1.	GPOH DK	2		6	6		4		2		71
8.	Bahyl Jakub	1.	GVar ZA	1	9	7	6				1		70
9.	Hrašková Veronika	1.	GBST LC	1									30
10.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3									9
11.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3					5	0			5
12.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	2									4

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	3			9	9	9	9	9		135
2.	Ficková Klára	2.	GPoš KE	3			9	8	9	1	9		119
2.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2		7	7	9	9	2	2		119
4.	Hanzely Filip	1.	GAP SB	2		7	6		4	6	2		105
5.	Semanišinová Denisa	1.	GAlej KE	3			9	4	3	0			85
6.	Pistráková Alexandra	1.	GPoš KE	2		7	4						48

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
7.	Tokárová Natália	1.	GJAR PO	2		7	6		2	1			45
8.	Hlaváčik Matúš	1.	GAlej KE	3									35
9.	Koľveková Veronika	1.	GPoš KE	2									26
10.	Motešický Ján	2.	GDax VT	2									12

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	**$\sum$**
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	3	1	9	9	9	9	9	9	9		45	135
2.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	12	9			9	9	9	9	9		45	134
3.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	8	4			9	9	8	9	9		44	132
4.	Horňák Marián	2.	GPár NR	5	2		9	9	9	9		9		45	131
5.	Kossaczký Pavol	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	9		9		45	130
6.	Hagara Michal	4.	GJH BA	11	9			9	9	8	9	9		44	129
7.	Phuong Mariana	3.	GJH BA	7	2		9	9	9	9	9			45	127
8.	Csiba Dominik	3.	ŠPMNDG BA	8	3			8	9	9	9	1		36	121
8.	Chlebíková Andrea	3.	Brighton UK	7	3			9	9	9	9	4		40	121
10.	Balog Matej	3.	Gamča BA	6	1		9	9	9	8				35	115
11.	Hamaš Matej	3.	Gamča BA	4	0	4	9	9	7	8				37	111
12.	Barančok Peter	3.	Gamča BA	4	0	9	6	9		6				30	109
12.	Galovičová Soňa	2.	GVO ZA	6	1		9	9		9		1		28	109
12.	Le Tuan Anh	3.	Gamča BA	9	3			6	8	5	9	1		29	109
12.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	7	2		9	9	9	8				35	109
16.	Karásková Natália	3.	GJH BA	10	8			9	9	9				27	108
16.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	3	0	5	9	8	6	8				36	108
16.	Szabados Viktor	3.	Gamča BA	9	3			9	8	5	9	2		33	108
19.	Klembarová Barbora	2.	GKuk PP	5	1		9	9	9	8	1			36	107
19.	Kopf Michal	2.	Opava ČR	5	1		9	9	9	6	8			41	107
21.	Kozák Andrej	3.	Gamča BA	9	3			9	9	9	9	1		37	104
22.	Dupej Peter	2.	GJAR PO	4	0	4	9	2	9	8		1		32	102
22.	Hlavatá Martina	3.	Gamča BA	8	2		6	4	7	7				24	102
24.	Konečný Jakub	4.	Gamča BA	12	8			9	9		9	8		35	101
25.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	3	1		9	9	9	8	9			44	100
26.	Tóth Michal	2.	GJH BA	5	1		9	3	9	8	7	1		36	99
27.	Kováč Ondrej	3.	GCM NR	8	3			9	8	9	9			35	98
28.	Sabatovičová Linda	3.	GJH BA	7	1		9	9	9	7				34	97
29.	Midlik Adam	4.	GJAR PO	9	4			9	9	7	9			34	96
30.	Jasenčáková Katarína	2.	GVO ZA	6	1		9	4	9	8		2		32	92
31.	Guričan Pavol	3.	GJH BA	8	3			4	9	9				22	91
31.	Žídek Augustin	2.	Frýdlant ČR	5	1		6	9	2	8		1		26	91
33.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2	0	9	2	2			9	0		22	90
34.	Šormanová Mária	3.	ŠPMNDG BA	6	1		9	9	9					27	88
35.	Faguľová Kristína	2.	GPoš KE	6	1		9	3	7	7	4	0		30	87
35.	Marečáková Barbora	2.	GKuk PP	5	1		8	1	6	8	4			27	87
37.	Ficková Klára	2.	GPoš KE	3	0	9	1	9						19	85
37.	Floriánová Michaela	4.	GJH BA	8	0		9	9	1	4				23	85
37.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	2	0	9	2	2	2		5			20	85
37.	Langer Tomáš	2.	GJH BA	5	1		9	2	7	8	2			28	85
37.	Tóth Róbert	4.	GAlej KE	6	1									0	85
42.	Baxová Zuzana	2.	GĽŠ TN	5	1		9	2	9	2				22	84
43.	Belanová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	4	7					20	80

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
43.	Peitl Tomáš	4.	ŠPMNDG BA	10	4			5	9	9	9			32	80
43.	Večerík Matej	3.	ŠPMNDG BA	8	3		1	9	8		9			26	80
46.	Faršang Štefan	3.	SJG KN	6	2		9	9	7					25	73
47.	Švančara Patrik	2.	GĽŠ TN	4	0	5	9							14	71
48.	Bogár Ján	4.	GĽŠ TN	10	3			4	0					4	70
48.	Macháč Juraj	3.	GJH BA	5	0	2	6	1						9	70
50.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	2	0	8	9	2						19	68
51.	Kosec Peter	2.	GĽŠ TN	5	1									0	67
52.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2	0	8	4	3	2					17	64
53.	Koprda Pavol	2.	GAM TT	5	1									0	61
54.	Daniláková Monika	2.	GJAR PO	4	0									0	58
55.	Hozza Ján	3.	GJH BA	7	5									0	54
56.	Vlček Andrej	2.	EvSŠ LM	5	1									0	53
57.	Štyráková Kamila	4.	GPOH DK	10	3									0	49
58.	Halajová Barbora	2.	GVO ZA	6	1									0	47
58.	Kubincová Petra	3.	ŠPMNDG BA	7	1									0	47
60.	Gonda Tomáš	1.	Gamča BA	2	0			9						9	42
61.	Anderle Michal	3.	GBST LC	5	0									0	40
61.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	0									0	40
63.	Kmeťová Katarína	2.	GKuk PP	5	1									0	38
64.	Santrová Adriana	2.	GMH Trstená	4	0	4	1	2						7	32
65.	Jakubík Ján	3.	SPŠE PN	6	0	3	1	2						6	29
65.	Vlachynská Petra	2.	GBil BA	4	0									0	29
67.	Sládek Filip	4.	GAB NO	8	8									0	28
68.	Kopcová Monika	3.	Gamča BA	4	0									0	27
69.	Masár Juraj	3.	GJH BA	6	1									0	25
69.	Rigdová Emília	4.	GKuk PP	7	1									0	25
71.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	4	0									0	21
71.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	3	0									0	21
73.	Šimková Mária	4.	GJF Šaľa	4	0									0	17
74.	Búlik Martin	3.	GJGT BB	4	0	9	0	1						10	12
75.	Makuch Matej	3.	GJGT BB	4	0	8	0	1						9	11
76.	Lehotský Juraj	3.	GJGT BB	4	0	9		1						10	10
76.	Leitner Matej	3.	GJGT BB	4	0	9		1						10	10
76.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3	0									0	10
79.	Kaštan Marek	3.	GJGT BB	4	0	8	0	1						9	9
79.	Majdiš Mojmír	4.	GPOH DK	7	1									0	9
81.	Dragošek Joel	3.	GJGT BB	4	0	6	0	1						7	7
82.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3	0	5	0							5	6
83.	Černák Adam	3.	GJGT BB	4	0	4	0	1						5	5
83.	Rešutík Peter	3.	GJGT BB	4	0	4	0	1						5	5
85.	Koroncziová Dominika	3.	GJGT BB	4	0	3	0	1						4	4
85.	Pločeková Andrea	3.	GPdC PN	4	0									0	4
87.	Lami Vincent	4.	SJG KN	6	3									0	3
88.	Makk Jakub	3.	GJGT BB	4	0		0	1						1	1
89.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	2	0									0	0

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	Meno	Roč.	Škola	10	11	12	13	14	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	9	9					146
2.	Hagara Michal	4.	GJH BA	9	9					126

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
3.	Horňák Marián	2.	GPár NR		9					86
4.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	9	9					126
5.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená							53
6.	Sládek Filip	4.	GAB NO							176
7.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	9	0					26

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.