Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2009/2010

Úloha č. 1: *V púšti je nakreslená kružnica, ktorej stred nie je vyznačený. Beduín má trojuholníkové pravítko s ryskou, na ktorom nie sú určené dieliky. Je dosť dlhé na to, aby dokázal spojiť ľubovoľné dva body na obvode kružnice. Navyše má paličku, ktorou vie kresliť do piesku. Ako vie nájsť pomocou týchto vecí presný stred kružnice?*

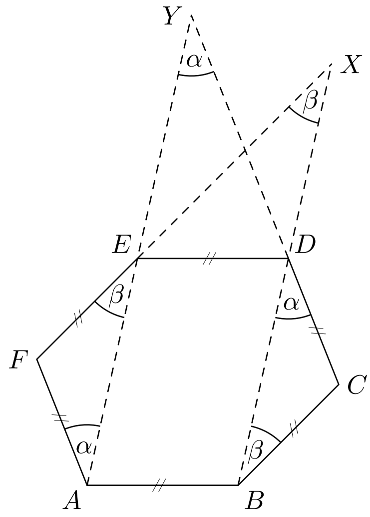
Riešenie: (opravovala Kika)
Čo všetko máme k dispozícii? Kružnicu, pravítko s ryskou a paličku. Čo sa s tým dá robiť? Kresliť si do piesku úsečky a kolmice na tieto úsečky. Hľadáme stred kružnice. Keďže môžeme kresliť len úsečky, stred danej kružnice zrejme nájdeme tak, že si nakreslíme niekoľko správnych úsečiek a kde sa pretnú, tam je stred. Už len treba vybrať tie správne úsečky. :)
Stred kružnice má jednu milú vlastnosť, a to takú, že všetky priamky, ktoré ním prechádzajú, na kružnici vytínajú priemer. A tak isto každý priemer prechádza stredom. Takže ak sa nám podarí nakresliť niekoľko rôznych priemerov, napríklad dva, ich priesečníkom nemôže byť nič iné, ako stred našej kružnice.
Pri hľadaní priemeru nám môže pomôcť poznatok, že ak obdĺžniku opíšeme kružnicu, jeho uhlopriečky tvoria priemer kružnice a stred leží na priesečníku uhlopriečok. (Premyslite si.) Takže našim cieľom je narysovať obdĺžnik, ktorý by bol do kružnice vpísaný. (Kružnica mu bude potom opísaná.) Spravíme to tak, že najprv do kružnice nakreslíme tetivu. To bude prvá strana nášho obdĺžnika. V miestach, kde sa tetiva dotýka kružnice, nakreslíme kolmice na tetivu. Tak sme získali dva pravé uhly a dve ďalšie strany obdĺžnika. Teraz opäť spravíme kolmicu na novú stranu v mieste, kde sa dotkla kružnice. Takto sa nám podarí nakresliť celý obdĺžnik.
Teraz mu stačí už len dorobiť uhlopriečky a stred kružnice máme priamo pred očami. :)

Komentár: Treba si dať pozor aby prvá tetiva nebola priemer kružnice. Potom by sa obdĺžnik nedal zostrojiť.

Úloha č. 2: *Jašterička nakreslila do piesku konvexný šesťuholník $ABCDEF$. Platí v ňom, že strana AB je rovnobežná so stranou DE, strana BC je rovnobežná s EF a CD je rovnobežná s FA. Dokážte, že ak $|AB| = |DE|$, tak potom $|BC| = |EF|$ a $|CD| = |FA|$.*

Riešenie: (opravovala Katka :P)
Mnohí z vás sa pokúsili vyriešiť úlohu tak, že si narysovali nejaký konkrétny šesťuholník a potom o ňom niečo zistili alebo odmerali. Takéto riešenie nie je správne, lebo platí len pre jeden špeciálny prípad. Úlohou bolo dokázať, že rovnosti strán platia pre ľubovoľný konvexný šesťuholník, ktorý spĺňa podmienky zadania. Ukážeme si ako mohlo vyzerať riešenie:
Majme ľubovoľný konvexný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom sú splnené podmienky zo zadania. Rovnosť dĺžok strán $|FE| = |BC|$ a $|AF| = |CD|$ dokážeme cez zhodnosť trojuholníkov AEF a DBC podľa vety *usu*. Ak budú tieto trojuholníky zhodné, tak aj požadované strany budú mať rovnakú dĺžku.

Spojíme úsečkami dvojice bodov AE a BD a získame štvoruholník $ABDE$. Vieme o ňom, že má strany AB a DE rovnobežné, preto je to určite lichobežník. Čo viac, tie dve strany sú aj rovnako dlhé, takže je to dokonca rovnobežník. Z toho vyplýva, že AE a BD sú rovnobežné a rovnako dlhé. Ďalej si predĺžime úsečky BD a FE, ktoré sa nám pretnú v bode X. Všimneme si, že $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBX| = |\sphericalangle BXF|$, lebo sú striedavé. (Vyplýva to z rovnobežnosti BC a FE.) Z rovnobežnosti BD a AE dostaneme, že $|\sphericalangle FEA| = |\sphericalangle FXB|$, lebo sú súhlasné. Takže aj $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle FEA|$. Ak predĺžime priamky CD a AE a ich priesečník označíme Y, vieme rovnakým spôsobom zistiť, že $|\sphericalangle FAE| = |\sphericalangle CDB|$. (Skúste si sami.)
Potom už vidíme, že trojuholníky AEF a DBC majú jednu zhodnú stranu a k nej prislúchajúce uhly, takže sú nielen podobné, ale dokonca zhodné a preto platí $|AF| = |CD|$ a $|FE| = |BC|$.



Iné riešenie:
Po zistení, že $ABDE$ je rovnobežník posunuli niektorí z vás bod A do bodu B a bod E do bodu D. Mohli tak urobiť preto, lebo posunutie zachováva rovnobežnosť aj dĺžky. Potom si všimli, že po „vyhodení“ rovnobežníka $ABDE$ im zostal tiež rovnobežník $CDFB$, ktorý je predelený na dva zhodné trojuholníky uhlopriečkou BD. No a keďže je $CDFB$ rovnobežník, tak bude mať protiľahlé strany rovnobežné a rovnako dlhé. Aj takto môžeme ukázať, že $|AF| = |CD|$ a $|FE| = |BC|$.

Úloha č. 3: *Škorpióny si stavajú príbytky v tvare kocky. Izby v nich sú tiež tvaru kociek (nie nutne rovnakých) a je nimi vyplnený celý priestor príbytku. Každý rok si postavia nový príbytok, ktorý má toľko izieb, aký je práve rok. Dokážte, že v tomto roku si škorpióny vedia postaviť príbytok. (S 2009 izbami.) Viete navyše nájsť taký rok v budúcnosti, v ktorom sa im to nemôže podariť?*

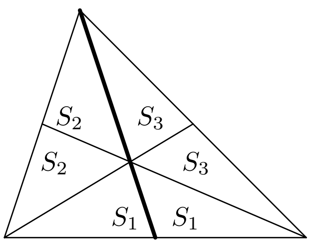
Riešenie: (opravoval Filip)
Na vysokej škole nás učia chytať leva. Chytia sa dva levy a potom jedného pustíme. Takto budeme riešiť aj túto úlohu. Vyriešime ju najskôr všeobecne a potom nájdeme riešenie pre číslo 2009.
Na začiatku máme príbytok v tvare kocky. Všimnime si, že hocijakú kocku môžeme rozdeliť troma rezmi na osem kociek s polovičnou hranou. Počet kociek sa takto zväčší o sedem. (Teraz ich je osem a predtým bola jedna.) Čo keď jednu z týchto menších kociek opäť rozdelíme na osem nových? Opäť budeme mať o ďalších sedem kociek viac. Toto môžeme opakovať do nekonečna. Vidíme, že ak máme nejaký počet izieb, tak takýmto delením vieme spraviť aj počet izieb o sedem väčší, o štrnásť väčší, atď.
To znamená, že ak sa nám podarí vytvoriť sedem za sebou idúcich čísel, tak by sme hore uvedeným postupom (pridávaním sedmičky) vedeli urobiť aj ôsme (prvé z nich plus 7), deviate (druhé plus 7) a podobne aj všetky nasledujúce čísla.
Vieme nájsť takých sedem čísel? Na začiatku máme jednu izbu. Čiže vieme dostať aj počty izieb 8, 15, 22, ... Všimnime si, že v ľubovoľnej sedmici za sebou idúcich čísel sa nachádza práve jedno z týchto čísel. Matematickejšie povedané, vieme vytvoriť všetky čísla, ktoré dávajú po delení siedmimi zvyšok jedna.
Využime teraz delenie kocky na 27 kociek. (Rozrežme ju na 27 kociek s tretinovými hranami.) 27 kociek dáva po delení siedmimi zvyšok šesť. Teraz môžeme pokračovať delením na osem kociek a dostávame tak čísla 27, $27 + 7$, $27 + 14$, atď., čiže všetky čísla so zvyškom šesť po delení siedmimi.
Keď ich pripojíme k tým, čo dávajú zvyšok jedna, tak vidíme, že už ich je viac. V každej sedmici za sebou idúcich čísel je jedno, ktoré dáva po delení siedmimi zvyšok jedna a jedno dávajúce zvyšok šesť. To by nám mohlo napovedať, ako počítať ďalej. Čísla po delení siedmimi dávajú zvyšky 0 až 6. To znamená, že keby sme vedeli vytvoriť všetky čísla, ktoré dajú zvyšok 0, všetky čísla, ktoré dajú zvyšok 1 až po zvyšok 6, tak by sme vedeli vytvoriť všetky čísla!
Ako dostať ostatné zvyšky? Rozdeľme pôvodnú kocku na 27 menších. Potom rozdeľme ďalšiu z týchto 27 kociek na 27 menších. (Pribudne tak 26 kociek.) Dokopy ich preto máme $27 + 26 = 53$. Po delení číslom sedem to dá zvyšok štyri. Opäť môžeme dorobiť pridávaním sedmičky všetky väčšie čísla dávajúce zvyšok štyri. A pokračujme. Rozdeľme ďalšiu kocku z týchto 53 na 27 menších, dostaneme $53 + 26 = 79$ kociek. To to dáva po delení siedmimi zvyšok dva. Znova rozdelíme nejakú kocku na 27 ďalších. Potom ich bude $79 + 26 = 105$, čo má po delení siedmimi zvýšok nula. Zopakujme to ešte raz $105 + 26 = 131$, čo má po delení siedmimi zvyšok päť. A naposledy $131 + 26 = 157$, čo má po delení siedmimi zvyšok tri. Takto sa nám podarilo získať všetky zvyšky po delení siedmimi.

To znamená, že vieme vytvoriť všetky čísla. Ako? Ak máme zadaný počet izieb, tak najskôr zistíme, aký zvyšok dáva po delení siedmimi. Potom stačí deliť kocku na 27 častí toľkokrát, kým nebude dávať rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako počet izieb. Nakoniec delíme vhodný počet kociek na osem častí (pridávame sedem kociek a zvyšok sa nemení) až kým nedosiahneme potrebný počet izieb. To znamená, že vieme rozdeliť príbytok na ľubovoľný počet izieb väčší ako 2009 a žiadny taký rok, pre ktorý by to nešlo neexistuje.
Poďme teraz chytiť leva. Po delení siedmimi dáva 2009 zvyšok nula. To znamená, že najprv urobíme 4 delenia na 27 častí, čím dostaneme 105 izieb a zvyšok nula po delení siedmimi. Potom už len dorobíme $(2009-105)/7=272$ delení na osem menších kociek. Spolu máme $105+7\cdot 272=2009$ izieb. Vidíme, že chytiť jedného leva je ľahké.

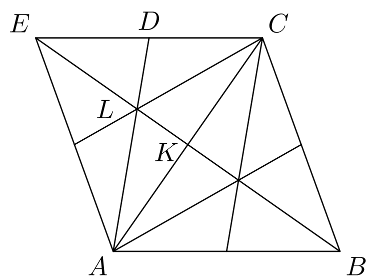
Komentár: Uvedený postup platí len pre čísla väčšie ako 157, pretože až pri tomto čísle sme urobili prvú kompletnú sedmicu. Netvrdíme, že neexistuje lepší spôsob. No našli sme spôsob, ktorým vieme zostrojiť domček o veľkosti 2009 izieb a aj všetky väčšie.

Úloha č. 4: *Lichobežník $ABCD$ má obsah 1 cm^2. Navyše strana AB je rovnobežná so stranou CD a platí, že $|AB|=2|CD|$. Stred uhlopriečky AC označíme K. Priesečník AD a BK označíme L. Nájdite obsah štvoruholníka $CDLK$.*

Riešenie: (opravovali Katka J., Katka K.)
Na určenie obsahu štvoruholníka $LKCD$ bude praktické rozdeliť si ho na trojuholníky LKC a LCD. Aby sme dokázali porovnať obsah nášho štvoruholníka s obsahom lichobežníka, rozdelíme na trojuholníky rovno celý lichobežník. Najlepšie tak, aby všetky trojuholníky mali rovnaký obsah. Ako na to?
Často je v geometrických úlohách užitočné dokresliť si do obrázka nejakú čiaru, ktorá nám celé riešenie uľahčí. V našom prípade skúsime predĺžiť úsečku BL. Jej priesečník s priamkou CD označíme E. Vieme, že $|AK|=|KC|$ a $AB \parallel CE$. Z toho vidno, že úsečka CE je obrazom úsečky AB v stredovej súmernosti podľa bodu K. (Premyslite si.) Potom je $|AB|=|CE|$, no a keďže $|DC|=(1/2)\cdot|AB|$, tak platí $|CD|=|DE|$. Štvoruholník $ABCE$ je rovnobežník, lebo $AB \parallel CE$ a $|AB|=|CE|$. Uhlopriečky rovnobežníka sa rozpoľujú, a preto platí $|BK|=|KE|$.
Všimnime si teraz trojuholníky ECA a ABC. Vďaka tomu, že $ABCE$ je rovnobežník, vieme o nich povedať, že sú zhodné. (Napr. podľa vety *sss*.) Môžeme predpokladať, že ak sa nám podarí na rovnaké trojuholníky rozdeliť trojuholník ECA, podarí sa nám to aj s ABC.



Poďme hľadať to správne delenie. Štvoruholník $LKCD$ sme si rozdelili na dva trojuholníky – LCD a LKC. Vieme niečo povedať o bode L? Vďaka tomu, že sme si doplnili tú správnu čiaru, si môžeme všimnúť, že bod L je priesečníkom dvoch ťažníc trojuholníka ACE – úsečiek AD a EK. Bod L je teda ťažisko trojuholníka ACE. Keď si doplníme aj tretiu ťažnicu, trojuholník ACE bude rozdelený na šesť rovnakých častí. Prečo? Skúste si to dokázať z obrázku naľavo.

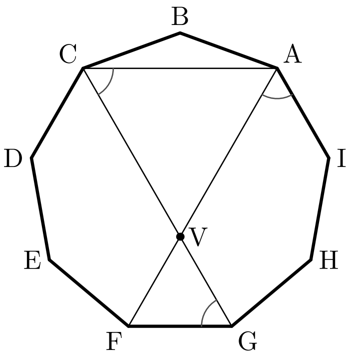


Podobne si ťažnicami rozdelíme aj trojuholník ABC. (Viď obrázok vpravo.) Rovnobežník $ABCE$ je teraz tvorený dvanástimi malými trojuholníkmi s rovnakým obsahom, lichobežník $ABCD$ sa skladá z deviatich takýchto trojuholníkov. Obsah štvoruholníka $LKCD$, ktorý nás zaujíma, tvoria dva z malých trojuholníkov (LKC a LCD). Pomer obsahov $LKCD$ a $ABCD$ je 2/9, a teda hľadaný obsah štvoruholníka $LKCD$ je 2/9 cm^2.

Komentár: Nielen v geometrický úlohách treba dokázať každé tvrdenie, ktoré v riešení použijete. Okrem toho je veľmi dôležité, ak v riešení použijete nejaké nové označenie (napríklad označenie priesečníka dvoch priamok) popísať aj slovne o označenie čoho sa vlastne jedná. Určite nestačí označiť príslušný bod v obrázku. No a nakoniec - súčasťou riešenia každej geometrickej úlohy by mal byť v každom prípade primerane veľký a prehľadný obrázok!

Úloha č. 5: *Dokážte, že v pravidelnom deväťuholníku $ABCDEFGHI$ platí, že $|AF|=|AB|+|AC|$.*

Riešenie: (opravoval Rado a OndroM)
Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Ukážeme si pekné riešenie kde stačilo dopísať niekoľko uhlov do obrázka. No vyskytli sa aj riešenia využívajúce goniometrické funkcie sínus a kosínus. O týchto riešeniach si povieme niečo v poznámke na konci vzoráku.



Pravidelný 9-uholník má všetky strany rovnakej dĺžky. Platí $|AB| = |BC| = \cdots = |IA|$. Vďaka tomu môžeme v rovnosti zo zadania nahradiť $|AB|$ dĺžkou hociktorej inej strany. Označme priesečník úsečiek AF a CG ako V. Na pekne nakreslenom obrázku vidno, že trojuholníky ACV a FGV by mohli byť rovnostranné. Keby by sa nám to podarilo dokázať, tak potom by platilo $|AV| = |AC|$ a $|VF| = |FG|$. A preto aj $|VF| = |AB|$. Potom už ľahko vidno, že $|AF| = |AV| + |VF| = |AC| + |AB|$. To je presne to tvrdenie, ktoré chceme dokázať. Stačí nám už len dokázať, že tie trojuholníky sú rovnostranné.

Ľahko sa dá dopočítať, že veľkosť uhla pri ľubovoľnom vrchole v pravidelnom 9-uholníku je 140°. V 5-uholníku $AFGHI$ je súčet vnútorných uhlov 540°. O uhloch pri vrcholoch G, H a I vieme, že ich veľkosť je 140°. Vďaka symetrii sú uhly GFA a IAF rovnaké. Preto $|\sphericalangle GFA| = |\sphericalangle IAF| = (540° - 3 \cdot 140°)/2 = 60°$. Poďme teraz vyrátať veľkosť uhla BAC. Platí $|\sphericalangle BAC| = (180° - |\sphericalangle ABC|)/2 = 20°$, lebo trojuholník ABC je rovnoramenný. Teraz už vieme dopočítať veľkosť uhla FAC, keďže poznáme veľkosť uhlov IAB, BAC a IAF. Uhol FAC bude rovný $140° - 60° - 20°$ a to je 60°.

V trojuholníku ACV je veľkosť uhla pri vrchole A rovná 60°. Rovnakým spôsobom, z päťuholníka $CDEFG$ vieme dopočítať, že veľkosť uhla pri vrchole C bude tiež 60°. Veľkosť uhla AVC je potom $180° - |\sphericalangle ACV| - |\sphericalangle VAC| = 60°$. Trojuholník ACV je teda rovnostranný.

Pri skúmaní 5-uholníka $AFGHI$ sme zistili veľkosť uhla GFA ($|\sphericalangle GFA| = 60°$). No v trojuholníku FGV vieme určiť aj veľkosť uhla FVG - je totiž vrcholovým uhlom k uhlu AVC ($|\sphericalangle GVF| = |\sphericalangle AVC| = 60°$). Keďže v trojuholníku FGV sú dva uhly rovné 60°, tretí bude tiež 60°. Trojuholník FGV je tiež rovnostranný. Takže sme ukázali, že trojuholníky ACV a FGV sú rovnoramenné a teda $|AF| = |AV| + |VF| = |AC| + |AB|$. Čo sme chceli dokázať.

Poznámka: Ako sme spomenuli v úvode, táto úloha sa dala vyriešiť aj pomocou goniometrických funkcií. Stačí si vyjadriť dĺžky úsečiek $|AB|, |AC|$ a $|AF|$. Keď sa nikde nepomýlime dostaneme sa ku rovnosti

$$\sin 20° + \sin 40° = \sin 80°.$$

Táto rovnica je ekvivalentná s tou, ktorá je v zadaní úlohy. Mnohí z vás si na kalkulačke vyjadrili sínusy a napísali niečo typu $0.9848\ldots \doteq 0.985$ a prehlásili úlohu za vyriešenú. Na takomto riešení je zle to, že kalkulačka nedokáže pracovať presne s iracionálnymi číslami a všetko zaokrúhľuje. Čo ak práve to vaše riešenie zaokrúhli tak že sa to bude rovnať, no v skutočnosti to budú rozdielne čísla? Na overenie výsledku, alebo hypotézy je kalkulačka dobrá vec, no na dôkaz, ktorému nie je čo vytknúť nestačí. Preto sme chceli, aby ste poriadne ukázali, prečo sa tie sínusy rovnajú.

Úloha č. 6: *Rovnoramenný trojuholník DEF má základňu EF kratšiu ako rameno. Na polpriamke FE leží bod K taký, že $|DF| = |FK|$ a na polpriamke EF leží bod L taký, že $|DE| = |EL|$. Ukážte, že platí $|KD|^2 = |DF| \cdot |KL|$.*

Riešenie: (opravovala Ika a Bebe)

Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Ukážeme si riešenie, v ktorom bude treba dokresliť jednu čiaru a dvakrát použiť Pytagorovu vetu. Popri čítaní vzorového riešenia si určite kreslite obrázok.

V trojuholníku DEF spustíme výšku z vrcholu D na stranu EF. (Dokreslenie výšky do obrázku je častý trik pri riešení geometrických úloh. Oplatí sa ho preto niekedy vyskúšať.) Pätu tejto výšky – bod, kde sa výška stretne so stranou – si označme P. Zo zadania vieme, že trojuholník DEF je rovnoramenný a EF je jeho základňa. Preto P bude v strede strany EF. Označme si a ako vzdialenosť $|EP| = |PF|$. Dĺžku ramena v trojuholníku DEF si označme $b = |DE| = |DF|$. Z Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku DEP vieme

$$|DP|^2 = |DE|^2 - |EP|^2 = b^2 - a^2.$$

Zo zadania ďalej vieme, že $|DE| = |EL|$ a $|DF| = |FK|$. Z toho, že je trojuholník DEF rovnoramenný, potom vyplýva $|EL| = |DE| = |DF| = |FK|$. Takže $|KP| = |KF| - |PF|$ vieme napísať ako $|KP| = |DF| - |PF| = b - a$. Znovu použijeme Pytagorovu vetu, tentokrát v pravouhlom trojuholníku KPD. (Pravý uhol je KPD, lebo je to ten istý uhol ako uhol EPD, čo je uhol medzi stranou a výškou na ňu.)

$$\begin{aligned}|KD|^2 = |KP|^2 + |DP|^2 &= (b-a)^2 + (b^2 - a^2)\\ &= b^2 - 2ab + a^2 + b^2 - a^2\\ &= 2b^2 - 2ab\\ &= b(2b-2a).\end{aligned}$$

Našou úlohou je dokázať rovnosť $|KD|^2 = |DF| \cdot |KL|$, preto sa budeme snažiť ukázať, že $|DF| \cdot |KL|$ vieme vyjadriť ako $b(2b-2a)$. Keďže $|DF| = b$, stačí nám ukázať, že $|KL| = 2b - 2a$. pretože body K, E, F a L ležia na priamke, je ľahké prísť na to, že $|KL| = |KF| + |EL| - |EF|$. Využitím rovností $|KF| = |EL|$ a $2|EP| = |EF|$ dostávame

$$\begin{aligned}|KL| = |KF| + |EL| - |EF| &= 2|KF| - (|EP| + |PF|)\\ &= 2|KF| - 2|EP|\\ &= 2b - 2a.\end{aligned}$$

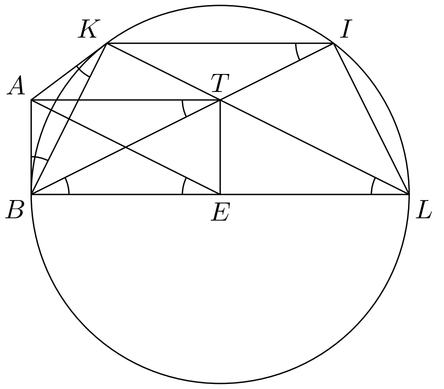
Spojením všetkých rovností získame dokazovanú rovnosť

$$|KD|^2 = b(2b-2a) = |DF| \cdot |KL|.$$

Komentár: Táto úloha sa dala riešiť aj inými spôsobmi. Mohli ste využiť podobnosť trojuholníkov, mocnosť bodu ku kružnici, alebo aj kosínusové vety.

Úloha č. 7: *Lichobežník $BLIK$ je vpísaný kružnici tak, že základňa BL je jej priemer. Označme T priesečník uhlopriečok lichobežníka a E stred úsečky BL. Ďalej skonštruujeme bod A tak, aby $BETA$ bol rovnobežník. Dokážte, že $|AB| = |AK|$.*

Riešenie: (opravoval Igor a Hanka)



Veľmi nás potešilo, že ste poslali mnoho rôznych riešení. Vybrali sme dve z nich. Prvé môže pôsobiť zložitejšie, ukazuje však cieľavedomý postup od prvého prečítania príkladu až k jeho úspešnému vyriešeniu. Druhé vyžaduje dobrú myšlienku na začiatku a potom už všetko ide veľmi jednoducho. Ceruzku do ruky, papier na stôl a kreslite spolu s nami.

Prvé riešenie: Lichobežník $BLIK$ je vpísaný do kružnice k tak, že BL je jej priemer. Keď si to nakreslíme a trochu sa zamyslíme, zistíme, že lichobežník $BLIK$ musí byť rovnoramenný. Prečo? Dokázať to môžete viacerými spôsobmi (skúste nájsť iný dôkaz ako uvedieme), my sme vybrali nasledovné zdôvodnenie. Označme $|\sphericalangle IBL| = \alpha$. Potom platí $\alpha = |\sphericalangle IBL| = |\sphericalangle BIK|$, pretože tieto dva uhly sú striedavé. Taktiež $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BIK| = \alpha$, lebo tieto dva uhly sú obvodové uhly nad tetivou BK v kružnici k. Vďaka rovnosti obvodových uhlov $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle IBL|$ vieme, že sa budú rovnať dĺžky príslušných tetív, teda $|BK| = |IL|$. Ukázali sme, že $BLIK$ je rovnoramenný.

Zo zistených uhlov ľahko vyčítame, že trojuholník BLT je rovnoramenný a preto TE bude nielen jeho ťažnica, ale aj výška, čiže $BETA$ je vlastne obdĺžnik. Čo ďalej? Je fajn mať nejakú konkrétnu predstavu, kam sa chceme uberať. (Doteraz sme si len robili jasno v tom, čo na nás hneď po nakreslení vykuklo z obrázka.) Čo musíme ukázať, aby určite platilo $|AK| = |BK|$? Napríklad, môžeme ukázať, že uhly AKB a ABK sú rovnaké. Keďže máme na obrázku kružnicu, rovnobežník a lichobežník (čo značí veľa zhodných uhlov), je tento smer uvažovania na mieste. Tak poďme na to.

Platí $|\sphericalangle ABK| + |\sphericalangle KBL| = 90°$, pretože uhly obdĺžniku $BETA$ sú pravé. Akú veľkosť má uhol KBL? Trojuholník KBL je pravouhlý, pretože k je Tálesova kružnica nad priemerom BL, teda

$$|\sphericalangle KBL| = 180° - 90° - |\sphericalangle BLK| = 90° - \alpha.$$

Potom $|\sphericalangle ABK| = 90° - |\sphericalangle KBL| = \alpha$. Teraz stačí ukázať, že aj uhol AKB bude rovný α.

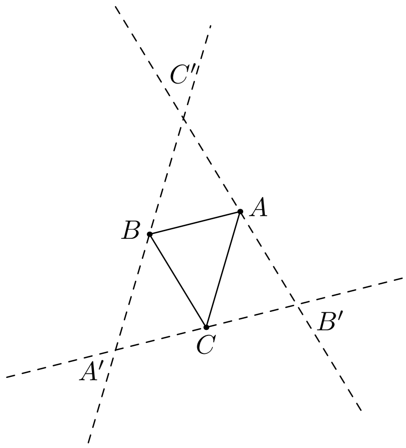
Skúsme ďalej dopĺňať uhly v obrázku a hlavne zisťovať, ktoré z nich majú veľkosť α. Keďže $BETA$ je obdĺžnik, bude mať nielen uhol TBE, ale aj uhol ATB veľkosť α. Chceli by sme, aby aj uhol AKB mal veľkosť α. K tomu nám stačí ukázať, že body A, B, T a K ležia na jednej kružnici. (Potom by totiž uhly ATB a AKB boli obvodové nad tou istou tetivou AB a teda rovnaké.) To je pre nás už hračka. Keď sa lepšie prizrieme, vidíme, že $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle BKT| = 90°$. Preto body A a K ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BT. Tým sme dokázali, že $|\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle AKB|$ a teda $|AK| = |AB|$.

<u>Druhé riešenie:</u> Pozrime sa na trojuholníky ABE a TEL. Keďže $BETA$ je rovnobežník, platí $|AB| = |TE|$ a tiež $|\sphericalangle TEL| = 180° - |\sphericalangle TEB| = |\sphericalangle ABE|$. Navyše $|BE| = |EL|$ (sú to polomery kružnice k), preto podľa vety *sus* budú trojuholníky ABE a TEL zhodné. Potom $|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle ELT|$, čo znamená, že priamky AE a KL sú rovnobežné. (Zvierajú s priamkou BL rovnaký uhol.) A už sme skoro v cieli. Pretože KB je kolmé na KL, tak bude KB kolmé aj na AE. Zamyslime sa, čo je zač priamka AE. Je to kolmica zo stredu kružnice na jednu z tetív danej kružnice, čo znamená, že prechádza stredom danej tetivy a teda bude osou úsečky BK. (Poriadne si túto časť premyslite.) Z toho už ale priamo vyplýva, že bod A, ktorý leží na osi úsečky BK, bude rovnako vzdialený od bodov B a K, čiže $|AB| = |AK|$.

<u>Komentár:</u> Vyskytli sa aj mnohé iné riešenia, resp. riešenia obsahujúce rôzne kombinácie uvedených myšlienok. Ďalší zaujímavý nápad bol ukázať, že aj uhol ABE má veľkosť α. Vďaka stredovému uhlu sme mohli zistiť, že $|BKE| = 2\alpha$ a teda AE je vlastne osou uhla BEK. Môžete si to skúsiť doriešiť aj týmto spôsobom.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *V rovine je daných konečne veľa bodov. Ak si vyberieme ľubovoľné tri z nich, tak sú vrcholmi trojuholníka s obsahom menším ako 1. Dokážte, že existuje trojuholník s obsahom menším ako 4 taký, že všetky tieto body ležia v jeho vnútri alebo na jeho stranách.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kubo K., Mišo H.)



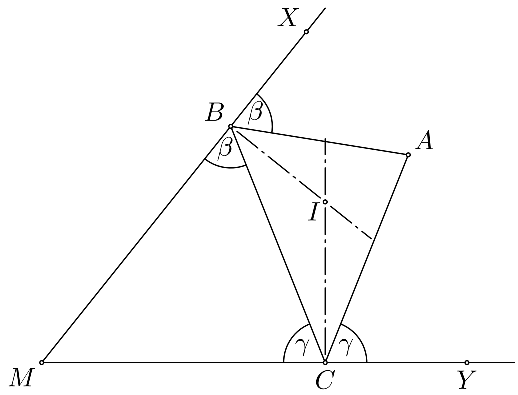
Keďže bodov máme konečne veľa (presne n), dá sa medzi nimi zostrojiť len konečne veľa trojuholníkov. (Konkrétne $\binom{n}{3}$.) Z nich si môžeme vybrať trojuholník s maximálnym obsahom. Ak je trojuholníkov s maximálnym viac, vyberieme (ľubovoľný) jeden z nich. Označme jeho vrcholy A, B, C. Pozorne sledujte, prichádza kľúčová úvaha. Môže byť nejaký z našich n bodov od priamky AB ďalej ako bod C? Určite nie, pretože by to bolo v spore s maximalitou obsahu trujuholníka ABC. Ak zostrojíme priamku c, prechádzajúcu bodom C a rovnobežnú s AB, tak dostaneme neprekročiteľnú hranicu, za ktorou už žiaden bod ležať nebude. Podobne zostrojíme priamku a resp. b prechádzajúcu cez bod A resp. B kolmú na stranu BC resp. AC. Na obrázku máme priamky a, b, c zobrazené čiarkovane. Tieto priamky nám ohraničili nový trojuholník, ktorý sme na obrázku označili $A'B'C'$ a v jeho vnútri s istotou leží všetkých n bodov zo zadania. Pozorný riešiteľ si už určite všimol, že pôvodný trojuholník ABC je tvorený strednými priečkami trojuholníka $A'B'C'$, čiže trojuholník $A'B'C'$ má štyrikrát väčší obsah než trojuholník ABC. Keďže obsah trojuholníka ABC je menší ako 1, tak obsah trojuholníka $A'B'C'$ je menší ako 4.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Bod A leží vnútri uhla s vrcholom M. Lúč vychádzajúci z bodu A sa odrazí od jedného ramena uhla v bode B, potom od druhého ramena v bode C a napokon sa vráti späť do bodu A. Platí, že uhol odrazu je rovný uhlu dopadu. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku BCM leží na priamke AM.*

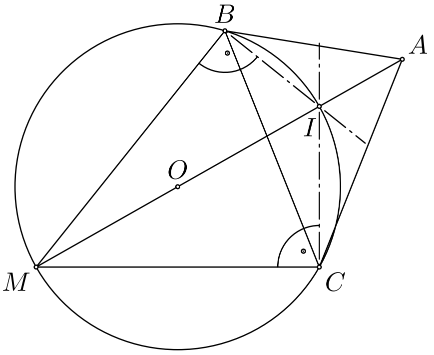
<u>Riešenie:</u> (opravoval Petržlen a Škrečok)

Pre ľahšie vyjadrovanie si vezmime body X a Y na ramenách uhla (presnejšie na polpriamkach opačných k $\overrightarrow{BM}$ a $\overrightarrow{CM}$) tak, ako na obrázku. Podľa zadania platí, že uhol dopadu lúča je rovný uhlu odrazu. Môžeme teda povedať, že $|\sphericalangle XBA| = |\sphericalangle MBC| = \beta$ a $|\sphericalangle YCA| = |\sphericalangle MCB| = \gamma$.

Zostrojme teraz v bodoch B a C kolmice na príslušné ramená uhla (na obrázku bodkočiarkovane) a ich priesečník označme I. Kvôli rovnosti uhlov dopadu a odrazu je priamka BI osou uhla ABC a priamka CI zase osou uhla ACB. Do pravého uhla chýba totiž vždy rovnaký uhol $90° - \beta$ resp. $90° - \gamma$. To ale znamená, že bod I je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC.



Okrem toho, ak opíšeme kružnicu trojuholníku BCM so stredom O, tak podľa Tálesovej vety bude úsečka MI jej priemerom. Body M, B, I a C preto ležia na spoločnej kružnici a štvoruholník $MBIC$ je tetivový.



Keďže MI je priemer a O stred našej kružnice, body M, O, I zrejme ležia na jednej priamke. Potrebujeme už len ukázať, že na tejto spoločnej priamke leží aj bod A a budeme hotoví. Poďme zistiť veľkosť uhla BAC v trojuholníku ABC. Platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BAC| &= 180° - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = \\ &= 180° - (180° - 2\beta) - (180° - 2\gamma) = \\ &= 2\beta + 2\gamma - 180°. \end{aligned}$$

Keďže AI je os uhla BAC, potom $|\sphericalangle BAI| = \beta + \gamma - 90°$. V trojuholníku ABI poznáme ešte aj uhol ABI, ktorého veľkosť je $90° - \beta$. Pre tretí, zostávajúci uhol platí

$$|\sphericalangle AIB| = 180° - (90° - \beta) - (\beta + \gamma - 90°) = 180° - \gamma.$$

Všimnime si ešte jednu vec, vďaka obvodovým uhlom nad tetivou BM platí, že $|\sphericalangle MIB| = |\sphericalangle MCB| = \gamma$. Napokon už len skúsme vypočítať veľkosť uhla MIA. Vieme, že

$$|\sphericalangle MIA| = |\sphericalangle MIB| + |\sphericalangle BIA| = \gamma + (180° - \gamma) = 180°.$$

Podarilo sa nám ukázať, že tento uhol je priamy, preto budú všetky štyri body M, O, I, A ležať na jednej priamke. No a to sme predsa chceli dostať, však?

Komentár: Veľa z vás túto úlohu správne vyriešilo, pričom sa vyskytovalo niekoľko rôznych typov riešení. Najviac riešiteľov dokazovalo tento príklad (tak ako v tomto vzorovom riešení) pomocou stredu vpísanej kružnice trojuholníku ABC. Druhý najčastejší typ riešení využíval tetivovosť štvoruholníka $MBAC$. Potom sa ukázalo, že body M, O, A ležia na jednej priamke pomocou toho, že $|\sphericalangle MOA| = 180°$, kde O je stred kružnice opísanej trojuholníku MBC.
Existujú aj iné spôsoby dokazovania, že tri body ležia na jednej priamke. Jedným z nich je napríklad aj *Simsonova priamka.* (Záujemcovia si o nej nájdu niečo na internete.) Vyhlásili sme vo fóre dokonca aj súťaž o kofolu pre tých, ktorí úlohu vyriešia pomocou tejto špeciálnej priamky. Ale ktovie, kým sa k vám dostanú tieto vzoráky, možno bude po funuse…

Úloha č. 10: *Do štvorstenu $ABCD$ je vpísaná guľa. Štyri rôzne roviny dotýkajúce sa gule a rovnobežné so stenami štvorstenu (rôzne od samotných stien) odtínajú štyri menšie štvorsteny. Dokážte, že súčet dĺžok všetkých ich 24 hrán je rovný dvojnásobku súčtu dĺžok hrán celého štvorstenu $ABCD$.*

Riešenie: (opravoval JeFo)
Ako prvé si všimneme, že odťaté malé štvorsteny sú podobné štvorstenu $ABCD$. Určite nás budú zaujímať ich koeficienty podobnosti. Označme polomer vpísanej gule r a výšku z vrcholu A na stenu BCD nazvime v_A. (Analogicky v_B, v_C, v_D.) Pozrime sa na malý štvorsten, ktorý odtne rovina rovnobežná s rovinou BCD. Vzdialenosť bodu A od roviny, ktorou ho odtneme, je zrejme $v_A - 2r$. Z toho vieme, že koeficient podobnosti štvorstenu $ABCD$ a malého štvorstenu, ktorý obsahuje vrchol A, je

$$\frac{v_A - 2r}{v_A} = 1 - \frac{2r}{v_A}.$$

Úplne rovnakým spôsobom vyjadríme aj koeficienty podobnosti pre ostatné malé štvorsteny. Odteraz budeme pod slovom *obodv* štvorstenu myslieť súčet dĺžok jeho hrán. Ak označíme obvo štvorstenu $ABCD$ ako o_{ABCD}, potom obvod odťatých štvorstenov získame prenásobením o_{ABCD} príslušným koeficientom podobnosti. Tvrdenie, ktoré chceme dokázať, vieme zapísať aj takto:

$$2 \cdot o_{ABCD} = o_{ABCD} \cdot \left(\left(1 - \frac{2r}{v_A}\right) + \left(1 - \frac{2r}{v_B}\right) + \left(1 - \frac{2r}{v_C}\right) + \left(1 - \frac{2r}{v_D}\right) \right) \cdot$$

Po predelení obvodom $ABCD$ a malej úprave dostaneme

$$1 = \frac{r}{v_A} + \frac{r}{v_B} + \frac{r}{v_C} + \frac{r}{v_D} \cdot \tag{1}$$

Stačí nám dokázať (1) a sme hotoví.
Vo výrazoch, kde vystupujú výšky a polomer vpísanej kružnice, je často nejako „zašifrovaný“ objem, preto je v takých prípadoch užitočné vyjadriť si pomery dĺžok pomocou pomerov objemov. (To často vieme.) Ak označíme stred gule vpísanej štvorstenu $ABCD$ písmenom S, potom vieme štvorsten $ABCD$ rozdeliť na štyri disjunktné štvorsteny $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$ a $BCDS$. Označme ak S_X obsah steny štvorstena $ABCD$, ktorá neobsahuje bod X. Obsah štvorstenu $ABCS$ potom vyjadríme (podľa známeho vzorca) ako $S_A \cdot r/3$. Podobne aj pre zvyšné tri štvorsteny. Ak objem štvorstena $ABCD$ označíme V_{ABCD}, potom zrejme

$$V_{ABCD} = \frac{S_A \cdot r}{3} + \frac{S_B \cdot r}{3} + \frac{S_C \cdot r}{3} + \frac{S_D \cdot r}{3} = \frac{(S_A + S_B + S_C + S_D) \cdot r}{3} \cdot$$

Hodnotu V_{ABCD} vieme vyjadriť aj ako

$$V_{ABCD} = \frac{S_A \cdot v_A}{3} = \frac{S_B \cdot v_B}{3} = \frac{S_C \cdot v_C}{3} = \frac{S_D \cdot v_D}{3} \cdot$$

Z posledných dvoch rovníc dostávame vzťah

$$r = \frac{S_X \cdot v_X}{S_A + S_B + S_C + S_D}, \tag{2}$$

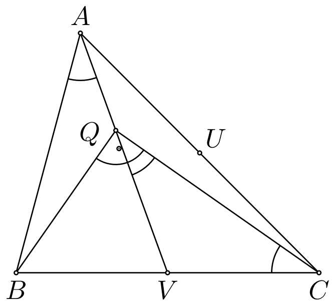
ktorý platí pre všetky $X \in \{A, B, C, D\}$. Dosadením vyjadrenia polomeru (2) (pre rôzne X) do rovnice (1) dostaneme

$$1 = \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C + S_D} + \frac{S_B}{S_A + S_B + S_C + S_D} + \frac{S_C}{S_A + S_B + S_C + S_D} + \frac{S_D}{S_A + S_B + S_C + S_D},$$

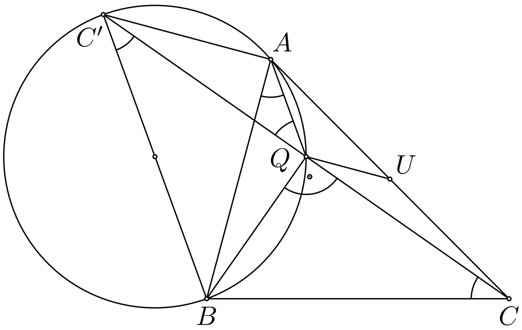
čo je ekvivalentné rovnosti $1 = 1$. Pomocou objemov sme dokázali (1) a tým aj pôvodnú úlohu.

Úloha č. 11: *Nech ABC je trojuholník a Q vnútorný bod taký, že $|\sphericalangle BQC| = 90°$ a $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle BCQ|$. Nech U, V sú v tomto poradí stredy strán AC, BC. Predpokladajme, že $|BQ| = 2|QU|$. Dokážte, že body A, Q, V ležia na priamke.*

Riešenie: (opravoval Bus)
Prvým krokom pri riešení geometrickej úlohy je obvykle urobiť si náčrt. Niektorí z vás sa pokúsili situáciu aj narysovať, tu však narazili na problém. Bod Q spĺňajúci podmienky zo zadania totiž vo všeobecnosti nemusí vôbec existovať – dá sa nájsť len v niektorých špeciálnych trojuholníkoch. (Príkladom je trojuholník so stranami $|AB| = 6$, $|BC| = 8$ a $|AC| = \sqrt{46}$. Bod Q je umiestnený v tomto trojuholníku tak, že $|AQ| = 1$ a $|CQ| = 6$.) Z toho však ešte nijako nevyplýva, že by zadanie úlohy bolo sporné, alebo že by tvrdenie, ktoré chceme dokázať, neplatilo. V zadaní sa totiž píše, že máme už vopred daný trojuholník aj s bodom Q tak, že sú splnené všetky predpoklady – nesnažíme sa bod Q zostrojiť ani nepotrebujeme zisťovať, pre ktoré trojuholníky taký bod existuje.



Keď sme si toto ujasnili, môžeme sa pustiť do samotného riešenia. Na začiatok je dobré si úlohu čo najviac zjednodušiť. Všimnime si napríklad, že bod V dosť málo súvisí so zvyškom obrázku a vieme sa ho ľahko zbaviť. Je pre nás vlastne zaujímavý len z jediného dôvodu – potrebujeme dokázať, že leží na priamke AQ. To je ekvivalentné tvrdeniu, že uhol $\sphericalangle AQV$ je priamy. Označme si gréckym písmenom α veľkosti uhlov $|\sphericalangle BAQ|$ a $|\sphericalangle BCQ|$, ktoré sú podľa zadania rovnaké. Z pravouhlého trojuholníka CQB vieme, že aj $|\sphericalangle CQV| = \alpha$ (trojuholník CQV je rovnoramenný), teda dokazované tvrdenie je ekvivalentné rovnosti $|\sphericalangle AQC| = 180^\circ - \alpha$. Ďalej už v dôkaze bod V nebudeme vôbec potrebovať.



Pokračovať môžeme dvoma spôsobmi. V prvom z nich sa zameriame na zadané vlastnosti uhlov. Mohli by sme sa pokúsiť postupne vyjadrovať veľkosti všetkých uhlov na obrázku, ďaleko sa však nedostaneme. Poloha uhlov BAQ a BCQ by nám však mala pripomenúť vetu o obvodovom uhle. Úlohu tetivy tu hrá úsečka BQ, jediný problém je v tom, že body A a C sa nachádzajú v opačných polrovinách vzhľadom na priamku BQ. Preto skúsime bod C zobraziť v osovej súmernosti podľa BQ na bod C'. V tom, že to je dobré rozhodnutie, by nás mal podporiť fakt, že podľa zadania je pätou kolmice z bodu C na priamku BQ akoby náhodou práve bod Q. Novovzniknutý bod C' tým pádom nie je len nejakým náhodným obrazom nejakého iného náhodného bodu podľa náhodne zvolenej priamky, ale bude mať aj ďalšie dobré vlastnosti – leží spolu s bodmi Q a C na tej istej priamke a je rovnako vzdialený od bodu Q ako bod C. Teraz už môžeme použiť vetu o obvodovom uhle. Podľa nej ležia body B, Q, A a C' na jednej kružnici, pretože tetive BQ náleží v bode A aj v bode C' ten istý obovodový uhol α. Teraz sa nám budú hodiť dobré vlastnosti bodu C'. Všimnime si, že úsečka QU je strednou priečkou v trojuholníku $AC'C$. Preto $|AC'| = 2|QU| = |BQ|$, teda tetivový štvoruholník $AC'BQ$ je navyše aj rovnoramenným lichobežníkom. Vďaka jeho osovej súmernosti vieme, že $|\sphericalangle AQC'| = |\sphericalangle QAB| = \alpha$, odkiaľ už vieme vypočítať $|\sphericalangle AQC| = 180^\circ - |\sphericalangle AQC'| = 180^\circ - \alpha$, čo sme chceli dokázať.

Druhým z možných postupov je zamyslieť sa nad tým, prečo máme zadanú takú zvláštnu podmienku $|BQ| = 2|QU|$. Ak nás nenapadne hľadať stredné priečky trojuholníka, môžeme skúsiť úsečku QU predĺžiť na dvojnásobne dlhú úsečku QU'. Dostaneme tým rovnobežník $AQCU'$ o ktorom sa dá dokázať, že je tvorený dvoma zhodnými trojuholníkmi AQU' a $CU'Q$, ktoré sú navyše ešte zhodné s trojuholníkom AQB. Dopočítať veľkosť uhla AQC je už potom jednoduché.

Úloha č. 12: *Všetky koeficienty polynómu $P(x)$ sú rovné 1 alebo -1. Ďalej vieme, že 1 je jeho 2^k-násobným koreňom pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že stupeň $P(x)$ je aspoň $2^{k+1} - 1$.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)

Poslali ste dve rozdielne a veľmi elegantné riešenia. Prvé používa ako hlavný nástroj deliteľnosť a teóriu čísel, druhé je viac algebraickejšie a využíva odhady hodnôt polynómov, pri dosádzaní komplexných celých čísel.[1] Gratulujem obom úspešným riešiteľom a každému odporúčam pozrieť si ich riešenia.

Prvé riešenie: (Podľa Martina Bachratého.) Polynóm $P(x)$ má mať 2^k-násobný koreň 1, teda existuje taký polynóm $Q(x)$, že platí

$$P(x) = (x-1)^{2^k} Q(x). \tag{3}$$

Sami sa presvedčte, že koeficienty polynómu $Q(x)$ sú taktiež celé čísla. Dá sa to ukázať napríklad konečnou indukciou počnúc koeficientom polynómu $Q(x)$ pri konštantnom člene. Rozpíšme si, ako vyzerá faktor $(x-1)^{2^k}$ pre $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= x^2 - 2x + 1 \\
(x-1)^4 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\
(x-1)^8 &= x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1
\end{aligned}$$

[1] Komplexné celé čísla, skrátene KCČ, sú komplexné čísla tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$ a i je označenie imaginárnej jednotky. Množina KCČ obsahuje všetky celé čísla a je uzavretá na súčet a súčin. (Násobením a sčitavaním KCČ dostaneme len KCČ a nič viac.) Preto polynómy s celočíselnými koeficientami zobrazujú KCČ na KCČ.

Na prvý pohľad možno nič podozrivé. Spomeňme si, že exponenty sú mocniny dvojky a zamyslime sa nad paritou koeficientov. (Celkom prirodzené, no nie?) Veru, zdá sa, že koeficienty, až na prvý a posledný, sú všetky párne.[2] Pritom polynóm $P(x)$ má všetky koeficienty nepárne. To by nám mohlo pomôcť, no najprv zdôvodníme našu domnienku.

<u>Lema 1.</u> Pre prirodzené čísla k, m, ktoré spĺňajú $m < 2^k$, platí, že binomický koeficient $\binom{2^k}{m}$ je párny.
Dôkaz Lemy 1. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ je to jednoduché. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $k > 0$. Dokážeme, že potom platí aj pre $k + 1$. Číslo $\binom{2^{k+1}}{m}$ vieme reprezentovať ako výber m guličiek z 2^{k+1} rôznych guličiek. Ako využiť indukčný predpoklad? Rozdeľme si guličky na dve hromádky s 2^k guličkami. Vybrať m guličiek spomedzi 2^{k+1} znamená vybrať l z prvej hromádky a $m - l$ z druhej. To nás navedie na identitu

$$\binom{2^{k+1}}{m} = \sum_{l=0}^{m} \binom{2^k}{l}\binom{2^k}{m-l},$$

kde pod výrazom $\binom{r}{s}$ myslíme 0 pre $s < 0$ alebo $s > r$. Využitím indukčného predpokladu už vidíme, že $\binom{2^{k+1}}{m}$ je párny.
Iný dôkaz Lemy 1. Môžeme si $\binom{2^k}{m}$ prepísať pomocou faktoriálov a vyjadriť, aké najvyššie mocniny dvojky ich delia. Toto vyjadrenie síce nebudeme vedieť úplne vyčísliť (bude obsahovať celé časti), ale dá sa pomocou neho ukázať, že v prvočíselnom rozklade $\binom{2^k}{m}$ sa bude prvočíslo 2 vyskytovať aspoň raz. Detaily si premyslite sami.

Ku pôvodnej úlohe môžeme pristupovať sporom. Predpokladajme, že platí (3) a stupeň polynómu $Q(x)$ nie je viac ako $2^k - 2$. Vzhľadom na mnoho párnych koeficientov v polynóme $(x-1)^{2^k}$ skúsme dokázať, že $(x-1)^{2^k}Q(x)$ má tiež nejaký koeficient párny. Potom by sme dostali spor s predpokladom, pretože koeficienty $P(x)$ majú byť všetky nepárne. Ako na to?
Stačí sa pozrieť na koeficient polynómu $(x-1)^{2^k}Q(x)$ pri člene x^{2^k-1}. Ak označíme $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$, potom je hľadaný koeficient rovný

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^{2^k-1-j}\binom{2^k}{2^k-1-j} a_j = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+1}\binom{2^k}{j+1} a_j,$$

z čo je (vyplýva z Lemy 1) párne číslo. Dosiahli sme spor, čím sme dokázali pôvodné tvrdenie.

<u>Druhé riešenie:</u> (Podľa Filipa Sládka.) Nech polynóm $P(x)$ je stupňa n a platí (3). Zo zadania vieme, že $P(x)$ má koeficienty len $+1$ a -1, preto

$$|P(x)| \le |x^n| + |x^{n-1}| + \cdots + |1| = |x|^n + |x|^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{|x|^{n+1}-1}{|x|-1}, \quad \text{pre } x \ne 1.$$

Podľa (3) preto platí

$$|x-1|^{2^k}|Q(x)| \le \frac{|x|^{n+1}-1}{|x|-1}. \tag{4}$$

Nerovnosť (4) využijeme na odhad n. Dosaďme do (4) komplexné celé číslo $-1+i$. Keďže $|-1+i| = \sqrt{2}$ a $|-2+i| = \sqrt{5}$, dostaneme

$$(\sqrt{5})^{2^k}|Q(-1+i)| \le \frac{(\sqrt{2})^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1},$$

alebo po úprave

$$5^{2^{k-1}}|Q(-1+i)| \le \frac{4^{\frac{n+1}{4}}-1}{\sqrt{2}-1}. \tag{5}$$

[2] Skúste si nakresliť prvých 10 riadkov Pascalovho trojuholníka a vyfarbiť párne čísla.

Nerovnosť (5) by nám bola nanič, ak by nastalo $|Q(-1+i)| = 0$. Dokážeme, že $P(x)$ (a teda ani $Q(x)$) nemôže mať komplexný koreň $-1+i$. Nie je ťažké zdôvodniť, že

$$\Im((-1+i)^z) = \begin{cases} 0 & \text{ak } 4 \mid z, \\ 2^{\frac{z}{2}} & \text{ak } 2 \mid z, 4 \nmid z, \\ 2^{\frac{z-1}{2}} & \text{ak } 2 \nmid z, \end{cases} \tag{6}$$

kde $\Im(c)$ je imaginárna časť[3] komplexného čísla c. Vieme, že

$$\Im(P(-1+i)) = \sum_{j=0}^{n} \pm \Im((-1+i)^j).$$

Vďaka (6) vieme, že spomedzi celých čísel $\Im((-1+i)^j)$, kde $j = 0, 1, \ldots, n$ dostaneme nepárne číslo len pre $j = 0$. Preto je imaginárna zložka komplexného celého čísla $\Im(P(-1+i))$ nepárna (a nenulová), čiže $-1+i$ nie je koreň polynómu $P(x)$. Takže $Q(-1+i)$ je nenulové komplexné celé číslo a preto $|Q(-1+i)| \geq 1$. Z (5) dostávame

$$5^{2^{k-1}} \leq \frac{4^{\frac{n+1}{4}} - 1}{\sqrt{2} - 1}. \tag{7}$$

Za pomoci nerovnosti (7) už ľahko nájdeme vhodný odhad na n v závislosti od k. Pre $k \geq 3$ dokážeme, že pre platnosť (7) potrebujeme $n \geq 2^{k+1} - 1$. Ak by totiž $n < 2^{k+1} - 1$, potom

$$\frac{4^{\frac{n+1}{4}} - 1}{\sqrt{2} - 1} < (4^{\frac{2^{k+1}}{4}} - 1)(\sqrt{2}+1) < 4^{2^{k-1}}(\sqrt{2}+1) = 5^{2^{k-1}} \left(\frac{4}{5}\right)^{2^{k-1}-4} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^4 (\sqrt{2}+1)\right] < 5^{2^{k-1}}.$$

Tým sme dokázali úlohu 14 pre $k \geq 3$. Prípady $k = 1$ a $k = 2$ sa dajú riešiť osobitne, môžete si to vyskúšať sami.

<u>**Úloha č. 13:**</u> *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c = 3$. Dokážte, že*

$$(3 - 2a)(3 - 2b)(3 - 2c) \leq a^2 b^2 c^2.$$

<u>Riešenie:</u> (opravoval Tomáš)
(*Podľa Filipa Sládka.*) Najskôr sa pozrime na vlastnosti danej nerovnosti, ktoré si môžeme všimnúť na prvý pohľad. Pravá strana je kladná. Ak je ľavá strana záporná, nemáme čo robiť. Preto sa zamerajme len na prípad, keď je ľavá strana nerovnosti kladná. Ak má byť súčin troch výrazov kladný, musia byť všetky tri kladné, alebo práve dva záporné.
Ak sú dva z výrazov záporné, tak v oboch výrazoch musí neznáma so záporným znamienkom nadobúdať hodnotu väčšiu ako $3/2$. Keďže v zadaní je dané, že všetky tri čísla sú kladné a platí $a + b + c = 3$, táto situácia nastať nemôže. Preto všetky tri výrazy na ľavej strane nerovnosti budú kladné. Celú nerovnosť vieme upraviť na tvar

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq a^2 b^2 c^2$$

použitím vzťahu $a + b + c = 3$. Z kladnosti všetkých troch výrazov na ľavej strane vieme, že platí

$$a + b - c \geq 0, \quad a - b + c \geq 0, \quad -a + b + c \geq 0.$$

Premenné a, b a c spĺňajú trojuholníkové nerovnosti a teda existuje trojuholník ABC, ktorý má strany s veľkosťou a, b, c. Ľavá strana nerovnosti nám môže pripomínať Herónov vzorec, ktorý tvrdí

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}},$$

[3] Pre $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\Im(x + iy) = y$.

kde $S_{\triangle ABC}$ označuje obsah trojuholníka ABC. Po malej úprave dostávame Herónovho vzorca dostaneme

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \frac{16}{3}S^2_{\triangle ABC},$$

čo môžeme dosadiť do pôvodnej nerovnosti a získame

$$\frac{16}{3}S^2_{\triangle ABC} \leq a^2b^2c^2. \tag{8}$$

Teraz nám už len stačí prepísať pravú stranu nerovnosti (8) do reči obsahov. Vieme, že pre obsah trojuholníka platí aj ďalšia rovnosť

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R},$$

kde R je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC. Po dosadení do nerovnosti (8) dostávame

$$\begin{aligned} \frac{16}{3}S^2_{\triangle ABC} &\leq 16R^2S^2_{\triangle ABC}, \\ \sqrt{\frac{1}{3}} &\leq R. \end{aligned} \tag{9}$$

Ak by sme vedeli, že nerovnosť (9) platí, tak by platila aj pôvodná nerovnosť. Skúsme preto dokázať, že (9) platí. Dokážeme to sporom.
Predpokladajme, že $R < 1/\sqrt{3}$ Môžeme sa pozrieť, čo sa stane, ak si na kružnici s polomerom R zvolíme body A a B napevno. Bod C sa môže pohybovať po kružnici ako sa mu zachce. Ľahko si odvodíme, že pre súčet veľkostí strán trojuholníka platí (pri tradičnom označení)

$$|AB| + 2R(\sin(\alpha) + \sin(180^\circ - \gamma - \alpha)),$$

pričom $|AB|$ je konštanta a taktiež aj γ je konštanta, pretože je to obvodový uhol k tetive AB. Preto danú funkciu premennej α môžeme zderivovať a tak nájsť jej extrém. Takto zistíme, že maximum sa nadobúda práve vtedy, keď $\alpha = \beta$. Analogicky vieme dostať $\alpha = \gamma$ a $\beta = \gamma$. Teda maximum sa nadobúda keď je trojuholník ABC rovnostranný.
V takomto trojuholníku platí, že $R = (a+b+c)/(3\sqrt{3})$ a teda $3 > a+b+c$, čo je spor so zadaním. Preto musí platiť $1/\sqrt{3} \leq R$ a teda je splnená aj pôvodná nerovnosť.

Úloha č. 14: *Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti štyridsiatich rôznych prirodzených čísel existuje člen, ktorý nevieme napísať v tvare $2^m + 3^n$, kde m, n sú nezáporné celé čísla.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Keď máme dokázať neexistenciu štyridsaťčlennej postupnosti s dosť netriviálnou vlastnosťou, vypisovanie malých prípadov nám najskôr nepomôže. Musíme k úlohe pristúpiť globálnejšie. Určite je vhodné zamyslieť sa nad zvyškami po delení malými prvočíslami. Možno aj taká cesta vedie k úplnému riešeniu, no nám sa to nepodarilo.[4] Keď „zlyhá“ modulárna aritmetika, skúsime niečo iné. Čísla tvaru $2^n + 3^m$ sa medzi prirodzenými číslami nachádzajú relatívne riedko. Túto vlastnoť využíva aj riešenie ktoré uvedieme.

Ľubovoľnú aritmetickú postupnosť štyridsiatich rôznych prirodzených čísel vieme zapísať v tvare a, $a+d$, $a+2d$, …, $a+39d$, kde $a > 0$, $d > 0$ sú prirodzené čísla. (Ak by bola tá postupnosť klesajúca, obrátime poradie a nič tým nepokazíme.) Množinu $\{0, 1, 2, \ldots, 39\}$ označme M. Tvrdenie zo zadania dokážeme sporom. Predpokladáme, že pre každé $k \in M$ existujú nezáporné celé čísla u_k, v_k také, že platí

$$a + kd = 2^{u_k} + 3^{v_k}.$$

Označme

$$r = \lfloor \log_2(a+39d) \rfloor, \qquad s = \lfloor \log_3(a+39d) \rfloor.$$

Zrejme musí platiť $u_k \leq r$, $v_k \leq s$ pre všetky $k \in M$. Sporom ukážeme, že ak $k \in M$ a $k \geq 26$, tak navyše platí[5] $(r - u_k)(s - v_k) \leq 1$. Predpokladajme, že existuje $k \in M$, $k \geq 26$, pre ktoré platí nerovnosť $(r - u_k)(s - v_k) > 1$. Potom určite nastane aspoň jedna z možností

[4] Zistite, aké zvyšky môže nadobúdať $2^n + 3^m$ po delení prvočíslom 23. Vedeli by ste po preskúmaní týchto zvyškov dokončiť riešenie? Máme silné podozrenie, že to ide.

[5] Inak povedané, ak je k dosť veľké, tak sa nemôže exponent u_k resp. v_k veľmi líšiť od exponentu r resp. s.

a) Platí $r - u_k \geq 2$ a zároveň $s - v_k \geq 1$. Potom

$$a + kd = 2^{u_k} + 3^{v_k} \leq 2^{r-2} + 3^{s-1} \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(a + 39d) < a + 26d \leq a + kd.$$

b) Platí $r - u \geq 1$ a a zároveň $s - v_k \geq 2$. Potom

$$a + kd = 2^{u_k} + 3^{v_k} \leq 2^{r-1} + 3^{s-2} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\right)(a + 39d) < a + 26d \leq a + kd.$$

V oboch prípadoch sme sa dostali do sporu, čím sme pomocné tvrdenie dokázali. Teraz je už zrejmé, že pre všetky $k \in M$, $k \geq 26$ nastáva jedna z možností:

$$1)\ u_k = r, \qquad 2)\ v_k = s, \qquad 3)\ u_k = r - 1 \text{ a zároveň } v_k = s - 1,$$

pričom tretia možnosť môže nastať nanajvýš pre jedno z uvažovaných k. Množina $\{26, 27, \ldots, 39\}$ má 14 prvkov, teda buď prvá alebo druhá možnosť nastane pre aspoň 7 z nich. To nás opäť vedie k rozobratiu dvoch prípadov. Ako uvidíme, oba zavŕšime sporom.

a) V aritmetickej postupnosti $a + 26d, a + 27d, \ldots, a + 40d$ sa nachádza aspoň 7 členov, ktoré vieme napísať v tvare $2^r + 3^m$, pre nejaké celé číslo $m \geq 0$. Ak od každého člena postupnosti odčítame 2^r, tak dostaneme aritmetickú postupnosť dĺžky 14 s diferenciou d, ktorá obsahuje aspoň 7 mocnín trojky, nech sú to $3^{m_1} < 3^{m_2} < \cdots < 3^{m_7}$. Potom však

$$13d \geq 3^{m_7} - 3^{m_1} > 3^{m_7} - 3^{m_2} = (3^{m_7 - m_2} - 1)3^{m_2} > (3^5 - 1)(3^{m_2} - 3^{m_1}) > 13d,$$

čo je spor.

b) V aritmetickej postupnosti $a + 26d, a + 27d, \ldots, a + 40d$ sa nachádza aspoň 7 členov, ktoré vieme napísať v tvare $2^n + 3^s$, pre nejaké celé číslo $n \geq 0$. Ak od každého člena postupnosti odčítame 3^s, tak dostaneme aritmetickú postupnosť dĺžky 14 s diferenciou d, ktorá obsahuje aspoň 7 mocnín dvojky, nech sú to $2^{n_1} < 2^{n_2} < \cdots < 2^{n_7}$. Potom však

$$13d \geq 2^{n_7} - 2^{n_1} > 2^{n_7} - 2^{n_2} = (2^{n_7 - n_2} - 1)2^{n_2} > (2^5 - 1)(2^{n_2} - 2^{n_1}) > 13d,$$

čo je opäť spor.

V každej vetve sme sa dostali do sporu, čím sme pôvodné tvrdenie dokázali.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	11	8			9	9	9	9	9		45	90
1.	Chlebíková Andrea	3.	Brighton UK	6	2		9	9	9	9	9	7		45	90
1.	Horňák Marián	2.	GPár NR	4	1		9	9	9	9	9			45	90
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	2	0	9	8	9	9	9	1	9		45	90
5.	Kossaczký Pavol	4.	Gamča BA	6	1		9	9	9	8		9		44	88
6.	Balog Matej	3.	Gamča BA	5	0	9	6	9	9	9				42	87
7.	Hagara Michal	4.	GJH BA	10	8			9	9	9	9	9		45	86
8.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	6	1		9	9	9	9	9			45	85
9.	Tóth Róbert	4.	GAlej KE	5	0	9	9	5	9	9				41	84
10.	Galovičová Soňa	2.	GVO ZA	5	0	9	9	9	9	9				45	83
10.	Le Tuan Anh	3.	Gamča BA	8	2		7	8	8	9	9			41	83

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	k_β	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
12.	Szabados Viktor	3.	Gamča BA	8	2		8	9	8	8	9	1		42	81
13.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	7	3			9	9	8	9	9		44	80
14.	Faršang Štefan	3.	SJG KN	5	1		9	9	9	8	9			44	79
14.	Karásková Natália	3.	GJH BA	9	7			9	9	9	9	9		45	79
14.	Žídek Augustin	2.	Frýdlant ČR	4	0	9	9	8	9	7				42	79
17.	Csiba Dominik	3.	ŠPMNDG BA	7	2		7	9	9	9	3			37	78
18.	Kopf Michal	2.	Opava ČR	4	0	9	7	9	9	3				37	77
19.	Guričan Pavol	3.	GJH BA	7	2		6	9	7	7	9			38	76
19.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	2	0	9	8	9	9					35	76
21.	Kozák Andrej	3.	Gamča BA	8	2		9	9	1	8				27	72
21.	Phuong Mariana	3.	GJH BA	6	1		9	9	9					27	72
23.	Hozza Ján	3.	GJH BA	6	4			9	9	9	3	1		31	69
24.	Faguľová Kristína	2.	GPoš KE	5	0	9	9	9	9			1		37	68
24.	Halajová Barbora	2.	GVO ZA	5	0	9	9	9	4	2				33	68
26.	Hlavatá Martina	3.	Gamča BA	7	1		9	9	5	9	9			41	67
26.	Tóth Michal	2.	GJH BA	4	0	3	9	9	8	8				37	67
28.	Baxová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	8	6	8	8	5				35	66
28.	Konečný Jakub	4.	Gamča BA	11	7			9	9	8	1	3		30	66
30.	Kosec Peter	2.	GĽŠ TN	4	0	9	9	9	4		1			32	63
31.	Bogár Ján	4.	GĽŠ TN	9	2			8	5	9	9	6		37	62
32.	Koprda Pavol	2.	GAM TT	4	0	4	2	5	2	9				22	61
32.	Kováč Ondrej	3.	GCM NR	7	2		6	9	9					24	61
32.	Lami Vincent	4.	SJG KN	5	2		9	9	9	9				36	61
35.	Baranová Jana	4.	GAlej KE	8	2		9	9	5	9	1	1		33	60
35.	Jasenčáková Katarína	2.	GVO ZA	5	0	3	9	9		2				23	60
35.	Večerík Matej	3.	ŠPMNDG BA	7	2		6	9	8	8				31	60
38.	Klembarová Barbora	2.	GKuk PP	4	0	3	6	0	7	8				24	59
38.	Midlik Adam	4.	GJAR PO	8	3			9	9					18	59
40.	Harmanová Dominika	3.	GJH BA	3	0	9	9	9		2		2		31	53
40.	Jakubík Ján	3.	SPŠE PN	6	0	7	5	7	1					20	53
40.	Nováková Daniela	2.	GPár NR	4	0	7	6	9	9					31	53
40.	Švančara Patrik	2.	GĽŠ TN	4	0	9	9	8		0				26	53
44.	Belanová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0	3	6	9	9					27	52
45.	Marečáková Barbora	2.	GKuk PP	4	0	9	0	1	6	7				23	51
45.	Varga Mátyás	3.	SJG KN	4	0	3	7	9						19	51
47.	Kmeťová Katarína	2.	GKuk PP	4	0	9	7	2						18	50
47.	Majdiš Mojmír	4.	GPOH DK	7	1		8							8	50
49.	Kubincová Petra	3.	ŠPMNDG BA	7	1		7	9	3					19	47
49.	Vlček Andrej	2.	EvSŠ LM	4	0	3	6	7	6					22	47
51.	Sabatovičová Linda	3.	GJH BA	7	1		6	9	7					22	46
52.	Bačo Ladislav	4.	GPoš KE	11	8			9	9					18	45
52.	Langer Tomáš	2.	GJH BA	4	0	3	6	0	2	0				11	45
54.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	2	0	9	9	2	3					23	44
55.	Kocák Jakub	3.	GLS HE	5	0	3								3	42
55.	Stehlík Matúš	3.	GAlej KE	5	0	3	6		0					9	42
57.	Daniláková Monika	2.	GJAR PO	4	0	2	9	1	6	1				19	41
57.	Mužík David	2.	GChD Praha	4	1		6	5	1	5	1			18	41
59.	Santrová Adriana	2.	GMH Trstená	4	0		9	8						17	39
60.	Dupej Peter	2.	GJAR PO	4	0	3		9						12	38

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
61.	Múthová Denisa	3.	GTR ZA	7	1		0	3	2	4	1			10	37
62.	Hajdinová Katarína	3.	GJH BA	6	1		9							9	36
62.	Peitl Tomáš	4.	ŠPMNDG BA	10	4			9						9	36
62.	Sládek Filip	4.	GAB NO	8	8						9	9		18	36
62.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	0	3	5	1	9					18	36
62.	Šimková Mária	4.	GJF Šaľa	4	0	3	9	9	1	0				22	36
67.	Macháč Juraj	3.	GJH BA	5	0	3	5		2		1			11	35
68.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	3	0	2	6	9			1			18	32
69.	Vavrík Boris	3.	GJH BA	5	0									0	30
70.	Bogárová Zuzana	3.	GĽŠ TN	6	1		6	4	6			0		16	28
70.	Floriánová Michaela	4.	GJH BA	8	0	3		0		0				3	28
72.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	1	0	3	5	2						10	26
73.	Kopcová Monika	3.	Gamča BA	4	0	3	8	2	4	8				25	25
73.	Mariš Andrej	2.	PiarG NR	3	0									0	25
75.	Anderle Michal	3.	GBST LC	5	0	3								3	24
75.	Štyráková Kamila	4.	GPOH DK	10	3			9	6	9				24	24
77.	Žákovská Uršuľa	2.	Gamča BA	4	0									0	23
78.	Dižová Andrea	3.	GKom PE	7	2									0	16
79.	Masár Juraj	3.	GJH BA	6	1									0	15
80.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	1	0	2						1		3	12
81.	Ďurikovičová Lucia	3.	GsvU BA	4	0									0	11
82.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3	0		4		3					7	7
83.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	1	0									0	6
83.	Porembová Alexandra	3.	GJH BA	6	1									0	6
85.	Rigdová Emília	4.	GKuk PP	7	1									0	5
86.	Makuch Matej	3.	GJGT BB	4	0		4							4	4
87.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3	0			1		0				1	1

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	7	9	6	7			85
2.	Smolík Martin	1.	Gamča BA	2		8	8	7	2	7	9		80
3.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	2		9			9	8	9		77
4.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	2		9		9	9	9	2		75
5.	Smolík Michal	1.	Gamča BA	2		3	6	7	3	6	9		74
6.	Smolík Milan	1.	Gamča BA	2		8	5	9	3	5	5		73
6.	Vlachynská Petra	2.	GBil BA	3			9	9	9	7	1		73
8.	Petrucha Jaroslav	1.	GMet BA	1	9	8	9						70
9.	Hledík Michal	1.	GJH BA	1	9	9		3	3				69
10.	Krajčovič Matej	1.	GJH BA	1	8	8	6						63
11.	Heželyová Ivana	1.	ŠPMNDG BA	1	8	1	5	2	1				60
12.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	1	9	1	4	0	3	5	2		50
13.	Páleník Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	8	1				5			49
14.	Krajčovič Michal	1.	GJH BA	1	8	7							41
15.	Pavlovič Tomáš	1.	GJH BA	1	9	1	5	1					39

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
16.	Harmanová Dominika	3.	GJH BA	3					9	9	9		37
17.	Bock Michal	1.	Gamča BA	2			4		6	9	1		35
18.	Majdán Tomáš	1.	GJH BA	1	8	7							33
19.	Šteis Lukáš	1.	ŠPMNDG BA	1									31
19.	Žitňanský Tomáš	1.	GJH BA	1									31
21.	Bliznakovová Kristína	1.	ŠPMNDG BA	1									30
21.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	1									30
21.	Řehořka Patrik	1.	GJH BA	1									30
24.	Stríbrnský Branislav	1.	GJH BA	1									27
25.	Spustová Karolína	1.	ŠPMNDG BA	1									26
26.	Holíková Zuzana	1.	GCSL BA	1	8								20
27.	Múčková Nikola	1.	GJH BA	1									17
28.	Šimek Lukáš	1.	GJH BA	1									15
29.	Kakaš Richard	1.	GJH BA	1									14
29.	Zorgovská Klaudia	1.	GCSL BA	1									14
29.	Šmid Peter	1.	GJH BA	1									14
32.	Matlovič Tomáš	1.	GJH BA	1									12
32.	Zelenák Fero	1.	GJH BA	1									12
34.	Nakhlé A.	1.	GJH BA	1									9
35.	Jasaň Jakub	1.	GJH BA	1	8								8

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	2		7		6		5	2		53
2.	Kováčová Milada	1.	GCM NR	1	8	9				5	2		46
3.	Pločeková Andrea	3.	GPdC PN	3			0	9	3	7	1		40
4.	Cibulka Samuel	1.	GAV LV	1									31
4.	Mariš Andrej	2.	PiarG NR	3		6							31
6.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	3					2	6	9		30
7.	Tilešová Kristína	2.	GKom PE	2				2			0		2

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	1	8	9	9	9	8		5		87
2.	Macko Vladimír	1.	GĽŠ ZV	1	8	9		2	9	6	9		80
3.	Benešová Katarína	1.	GAS BB	1	8	5	9		9	7			77
4.	Santer Martin	1.	GMH Trstená	1	9	9							62
5.	Nociarová Jela	1.	GBST LC	1	9	1		3		5			58
6.	Surovčík Juraj	1.	GPOH DK	1	8	1		4	3		2		57
7.	Šubjak Ján	1.	GPOH DK	1	9	1			4		3		55
8.	Turčanová Terézia	1.	GĽŠ ZV	1	3	1		2	2		1		44
9.	Sládek Samuel	-2.	GAB NO	-2	9	9	4	7	9		9		43
10.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	1	5	1	0		2				30
11.	Branická Eva	3.	CirGKP ZA	3									24
12.	Plavák Dušan	3.	GMH Trstená	3					5				20

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
13.	Búlik Martin	3.	GJGT BB	3			4	2		4			12
14.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3						4			4
15.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3							1		1

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	2		9	9	9	9	8	9		90
2.	Batmendijn Eduard	-1.	ZŠsvCM SL	-1	8	9		9	9		9		89
3.	Hlaváčik Matúš	1.	GAlej KE	2		9	2	9	1	4			66
4.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	8	3	9		3	5	1		65
5.	Tokárová Natália	1.	GJAR PO	1	7	8		2		6	0		64
6.	Hanzely Filip	1.	GAP SB	1	5	3	8	3	2	7	0		61
7.	Semanišinová Denisa	1.	GAlej KE	2		5	3		7				51
8.	Machalová Katarína	0.	ZŠŠmer PO	0									40

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	9	9	7	6			56
2.	Hagara Michal	4.	GJH BA	9	9					35
3.	Hozza Ján	3.	GJH BA	3	1					19
4.	Sládek Filip	4.	GAB NO	9	9	7	7	1		72
5.	Vavrík Boris	3.	GJH BA							9
6.	Šafin Jakub	1.	GPH MI				0	0		2

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.