Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2009/2010

Úloha č. 1: *Tri lístky na koncert Desmodu a jeden lístok na Gladiátor stoja dohromady toľko ako dva lístky na Elán. Jeden lístok na Desmod, dva na Gladiátor a tri na Elán stoja spolu 25 eur. Ich ceny sú pritom kladné celé čísla. Koľko stoja lístky na jednotlivé koncerty?*

Riešenie: (opravoval Rado, Lenka)

Nazvime si ceny lístkov na koncerty jednotlivých skupín prvými písmenami ich názvov. To znamená, že lístok na Desmod stojí D eur, lístok na Gladiátor G eur a lístok na Elán E eur. Ďalej si skúsme zapísať tvrdenia zo zadania pomocou rovníc.

Tvrdenie, že tri lístky na Desmod a jeden lístok na Gladiátor stoja dohromady toľko ako dva lístky na Elán môžeme zapísať ako

$$3D + G = 2E.$$

Podobne tvrdenie, že jeden lístok na Desmod, dva na Gladiátor a tri na Elán stoja spolu 25 eur sa zapíše ako

$$1D + 2G + 3E = 25.$$

Získali sme dve rovnice s tromi neznámymi. Skúsime z nich dostať čo najviac informácii o jednotlivých cenách lístkov. Konkrétne tak, že z prvej vyjadríme čomu sa rovná G, dostávame

$$\begin{aligned} 3D + G &= 2E, \\ G &= 2E - 3D. \end{aligned}$$

Takto vyjadrené G dosadíme do druhej rovnice a upravíme na

$$\begin{aligned} 1D + 2(2E - 3D) + 3E &= 25, \\ 1D + 4E - 6D + 3E &= 25, \\ 7E &= 5D + 25. \end{aligned}$$

Keď to máme upravené, skúsime sa zamyslieť či sme nedostali niečo, čo by nám pomohlo. Pozrime sa ako vyzerá pravá strana rovnice. Vidíme, že $5D$ aj 25 je násobok piatich. Takže celá pravá strana rovnice je násobok piatich, teda aj ľavá strana rovnice musí byť násobok piatich. A keďže je ľavá strana $7E$, tak týmto násobkom piatich musí byť E. Vieme že E má byť celé nezáporné číslo, takže môže byť rovné 5, 10, 15, … Naozaj? Čo ak by bolo $E = 10$, mohli by potom platiť obe rovnice zo zadania? V druhej rovnici by sme dostali

$$1D + 2G + 3 \cdot 10 = 25,$$

ale potom by $1D + 2G = -5$. Avšak D a G majú byť celé nezáporné čísla. Takže E nemôže byť 10 a ani žiadny väčší násobok piatich. (Nevyhovujú z rovnakých dôvodov ako 10.) Takže E musí byť päť. Teraz už len dosadíme $E = 5$ do rovníc, ktoré sme dostali, a dopočítame D a G

$$\begin{aligned} 7 \cdot 5 &= 5D + 25, \\ D &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3D + G &= 2E, \\ 3 \cdot 2 + G &= 2 \cdot 5, \\ G &= 4. \end{aligned}$$

Takže teraz už vieme, že lístok na Desmod stojí 2 eurá, na Gladiátor 4 eurá a na Elán 5 eur.

<u>**Úloha č. 2:**</u> *V Hollywoode je rozprestretý dlhý červený koberec. Z jednej jeho strany idú v pravidelných rozostupoch všetci piati členovia skupiny Jackson Five. Z opačného konca idú v pravidelných rozostupoch piati členovia skupiny Led Zeppelin. Všetci hudobníci kráčajú rovnakou rýchlosťou. Vždy, keď sa ľubovoľní dvaja z nich stretnú, obaja sa obrátia a kráčajú opačným smerom nezmenenou rýchlosťou. Koľkokrát sa hudobníci stretnú, kým každý z nich dôjde na niektorý z koncov koberca?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Katka, Ondro)
Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Veľa z vás si nakreslilo obrázok a popísalo, ako sa budú hudobníci stretávať. Pri tomto postupe však môže vzniknúť problém. V zadaní je napísané, že obidve skupiny idú v pravidelných rozostupoch. Treba si však uvedomiť, že tieto rozostupy nemusia byť rovnaké. Napríklad ľubovoľní dvaja susední členovia skupiny Jackson Five sú vzdialení 2 metre a ľubovoľní dvaja susední členovia skupiny Led Zeppelin sú vzdialení 5 metrov. V tomto prípade by obrázok, kde by boli popísané jednotlivé stretnutia, vyzeral oveľa zložitejšie ako v prípade rovnakých rozostupov oboch kapiel. Inak povedané, pre rôzne dvojice rozostupov, by boli obrázky rozdielne. Teda jedným obrázkom nedokážeme popísať všetky situácie, preto nestačí ako dôkaz.
Mnohí z vás prišli na jednoduchšie riešenie. Pozrime sa bližšie na stretnutie dvoch ľudí. Keď sa stretnú, otočia sa a každý z nich pokračuje nezmenenou rýchlosťou v opačnom smere. Je to rovnaká situácia, ako keby okolo seba len prešli. Pred stretnutím šiel jeden z dvojice doprava a jeden doľava. Po stretnutí sa nič nezmenilo. Opäť ide jeden človek doprava a jeden doľava. Teda na celý príklad sa môžeme pozerať tak, že dve 5-členné skupiny idú oproti sebe a vždy, keď sa dvaja stretnú tak si podajú ruky a pokračujú ďalej. Celkový počet podaní rúk bude rovnaký ako počet stretnutí, keby sa ľudia odrážali a pokračovali v opačnom smere. Poďme teraz spočítať počet podaní rúk. Prvý člen z kapely Led Zeppelin si podá ruku s piatimi členmi kapely Jackson Five. Rovnako druhý, tretí, štvrtý aj piaty člen Led Zeppelin si podá ruku s piatimi členmi Jackson Five. Máme spolu $5 \cdot 5 = 25$ podaní rúk. Teda hudobníci sa stretnú 25-krát predtým, než každý z nich dôjde na niektorý z koncov koberca.

<u>Poznámka:</u> Uvedomte si, že tento postup rieši aj situáciu, kde sú rozostupy medzi jednotlivými hudobníkmi rôzne. Porozmýšľajte, ako by to vyzeralo, keby členov kapiel bolo viac, napríklad 100, alebo keby hudobníci mali rôzne rýchlosti.

<u>**Úloha č. 3:**</u> *Pred vstupom na hudobný koncert čaká v rade* 2008 *ľudí. Každý z nich má lístok, na ktorom je napísané nejaké číslo. Prvý človek v rade má lístok s číslom* 1*. Pre všetkých ostatných ľudí v rade okrem posledného platí, že majú lístok s číslom, ktoré je súčtom čísel na lístkoch jeho dvoch susedov. Určte číslo, ktoré má na lístku posledný,* 2008*-my človek v tomto rade.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Kika, JeFo)
Po pár pokusoch s dosadzovaním konkrétnych hodnôt si môžeme všimnúť, že čísla na lístkoch sa začínajú opakovať. Skúsme teraz, či nám to vyjde nielen s konkrétnymi hodnotami, ale aj všeobecne.
Ak si troch po sebe idúcich ľudí v rade označíme a, b, c, potom môžeme napísať $b = a+c$ a z toho vyplýva $c = b-a$. Teda keď poznáme číslo dvoch po sebe idúcich ľudí, tak číslo tretieho človeka je jednoznačne určené ako rozdiel druhého a prvého.
Číslo prvého človeka je 1, číslo druhého si označme x. (Uvedomme si, že na číslo x nekladieme žiadne požiadavky, môže byť ľubovoľné. Vďaka tomu riešenie nemusíme spraviť zvlášť pre kladné a zvlášť pre záporné čísla.) Číslo tretieho v rade potom bude podľa predošlého vzorca $x-1$. (Číslo druhého v rade mínus číslo prvého v rade.) Číslo štvrtého bude $-1 = (x-1)-x$, piateho $-x = -1-(x-1)$, šiesteho $-x+1 = -x-(-1)$, siedmeho $1 = -x+1-(-x)$ a ôsmeho $x = 1-(-x+1)$. Keď sa pozrieme na čísla prvého a siedmeho, a druhého a ôsmeho, všimneme si, že sa opakujú. Potom deviaty musí mať rovnaké číslo ako tretí, lebo ho dostaneme ako ôsme mínus siedme číslo, ktoré sú rovnaké ako druhé a prvé. Z rovnakých čísel a, b musíme dostať vždy to isté číslo c. Preto sa aj ďalšie čísla budú dookola opakovať. (Konkrétne prvých šesť čísel.)
Aké číslo teda môže mať 2008. človek v rade? $2008 : 6 = 334$ zv. 4. To znamená, že pred 2008-čku sa zmestí 334 šestíc $(1, x, x-1, -1, -x, 1-x)$ a 2008. človek bude mať rovnaké číslo ako štvrtý, a to -1.

<u>Komentár:</u> Takmer všetci ste si všimli, že prvá šestica čísel sa bude stále opakovať, ale len málo z Vás to odôvodnilo. Nabudúce treba napísať nielen to, že som si všimol, že to tak funguje, ale aj odôvodniť, prečo to tak bude fungovať vždy.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Majme prirodzené čísla m a n také, že posledná cifra čísla $m^2 + mn + n^2$ je nula. Ukážte, že aj predposledná cifra tohto čísla musí byť nula.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Katka, Filip)
Ako začať riešiť tento príklad? Máme dokázať, že ak je výraz m^2+mn+n^2 deliteľný 10, potom musí byť deliteľný 100. Poďme sa teda najprv pozrieť na to, kedy je výraz – nazvime si ho výraz V – deliteľný 10.
Treba si všimnúť jednu vec – to, či bude výraz V končiť nulou, závisí len od posledných cifier členov výrazu. A posledné cifry členov výrazu – m^2, mn a n^2 – zasa závisia od posledných cifier čísel m a n. Čo nám zostáva nájsť, sú také posledné cifry čísel m, n, pre ktoré bude výraz V končiť nulou.

Najpracnejšie z riešení je vypísať si všetkých sto možností (m aj n môžu mať na konci cifry od 0 po 9) a zistiť, kedy je výraz V deliteľný desiatimi. Keď sa ale trochu zamyslíme, vieme si riešenie podstatne skrátiť.
Výraz V má byť deliteľný desiatimi, teda musí byť párny. Ak by boli m a n nepárne, tak po dosadení zistíme, že aj celý výraz je nepárny. To isté platí vtedy, keď majú m a n rôznu paritu. Výraz V je teda párny iba vtedy, ak sú párne m aj n.
Po takejto skratke sa už oplatí rozobrať všetky kombinácie. Do úvahy zoberieme iba párne cifry. Prácu nám uľahčí to, že stačí každú dvojicu cifier zobrať do úvahy len raz. Napríklad, pre dvojicu 2 a 4 nezáleží na tom, či 2 je posledná cifra čísla m a 4 posledná cifra čísla n alebo naopak, pretože V je symetrický. Navyše si môžeme všimnúť, že ak jedno z čísel m, n končí nulou (je deliteľné desiatimi), potom aj druhé musí končiť nulou. Inak by výraz V nebol deliteľný desiatimi. (Premyslite si.) Na overenie nám zostali všetky kombinácie dvojíc z čísel $2, 4, 6, 8$, teda desať možností. Netreba pritom zabudnúť, že možná dvojica sú aj rovnaké čísla – napr. 8 a 8. Pre dvojicu čísel 2 a 4 by overenie vyzeralo takto: n končí na 2, m končí na 4, potom n^2 končí na 4, m^2 končí na 6 a mn končí na 8, potom celý výraz končí na 8, takže nie je deliteľný desiatimi.
Po overení všetkých možností zistíme, že jediné vyhovujúce posledné cifry čísel m, n sú $0, 0$. To znamená, že m, n musia byť deliteľné desiatimi, aby desiatka delila aj výraz V. Jediné, čo zostáva dokázať je, že pre m, n deliteľné 10 je výraz V deliteľný 100. Na to si stačí uvedomiť, že v každom člene výrazu – m^2, mn aj n^2 – násobíme medzi sebou dve čísla deliteľné desiatimi. Z toho vyplýva, že každý člen výrazu je deliteľný 100, a potom 100 delí aj výraz $m^2 + mn + n^2$, čo bolo treba dokázať.

Úloha č. 5: *Marika a Meky hrajú hru. Marika ide prvá a napíše na tabuľu jedno z čísel* 00, 01, 10 *alebo* 11. *V ďalších svojich ťahoch bude pridávať* 0 *alebo* 1 *na koniec doteraz napísaného čísla. Meky vo svojom ťahu vymení medzi sebou ľubovoľné dve už napísané cifry. Hráči sa v ťahoch striedajú. Hra končí, keď je na tabuli napísaných* 23 *cifier a Meky urobil poslednú výmenu. Meky vyhrá vtedy, ak je výsledné číslo symetrické. (Napríklad* 0011100 *alebo* 1010101.*) V opačnom prípade vyhrá Marika. Ktorý hráč vie vyhrať, aj keď druhý hrá najlepšie ako môže (teda kto má víťaznú stratégiu)?*

Riešenie: (opravovala Hanka a Kubko)
Ak hľadáme víťaznú stratégiu pre niektorého hráča a myslíme si, že sme ju našli, treba ju v riešení aj podrobne opísať. Veľmi ťažko sa opravuje riešenie, kde nie je jasné, aká je tá vaša stratégia a ako by ste ťahali v konkrétnej situácii. Pod víťaznou stratégiou si predstavujeme akýsi jasný postup, ktorý nám dá podrobný návod ako ťahať a vyhrať. Nemal by obsahovať miesta, kde sa hráč musí náhodne rozhodnúť. (Napr.: *„Posledný ťah ťaháme tak, aby sme to nepokazili.“*)
A teraz k príkladu. V hrách máme väčšinou vyhrávajúce stratégie pre prvých hráčov, keďže majú obvykle možnosť skôr zasiahnuť do deja a zvrátiť tak beh hry na svoju stranu. Teraz to vyzerá ešte nádejnejšie, lebo na začiatku Marika určí naraz dva znaky. Ale ako sa ukáže, teraz preváži skutočnosť, že Mekky má v hre posledné slovo a svoje si presadí, ak na chvíľu odloží gitaru a trochu sa zamyslí. Popíšeme si spôsob akým vie Mekky stále vyhrať.
Ak chceme, aby bol výsledný reťazec symetrický, tak nás vlastne nezaujíma, čo je v prvej polovici. Dôležité je, aby druhá bola jej zrkadlovým obrazom. K dobru nám poslúži aj fakt, že reťazec bude mať nepárnu dĺžku. Stredný znak (dvanásty) budeme využívať ako zásobník, kde si budeme „odkladať nepriaznivé znaky“. Pre párny počet znakov by mal Mekky smolu, lebo Marika by s ním vedela ľahko vybabrať. (Určite prídeš na to ako.)
Prvých jedenásť ťahov Mekky len náhodne mení čísla a tvári sa bezradne, aby Marike dodal falošnú nádej na výhru. Po jedenástom ťahu Marika položila prostredný znak reťazca a hra naozaj začína. Po položení trinásteho znaku Mekky skontroluje jeho zrkadlový obraz[1] a dvanásty znak . Môžu nastať tieto tri možnosti:

a) Nový znak a k nemu zrkadlový sú rovnaké. Vtedy ich napríklad vymeníme, čím symetriu reťazca na tomto mieste nepokazíme.

b) Nový znak a znak k nemu zrkadlový sú rôzne a dvanásty znak je rovnaký ako nový. V tomto prípade vymeníme dvanásty znak s tým v prvej polovici, čím docielime, že k sebe zrkadlové znaky budú rovnaké.

c) Nový znak a znak k nemu zrkadlový sú rôzne a dvanásty znak je iný ako nový, teda rovnaký ako k novému zrkadlový. Vtedy vymeníme naposledy pridaný znak za dvanásty, čím sme zase dosiahli rovnosť zodpovedajúcich si zrkadlových znakov.

Príklady na ilustráciu:

a) 1001100**1**001 **1** 100**1** (ne)zmení Mekky na 1001100**1**001 **1** 100**1**

b) 100110**0**1001 **1** 1001**1** zmení Mekky na 100110**1**1001 **0** 1001**1**

c) 10011**0**11001 **0** 10011**1** zmení Mekky na 10011**0**11001 **1** 10011**0**

[1]Teraz jedenásty a neskôr pod zrkadlový ku $(12 + k)$-temu prvku myslíme $(12 - k)$-ty.

Ako vidíme, žiadna iná možnosť nemôže nastať a pri každom ťahu od trinásteho až po posledný sme dosiahli rovnosť znakov na k-tom a $(23-k)$-tom mieste, čím je celý výsledný reťazec zaručene symetrický.
Ak sa ti nepáči že v prvej časti po dvanásty krok sme aj napriek varovaniu používali nejednoznačné kroky, kde sme kázali Mekkymu bezradne vymieňať náhodné čísla, tak to môžeš zmeniť na výmenu prvého za druhé. ;)

Úloha č. 6: *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje n-ciferné číslo deliteľné 5^n, ktoré má všetky cifry nepárne.*

Riešenie: (opravoval Ajka, Bebe)
Najskôr si vyskúšame, či zadanie platí pre malé n. Ak by vhodné čísla neexistovali, tak nemáme čo dokazovať. Ľahko nájdeme pre $n=1$ číslo 5, pre $n=2$ číslo 75, pre $n=3$ číslo 375 a pre $n=4$ číslo 9375. Vyzerá to tak, že nielenže takéto čísla existujú, ale majú aj zaujímavú vlastnosť. Každé ďalšie hľadané číslo sme dostali tak, že sme pridali vhodnú nepárnu cifru pred predošlé hľadané číslo. Skúsme, či to platí pre $n=5$. Hľadané číslo má byť deliteľné $5^5=3125$ a malo by končiť na 9375. A naozaj 59375 je deliteľné 3125, končí na 9375 a spĺňa všetky podmienky zo zadania. Takže by tento postup mohol naozaj fungovať.
Na základe nášho postupu dokážeme tvrdenie zo zadania poriadne – pomocou matematickej indukcie. Prvý krok platí, lebo pre $n=1$ vieme nájsť číslo vyhovujúce zadaniu. Predpokladajme, že vhodné číslo vieme nájsť pre nejaké n a v druhom kroku skúsime ukázať, že ho vieme nájsť aj pre $n+1$.
Označme a číslo, ktoré spĺňa podmienky pre n. (Teda n-ciferné číslo, s nepárnymi ciframi, deliteľné 5^n.) Potom a je násobkom 5^n, tj. $a=5^n\cdot k$, pre prirodzené k. Ďalej označíme b číslo spĺňajúce podmienky pre $n+1$. Číslo b vzniklo pridaním nepárnej cifry pred a, preto platí

$$b = x\cdot 10^n + a,$$

kde x je pridaná nepárna cifra. Teraz dosadíme vyjadrenie čísla a a upravíme

$$\begin{aligned} b &= x\cdot 10^n + 5^n\cdot k,\\ b &= x\cdot 2^n 5^n + 5^n\cdot k,\\ b &= 5^n(x\cdot 2^n + k). \end{aligned}$$

Z poslednej rovnosti vidíme, že b je deliteľné 5^n. My však chceme ukázať, že je deliteľné 5^{n+1}. Preto musí byť číslo $x\cdot 2^n + k$ deliteľné piatimi. Vieme, že k je ľubovoľné číslo a x je cifra ktorú pridávame. Takže pomocou x môžeme ovplyvniť deliteľnosť celého výrazu.
Teraz nasleduje odstavec o zvyškoch, ak im rozumieš nemusíš si ho čítať :). V pokračovaní riešenia budeme používať zvyšky. Preto si ukážeme, ako sa s nimi pracuje. Určite všetci viete, že zvyšok čísla 8 po delení piatimi je tri a zvyšok čísla 9 po delení piatimi je štyri. Čo sa stane keď tieto dve čísla sčítame, alebo vynásobíme? Aký zvyšok bude mať ich súčet, respektíve súčin? Pri súčte $8+9=17$ bude zvyšok po delení piatimi dva, lebo $3\cdot 5+2=17$. Tento zvyšok môžeme nájsť aj tak, že sčítame zvyšky čísel 8 a 9 po delení piatimi, tj. $3+4=7$ a nájdeme zvyšok po delení piatimi tohto súčtu, čo je tiež dva. Pri súčine to funguje podobne. Zvyšok súčinu $8\cdot 9=72$ po delení piatimi je dva. Vieme to zistiť aj tak, že vynásobíme zvyšky čísel 8 a 9 po delení piatimi, tj. $3\cdot 4=12$, a nájdeme zvyšok po delení piatimi tohto čísla, čo je tiež dva. Skúste si sami dokázať, že tento postup funguje pre všetky čísla, nielen pre osmičku a deviatku :)
Ďalej budeme používať len zvyšky po delení piatimi. Takže ak bude niekde použité slovo zvyšok, bude to zvyšok po delení piatimi.
Skúmajme deliteľnosť výrazu $x\cdot 2^n + k$ piatimi. Číslo k môže dávať všetky zvyšky, čiže 0, 1, 2, 3 alebo 4. Číslo 2^n môže dávať zvyšky 1, 2, 3 alebo 4. Zvyšok 0 nedáva, lebo nie je deliteľné piatimi. Za x si môžeme zvoliť ľubovoľnú nepárnu cifru. Chceme ukázať, že nech máme dané 2^n a k s hocijakým zvyškom, tak pomocou x vieme zariadiť, aby bol $x\cdot 2^n + k$ násobok piatich. Teda, že vhodnou voľbou x vieme vytvoriť všetky možné zvyšky súčinu $x\cdot 2^n$, pre ľubovoľné n. Potom si z nich vyberieme taký, aby jeho súčet so zvyškom k dal päť, a teda bol deliteľný piatimi.
Nasledujúca tabuľka znázorňuje zvyšok výrazu $x\cdot 2^n$. (Skontrolujte, či je napísaná správne. :))

x	zv. z 2^n po delení 5			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
3	3	1	4	2
5	0	0	0	0
7	2	4	1	3
9	4	3	2	1

Pretože v každom riadku je každý zvyšok práve raz, pre daný zvyšok čísla 2^n vieme vhodnou voľbou x dostať ľubovoľný zvyšok súčinu $x\cdot 2^n$. (Rozmyslite si prečo.) Teraz už len stačí použiť vhodné x.
Napr. ak 2^n má zvyšok tri a k má zvyšok dva (zvyšok pre x označíme z), tak postupujeme nasledovne. Má platiť, že $z\cdot 3+2$ je násobok piatich. To bude pre $z=1$ a teda x bude jednotka. Takýmto postupom dokážeme zvoliť x

tak, aby bol výraz $x \cdot 2^n + k$ deliteľný piatimi, a teda aj $n+1$-ciferné číslo $b = x \cdot 2^n 5^n + 5^n \cdot k$ deliteľné 5^{n+1}. Takže sme dokázali druhý krok indukcie, čím je úloha vyriešená.

Úloha č. 7: *Shakira má doma štvorčekovú sieť rozmerov $2n \times 2n$, kde n je prirodzené číslo. Na niektorých jej políčkach sú rozmiestnené biele a na niektorých čierne kamene. Sú rozmiestnené tak, že na každom políčku je buď jeden kameň alebo žiadny kameň. Shakira veľmi obľubuje nasledujúcu hru. Najskôr odstráni všetky čierne kamene, ktoré sú v rovnakom stĺpci ako nejaký biely kameň. Následne odstráni všetky biele kamene, ktoré sú v rovnakom riadku ako nejaký zo zvyšných čiernych kameňov. (A tým hra končí.) Dokážte, že po takejto hre ostane na sieti z niektorej farby (bielej, čiernej alebo oboch) nanajvýš n^2 kameňov.*

Riešenie: (opravoval Bus)

Najskôr si uvedomme, že nie je vôbec podstatné, v akom poradí a aké presne kroky spraví Shakira. Dôležité je len to, že na konci nebudú v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci biele aj čierne kamene zároveň. Vďaka tomu si môžeme každý z riadkov a stĺpcov (po Shakiriných ťahoch) označiť buď ako „biely“ alebo ako „čierny“. Biele budú tie riadky a stĺpce, v ktorých sú len biele kamene alebo prázdne miesta. Čierne budú zas tie riadky a stĺpce, v ktorých sú len čierne kamene alebo prázdne miesta. Riadky a stĺpce, ktoré sú celé úplne prázdne, si môžeme označiť ľubovoľnou farbou. Nech x je počet bielych riadkov a y počet bielych stĺpcov. Keďže každý radok je buď biely alebo čierny, počet čiernych riadkov a stĺpcov musí byť potom $2n - x$ a $2n - y$.

Všimnite si, že každý biely kameň leží v bielom riadku aj bielom stĺpci. Počet políčok, na ktorých sa pretínajú biele riadky s bielymi stĺpcami je presne xy, preto môže byť bielych kameňov na šachovnici najviac xy. Podobne čiernych kameňov môže byť najviac $(2n-x)(2n-y)$. Našou úlohou je dokázať, že aspoň z jednej farby je počet kameňov na šachovnici menší alebo rovný n^2. Dôkaz budeme robiť sporom. Predpokladajme, že kameňov z oboch farieb je viac ako n^2. Potom platí

$$\begin{aligned} n^2 &< \text{počet bielych kameňov} && \leq xy, \\ n^2 &< \text{počet čiernych kameňov} && \leq (2n-x)(2n-y) \end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned} n^2 &< xy, \\ n^2 &< (2n-x)(2n-y). \end{aligned}$$

Spor by sme teraz mohli dostať postupným upravovaním týchto dvoch nerovníc – napríklad tak, že by sme z oboch vyjadrili neznámu x. Pozrime si však radšej intuitívnejší spôsob, ako dospieť k výsledku. Ľahko môžeme vidieť, že ak sú x aj y obe rovné n, nastane presne rovnosť. Rozoberme tri možnosti, v akom vzťahu môžu byť čísla x a y k číslu n. Ak by boli obe menšie alebo rovné n, neplatila by prvá z nerovností. Ak by boli zas obe väčšie alebo rovné n, neplatila by druhá z nerovností. Ostáva nám teda posledná možnosť, a to že jedno z čísel je menšie ako n a druhé je väčšie ako n. Zapíšme si preto čísla x a y do užitočnejšieho tvaru ako $x = n + a$ a $y = n - b$, kde a, b sú kladné. (Vzhľadom na symetriu úlohy v neznámych x, y si môžeme povedať, že $x \geq y$.) Nerovnosti sa nám zmenia na

$$\begin{aligned} n^2 &< (n+a)(n-b), \\ n^2 &< (n-a)(n+b), \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} n^2 &< n^2 + na - nb - ab, \\ n^2 &< n^2 - na + nb - ab, \end{aligned}$$

čo môžeme sčítať a dostaneme

$$2n^2 < 2n^2 - 2ab.$$

Keďže a, b sú kladné, toto je jasný spor. Tvrdenie je teda dokázané.

Úloha č. 8: *Hovorí sa, že kto hľadá, nájde. V tejto úlohe máte nájsť všetky trojice nezáporných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí*

$$2^a + 3^b = 4^c.$$

Nezabudnite zdôvodniť, prečo ďalšie trojice okrem nájdených už neexistujú.

Riešenie: (opravoval Ika, Petržlen)

Aby platila daná rovnosť, musia byť obe jej strany buď párne alebo nepárne. Nech je b akékoľvek, 3^b bude nepárne. Keby potom boli 2^a aj 4^c párne, dostali by sme $P + N = P$ (P - párne, N - nepárne), čo neplatí. Našťastie 2^a môže byť aj nepárne, a to práve vtedy, keď $a = 0$. Podobne aj 4^c je nepárne práve vtedy, keď $c = 0$. Keby boli obe nepárne, tak by sme mali $N + N = N$, to zase nemôže byť pravda. Takže musí platiť $a = 0$ alebo $c = 0$, ale nie obe naraz.

Keby $c = 0$, tak riešime už len rovnicu $2^a + 3^b = 1$, ktorá nemá riešenie, pretože oba členy naľavo sú aspoň 1. Takže nám stačí uvažovať prípad $a = 0$, $c > 0$. Dosadením dostaneme (jednoduchšiu) rovnicu

$$1 + 3^b = 4^c, \tag{1}$$

ktorú si vieme upraviť na

$$\begin{aligned} 3^b &= (2^2)^c - 1 = (2^c)^2 - 1, \\ 3^b &= (2^c - 1)(2^c + 1), \end{aligned} \tag{2}$$

pričom sme zapísali 4 ako 2^2 a potom použili vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ pre $A = 2^c$, $B = 1$.
Na pravej strane rovnice (2) je súčin dvoch celých čísel a vľavo je súčin b trojok. Z toho vyplýva, že $2^c - 1$ aj $2^c + 1$ sú mocninami trojky. Rozdiel čísel $2^c - 1$ aj $2^c + 1$ je -2, a preto nemôžu byť obe deliteľné 3. Jediná mocnina 3, ktorá nie je deliteľná 3 je $3^0 = 1$. Teda $2^c + 1$ alebo $2^c - 1$ musí byť 1. Ak by $2^c + 1$ bolo 1, tak $2^c = 0$, čo nemá riešenie. Ostáva nám možnosť $2^c - 1 = 1$, potom $c = 1$ a $2^c + 1 = 3$. Celý súčin $(2^c - 1)(2^c + 1)$ je $1 \cdot 3 = 3^1$ a ľahko overíme, že platí $2^0 + 3^1 = 4^1$.
Ukázali sme, že jediné riešenie danej rovnice je $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$.

<u>Iné riešenie:</u>
Keď sa v našich úvahách dostaneme po rovnicu (1), môžeme ju riešiť aj inak, napríklad pomocou zvyškov po delení číslom 8. Keď sa dva výrazy rovnajú, tak dávajú aj rovnaký zvyšok po delení ľubovoľným číslom. Pozrime sa, aké zvyšky po delení 8 dáva 3^b v závislosti od čísla b. (Odteraz zvyšok znamená vždy zvyšok po delení číslom 8.) Vyskúšame si to pre malé mocniny čísla 3 a zbadáme, že nám striedajú zvyšky 1 a 3. Poďme dokázať, že to tak bude vždy. Ak 3^b dáva zvyšok 1, tak existuje celé číslo k, pre ktoré platí $3^b = 8k + 1$. Potom

$$3^{b+1} = 3 \cdot 3^b = 3(8k + 1) = 8 \cdot (3k) + 3,$$

čo je určite číslo, ktoré dáva zvyšok 3 po delení 8. Na druhú stranu, ak $3^b = 8k + 3$, tak

$$3^{b+1} = 3 \cdot 3^b = 3(8k + 3) = 8 \cdot (3k) + 9 = 8 \cdot (3k + 1) + 1,$$

čo je určite číslo, ktoré dáva zvyšok 1 po delení 8. Teraz je už snáď jasné, že dostaneme len zvyšky 1 a 3. (Premyslite si!)
Zistiť zvyšok čísla 4^c po delení číslom 8 je veľmi jednoduché. Ten zvyšok je 1 pre $c = 0$, 4 pre $c = 1$ a 0 pre $c > 1$. Teraz sa pozrieme na rovnicu z hľadiska deliteľnosti 8. Vieme, že 3^b nám môže dať len zvyšok 3 alebo 1 a 4^c nám môže dať len zvyšok 0 alebo 4 ($c \neq 0$). Sami si ľahko všimnete, že rovnica (1) bude splnená len ak 3^b bude dávať zvyšok 3 a 4^c zvyšok 4 ($1 + 3 = 4$). To však nastane len v prípade $c = 1$. Potom $3^b = 4^1 - 2^0 = 4 - 1 = 3$, teda b musí byť 1. Vyšlo nám rovnaké riešenie ako v predošlom postupe.

<u>Komentár:</u> (Iný zápis zvyškov po delení.) Namiesto „47 dáva zvyšok 5 po delení 42" sa matematici rozumne dohodli, že to budú zapisovať skrátene v podobe $47 \equiv 5 \mod 42$. Znak $\equiv$ sa číta „je kongruentné". S kongruenciami môžeme robiť nasledovné úpravy. (Ktorých platnosť si dokážte sami.) Ak a, b, w, k a $c \neq 0$ sú celé čísla a $a \equiv b \mod c$, tak platí

$$\begin{aligned} a + w &\equiv b + w && \mod c, \\ a + kc &\equiv b && \mod c, \\ aw &\equiv bw && \mod c. \end{aligned} \tag{3}$$

Napríklad v druhom riešení sme riešili $1 + 3^b \equiv 4^c \mod 8$. Platí

$$\begin{aligned} 3^0 &\equiv 1 \mod 8, \\ 3^1 &\equiv 3 \mod 8, \\ 3^2 &\equiv 1 \mod 8 \end{aligned}$$

a to, že sa tie zvyšky opakujú vyplýva z posledného riadku (3). Ďalej $4^1 \equiv 4 \mod 8$ a $4^2 \equiv 0 \mod 8$ a zvyšok 0 tam zostane z rovnakého dôvodu. Potom výsledok dostaneme rovnakou úvahou ako predtým, ale popíšeme oveľa menej papiera.
Pomocou kongruencií sa niektoré veci ľahšie ukazujú, napríklad to, že zvyšky $a^b \mod c$ sa pre pevné a, c začnú cyklicky opakovať vyplýva len z (3) a z toho, že zvyškov po delení c je konečný počet.

<u>Domáca úloha:</u> Premyslite si, kedy môžeme deliť kongruentné výrazy. Presnejšie, kedy z $a \equiv b \mod c$ vieme usúdiť $a/w \equiv b/w \mod c$, pričom $w \not\equiv 0 \mod c$, lebo nulou sa nesmie deliť. Napríklad $4 \equiv 6 \mod 2$, ale $2 \equiv 3 \mod 2$ už neplatí.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Na večierku je $2n$ ľudí, kde n je prirodzené číslo. Každý človek na večierku má párny počet priateľov. Priateľstvo považujeme za vzájomné, teda ak je Britney priateľkou Enriqueho, tak aj Enrique je priateľom Britney. Dokážte, že na večierku existujú dvaja ľudia, ktorí majú párny počet spoločných priateľov. (Nulu považujeme za párne číslo, lebo je bezo zvyšku deliteľná dvomi.)*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Myrec, Mišo)
Túto úlohu je najjednoduchšie riešiť sporom. Budeme predpokladať, že každí dvaja ľudia na večierku majú nepárny počet spoločných priateľov. Teraz si vyberieme ľubovoľného človeka na večierku. Označme si ho B (ako Boss). Vieme, že B má párny počet priateľov. Keďže okrem B je na večierku nepárny počet ľudí, tak existuje nepárny počet ľudí, s ktorými sa B nepriatelí, volajme ich *bradáči*. Tých, s ktorými sa B priatelí nazvime *fúzači*. Pretože priateľstvo je vzájomné, tak počet priateľstiev medzi fúzačmi a bradáčmi je rovnaký ako počet priateľstiev medzi bradáčmi a fúzačmi. Teraz sa pozrieme na paritu priateľstiev medzi fúzačmi a bradáčmi dvoma rôznymi spôsobmi.

1) Každý bradáč má medzi fúzačmi nepárny počet priateľov, pretože musí mať nepárny počet priateľov spoločných s B. A kedže bradáčov je nepárny počet, tak celkový počet priateľstiev medzi bradáčmi a fúzačmi je tiež nepárny. (Súčet nepárne veľa nepárnych čísel je nepárne číslo.)

2) Každý fúzač má nepárny počet priateľov medzi fúzačmi, pretože tiež musí mať nepárny počet spoločných priateľov s B. Každý fúzač sa teda priatelí s B a s nepárnym počtom fúzačov, a teda sa musí priateliť s párnym počtom bradáčov. To ale znamená, že počet priateľstiev medzi fúzačmi a bradáčmi je párny. (Súčet párnych čísel je párne číslo.)

A už je to tu. Párne číslo sa má rovnať nepárnemu číslu, čo je náš sľubovaný a očakávaný spor. Howgh.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Určte všetky funkcie*[2] *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí*

$$f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

<u>Riešenie:</u> (opravovali Katka :P a Škrečok :P)
Nazdár! Príklad, v ktorom máte nájsť všetky funkcie, ktoré spĺňajú nejakú vlastnosť voláme funkcionálne rovnice. Pri riešení tejto funkcionálnej rovnice máme nájsť všetky funkcie, ktoré spĺňajú uvedenú rovnosť pre všetky reálne čísla x a y. Najlepší začiatok riešenia funkcionálnej rovnice preto spočíva v dosadzovaní špeciálnych hodnôt za tieto premenné, čím získame nejaké ďalšie informácie o zatiaľ neznámej funkcii f. Tieto špeciálne hodnoty môžu byť napríklad $x = y = 0$ (za obe premenné dosadíme nulu), $x = y = a$ (za obe premenné dosadíme ľubovoľné číslo a) či $x = a$, $y = -b$ pre nejaké reálne čísla a, b. Z takýchto dosadení dostaneme rovnosti, ktoré môžeme v ďalšom riešení používať, prípadne objavíme špeciálne vlastnosti hľadanej funkcie. My sme už úlohu vyriešili, preto sem napíšeme len tie dosadenia, ktoré nám povedia niečo dôležité. (Aj keď počas riešenia sme určite robili aj zbytočné dosadenia, z ktorých dostaneme napríklad $0 = 0$.)
Skúsme do rovnosti zo zadania dosadiť $y = 0$. Dostávame

$$f\left(x^2 + f(0)\right) = x^2 f(x),$$

z čoho vidno, že funkcia f musí byť párna. Totiž prípad $x = 0$ nás pri skúmaní parity trápiť nemusí a pre $x \neq 0$ platí

$$f(x) = \frac{f\left(x^2 + f(0)\right)}{x^2} = \frac{f\left((-x)^2 + f(0)\right)}{(-x)^2} = f(-x).$$

Teraz urobíme ďalšie dve dosadenia $x = a,\ y = b$ a $x = -a,\ y = b$ pre nejaké reálne čísla a, b.

$$\begin{aligned} f\left(a^2 + f(b)\right) &= (a-b)^2 f(a+b), \\ f\left((-a)^2 + f(b)\right) = f\left(a^2 + f(b)\right) &= (-a-b)^2 f(-a+b) = (a+b)^2 f(-a+b). \end{aligned}$$

Vidíme, že ľavé strany týchto dvoch rovností sa rovnajú, musia sa teda rovnať aj pravé. Preto platí

$$(a-b)^2 f(a+b) = (a+b)^2 f(-a+b) = (a+b)^2 f(a-b),$$

pričom druhá rovnosť platí vďaka párnosti f. Môžeme si všimnúť, že v tejto rovnosti vystupujú rovnaké členy, zavedieme si preto substitúciu $a - b = c$, $a + b = d$. (A vy vymyslite, prečo ku každej dvojici c, d existuje vhodná dvojica a, b, pre ktorú platí $a - b = c$, $a + b = d$.) Dostávame tak nový (omnoho jednoduchšie vyzerajúci) vzťah

[2] Ak sa s úlohou tohto typu stretávate prvýkrát, odporúčame vám prečítať si text o funkcionálnych rovniciach na adrese `atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/files/bakalarka.pdf`

$c^2 f(d) = d^2 f(c)$, ktorý musí platiť pre ľubovoľné reálne čísla c a d. Aby sme si situáciu ešte zjednodušili, položíme $d = 1$ a máme, že platí

$$f(c) = c^2 f(1). \tag{4}$$

Dostali sme už celkom dobrý tvar hľadanej funkcie, zostáva už len zistiť konštantu $f(1)$. Tá sa už zistí pomerne ľahko, stačí tento nájdený tvar dosadiť do zadania a chvíľu búšiť do dosť nepekných výrazov. Omnoho krajšie je dosadzovať do „upraveného“ zadania, a to tak, že v ňom položíme $x = y$, čím získame vzťah $f\left(x^2 + f(x)\right) = 0$. Použitím (4) dostávame

$$f\left(x^2 + f(x)\right) = \left(x^2 + f(x)\right)^2 f(1) = \left(x^2 + x^2 f(1)\right)^2 f(1) = x^4 \left(1 + f(1)\right) f(1) = 0.$$

Táto rovnosť má platiť pre všetky reálne čísla x, preto je z nej ľahké zistiť, že buď $f(1) = 0$ alebo $f(1) = -1$. Dostávame dve *možné* riešenia $f(x) = 0$ a $f(x) = -x^2$. Nikto nám ale neručí za to, že sú to naozaj riešenia, my zatiaľ vieme iba to, že sú to *možné* riešenia. Preto je potrebné urobiť skúšku správnosti. To už ale hravo zvládne každý z vás. Mali by ste dostať, že obe nájdené funkcie vyhovujú rovnosti zo zadania. Hotovo.

Komentár: Chceli by sme pochváliť tých riešiteľov, ktorým sa podarilo vybojovať deväť-bodový boj s touto funkcionálnou rovnicou. Tým ostatným by sme chceli odkázať pár dobrých rád, ako si zachovať pri riešení takýchto úloh chladnú hlavu.

- Preberanie možností, akého typu môže daná funkcia byť (polynomiálna, exponenciálna a podobne), nie je dobrý nápad, pretože týchto možností je veľmi veľa, navyše sa dajú aj kombinovať.
- Funkcia sa nedá len tak „krátiť“ z oboch strán rovnice. Inak povedané, ak platí $f(a) = f(b)$, nemusí byť nutne pravda, že aj $a = b$.
- Na konci riešenia funkcionálnej rovnice treba vždy (až na zriedkavé výnimky) urobiť skúšku správnosti. Nemáme totiž žiadnu záruku, že funkcia, ktorá *môže* byť riešením, ním naozaj je (Podobne ako pri riešení rovníc s odmocninami.) Nazdár!

Úloha č. 11: *Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Dokážte, že

$$a + b + c + d \geq ab + bc + cd + da.$$

Riešenie: (opravovala Stanka)
(*podľa L.Baču, M. Hagaru, J.Konečného a M. Kukana*) Riešenie sa skladá z dvoch krokov. Najprv dokážeme, že

$$a + b + c + d \leq 4 \tag{5}$$

a potom to „dorazíme“ úpravou na štvorec. (Alebo aj inak.) Ukážeme si tri dôkazy nerovnosti (5) a to použitím priemerových nerovností AG[3], AK[4] a Cauchyho nerovnosti.[5]

a) Z AG nerovnosti pre kladné členy a^2 a 1 vieme, že $a^2 + 1 \geq 2a$, čo sa dá zistiť samozrejme aj jednoduchou úpravou na štvorec. Podobné nerovnosti platia aj pre b, c, aj d, po sčítaní týchto štyroch nerovností dostávame

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 \geq 2(a + b + c + d).$$

Dosadením väzby dostaneme nerovnosť (5).

[3] AG nerovnosť alebo aj nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom hovorí, že pre nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

[4] AK nerovnosť alebo aj nerovnosť medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom hovorí, že pre nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Skúste si túto nerovnosť dokázať pomocou Cauchyho nerovnosti.

[5] Cauchyho nerovnosť tvrdí, že pre reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ platí

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

Rovnosť nastáva v prípade, že vektory $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sú rovnobežné. (Jeden je násobkom druhého.)

b) Z AK nerovnosti pre kladné členy a, b, c, d máme

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Dosadením väzby a úpravou opäť dostávame (5).

c) Uvažujme štvoricu a, b, c, a d a štvoricu štyroch jednotiek. Podľa Cauchyho nerovnosti platí

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2) \geq (a+b+c+d)^2.$$

Odmocnením opäť dostávame nerovnosť (5).

Úlohu doriešime sporom. Predpokladajme, že nerovnosť v zadaní neplatí, teda

$$a+b+c+d < ab+bc+cd+da. \tag{6}$$

Keď vynásobíme ľavé a pravé strany nerovností (5) a (6) dostaneme

$$(a+b+c+d)^2 < 4(ab+bc+cd+da).$$

Všimnime si, že pravá strana tejto nerovnosti sa dá napísať ako $4(a+c)(b+d)$ a ľavá sa dá upraviť na $((a+c)+(b+d))^2$, čiže posledná nerovnosť je ekvivalentná s

$$((a+c)+(b+d))^2 < 4(a+c)(b+d).$$

To nás vedie k substitúcii $a+c=x$ a $b+d=y$, kde x a y sú kladné. Dostávame nerovnosť $(x+y)^2 < 4xy$, ktorá je ekvivalentná s $(x-y)^2 < 0$, čo je zrejme spor. Dokázali sme, že nerovnosť v zadaní platí.
Komentár: Namiesto sporu sme v poslednom kroku mohli priamo využiť AH[6] nerovnosť

$$\frac{(a+c)(b+d)}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}},$$

pričom vieme, že $a+b+c+d \leq 4$, takže máme

$$2 \geq \frac{2}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}},$$

čo môžeme upraviť na nerovnosť v zadaní. Rovnosť platí pre $a=b=c=d=1$ rozmyslite si, prečo.

Úloha č. 12: *Nájdite všetky spojité funkcie*[7] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *také, že pre všetky* $x, y \in \mathbb{R}$, *pre ktoré je* $x-y$ *racionálne, je aj* $f(x)-f(y)$ *racionálne.*
Riešenie: (opravoval Ondráč)
V tejto úlohe na vás číhal nepríjemný predpoklad a to spojitosť funkcie f. Ak ste dobre hľadali (alebo nebodaj poodvádzali z definície), mohli ste ľahko dôjsť k nasledujúcim jednoduchým vlastnostiam spojitých funkcií. Predpokladajme, že $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sú spojité funkcie a c je ľubovoľné reálne číslo. Potom platí

a) Funkcie $f+g$, cf sú taktiež spojité funkcie.

b) Funkcia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovaná predpisom $h(x)=g(x+c)$ je tiež spojitá.

c) Ak $a<b$ sú reálne čísla a $f(a)<f(b)$ (resp. $f(b)>f(a)$), potom funkcia f nadobúda na intervale $[a,b]$ všetky hodnoty z intervalu $[f(a),f(b)]$ (resp. $[f(b),f(a)]$).

Vlastnosti a), b) si skúste odvodiť z definície spojitosti. Formálny dôkaz vlastnosti c) si vyžaduje ovládať pojem supréma množiny. Intuitívny dôkaz vlastnosti c) však získame z predstavy, že spojité funkcie sú také, „ktorých graf vieme nakresliť jednou čiarou (bez zdvihnutia pera)“. Ak ste o týchto faktoch počas riešenia nevedeli, skúste si celú úlohu ešte raz premyslieť.

[6] AH nerovnosť alebo aj nerovnosť medzi aritmetickým a harmonickým priemerom hovorí, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1=a_2=\cdots=a_n$. Skúste si dokázať AH nerovnosť pomocou Cauchyho nerovnosti alebo pomocou AG nerovnosti.

[7] Ak ste sa s pojmom spojitej funkcie (anglicky continuous function) ešte nestretli, odporúčame pozrieť si definíciu a základné vlastnosti spojitých funkcií (napr. na internete: `http://www.math.sk/skripta/node134.html`). V prípade nejasností alebo otázok nás smelo kontaktujte na `kms@kms.sk`.

Predpokladajme, že funkcia f spĺňa podmienku zo zadania. Potom zadaniu vyhovuje aj funkcia $f+c$ pre ľubovoľné reálne číslo c. Preto stačí nájsť všetky spojité funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ktoré spĺňajú predpoklady zo zadania a navyše pre ne platí $f(0)=0$. (Kompletnú množinu vyhovujúcich funkcií potom získame tak, že k nájdeným ešte pričítame ľubovoľné reálne konštanty.)
Predpokladajme, že funkcia f vyhovuje zadaniu a $f(0)=0$. Nech $q\neq 0$ je racionálne číslo a funkciu $g_q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definujme vzťahom $g_q(x)=f(x+q)-f(x)$. Keďže $(x+q)-x=q$ je racionálne číslo, podľa predpokladu je aj $f(x+q)-f(x)=g_q(x)$ racionálne. Preto funkcia g_q nadobúda len racionálne hodnoty. Ďalej podľa vlastností a) a b) je funkcia g_q spojitá. To už začína vyzerať podozrivo. Máme spojitú funkciu, ktorá nadobúda len racionálne hodnoty. (Nenadobúda žiadne iracionálne.) Za pomoci vlastnosti c) ľahko ukážeme, že g_q musí byť konštantná. Ak by totiž $g_q(a)\neq g_q(b)$ pre reálne čísla $a\neq b$, potom vlastnosť c) hovorí, že g_q nadobúda všetky hodnoty nejakého intervalu. No my vieme (Ak nevieme, dokážeme si!), že v ľubovoľnom intervale sa nachádza aspoň jedno iracionálne číslo, čo je spor.
Označme $f(1)=d$. Zrejme d je racionálne ($1-0\in\mathbb{Q}$, preto aj $f(1)-f(0)=f(1)\in\mathbb{Q}$). Teraz dokážeme, že $f(r)=rd$ pre každé racionálne číslo r. Budeme postupovať v niekoľkých krokoch.

1) Pre každé prirodzené číslo n platí $f(1/n)=d/n$. Dôkaz môže prebiehať napríklad takto:

$$\begin{aligned} f(1)-f(0) &= \left[f\left(\frac{n}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{0}{n}\right)\right],\\ d &= g_{\frac{1}{n}}\left(\frac{n-1}{n}\right)+g_{\frac{1}{n}}\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+g_{\frac{1}{n}}\left(\frac{0}{n}\right),\\ d &= ng_{\frac{1}{n}}(0)=n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right],\\ d &= nf\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

V tretej rovnosti sme využili, že funkcia $g_{1/n}$ je konštantná. Ďalšie časti už nebudeme robiť tak podrobne, detaily si skúste domyslieť sami.

2) Pre každé kladné racionálne číslo m/n platí $f(m/n)=dm/n$.

3) Pre každé racionálne číslo q platí $f(q)=dq$.

Zistili sme, že funkcia f sa správa lineárne na racionálnych číslach, teda $f(q)=dq$ pre $q\in\mathbb{Q}$. Teraz si stačí uvedomiť, že ak by $f(x)\neq dx$ pre nejaké iracionálne číslo x, funkcia f by v bode x nebola spojitá. Je to dôsledok toho, že racionálne čísla sú husté v množine reálnych čísel a teda v ľubovoľnej blízkosti čísla x nájdeme racionálne číslo q, pre ktoré však platí $f(q)=dq$. (Premyslite si!) Tým sme dokázali, že funkcia f má tvar $f(x)\equiv dx$.
Ak si dobre spomíname, na začiatku sme si prirobili predpoklad $f(0)=0$. Preto hľadané funkcie môžu byť len tvaru $f(x)\equiv dx+c$ pre nejaké $d\in\mathbb{Q}$, $c\in\mathbb{R}$. Ľahko overíme, že takéto funkcie vyhovujú zadaniu. Tým je úloha vyriešená.

Úloha č. 13: *Hrany konvexného mnohostena sú orientované jednosmernými šípkami tak, že z každého vrcholu vychádza a do každého vrcholu vstupuje aspoň jedna šípka. Dokážte, že aspoň jedna stena mnohostena je taká, že šípky ležiace na jej obvode tvoria orientovaný cyklus.*

Riešenie: (opravoval Foto)
Predstavme si planétu M v tvare ľubovoľného mnohostena. Celá planéta je porastená nepriechodnou džungľou mrakodrapov, akurát pozdĺž hrán mnohostena vedú ulice – jednosmerky. Pre cestnú sieť planéty M platí, že z každej križovatky (rozumej vrchol mnohostena) vychádza aspoň jedna jednosmerka a aspoň jedna jednosmerka do nej vchádza. Dokázať sa žiada fakt, že existuje na planéte blok mrakodrapov (rozumej stena mnohostena), ktorý sa dá celý súvislo obísť dokola.
Na jednej z križovatiek pristál Malý Princ a vybral sa na prechádzku. Okamžite sa vzácnemu riešiteľovi tejto úlohy, ponúka nasledovná úvaha. Zo zadania vyplýva, že ak Malý Princ príde na ktorúkoľvek križovatku, vie z nej pokračovať inou jednosmerkou ďalej. Križovatiek je konečný počet a tak skôr či neskôr príde do takej, v ktorej už raz bol. Zoznam ulíc, ktoré Malý Princ prešiel medzi prvou a druhou návštevou tejto križovatky nazvime Veľký Orientovaný Cyklus. (Skrátene VOC.) Tento VOC je vlastne hranicou ktorá rozdeľuje planétu M na dva VÚC. (Rozumej vyššie územné celky.) Pozrime sa teraz bližšie na ten VÚC, ktorý mal Malý Princ, chodiac po VOC, celý čas po pravej ruke. Ak obsahuje len jeden blok mrakodrapov, tvrdenie v zadaní je splnené. Ak obsahuje blokov viac, vie Malý Princ svoj VOC vylepšiť nasledovne.
Za predpokladu, že existuje z aktuálneho VOC jednosmerka doprava, pôjde Malý Princ po nej a bude pokračovať ďalej podľa svojej ľubovôle, no v prikázanom smere jazdy, až kým nepríde naspäť von na VOC, alebo na križovatku vo vnútrozemí, na ktorej už raz bol. V oboch prípadoch vznikne Vylepšený Orientovaný Cyklus (skrátene VOC), ktorý nepresiahne za hranicu, čiže za pôvodný VOC. (Toto si treba poriadne premyslieť.) Napravo od nového VOC bude teda menšia oblasť, ako bola napravo od pôvodného VOC, čiže oblasť s menším počtom blokov.

Ak predchádzajúci predpoklad nie je splnený (teda *všetky ulice medzi hranicou VOC a vnútrozemím napravo smerujú von*), tak sa Malý Princ z VOC do vnútrozemia ani nedostane. Vtedy vytiahne z krabičky Ovečku a pošle ju do vnútrozemia s príkazom aby sa pohybovala vždy proti prikázanému smeru až kým nenájde cyklus. Vylepšený Orientovaný Cyklus nájdený Ovečkou bude celý vo vnútrozemí (premyslite si prečo) a teda bude ohraničovať opäť menšie územie ako pôvodný VOC. Problém dopravenia sa do vnútrozemia na nový Ovečkin VOC je pre Malého Princa vzhľadom na jeho dlhú prax pilota skutočne už len technický detail.
Na základe tohoto algoritmu sa dá ukázať, že ak sú napravo od pôvodného VOC nejaké ulice, tak existuje Vylepšený Orientovaný Cyklus ohraničujúci menší počet blokov ako aktuálny VOC. Postupne dostaneme aj taký VOC, ktorý nemá žiadnu ulicu napravo, takže VOC ohraničujúci práve jeden blok mrakodrapov.

Úloha č. 14: *Daný je ostrouhlý trojuholník* ABC *(*$|AB| \neq |AC|$*) s ortocentrom* H*. Body* D *a* E *ležia po rade na úsečkách* AB *a* AC *tak, že platí* $|AD| = |AE|$ *a body* D*,* E*,* H *ležia na priamke. Stred strany* BC *označme* M*. Dokážte, že priamka* MH *je rovnobežná so spojnicou stredov kružníc opísaných trojuholníkom* ABC *a* ADE*.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Prišlo nám iba jedno riešenie od Filipa Sládka, ktorý využil analytickú geometriu. Existujú viaceré iné riešenia, my uvedieme dve. Aby ste si užili krásu tohoto príkladu, riešenia budú pozostávať z postupnosti krokov, ktoré vás usmernia, pričom sme dôkazy čiastkových tvrdení nechali na vás. V prvom riešení sa musíte nejako popasovať so záverom (nechali sme na vás poslednú časť, ktorá sa dá zvládnuť napr. trigonometriou). Druhé riešenie je v podstate kompletné. (Musíte sa potrápiť len s detailmi.)

Prvé riešenie:

1) Zoberte si do rúk pero a papier a nakreslite si všetky body, priamky a kružnice spomenuté v zadaní. Dohodnime sa, že $|AB| > |AC|$. (Prečo si to môžeme povedať?)

2) Označme O resp. O' stred opísanej kružnice trojuholníku ABC resp. ADE. Ďalej nech A' je priesečník osi uhla BAC s opísanou kružnicou trojuholníku ABC rôzny od A. Označme A'' resp. A''' priesečník AH resp. AO s opísanou kružnicou trojuholníku ABC rôzny od A.

3) Dokážte, že A' je stred oblúka BC (na kružnici opísanej trojuholníku ABC), ktorý neobsahuje bod A. To je ekvivalentné tomu, že body M, O a A' ležia na jednej priamke, alebo, že uhol CMA' je pravý.

4) Dokážte, že úsečka BC rozpoľuje úsečku HA''.

5) Dokážte, že body A'' a A''' sú osovo súmerné podľa priamky OA'. (Môžete porovnať uhly $A''OA'$ a $A'''OA'$.)

6) Za pomoci 4) a 5) usúďte, že body A'', M a H ležia na jednej priamke. Túto informáciu vieme využiť k rôznorodým ekvivalentným formuláciám riešenia. V nasledujúcom kroku uvedieme jedno z nich.

7) Označme N priesečník AA' a MH. Rovnobežnosť OO' a MH je potom ekvivalentná s rovnobežnosťou OO' a $A''N$. Tieto dve priamky sú však rovnobežné práve vtedy keď $|AO|/|AA''| = |AO'|/|AN|$ (rovnoľahlosť). Zrejme však $|AO|/|AA''| = 1/2$, preto stačí dokázať, že $|AO'|/|AN| = 1/2$ alebo $2|AO'| = |AN|$. Ak máte radi trigonometriu, toto sa pomocou nej už dá ukázať.

Druhé riešenie:

1) Môžeme zvoliť iný prístup. Opäť si nakreslíme pekný obrázok (s predpokladom z prvého riešenia, krok 1) a vyznačíme si body O, O', A'' ako v druhom kroku prvého riešenia. Pokúsime sa nájsť vhodnú priamku, na ktorú budú kolmé obe priamky OO' aj MH.

2) Najprv uvažujme len priamku OO'. Označme R priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ADE rôzny od A. (Ten priesečník existuje vďaka $|AB| \neq |AC|$.) Priamka OO' je kolmá na chordálu kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE, teda OO' je kolmá na AR.

3) Nakreslite si nový obrázok, ale tentoraz môžete úplne vynechať body D, E, O' a kružnicu opísanú trojuholníku ADE. Označme postupne päty kolmíc z bodov B, C na strany AC, AB písmenami B'', C''. Ukážte, že kružnica opísaná trojuholníku $AB''C''$ bude mať s kružnicou opísanou trojuholníku ABC priesečník P rôzny od A, ktorý bude v polrovine opačnej k ACB.

4) Na obrázku máme mnoho cyklických štvoruholníkov. Môžeme začať jednoduchými (až triviálnymi) ako $ABCP$, $BCB''C''$, či $AC''HB''$. Pomocou nich vieme ukázať, že aj $MCPC''$ je tetivový. Potom môžeme napísať $|\sphericalangle MPA| = |\sphericalangle MPC''| + |\sphericalangle C''PA|$ a pomocou toho ukázať, že uhol MPA je pravý. Z toho vyvoďte, že bod H leží na úsečke MP.

5) Pozrieme sa na obrázky ku krokom 2 a 4. Vidíme, že OO' je kolmá na tetivu AR (obr. ku kroku 2) a MH je kolmá na tetivu AP (obr. ku kroku 4). Jediná šanca, aby platilo tvrdenie zo zadania je, ak AP a AR sú rovnobežné. To nastane práve keď body P a R sú totožné. Stačí už len ukázať, že $P = R$.

6) Čas na nový obrázok, tentokrát nekreslite kružnicu opísanú trojuholníku ADE! Kružnicu opísanú trojuholníku $AB''C''$ si však nakreslite, rovnako aj bod R. Dokážeme, že body A, D, E a R ležia na kružnici (čo nám zaručí $P = R$!).

7) Postupne skúste dokazovať podobnosti trojuholníkov $HC''B$ a $HB''C$, HDC'' a HEB''. Pomocou pomerov a uhlov zistíte, že aj trojuholníky RBC'' a RCB'' sú podobné. Skombinovaním týchto výsledkov zase dostaneme, že trojuholníky RDC'' a REB'' sú podobné, z čoho už máme zaručené $|\sphericalangle RDC''| = |\sphericalangle REB''|$, teda aj $|\sphericalangle RDA| = |\sphericalangle REA|$, z čoho vieme, že $ADER$ je tetivový štvoruholník.

8) Krokom 7 sme dokázali, že $P = R$, čo podľa kroku 5 stačí k tomu, aby MH a OO' boli rovnobežné. Tým sme tvrdenie dokázali. Pre istotu si to ešte celé raz prejdite a skúste dokončiť kroky, ktoré ste nevedeli.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	11	8			9	9	9	9	9		45	135
1.	Chlebíková Andrea	3.	Brighton UK	6	2		9	9	9	9	9			45	135
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	2	0	9	9	9	9	9	6	9		45	135
4.	Kossaczký Pavol	4.	Gamča BA	6	1		9	9	9	7		9		43	131
5.	Tóth Róbert	4.	GAlej KE	5	0		6	3	8	9	9	9		41	129
6.	Horňák Marián	2.	GPár NR	4	1		9	9	9		9	2		38	128
7.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	6	1		6	9	9	9	8			41	126
8.	Balog Matej	3.	Gamča BA	5	0	1	9	8	9	5	4			35	122
8.	Hagara Michal	4.	GJH BA	10	8			1	8	9	9	9		36	122
10.	Galovičová Soňa	2.	GVO ZA	5	0	9	9	4	9		4			35	118
11.	Guričan Pavol	3.	GJH BA	7	2		9	5	9		9	9		41	117
11.	Kopf Michal	2.	Opava ČR	4	0	9	6		8	8		9		40	117
11.	Žídek Augustin	2.	Frýdlant ČR	4	0	9	9	3	8	9				38	117
14.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	7	3			5	9		9	9		32	112
14.	Szabados Viktor	3.	Gamča BA	8	2		6	4	9	9	3			31	112
16.	Phuong Mariana	3.	GJH BA	6	1		9	9	9	9	1			37	109
17.	Csiba Dominik	3.	ŠPMNDG BA	7	2		4	5	9	9	3			30	108
17.	Faršang Štefan	3.	SJG KN	5	1		5	6	9		9			29	108
19.	Karásková Natália	3.	GJH BA	9	7			9	9		9			27	106
20.	Kozák Andrej	3.	Gamča BA	8	2		8	6	8	9	2			33	105
21.	Hozza Ján	3.	GJH BA	6	4			9	8		6	8		31	100
21.	Le Tuan Anh	3.	Gamča BA	8	2		9		8					17	100
23.	Konečný Jakub	4.	Gamča BA	11	7				8	9	7	9		33	99
24.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	2	0	9		4	9					22	98
25.	Tóth Michal	2.	GJH BA	4	0	9	6	3	9			3		30	97
26.	Kosec Peter	2.	GĽŠ TN	4	0	9	0	2	8	7	3			29	92
27.	Faguľová Kristína	2.	GPoš KE	5	0	9	3	2	7	2				23	91
28.	Baxová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	3	6	0	6	9				24	90
28.	Hlavatá Martina	3.	Gamča BA	7	1		9	9	5					23	90
30.	Koprda Pavol	2.	GAM TT	4	0	4	5	3	6	9				27	88
30.	Kováč Ondrej	3.	GCM NR	7	2		7	3	6	7	4			27	88
32.	Bogár Ján	4.	GĽŠ TN	9	2			4	9		3	9		25	87
33.	Halajová Barbora	2.	GVO ZA	5	0	4	2	3	7	2				18	86
33.	Midlik Adam	4.	GJAR PO	8	3			5	9	9	4			27	86
35.	Lami Vincent	4.	SJG KN	5	2		7	4	8		5			24	85
36.	Klembarová Barbora	2.	GKuk PP	4	0	6	0	8	9	1				24	83
37.	Belanová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	6	7	8					30	82
37.	Vlček Andrej	2.	EvSŠ LM	4	0	7	6	9	9		4			35	82
39.	Bačo Ladislav	4.	GPoš KE	11	8			9	9		9	9		36	81
39.	Jasenčáková Katarína	2.	GVO ZA	5	0	5	4	3	9					21	81

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
41.	Nováková Daniela	2.	GPár NR	4	0	9		7	9					25	78
42.	Večerík Matej	3.	ŠPMNDG BA	7	2			5	5		2	2		14	74
43.	Švančara Patrik	2.	GĽŠ TN	4	0	9	0	2	7					18	71
44.	Langer Tomáš	2.	GJH BA	4	0	7	5	4	9	0				25	70
44.	Marečáková Barbora	2.	GKuk PP	4	0	9	0		9	1				19	70
46.	Kubincová Petra	3.	ŠPMNDG BA	7	1		2	6	5	9				22	69
47.	Kmeťová Katarína	2.	GKuk PP	4	0	7		2	7					16	66
47.	Majdiš Mojmír	4.	GPOH DK	7	1			7	9	0				16	66
49.	Dupej Peter	2.	GJAR PO	4	0	9	6	3	7	0				25	63
49.	Jakubík Ján	3.	SPŠE PN	6	0	1		2	7					10	63
49.	Peitl Tomáš	4.	ŠPMNDG BA	10	4			5	9	9	4			27	63
52.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	0	8	2	9	5		2	2		26	62
53.	Baranová Jana	4.	GAlej KE	8	2									0	60
53.	Varga Mátyás	3.	SJG KN	4	0	4			5					9	60
55.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	2	0	2	3	2	8					15	59
56.	Sládek Filip	4.	GAB NO	8	8						9	9		18	54
57.	Harmanová Dominika	3.	GJH BA	3	0									0	53
58.	Macháč Juraj	3.	GJH BA	5	0	4		6	7					17	52
59.	Mužík David	2.	GChD Praha	4	1			2	5			1		8	49
60.	Santrová Adriana	2.	GMH Trstená	4	0	7		2						9	48
61.	Štyráková Kamila	4.	GPOH DK	10	3			5	9	9				23	47
62.	Sabatovičová Linda	3.	GJH BA	7	1									0	46
63.	Kocák Jakub	3.	GLS HE	5	0									0	42
63.	Stehlík Matúš	3.	GAlej KE	5	0									0	42
63.	Šimková Mária	4.	GJF Šaľa	4	0		2		4	0				6	42
66.	Daniláková Monika	2.	GJAR PO	4	0									0	41
67.	Bogárová Zuzana	3.	GĽŠ TN	6	1			2	7			3		12	40
68.	Múthová Denisa	3.	GTR ZA	7	1									0	37
69.	Hajdinová Katarína	3.	GJH BA	6	1									0	36
70.	Anderle Michal	3.	GBST LC	5	0						8			8	32
70.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	3	0									0	32
72.	Vavrík Boris	3.	GJH BA	5	0									0	30
73.	Floriánová Michaela	4.	GJH BA	8	0									0	28
74.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	1	0									0	26
75.	Kopcová Monika	3.	Gamča BA	4	0									0	25
75.	Mariš Andrej	2.	PiarG NR	3	0									0	25
77.	Žákovská Uršuľa	2.	Gamča BA	4	0									0	23
78.	Makuch Matej	3.	GJGT BB	4	0	8	3	2	4					17	21
79.	Ďurikovičová Lucia	3.	GsvU BA	4	0				4	1		1		6	17
79.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3	0		3			1	1	5		10	17
81.	Dižová Andrea	3.	GKom PE	7	2									0	16
82.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	1	0			9		0				9	15
82.	Masár Juraj	3.	GJH BA	6	1									0	15
84.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	1	0						0	0		0	12
85.	Porembová Alexandra	3.	GJH BA	6	1									0	6
86.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3	0	3		0	1					4	5
86.	Rigdová Emília	4.	GKuk PP	7	1									0	5
88.	Leitner Matej	3.	GJGT BB	4	0									0	0

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	8	8	8		9	3		127
2.	Smolík Martin	1.	Gamča BA	2		9	8	0	9	5	4		115
3.	Hledík Michal	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9				114
4.	Smolík Michal	1.	Gamča BA	2		9	8	0	9	5	4		109
5.	Petrucha Jaroslav	1.	GMet BA	1	8	8	8	9			4		107
6.	Smolík Milan	1.	Gamča BA	2		7	8	7	8		2		105
7.	Vlachynská Petra	2.	GBil BA	3			9	8	7		3		100
8.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	2			8	5	2	3	2		95
9.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	2					9		4		90
10.	Heželyová Ivana	1.	ŠPMNDG BA	1	4	8	6	7			1		86
11.	Krajčovič Matej	1.	GJH BA	1	9		8		1	2			83
12.	Páleník Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	6	8	6		7		2		78
13.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	1	4	8	8	1			9		60
14.	Bock Michal	1.	Gamča BA	2		8	0	7	6		0		56
15.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	1									50
16.	Krajčovič Michal	1.	GJH BA	1									41
17.	Pavlovič Tomáš	1.	GJH BA	1									39
18.	Harmanová Dominika	3.	GJH BA	3									37
19.	Majdán Tomáš	1.	GJH BA	1									33
20.	Jamrichová Lucia	1.	ŠPMNDG BA	1	4	7	8	9	3		0		31
20.	Šteis Lukáš	1.	ŠPMNDG BA	1									31
20.	Žitňanský Tomáš	1.	GJH BA	1									31
23.	Bliznakovová Kristína	1.	ŠPMNDG BA	1									30
23.	Řehořka Patrik	1.	GJH BA	1									30
25.	Stríbrnský Branislav	1.	GJH BA	1									27
26.	Spustová Karolína	1.	ŠPMNDG BA	1									26
27.	Holíková Zuzana	1.	GCSL BA	1									20
28.	Múčková Nikola	1.	GJH BA	1									17
29.	Šimek Lukáš	1.	GJH BA	1									15
30.	Kakaš Richard	1.	GJH BA	1									14
30.	Zorgovská Klaudia	1.	GCSL BA	1									14
30.	Šmid Peter	1.	GJH BA	1									14
33.	Matlovič Tomáš	1.	GJH BA	1									12
33.	Zelenák Fero	1.	GJH BA	1									12
35.	Nakhlé A.	1.	GJH BA	1									9
36.	Jasaň Jakub	1.	GJH BA	1									8

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kováčová Milada	1.	GCM NR	1	9	5	8	3	5				76
2.	Pločeková Andrea	3.	GPdC PN	3			5	4	2	5	0		56
3.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	2									53
4.	Cibulka Samuel	1.	GAV LV	1									31
4.	Mariš Andrej	2.	PiarG NR	3									31
6.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	3									30
7.	Tilešová Kristína	2.	GKom PE	2									2

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	1	9	9	8	2	9	4	3		126
2.	Macko Vladimír	1.	GĽŠ ZV	1	9	7	8	9	9		2		122

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
3.	Benešová Katarína	1.	GAS BB	1	9	8	5	3	9				111
4.	Surovčík Juraj	1.	GPOH DK	1	8	9	8	8	3		2		93
5.	Santer Martin	1.	GMH Trstená	1	5	6	8		9				90
6.	Nociarová Jela	1.	GBST LC	1		8	6	9					81
7.	Turčanová Terézia	1.	GĽŠ ZV	1	1	9	7		5	2			68
8.	Šubjak Ján	1.	GPOH DK	1									55
9.	Sládek Samuel	-2.	GAB NO	-2									43
10.	Búlik Martin	3.	GJGT BB	3			8	9	8				37
11.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	1	5	1							36
12.	Branická Eva	3.	CirGKP ZA	3									24
13.	Plavák Dušan	3.	GMH Trstená	3									20
14.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3						3			7
15.	Jacková Dominika	3.	GJGT BB	3						5			5
16.	Fiľová Lucia	2.	HA BR	2	5	2	2						4
16.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3					3		0		4
18.	Kvaš	1.	SPŠJM BB	1									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	2		9	9	9	9	9	9		135
2.	Batmendijn Eduard	-1.	ZŠsvCM SL	-1	9	9	9		9		9		134
3.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	9	6	9		8	2	9		106
4.	Hlaváčik Matúš	1.	GAlej KE	2		9	8	3	9		9		104
5.	Semanišinová Denisa	1.	GAlej KE	2		8	8	9	9	9			94
6.	Hanzely Filip	1.	GAP SB	1	9	8	8	7	0				93
7.	Tokárová Natália	1.	GJAR PO	1	4	2	8	9	1				88
8.	Machalová Katarína	0.	ZŠŠmer PO	0									40
9.	Motešický Ján	2.	GDax VT	2		2	6	1	0	1	0		10

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	9	9	4	1			79
2.	Bogárová Zuzana	3.	GĽŠ TN		3	0				3
3.	Hagara Michal	4.	GJH BA	9	9					53
4.	Hozza Ján	3.	GJH BA	6	8					33
5.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	9	9	6				51
6.	Sládek Filip	4.	GAB NO	9	9	7	7	7		111
7.	Vavrík Boris	3.	GJH BA							9
8.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	2	2					6

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.