Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2010/2011

Úloha č. 1: *Nájdite všetky kladné celočíselné násobky čísla 6, ktoré majú práve 6 kladných deliteľov (vrátane čísla 1 a samotného čísla). Nezabudnite dokázať, že ste ich našli naozaj všetky.*

Riešenie: (opravoval Kubman)

Ak nevieme, ako k novému príkladu pristupovať, je dobré začať pokusmi na konkrétnych číslach. Zaujímajú nás násobky šestky, ktorá má štyri delitele: 1, 2, 3 a 6. Nevyhovuje podmienke, že má práve šesť deliteľov. (Nabudúce už budeme písať len „nevyhovuje podmienke“.) Ďalší násobok šestky, číslo 12, má delitele 1, 2, 3, 4, 6 a 12, ktorých je práve šesť. Našli sme prvé vyhovujúce číslo. Ďalej, číslo 18 má tiež šesť deliteľov, a to 1, 2, 3, 6, 9 a 18. Máme teda ďalšie číslo, ktoré vyhovuje podmienke. Ak by sme skúšali ďalej, počty deliteľov budú stále iba rásť. Riešením sú preto čísla 12 a 18.

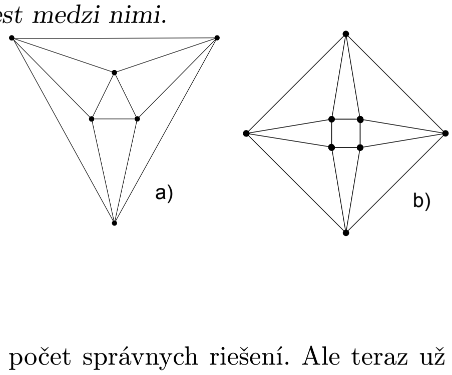
Aby sme mohli vyhlásiť, že sme našli všetky riešenia, musíme dokázať, že ostatné násobky šestky majú viac deliteľov. To, koľko má číslo deliteľov, závisí od jeho prvočíselného rozkladu. Šestka má vo svojom rozklade čísla 2 a 3, čo sú spolu s 1 a 6 štyri delitele. Ak by bolo v rozklade šestky nejaké ďalšie prvočíslo p, s ním by sa počet deliteľov zvýšil na päť. Netreba ale zabudnúť aj na delitele $2p$ a $3p$. Dokopy by deliteľov bolo minimálne sedem. Ešte by sa mohlo stať, že v prvočíselnom rozklade by bolo viac dvojok alebo trojok. V tom prípade tiež rýchlo zistíme, že deliteľov je priveľa. (To, prečo je ich priveľa, si premyslite sami.) To znamená, že naše riešenia sú naozaj jediné.

Poznámka: *Počet deliteľov všeobecne:* Ak by vám tieto dôvody nestačili, alebo chcete vedieť viac, tak sa pozrime na to, koľko deliteľov má číslo $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$. Najprv si vysvetlime, čo tento zápis znamená. Toto číslo má k prvočíselných deliteľov. Prvočíslo p_1 je prvé prvočíslo v rozklade a p_k posledné. Môžeme ich zoradiť napríklad podľa veľkosti. Potom a_1 určuje, koľkokrát sa v rozklade prvočíslo p_1 nachádza. Napríklad číslo 180 by sme takto zapísali ako $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Aby sme dostali deliteľa čísla n, musíme vybrať niektoré čísla z jeho prvočíselného rozkladu v nejakom počte a navzájom ich vynásobiť. Pri každom prvočísle p_i si môžeme vybrať, koľkokrát ho do rozkladu deliteľa dáme. Môžeme ho tam nedať, dať raz, dvakrát, ..., až a_i-krát. To je $a_i + 1$ možností pre i-te prvočíslo. Ak tieto možnosti pre jednotlivé prvočísla vynásobíme, dostaneme počet možností pre konštrukciu deliteľa čísla n, ktorých je $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$.

Tento návod je dosť zložitý, preto si ho ukážeme na príklade. V prípade našej šestky to bude vyzerať nasledovne: $6 = 2^1 \cdot 3^1$ a počet jej deliteľov je $(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$. Ak šestku vynásobíme prvočíslom p, dostaneme $6p = 2^1 \cdot 3^1 \cdot p^1$ a počet deliteľov nového čísla je $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Z toho vidno, že ak chceme nájsť číslo vyhovujúce podmienke zo zadania, iným prvočíslom ako 2 a 3 šestku násobiť nemôžeme. So zvyšnými prípadmi sa môžete pohrať sami, nech vám neberieme všetku radosť `:-)` .

Úloha č. 2: *Plán mesta Kocúrkovo je znázornený na obrázku* a). *Mesto má* 6 *križovatiek a* 12 *ciest. Starosta mesta nariadil zjednodušiť premávku tým, že sa z každej cesty stane jednosmerná. Zároveň má požiadavku, aby sa z ľubovoľnej križovatky dalo dostať do ľubovoľnej inej použitím najviac dvoch ciest. Je takéto nariadenie možné v Kocúrkove uskutočniť? Je takéto nariadenie možné uskutočniť v dedine Mačkovce, ktorej plán je na obrázku b)? Mačkovce majú* 8 *križovatiek a* 16 *ciest medzi nimi.*



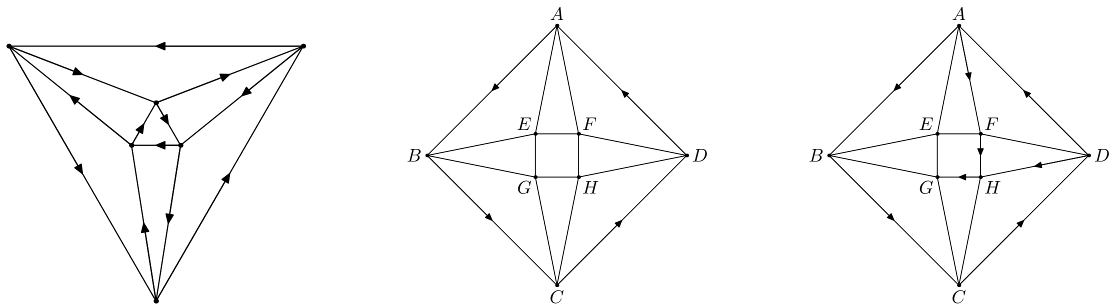
Riešenie: (opravoval Mojo a Ondro)

Sme veľmi radi, že nám prišiel veľký počet správnych riešení. Ale teraz už k veci. Samotné riešenie si rozdelíme na dve časti: Kocúrkovo a Mačkovce.

a) V meste Kocúrkovo sa dané nariadenie môže uskutočniť. Dokonca existuje viacero možností. Jedna z nich je znázornená na prvom obrázku zľava.

b) Dopravná situácia v dedine Mačkovce je už o čosi horšia. Väčšina z vás po niekoľkých neúspešných pokusoch napasovať jednosmerky do plánu zistila, že vyplniť takéto nariadenie je dokonca nemožné. Prečo?

   Ukážeme si jeden z mnohých dôkazov. Na začiatok si križovatky v Mačkovciach pre sprehľadnenie riešenia pomenujme: A, B, C, D, E, F, G, H (obrázok v strede). Z križovatky A do križovatky C existujú 2 cesty: cez križovatku B alebo cez D. Bez ujmy na všeobecnosti si vyberieme možnosť cez križovatku B. Potom však z C do A existuje len jediná cesta, a to cez D. (Vidíme to na prostrednom obrázku.) Takisto z A do H existuje jediná cesta: cez križovatku F. Všimnime si aj, že z križovatky D do križovatky G existuje len jedna cesta, a to cez križovatku H. Teraz však vieme s istotou povedať, že z H do A cesta, ktorá spĺňa naše požiadavky, neexistuje. (Rozmyslite si prečo, pomôcť môže obrázok vpravo.) Preto nariadenie starostu v Mačkovciach nie je možné uskutočniť.



Komentár: V riešení sme použili frázu "Bez ujmy na všeobecnosti". Táto fráza je v matematike často používaná, ak máme rozobrať niekoľko možností, ktorých dôkaz je analogický (to znamená, že sa robí rovnakým spôsobom). Treba si však dať pozor, či sú tieto možnosti naozaj rovnocenné a v prípadoch, kde to nie je úplne jasné, to aj zdôvodniť.

Úloha č. 3: *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n sa v desiatkovom zápise aspoň jedného z čísel n a $3n$ vyskytuje cifra 1, 2 alebo 9.*

Poznámka: V prvom rade si treba ujasniť, že nulu nerátame ako prirodzené číslo. Ak áno, tak 0 ani $3 \cdot 0$ neobsahuje ani jednu z hľadaných cifier, a to by bol potom veľmi ľahký príklad :-)

Riešenie: (opravovala Kika a Majka)
Čísla, ktoré v desiatkovom zápise začínajú zľava cifrou 1, 2 alebo 9, sú v poriadku, teda spĺňajú podmienku zo zadania a netreba nič ďalej dokazovať. Pozrime sa na také čísla, ktoré začínajú zľava ciframi 3 až 8. Keď sa s takýmito číslami chvíľku pohráme, môžeme si všimnúť, že ich trojnásobky začínajú ciframi 9 (čísla od $30\dots0$ po $33\dots3$), 1 (čísla od $33\dots34$ po $66\dots6$) alebo 2 (čísla od $66\dots67$ po $89\dots9$). Či toto pravidlo naozaj funguje, overíme nasledovným spôsobom. Všímajme si len i-ciferné čísla. Trojnásobok čísla $30\dots0$ začína cifrou 9 a má i cifier. Trojnásobok čísla $33\dots3$ začína tiež cifrou 9 a má i cifier. Všetky čísla od $30\dots0$ po $33\dots3$ budú preto začínať cifrou 9. (Rozmyslite si to.) Podobne môžeme ukázať, že čísla od $33\dots34$ po $66\dots6$ majú $i+1$ cifier a začínajú jednotkou. (Trojnásobok $33\dots34$ je $10\dots02$ a trojnásobok $66\dots6$ je $19\dots98$.) Ako je to s poslednou skupinou čísiel, nechávame na pozorného čitateľa.

Komentár: Veľa riešení zakoplo na dôkaze toho, že pri násobení čísla n trojkou bude pri násobení jednotlivých cifier prechod cez desiatku (do vyššieho rádu) maximálne 2. Vysvetlenia z vašich riešení boli napríklad takéto: maximálny prechod cez desiatku dosiahneme, ak vynásobíme $3 \cdot 9 = 27$, teda 2. To však nemusí byť celkom pravda. Veď pri cifre 6 sa tiež na prvý pohľad zdá, že jej príspevok v prechode cez desiatku bude iba 1 (lebo $3 \cdot 6 = 18$). Ale napríklad pre $n = 68$ je prechod cez desiatku väčší. Nemohlo by sa niečo takéto stať aj pri deviatke? Že prechod cez desiatku by bol 3 kvôli tomu, že k samotnému násobeniu $3 \cdot 9$ pripočítam príspevok z predošlého rádu?
Nemohlo, pretože „príspevok z predošlého rádu“ by musel byť aspoň 3. Táto trojka by sa potom mohla zarátať ďalej ($3 \cdot 9 + 3 = 30$), ale ako by vznikla? Z poslednej cifry (rádu 1) určite nie. Na to je dobrý argument z vašich riešení. Ak by aj predošlá cifra (rádu 10) bola 9, tak $3 \cdot 9 + 2 = 29$, prechod do ďalšej desiatky je opäť iba 2. Prechod hodnoty 3 by sa mohol šíriť, keby vznikol, ale on vzniknúť nemôže. Toto zdôvodnenie chýbalo v mnohých riešeniach. Dalo sa mu elegantne vyhnúť tak, že čísla n obsahujúce 9 sme zahodili, lebo zadaniu vyhovujú a netreba ich násobiť. Potom bude najväčšia cifra 8 a pri nej je už jedno, či sa niekedy pritrafí prechod cez desiatku 3, pretože sa hneď „stratí“.

Úloha č. 4: *Prvých 6 členov postupnosti sú čísla $0, 1, 2, 3, 4, 5$ v tomto poradí. Každý ďalší člen postupnosti je posledná cifra súčtu predchádzajúcich šiestich členov (siedmy člen postupnosti je teda 5, ôsmy člen je 0, a tak ďalej). Môže sa v tejto postupnosti vyskytovať päť po sebe idúcich čísel $1, 3, 5, 7, 9$?*

Riešenie: (opravoval JeFo a Marek)
Najskôr sa pozrime na to, ako čísla v postupnosti vznikajú. Sčítame šesť po sebe idúcich čísiel a z tohto súčtu zoberieme poslednú cifru. Pre potreby tohoto príkladu budeme písať $0+1+2+3+4+5=5$. (Aj keď všetci dobre vieme, že ten súčet je rovný pätnásť.)
Po chvíli skúšania, keď sme si vypísali prvých štyridsaťsedem členov tejto postupnosti, sme nenašli hľadanú päticu čísiel. Asi nadišiel čas skúsiť to nejako inak. Ale ako?
Pozrime sa najskôr na päticu zo zadania. Po chvíli skúmania si všimneme, že čísla $1, 3, 5, 7, 9$ sú všetky nepárne, pričom na začiatku postupnosti $0, 1, 2, 3, 4, 5$ sa striedajú párne a nepárne čísla. To vyzerá dosť podozrivo, skúsme to nejako využiť. Pozrime sa na to, ako vzniká ďalšie číslo z predchádzajúcich. Siedme číslo vznikne ako súčet prvých šiestich $(0+1+2+3+4+5=5)$, ôsme vznikne ako súčet druhého až siedmeho $(1+2+3+4+5+5=0)$, atď. Všimnime si, že dve po sebe idúce čísla sa líšia len v tom, že zo súčtu, z ktorého sme ich dostali, vypadlo jedno číslo zo začiatku a pribudlo jedno na konci. Pätica $1+2+3+4+5$ sa nezmenila. Teda ôsme číslo je siedme číslo plus šieste plus ... plus druhé číslo. To sa dá zapísať aj ako siedme číslo plus siedme číslo mínus prvé číslo $(5+5-0=2\cdot 5-0=0)$. Takto pekne to bude fungovať aj ďalej. (Overte si to.) Všeobecne zapísané,

$$a_{n+1}=a_n+(a_n-a_{n-5}),$$

kde a_k je k-te číslo v postupnosti. Keď sa pozrieme na paritu vznikajúcich čísiel (tzn. či sú párne alebo nepárne), zistíme, že bude závisieť len od čísla, ktoré „vypadne“. Je tam totiž dvakrát číslo a_n, a $2a_n$ je vždy párne, mínus „vypadávajúce“ číslo, čo nám spolu dá rovnakú paritu ako má „vypadávajúce“ číslo. Je to preto, že párne mínus párne je párne a párne mínus nepárne je nepárne.
Teraz sa na celé riešenie pozrime pekne od začiatku. Siedmy člen bude 5. Potom vypadne 0 (párna), čo nám dá ôsmy člen 0 (párna), ďalej vypadne 1 (nepárna) a dostaneme deviaty člen 9 (nepárna), atď. Keďže prvých šesť členov postupnosti je striedavo párnych aj nepárnych, tak aj ďalšie čísla musia byť striedavo párne a nepárne. Pozor si treba dať ešte na siedmy člen postupnosti, ktorý bude nepárny a trochu nám to pokazí. (Siedmy člen je nepárny, lebo pri jeho vznikaní sme ešte nevyhodili žiadne číslo). Čísla v našej postupnosti sa budú opakovať v sedmiciach tvaru $P,\ N,\ P,\ N,\ P,\ N,\ N$, kde P je párne a N je nepárne číslo. Preto sa nikdy nemôže stať, že by sa medzi číslami vyskytla pätica nepárnych po sebe idúcich čísiel $1, 3, 5, 7, 9$.

Iné riešenie:
(Pre náročnejšieho diváka.) Uvedomme si najskôr, že postupnosť zo zadania je periodická. Ak poznáme jej ľubovoľnú šesťčlennú podpostupnosť, vieme jednoznačne určiť nielen nasledujúci člen, ale aj predošlý (ak existuje). Z toho vyplýva, že ak sa nejaká šesťčlenná podpostupnosť zopakuje, celý úsek medzi rovnakými šesticami sa bude periodicky opakovať. Keďže je možných podpostupností konečne veľa (10^6), niektorá sa zopakovať musí.
Mohli by sme si vypísať niekoľko prvých členov a dúfať, že sa čoskoro začnú opakovať. V tomto prípade to nanešťastie tak ľahko nepôjde.
Ako si väčšina z vás všimla, čísla $1, 3, 5, 7$, a 9 sú všetky nepárne. Mohlo by teda pomôcť zamerať sa na paritu[1] členov našej postupnosti.
Vytvorme si pomocnú postupnosť zvyškov členov pôvodnej postupnosti po delení dvomi. Dostaneme postupnosť núl a jednotiek začínajúcu šesticou $0, 1, 0, 1, 0, 1$. Pre túto postupnosť tiež platí, že každý člen (okrem prvých šiestich) závisí iba od predošlých šiestich členov. (Konkrétne, je ním zvyšok ich súčtu po delení dvomi.) Toto platí, lebo parita súčtu niekoľkých čísel závisí len od parít jednotlivých sčítancov.
Vieme, že keby sa v pôvodnej postupnosti nachádzala podpostupnosť $1, 3, 5, 7, 9$, musela by v našej pomocnej postupnosti byť podpostupnosť $1, 1, 1, 1, 1$. Pomohlo nám to? Určite áno, pretože perióda našej pomocnej postupnosti je vo všeobecnosti oveľa menšia, zhora ju vieme odhadnúť číslom 2^6, čo nie je veľa.
Po vypísaní prvých 13 členov zistíme, že jej perióda je len 7, a nikde sa tam nenachádza podpostupnosť $1, 1, 1, 1, 1$. Preto v postupnosti zo zadania isto nie sú čísla $1, 3, 5, 7, 9$ za sebou.

Úloha č. 5: *Číselným trojuholníkom nazveme útvar zložený z prirodzených čísel, ktorý má tvar trojuholníka. V prvom riadku číselného trojuholníka je n čísel, kde n je prirodzené číslo. Toto číslo n je zároveň dĺžkou strany číselného trojuholníka. Číselný trojuhoník so stranou n má n riadkov, pričom v i-tom riadku je $n-i+1$ čísel. Čísla v dvoch po sebe idúcich riadkoch i a $i+1$ sú umiestnené tak, že pod každou dvojicou čísel v i-tom riadku je číslo v $(i+1)$-vom riadku. Číselný trojuholník voláme podivný, ak platí:*

- *čísla, ktoré ho tvoria, sú navzájom rôzne prirodzené čísla,*
- *pod každou dvojicou susedných čísel v riadku i je číslo v riadku $i+1$, ktoré je podielom väčšieho a menšieho čísla z danej dvojice. Toto platí pre všetky $1 \le i < n$, kde n je dĺžka strany číselného trojuholníka.*

Napríklad číselný trojuholník na nasledujúcom obrázku je podivný.

21 84 7
4 12
3

[1]zvyšok po delení dvomi

Najväčšie číslo v podivnom číselnom trojuholníku nazveme úžasné. Nájdite číselný trojuholník s dĺžkou strany 4, ktorého úžasné číslo je čo najmenšie. Dokážte, že neexistuje číselný trojuholník s dĺžkou strany 4 a s menším úžasným číslom, ako ste našli.

Riešenie: (opravovala Katka a Paľo)
V tejto úlohe je v prvom rade dôležité uvedomiť si, že v podivnom trojuholníku s dĺžkou strany aspoň dva nemôže byť číslo jedna. Ak by totiž bola jednotka vo vrchnom riadku, tak čísla vedľa nej a pod ňou by museli byť zhodné. Ak by bola v inom riadku, tak dve čísla nad ňou by museli byť zhodné. Z toho vyplýva, že i v našom prípade (teda v trojuholníku so stranou 4), nesmie byť číslo 1.
Označme si najspodnejšie číslo ako a. Nad ním sú dve čísla – b a ab, lebo a vzniklo delením čísla ab číslom b. Takisto nad číslom ab sú dve čísla – c a abc. Rovnako v najvrchnejšom riadku máme nad číslom abc čísla d a $abcd$. Vidíme, že v našom trojuholníku máme číslo v tvare súčinu iných štyroch čísel v trojuholníku. Toto číslo nemusí byť *úžasné* (najväčšie), ale *úžasné* číslo v našom trojuholníku je od neho väčšie alebo rovné.
Všimnime si, že číslo $abcd$ nemôže byť ľubovoľne malé. Keďže a, b, c, d sú rôzne čísla v trojuholníku, tak ich súčin je minimálny práve vtedy, keď zvolíme a, b, c, d ako najmenšie možné. Žiadne z nich nie je 1, to sme si už ukázali. Takže číslo $abcd$ je najmenšie práve vtedy, keď čísla a, b, c, d sú $2, 3, 4, 5$ (nemusia byť v tomto poradí). Vtedy je súčin $abcd$ rovný 120.
Ukázali sme, že v každom podivnom trojuholníku so stranou dĺžky štyri existuje číslo väčšie alebo rovné 120. Teda aj *úžasné* číslo v podivnom trojuholníku so stranou dĺžky štyri je aspoň 120. My by sme chceli nájsť podivný trojuholník, kde je *úžasné* číslo čo najmenšie. Ideálne by bolo, keby sme našli taký trojuholník, kde je *úžasné* číslo naozaj 120, pretože už máme dokázané, že neexistuje podivný trojuholník so stranou dĺžky štyri s menším *úžasným* číslom. Takýto trojuholník určite zvládnete nájsť aj sami a väčšina z vás to v riešeniach zvládla veľmi dobre.

Úloha č. 6: *Pre reálne čísla a, b, c platí $(a+b+c)c < 0$. Dokážte, že potom má rovnica $ax^2+bx+c=0$ dve rôzne reálne riešenia.*
Pomôcka: stačí dokázať, že $b^2 > 4ac$.

Riešenie: (opravoval Bebe)
Zabudnime na chvíľku na to, čo musíme dokázať a pozrime sa na to, čo máme zadané. Podľa zadania má platiť

$$(a+b+c)c < 0.$$

Táto nerovnosť znamená, že môže nastať jeden z dvoch prípadov:

a) $c > 0$ a zároveň $a+b+c < 0$

b) $c < 0$ a zároveň $a+b+c > 0$

Zamerajme sa najskôr na prvý z prípadov. V nerovnosti nám vystupujú tri premenné. O jednej z nich sme si už spravili nejaký obraz (o znamienku pri c). Ak by sme nejako upresnili aj zvyšné dve, mohlo by nám to pomôcť. Nech najskôr $a > 0$. Keďže aj $c > 0$ a zároveň $a+b+c < 0$, tak b musí byť záporné a navyše $-b > a+c$. (Rozmyslite si, prečo.) Po umocnení tohoto vzťahu[2] dostávame

$$b^2 > (a+c)^2 = 2ac + a^2 + c^2.$$

Ak by sa nám podarilo ukázať, že $a^2+c^2 \geq 2ac$, tak by sme dokázali aj nerovnosť v zadaní ($b^2 > 4ac$)[3]. Vieme, že druhá mocnina ľubovoľného čísla je nezáporná, a preto

$$0 \leq (a-c)^2 = -2ac + a^2 + c^2 \;\Leftrightarrow\; 2ac \leq a^2 + c^2.$$

Takže celkovo $b^2 > 2ac + a^2 + c^2 \geq 4ac$, čo sme chceli dokázať.
Ak $a < 0$, tak o znamienku b nevieme povedať nič. Avšak spojením $a < 0$ a $c > 0$ máme $0 > ac$, a preto aj $0 > 4ac$. To už vyzerá veľmi dobre. Pretože druhá mocnina je nezáporná, máme $b^2 \geq 0 > 4ac$, čo bolo potrebné ukázať.
Rovnaký argument platí, aj keď $a = 0$, lebo $b^2 \geq 0 = 4ac$. Ostrá nerovnosť neplatí, iba ak $b = 0$. V tom prípade $0 > a+b+c = c$. Ale zároveň vieme, že $c > 0$, čo je spor, a teda tento prípad nemôže nastať. Tí pozornejší z vás si všimli, že ak $a = 0$, naša rovnica sa redukuje na $bx + c = 0$. Táto rovnica však nemôže mať dve rôzne reálne riešenia.
Ostáva nám ešte rozobrať prípad *b*). Avšak verím, že ak ste pochopili pointu prvej časti, zvládnete sa popasovať aj s tou druhou.

Iné riešenie:
V tomto riešení sa dostaneme k dokazovanej nerovnosti z počiatočnej ekvivalentnými úpravami. Na spomenutie ekvivalentnosti úprav netreba zabúdať, lebo potom výsledok nemusí byť platný a body idú dole. Dokazovanú

[2] je dôležité si uvedomiť, že na oboch stranách vystupujú kladné čísla, tým pádom môžeme obe strany umocniť

[3] Nerovnosť v poznámke v zadaní vyjadruje, že diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ je kladný. V takom prípade má kvadratická rovnica dve rôzne reálne riešenia, ktoré majú tvar $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$

nerovnosť vieme ekvivalentne prepísať ako $b^2 - 4ac > 0$. Keďže tieto členy v počiatočnej nerovnosti nevystupujú, pokúsime sa ich vyrobiť.

$$\begin{array}{rcll} 0 & > & c(a+b+c) = ca + cb + c^2 & / \cdot 4 \\ 0 & > & 4ca + 4cb + 4c^2 & / - 4ac \\ -4ac & > & 4cb + 4c^2 & / + b^2 \\ b^2 - 4ac & > & b^2 + 4bc + 4c^2 & \end{array}$$

Na ľavej strane vystupuje dokazovaná nerovnosť, takže ak dokážeme nezápornosť pravej, sme hotoví. Ale to je ľahké, pretože $b^2 + 4bc + 4c^2 = (b + 2c)^2 \geq 0$.

<u>Iné riešenie:</u>
V poslednom riešení, určenom najmä pre fajnšmekrov, spomenieme už iba jeho myšlienku. Zabudnime na vzťah $b^2 > 4ac$ a dokážme priamo, že rovnica má dve rôzne reálne riešenia. Označme funkčnú hodnotu našej rovnice v bode x ako $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Potom $Q(0) = c$ a $Q(1) = a + b + c$. Z toho, že $c(a+b+c) < 0$, vieme dokázať, že graf funkcie $Q(x)$ pretína x-ovú os. Tým pádom existuje reálne riešenie. Avšak vzhľadom na to, že $Q(x)$ nadobúda aj kladné aj záporné hodnoty, musí existovať aj ďalšie reálne riešenie, ktoré je od prvého rôzne. Viete prečo?

<u>Úloha č. 7:</u> *Mišáč má dva nové balíčky kariet. V prvom balíčku je 2011 bielych kariet a v druhom 2011 červených kariet (okrem uvedených už žiadne ďalšie karty Mišáč nemá). Mišáč si vymyslel hru a pozval k sebe 2011 ľudí, aby si ju zahrali. Najprv hráčov posadil do kruhu za svoj stôl. Potom rozdal každému hráčovi práve dve karty a začal vysvetľovať pravidlá. Hra sa delí na kolá. V každom kole všetci hráči naraz posunú doľava jednu kartu podľa pravidla: ak hráč má na ruke aspoň jednu červenú kartu, tak posunie doľava jednu červenú kartu, inak posunie doľava bielu kartu. Hra končí, ak má každý na ruke jednu bielu a jednu červenú kartu.*
Mišáča zaujíma, ako má rozdať karty, aby mala hra čo najviac kôl. Uveďte spôsob, ako takto rozdať karty a tiež počet kôl najdlhšej možnej hry. (Treba tiež samozrejme dokázať, že dlhšie hra trvať nemôže.)

<u>Riešenie:</u> (opravovala Katka :P)
Aby bolo riešenie trošku prehľadnejšie a kratšie, použijem označenie, ktoré použila v riešeniach väčšina z vás – červená karta bude odteraz C a biela B. Na začiatku, keď si párkrát vyskúšame ako funguje podávanie kariet, pokojne aj na menších počtoch hráčov ako 2011, získame pár zaujímavých pozorovaní:

1. Hráč, ktorý pri rozdávaní dostal aspoň jednu kartu B, bude mať aspoň jednu B až do konca hry. Ak totiž dostane C, podľa pravidiel ju posunie. Ak dostane B, tak jednu B posunie a jedna mu vždy ostane.
2. Hráč, ktorý má v nejakom okamihu na ruke CC, musel mať CC od začiatku hry. Toto si dobre premyslite, vyplýva to z prvého pozorovania. Hráčov s kombináciou CC na ruke teda v priebehu hry nepribúda.
3. Hráčov, ktorí majú na ruke CC a takých, ktorí majú BB, je v každom okamihu rovnako veľa. Je to preto, že ostatní hráči majú kombináciu BC a kariet oboch druhov je rovnako veľa.
4. Hráč CC sa zmení na BC len vtedy, ak dostane kartu od hráča BB. Ak hráč CC „zanikne“, čiže zmení sa na BC, tak v tom istom ťahu musí niekde pri stole „zaniknúť“ aj jeden hráč BB. Vyplýva to z tretieho pozorovania.

Aby hra vôbec začala, po rozdaní kariet musí existovať aspoň jeden hráč s kombináciou BB a aspoň jeden hráč s CC (inak by mali všetci BC a hra hneď skončí). Hra skončí vtedy, keď „zaniknú“ všetci hráči CC, pričom zároveň s nimi „zaniknú“ aj všetci BB, kvôli tretiemu pozorovaniu. Otázkou zostáva, aký maximálny počet ťahov môže hráč CC vydržať v hre. Z druhého pozorovania vidíme, že kombinácia kariet CC ostáva vždy v rukách toho istého človeka, až kým ten nedostane kartu od niekoho, kto má BB. Vidíme, že kombinácia CC sa nehýbe.
Po krátkom pozorovaní si všimneme, že sa hýbe kombinácia BB. Ak totiž BB dá kartu niekomu, kto mal B, tak je to to isté, akoby sa kombinácia BB posunula o jedno miesto doľava. Tak je to až dovtedy, kým vedľa nesedí CC, u ktorého jedna z BB kariet ostane. Otázku môžeme pozmeniť: Aký maximálny počet kôl sa môže nejaké BB posúvať? Tu na chvíľu prestaňte čítať a dobre sa nad tým zamyslite, pretože toto je kľúčová myšlienka celej úlohy.
Keďže niekde v kole sedí aspoň jeden hráč s kombináciou CC, tak BB nedokáže obísť celé kolo – nevráti sa k človeku, ktorý ho dostal na začiatku. Preto hra môže trvať maximálne $n - 1$ ťahov, kde n je počet hráčov. U nás je to 2010.
Ešte potrebujeme dokázať, že hra môže skutočne trvať až 2010 ťahov, teda nájsť spôsob, ako má Mišáč na začiatku rozdať karty. Stačí, ak dá napríklad jednému hráčovi BB, jednému CC a ostatným BC. To, ako majú títo hráči sedieť, už necháme na vás.
<u>Komentár:</u> Skoro všetci riešitelia prišli na to, že hra nemôže trvať viac ako 2010 kôl. S dôkazom tohto tvrdenia to už bolo horšie. Preto všetkým, ktorí nemali 9 bodov, vrelo odporúčame prečítať si tento vzorák ešte raz.

<u>Úloha č. 8:</u> *Edo rád píše prirodzené čísla n (v desiatkovej sústave) odzadu a označuje ich ako čísla $E(n)$. Jefo na rozdiel od Eda rád počíta ich ciferný súčet $J(n)$. Spolu prišli na to, že ak $J(n^2) = J(n)^2$, potom $E(n^2) = E(n)^2$.*

Rozhodnite, či majú pravdu.
Napríklad: $E(123) = 321$, $E(1200) = 21$ a $J(124) = J(214) = 7$.

Riešenie: (opravoval Myrec)
Chceme pracovať s cifernými súčtami, preto si zapíšeme k-ciferné číslo n v desiatkovom rozvoji:[4]

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + a_0,$$

pre každé $0 \leq i \leq k$ platí $0 \leq a_i \leq 9$. Zistime, čo vieme o $J(n)$. Môžeme ľahko spočítať

$$J(n)^2 = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0)^2 = (a_k^2 + a_{k-1}^2 + \cdots + a_0^2) + 2(a_k a_{k-1} + a_k a_{k-2} + \cdots + a_1 a_0).$$

Teraz sa pozrieme na n^2:

$$n^2 = 10^{2k} a_k^2 + 10^{2k-1}(2a_k a_{k-1}) + 10^{2k-2}(a_{k-1}^2 + a_k a_{k-2}) + \cdots + a_0^2.$$

Ako vyzerá ciferný súčet n^2? Čo ak niektorý koeficient bude väčší ako 9? Ciferný súčet sa zmenší. Skúste si najprv sami premyslieť, prečo. Ak sa vám to nedarí, tak si všimnite, že každá desiatka sa v cifernom súčte zaráta len raz ako jednotka, čo je menej. Určite preto platí: $J(n^2) \leq J(n)^2$.
Teraz sa pozrime na $E(n)$, ak platí $J(n^2) = J(n)^2$:

$$E(n^2) = 10^{2k} a_0^2 + 10^{2k-1}(2a_0 a_1) + 10^{2k-2}(a_1^2 + a_0 a_2) + \cdots + a_k^2,$$

pretože ide o tie isté koeficienty ako v n^2, ktoré sú menšie ako 9. Ďalej bude platiť:

$$E(n)^2 = (10^k a_0 + 10^{k-1} a_1 + \cdots + a_k)^2 = 10^{2k} a_0^2 + 10^{2k-1}(2a_0 a_1) + 10^{2k-2}(a_1^2 + a_0 a_2) + \cdots + a_k^2.$$

Potom ak $J(n^2) = J(n)^2$, tak $E(n^2) = E(n)^2$. To sme chceli dokázať.

Úloha č. 9: *Petržlen dostal na Vianoce novú šachovnicu $n \times n$ a jedného šachového jazdca. Na každé políčko šachovnice napísal číslo 0. Potom si vybral dve políčka, medzi ktorými vie skočiť jazdec, a na obe políčka napísal číslo o jedna väčšie (pričom pôvodné čísla vymazal). Toto niekoľkokrát zopakoval. Keď skončil, na šachovnici bolo napísané každé z čísel $1, 2, \ldots, n^2$ práve raz. Pre aké n sa to mohlo Petržlenovi podariť?*

Riešenie: (opravovali Edo a Beren)
Dobrý deň, vážení vzorní riešitelia. Skúsme si riešenie rozdeliť na viacero prípadov:

a) $n = 2k + 1$
Pozrime sa na výsledný súčet. Keďže je to aritmetická postupnosť, vieme, že výsledný súčet na ploche bude $n^2 \cdot (n^2 + 1)/2$. Čo vieme o tomto súčte? Vieme, že n^2 nie je deliteľné dvomi, pretože n je nepárne. Vieme aj to, že $n^2 + 1$ nie je deliteľné štyrmi. Je to preto, že $n = 2k + 1$ (nepárne), a preto $n^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1$. Z toho po úprave dostaneme $4k^2 + 4k + 2$, čo dáva očividne zvyšok dva po delení štyrmi. Takže ak to vydelíme dvoma, dostaneme nepárne číslo. To znamená, že výsledný súčet, ktorý chceme dostať, je nepárny. Na začiatku je však súčet 0, čo je párne číslo a každým krokom zväčším súčet o 2. Je zjavné, že pre nepárne n to nepôjde.

b) $n = 4k$
Pozrime sa na základný prípad, $n = 4$. Rozdeľme si šachovnicu na štyri sektory po štyri políčka, napríklad tak, ako vidíte na obrázku. (Každý sektor je označený rovnakým číslom.)

1	2	1	2
3	4	3	4
2	1	2	1
4	3	4	3

Každá štvorica tvorí cestu, po ktorej kôň môže preskákať. S každou cestou môžeme spraviť nasledovnú operáciu:

$$(0, 0, 0, 0) \to (0, 0, 1, 1) \to (1, 1, 1, 1) \to (1, 1, 2, 2) \to (1, 1, 3, 3) \to (1, 2, 4, 3).$$

Napríklad ak túto operáciu použijeme na sektor 3, na začiatku dostaneme:

0	0	0	0
1	0	4	0
0	0	0	0
0	2	0	3

[4] Premyslite si, čo spôsobí nula na začiatku.

Zároveň vieme o ľubovoľnú konštantu zväčšiť celú takúto štvoricu[5]. Čo nám stačí na to, aby sme dostali požadovaný výsledok. Pre väčšie n si šachovnicu jednoducho nasekáme na štvorce 4×4 a opäť rozdelíme na cesty dĺžky 4. Čiže pre n deliteľné 4 to vždy pôjde.

- $n = 4k + 2$
  Je jasné, že pre 2×2 to nepôjde, lebo nevieme spraviť ani jeden regulárny ťah. Skúsime to pre 6×6. Pokúsime sa túto šachovnicu rozdeliť na konské cesty s dĺžkou 4, teda rozdeliť ju na sektory so štyrmi políčkami, ako sme to spravili predtým so šachovnicou 4×4.

1	2	1	3	4	5
6	6	7	2	1	3
7	1	6	3	5	4
6	7	2	8	9	3
2	7	8	9	4	5
8	9	4	5	8	9

  Podarilo sa. To znamená, že pre šachovnicu 6×6 to pôjde tiež. Teraz už vieme spraviť šachovnicu 6×6 aj 4×4. Čo ešte potrebujeme, aby sme vyskladali všetky šachovnice $(4k + 2) \times (4k + 2)$? Ak by sme vedeli spraviť aj 4×6, potom by sme už vedeli vyskladať všetko, čo chceme[6]. Hor sa do toho.

1	2	1	2	3	4
5	6	5	4	1	4
2	1	2	3	6	3
6	5	6	5	4	3

  To ale znamená, že pre všetky $n = 4k + 2$, okrem $n = 2$, vieme šachovnicu rozdeliť na cesty dĺžky 4, teda použijeme rovnaký spôsob ako pri $n = 4k$.

Petržlenovi sa to mohlo podariť pre všetky párne n väčšie ako 2. Howgh.

Úloha č. 10: *Stanka si cestou do školy rada umocňuje rôzne prvočísla. Všimla si, že číslo p^t malo niekde v desiatkovom zápise aspoň k núl za sebou. Existuje pre každé prvočíslo p a prirodzené číslo k takéto prirodzené číslo t?*

Riešenie: (opravoval Petržlen a Alfo)
Všetky riešenia, až na jedno, využívali rovnakú myšlienku – rozdelenie riešenia na dva prípady: ak je p nesúdeliteľné s 10 a $p \in \{2, 5\}$.
Skôr, ako pristúpime k samotnému dôkazu, dokážeme si nasledujúce pomocné tvrdenie:
Tvrdenie: Ak a, b sú nesúdeliteľné čísla, tak existuje prirodzené číslo $t > 1$ také, že $b \mid a^t - 1$.
Dôkaz: Keďže možných zvyškov čísla a^n po delení číslom b je konečne veľa a máme nekonečne veľa čísiel tvaru a^n, tak existujú[7] prirodzené čísla $x < y$ také, že $b \mid a^y - a^x$. Úpravou dostávame $b \mid a^x(a^{y-x} - 1)$. Keďže $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, tak $b \mid a^{y-x} - 1$. Ak položíme $t = y - x$, tak sme dokázali naše pomocné tvrdenie. Pre znalcov poznamenajme, že pomocná veta vyplýva triviálne z Eulerovej vety.
Ako nám to pomôže? Isto sa každý snažil robiť niečo s 10^k. Tak spravíme aj my dačo také, položíme $b = 10^{k+1}$. Potom z pomocnej vety máme, že $10^{k+1} \mid p^t - 1$ (keďže $nsd(p, 10) = 1$). Ako ale vyzerá číslo p^t? O jeho prvých cifrách veľa nevieme, ale to nás nezaujíma. Vieme, že končí k nulami a jednou jednotkou, čo je presne to, čo sme chceli. Všimnite si, že t z pomocnej vety a t zo zadania sú rovnaké. Toto bolo riešenie pre prípad, keď p je nesúdeliteľné s 10.
Pozrime sa teraz na prípad $p = 2$. Myšlienka bude podobná, len na konci čísla nebudeme mať 1, ale niečo iné. Z pomocnej vety existuje n také, že $5^x \mid 2^n - 1$. Prenásobením 2^x dostávame $10^x \mid 2^{n+x} - 2^x$. Zamyslime sa, ako vyzerá posledných x cifier čísla 2^{n+x}. Je to „niekoľko" núl a potom cifry čísla 2^x. Čo nás ešte v tomto momente delí od riešenia? „Niekoľko" núl. Skúsenejší siahnu po mocnom nástroji zvanom logaritmus. Ale praví matematickí elegáni, vediac, že v KMS logaritmy netreba, to vyriešia (magickou) substitúciou $x = 2k$. Potom $2^x = 2^{2k} = 4^k < 10^k$. Teda 2^x má nanajvýš k cifier. Z toho vyplýva, že naše „niekoľko" je aspoň k. Poznámka pre matematických pedantov: $t = n + 2k$. Samozrejme, dôkaz s „niekoľko" $\geq k$ sa dal spraviť skoro ľubovolne.
Usilovný čitateľ isto vyrieši podobným spôsobom aj prípad $p = 5$, ponechávame to ako cvičenie. (Pomôcka: $x = 4k$.) Potenciálny riešiteľ gamy si všimne, že to platí pre ľubovolnú číselnú sústavu.

Poznámka: Príklad nebol ťažký. Ťažké bolo dostať ten pravý nápad. Medzikrokom k riešeniu mohlo byť hranie sa s 10^x, prípadne hľadanie zvyškov s 10^x.

[5] Vieme vytvoriť štvoricu $(1, 2, 4, 3)$ a potom ju viacnásobným použitím prvých dvoch krokov operácie zväčšiť napr. na $(5, 6, 8, 7)$.
[6] šikovný riešiteľ určite príde nato, ako vyskladať ľubovoľnú $(4k + 2) \times (4k + 2)$ šachovnicu pomocou obdĺžničkov 4×4, 4×6 a 6×6
[7] Použili sme Dirichletov princíp. Všetky čísla nemôžu dávať rôzny zvyšok po delení b. Čiže dve z nich musia dávať rovnaký zvyšok, a preto ich rozdiel je deliteľný b.

<u>**Úloha č. 11:**</u> *Daná je postupnosť nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Pre každé prirodzené i, j také, že $i + j \leq 2011$, platí*

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1.$$

Dokážte, že existuje nekonečne veľa reálnych čísel x, pre ktoré platí $a_n = \lfloor nx \rfloor$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots, 2011$.
Poznámka: $\lfloor y \rfloor$ označuje dolnú celú časť z y, teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné ako y.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Filip a HAgO)
Na začiatok by sme si mohli povedať, čo vlastne znamená $a_n = \lfloor nx \rfloor$. Asi toľko:

$$\begin{aligned} a_n \leq &\quad nx &< a_n + 1 \\ \frac{a_n}{n} \leq &\quad x &< \frac{a_n + 1}{n}. \end{aligned}$$

Teda x je z nejakého intervalu, označme ho I_n:

$$I_n = \left\langle \frac{a_n}{n}, \frac{a_n + 1}{n} \right).$$

Pre každé $n = 1, 2, \ldots, 2011$ vieme určiť interval takých x, ktoré spĺňajú $a_n = \lfloor nx \rfloor$ a zhodou okolností je ním I_n. Prienikom všetkých takýchto intervalov budú tie x, o ktorých máme podľa zadania povedať, že ich je nekonečne veľa. Prienik intervalov môže byť buď prázdny, jeden bod alebo interval. Prázdna množina a jeden bod sú očividne konečné, no interval obsahuje nekonečne veľa reálnych čísel. Potrebujeme teda ukázať, že prienik všetkých tých intervalov I_n je zasa interval.
V tomto momente bude fajn uvedomiť si, kedy je prienikom intervalov interval. Keď si na číselnú os znázorníme začiatky a konce intervalov, tak prienik začína tam, kde začína posledný z intervalov a končí tam, kde končí prvý z nich. Odtiaľto už nie je ďaleko k *tvrdeniu*, ktoré znie:
„Prienik konečného počtu intervalov je intervalom práve vtedy, keď všetky začiatočné body ležia (ostro) naľavo od všetkých koncových bodov.“[8]
Ako dokázať, že prienikom našich 2011 intervalov je interval? Nakoľko máme zo zadania informáciu o $(i + j)$-tom intervale z i-teho a j-teho, tak sa nám núka skúsiť indukciu. Samozrejme, niekde v nej využijeme aj *tvrdenie.*

1° Máme iba jeden interval – I_1, ten je skutočne intervalom.

2° Predpokladajme, že prienikom všetkých intervalov I_l, pre $l < n$, je interval. To znamená, že aj každá dvojica I_i, I_j pre $i, j < n$ má prienik interval. Zvoľme i, j tak, že $i + j = n$. Ukážme, že začiatočný bod I_n je pred koncovým bodom I_i, a naopak. Zapíšme si to do nerovností:

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_n + 1}{n}, \qquad \frac{a_n}{n} < \frac{a_i + 1}{i}.$$

Zo zadania máme odhady pre $a_n = a_{i+j}$. Do prvej nerovnosti dajme dolný a do druhej horný odhad, tým zmenšíme väčšiu (resp. zväčšíme menšiu) stranu nerovnosti. Ak to bude platiť s týmito odhadmi, tak to bude určite platiť aj bez nich.

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_i + a_j + 1}{i + j}, \qquad \frac{a_i + a_j + 1}{i + j} < \frac{a_i + 1}{i}.$$

Z oboch nerovností po pár úpravách vypadne niečo takéto (len vymenené i, j):

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_j + 1}{j}.$$

Intervaly I_i a I_j majú z predpokladu prienik interval, takže z *tvrdenia* ich začiatočné body ležia pred koncovými a presne toto hovorí tá nerovnosť. Očividne teda platí. Robili sme len ekvivalentné úpravy, čiže sa vieme spätne dostať k tomu, čo sme chceli ukázať. Nakoľko vieme pre každé $i < n$ zvoliť j tak, aby platilo $i + j = n$, tak môžeme tento dôkaz aplikovať na všetky $i < n$. Potom pre všetky $i < n$ platí, že I_n začína skôr ako I_i končí a I_i začína skôr ako I_n končí. Začiatočný bod I_n je teda pred všetkými koncovými bodmi, a naopak. Pre ostatné intervaly $I_i,\ i < n$ už boli z predpokladu začiatočné body pred koncovými, tak teraz to platí už pre všetky $I_i,\ i \leq n$. Z toho pomocou *tvrdenia* vyplýva, že prienikom všetkých intervalov $I_i,\ i \leq n$ je interval. Indukcia je hotová.

Bonusová úloha za čokoládu: Koľkokrát je v tomto vzoráku použité slovo interval v hocijakom tvare?

[8] Formálny dôkaz nechávame na snaživého riešiteľa.

<u>**Úloha č. 12:**</u> *Označme K, L, M, N štyri body v trojrozmernom priestore. Dokážte, že platí*

$$|KL|^2 + |MN|^2 \leq |KM|^2 + |LN|^2 + |KN|^2 + |LM|^2.$$

<u>Riešenie:</u> (opravoval Petržlen, Filip)
Ľahký príklad, krátke zadanie, stručné riešenie. Položme počiatok súradnicovej sústavy do bodu K. Potom označme vektor prislúchajúci bodu X analogicky tiež X a ďalej označme X^2 skalárny súčin vektorov $X \cdot X$. Chceme dokázať, že

$$L^2 + (N - M)^2 \leq M^2 + (N - L)^2 + N^2 + (M - L)^2. \tag{1}$$

Po roznásobení a preusporiadaní dostaneme

$$0 \leq (L - M - N)^2. \tag{2}$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $L - M = N = N - K$, teda keď je $MLNK$ rovnobežník.

<u>**Úloha č. 13:**</u> *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré sa trojuholník dá rozrezať na n menších trojuholníkov tak, že žiadne tri zo vzniknutých vrcholov neležia na jednej priamke a zároveň každý vrchol patrí rovnakému počtu malých trojuholníkov.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Petržlen)
Zadali sme úlohu nepresne. Chceli sme, aby sa rátal aj vonkajší trojuholník. Ďalej, aby každý (aj pôvodný) vrchol susedil s rovnakým počtom oblastí. A navyše, aby všetky oblasti boli trojuholníkové (žiadne tri body neležia na priamke). Ospravedlňujeme sa všetkým, ktorý riešili niečo iné a dlho sa s tým bez úspechu trápili.
A teraz k riešeniu. Máme pred sebou ďalší tradičný príklad z kombinatoriky. Ako sa takéto príklady riešia? Je potrebné pochopiť zadanie, vyskúšať si ho pre malé prípady, ukázať pre ktoré čísla n to nejde, a potom skonštruovať situácie pre tie ostatné. Poďme na to, krok za krokom.
O čo ide? Skúsený riešiteľ si isto uvedomí, že ide o špeciálne planárne grafy (ten kto nevie, wikipedia:planar graphs). Keďže žiadne tri vrcholy neležia na priamke, tak každá oblasť má práve tri vrcholy (aj hrany). To, že každý vrchol susedí s rovnakým počtom oblastí, znamená, že každý vrchol má rovnaký stupeň d. V ďalšom texte bude f počet oblastí (okrem vonkajšej), v počet vrcholov (vrátane pôvodných) a e počet hrán (vrátane pôvodných). Takže $f = n$, $e = (3n - 3)/2 = 3(n - 1)/2$, $v = 3(n + 1)/d$. Tieto hodnoty musia byť celé čísla, a teda n je určite nepárne.
Vyskúšajme si malé prípady. Bez toho, aby sme čokoľvek robili, nám rozostavenie vyhovuje pre $f = 1$. Keď pridáme jeden vrchol do stredu a spojíme ho s pôvodnými, tiež nám to sedí ($f = 3$). Takisto, ak pridáme nový trojuholník a pospájame tak, aby boli len trojuholníkové oblasti, tak to sedí ($f = 7$). Niekoho možno napadne, že zatiaľ vyhovujú len n tvaru $2^x - 1$.
Ukážeme si, že to nie je pravda. Z Eulerovej vety pre planárne grafy máme $v + f - e = 1$ (dôkaz nie je ťažký). Z toho vyplýva, že $d = 6(n + 1)/(n + 5)$. Vieme, že n je nepárne. Nech $n = 2k + 1$. Potom $d = 6(k + 1)/(k + 3)$. Ak je k párne, tak $\mathrm{nsd}(k+1, k+3) = 1$, a teda $k+3 \mid 6$. Z toho vyplýva $n \in \{1, 7\}$. Keď $k = 2q+1$, tak $d = 6(q+1)/(q+2)$ a vieme, že $\mathrm{nsd}(q + 1, q + 2) = 1$. Podobne ako minule $q + 2 \mid 6$, a teda $n \in \{3, 7, 19\}$.
Skonštruovať situácie pre tieto n nie je ťažké. Pre $n \in \{1, 3, 7\}$ sme to už spomenuli. Pre $n = 19$ to vyzerá tak, že vpíšeme šesťuholník, doňho ešte trojuholník a vhodne pospájame.

<u>Poznámka:</u> Keby sa vonkajší trojuholník nerátal, dopadlo by to horšie, išlo by to len pre pôvodné rozostavenie. Keby sa "žiadne tri body neležia na priamke" týkalo len pridaných bodov, tak by bolo možné dosiahnuť ľubovolný počet trojuholníkov. Riešenia "alternatívnych" zadaní sme uznávali.

<u>**Úloha č. 14:**</u> *Kružnice k_1 a k_2 so stredmi S_1 a S_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode D. Kružnice k_1, k_2 sa navyše zvnútra dotýkajú kružnice k postupne v bodoch E_1, E_2. Priamka t je spoločná dotyčnica kružníc k_1, k_2 v bode D. Nech AB je priemer k kolmý na t taký, že body A, S_1, E_1 ležia v tej istej polrovine vyťatej priamkou t. Dokážte, že priamky AS_1, BS_2, E_1E_2 a t sa pretínajú v jednom bode.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Filip)
Rovnoľahlosť so stredom E_1, ktorá zobrazuje k_1 na k, zobrazuje tiež D na B. Preto body B, D, E_1 sú kolineárne, analogicky aj body A, D, E_2. Označme C priesečník priamok AE_1 a BE_2. Vidíme, že AE_2 a BE_1 sú výšky v trojuholníku ABC, teda D je jeho ortocentrum, odkiaľ máme, že C leží na priamke t. Zostrojme bod M ako priesečník priamok AC a S_1S_2. Zrejme S_1 je stred MD, a tiež $S_1S_2 \parallel AB$. Keď teraz označíme P priesečník CD a E_1E_2, tak treba ukázať, že A, S_1, P sú kolineárne (analogicky sa potom ukáže to isté o bodoch B, S_2, P). To je však podľa Menelaovej vety vzhľadom k trojuholníku MDC ekvivalentné s tým, že

$$\frac{CA}{AM} \cdot \frac{MS_1}{S_1D} \cdot \frac{DP}{PC} = 1.$$

Kvôli rovnobežnosti platí $CA/AM = CK/KD$, kde K je päta výšky v $\triangle ABC$ z bodu C. Okrem toho je zrejmé, že $MS_1/S_1D = 1$. Teda náš cieľ je ukázať, že $CK/KD = CP/PD$. To už ale zvládnete aj sami.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	1	0	9	9	9	9	9				45	45
1.	Horňák Marián	3.	GPár NR	8	6			9	9	9	9	9		45	45
1.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	3	0	9	9	9	9	9		0		45	45
1.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	5	5			9	9	9	9	9		45	45
5.	Balog Matej	4.	Gamča BA	8	5			8	9	9	7	9		42	42
6.	Koprda Pavol	3.	GAM TT	7	2		9	9	4	8	8			38	38
6.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2	0	9	8	9		8	4	1		38	38
8.	Hlaváčik Matúš	2.	GAlej KE	4	1		8	9	4	9	7			37	37
9.	Hanzely Filip	2.	GAP SB	5	1		8	9	9	9		0		35	35
9.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	3	2		8	9	9	5	4	0		35	35
11.	Zavřel Lukáš	4.	GChod Praha	5	3			9	9	9	7			34	34
12.	Barančok Peter	4.	Gamča BA	5	1		6	9	9	9		0		33	33
12.	Sabatovičová Linda	4.	GJH BA	9	2		7	8	9	9				33	33
12.	Stehlík Matúš	4.	GAlej KE	5	0	9	8	7		9				33	33
15.	Gafurov Askar	2.	Gamča BA	3	0	9	6	8	9					32	32
15.	Hlavatá Martina	4.	Gamča BA	10	4			9	9	8		6		32	32
15.	Šebo Marek	4.	Gamča BA	4	0	9	7	8	7	1	0			32	32
15.	Vlachynská Petra	3.	GJH BA	6	0	9	9	7		7				32	32
19.	Halajová Barbora	3.	GVO ZA	7	2		6	8	8	9		0		31	31
19.	Semanišinová Denisa	2.	GAlej KE	4	0	9	9	9		4				31	31
21.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA	8	4			9	3	9	9	0		30	30
21.	Petrucha Jaroslav	2.	GMet BA	5	1		9	8	8	5		0		30	30
21.	Žídek Augustin	3.	Frýdlant ČR	8	3			9	9	8	4			30	30
24.	Komanová Kristína	2.	GAS BB	5	2		6	9	5	8				28	28
25.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	11	7			9	9	9				27	27
25.	Karásková Natália	4.	GJH BA	13	12			9	9	9		0		27	27
25.	Klembarová Barbora	3.	GKuk PP	8	3			9	9	9	0	0		27	27
25.	Kozák Andrej	4.	Gamča BA	11	6			9	0	9		9		27	27
25.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	1	0				8	7	3	9		27	27
25.	Tóth Michal	3.	GJH BA	8	3			9	8	9		1		27	27
31.	Bok Jan	4.	Litoměřice ČR	4	0	5	4	9		8				26	26
31.	Ficková Klára	3.	GPoš KE	4	0	9	9	3		5				26	26
31.	Hledík Michal	2.	GJH BA	5	1		9	9		8				26	26
31.	Kopf Michal	3.	Opava ČR	8	3			9	4	5	7	1		26	26
31.	Nociarová Jela	2.	GBST LC	4	0	6	7	1	9	3				26	26
36.	Belanová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	7	2			8		9	4	4		25	25
36.	Guričan Pavol	4.	GJH BA	11	7			9	7	9		0		25	25
36.	Hozza Ján	4.	GJH BA	9	8			8		8	9			25	25
36.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA	5	3			9	9	7		0		25	25
40.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	3	0	9	6	9	0					24	24
40.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	4	2		6	9	4	5				24	24
40.	Marečáková Barbora	3.	GKuk PP	8	3			9	8	7		0		24	24
40.	Pellerová Daniela	2.	Gamča BA	5	2		9	9	0	6				24	24
44.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	3	0	2	7	9		5				23	23
45.	Kováč Ondrej	4.	GCM NR	11	6			8	9	4	0	1		22	22
45.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA	6	1		9	9		4				22	22
47.	Cibulka Samuel	2.	GAV LV	5	0	2	9	8		2		0		21	21
47.	Macko Vladimír	2.	GĽŠ ZV	5	1		9	7		5				21	21
49.	Faguľová Kristína	3.	GPoš KE	7	2		9	9		2				20	20
49.	Phuong Bui Thi Mai	4.	GJH BA	4	0			9	9	2				20	20
51.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	1		6	1	8	3				18	18

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
51.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	4	1		6	3		9		0		18	18
51.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená	10	6			9	4	5				18	18
51.	Surovčík Juraj	2.	GPOH DK	4	0	3	6	9						18	18
51.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	4	3			9	9					18	18
56.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	3	0	2	6	3	5					16	16
56.	Magurová Lucia	2.	GPoš KE	3	0	2	9	2	2	1				16	16
56.	Smolík Milan	2.	Gamča BA	4	0	3	6	7						16	16
56.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2	0	9	7				0			16	16
60.	Jasenčáková Katarína	3.	GVO ZA	8	3			6		9	0	0		15	15
60.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2	0	9	6	0			0			15	15
60.	Szabados Viktor	4.	Gamča BA	11	6			9		6				15	15
63.	Pulmann Ján	4.	Gamča BA	4	0	1	9		4			0		14	14
64.	Kmeťová Katarína	3.	Kilmallock IR	7	1		2	7		3				12	12
64.	Santrová Adriana	3.	GMH Trstená	5	0	2	9	1						12	12
66.	Švančara Patrik	3.	GĽŠ TN	5	0		8	3						11	11
67.	Babej Tomáš	4.	GPoš KE	4	0		9							9	9
68.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	2	0	2	5		1					8	8
68.	Langer Tomáš	3.	GJH BA	8	3				8					8	8
70.	Masár Juraj	4.	GJH BA	7	1		7							7	7
71.	Tokárová Natália	2.	GJAR PO	4	0	1		2	0					3	3

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Bošeľová Margita	1.	GPan BA	1	9	9	9	9	9				45
2.	Lipovský Mário	1.	GJH BA	2		9	8	9	8		5		39
2.	Prívozník Matej	1.	GJH BA	2		9	5	9	9	7	5		39
4.	Gafurov Askar	2.	Gamča BA	3			9	6	9	6	8		38
4.	Vozárová Viktória	1.	GJH BA	1	9	7	7	7	2	8			38
6.	Mojžišová Karolína	1.	Gamča BA	2		9	7	9	1	3	8		36
7.	Kováčová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2		8	9	7	6		3		33
8.	Šandalová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	2		3		32
9.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2		8	8		9	6	0		31
10.	Kurdelová Alžbeta	1.	ŠPMNDG BA	3			9	9	2		9		29
11.	Jurina Šimon	1.	Gamča BA	1	9	6	5	2	2	6	2		28
11.	Ondráš Ján	1.	Gamča BA	1	9		9		2	6	2		28
13.	Roštár Marek	2.	1SG BA	2		4	4	8	2	7			25
13.	Žilková Alexandra	1.	ŠPMNDG BA	2			8	9	8				25
15.	Klimkovič Anna-Mária	1.	ŠPMNDG BA	2		5	5	6	4		4		24
16.	Iždinská Dominika	1.	GJH BA	2		9	9		0	3			21
17.	Bednár Stanislav	1.	GJH BA	1	7	1	5	3	2				18
17.	Galanová Miriam	1.	GJH BA	1	4	0	3		2	9			18
17.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	3					2	7	9		18

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Daniel Mark	1.	GPár NR	1	9	9	8		3	9			38
2.	Korbela Michal	1.	G Bánovce	2		9	9	6	2		8		34
3.	Horváth Samuel	1.	GPár NR	1	9	5		8	2	9			33
3.	Pokrývka Filip	1.	G Bánovce	2		9	9	4	6		5		33

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
5.	Franková Monika	1.	GKom PE	2	4	7	9	9	5				30
6.	Pavlíková Stela	1.	GĽŠ TN	1	9	4		2	1				16
7.	Šuppa Marek	2.	GCM NR	2		3	2	1	2	5			13
8.	Kováčová Radka	1.	GPdC PN	1	2	3		2	2	2			11
8.	Puček Samuel	2.	GĽŠ TN	3			7			2	2		11
10.	Lúčna Nina	2.	GPdC PN	3				6					6

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sučík Samuel	0.	ZŠ Čelovce	0	9	9	9	9			9		45
2.	Ječmenová Andrea	1.	GVO ZA	2		9	9	6	9	1	7		40
3.	Hrivová Ivona	1.	GVO ZA	2		6	8	6	9	9			38
4.	Melo Jakub	1.	GsvFA ZA	2		9	9	2	9	7			36
4.	Psota Miroslav	1.	GHlin ZA	2		9	6	6		6	9		36
6.	Hromcová Zuzana	1.	GVO ZA	2		9	9	9			3		30
6.	Jankovichová Ľudmila	1.	GJGT BB	2		9	8		5	6	2		30
6.	Magyarová Zuzana	1.	GBST LC	2		9	7	6	2	6			30
9.	Nociarová Zuzana	1.	GBST LC	1	4	7	9		2	6			28
10.	Gašpárek Miroslav	0.	SG ZA	0	9	6	2						17
11.	Šubjaková Mária	3.	GPOH DK	3			8	2	2		3		15
12.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	3					2	6	3		11
13.	Fiľová Lucia	3.	HA BR	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2			7	9	9	8	9		42
2.	Šromeková Karolína	1.	GDT PP	2		9	9	9	2	5			34
3.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	3			8		9	6	9		32
4.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	1					9	9	9		27
5.	Dudič Ján	2.	GPoš KE	2	7	7	9		2				18
5.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	2		5		6	2	5			18
7.	Hofierka Jaroslav	1.	GJAR PO	2		9				8			17
8.	Magurová Lucia	2.	GPoš KE	3					2	9	2		13
9.	Pivovarník Roman	1.	GJAR PO	2		9	3						12
10.	Polovka Maroš	1.	GKuk PP	2			9		1				10

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	3					9	9	9		27
1.	Zemková Kristýna	3.	Prachatice ČR	3					9	9	9		27
3.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	3						8	9		17
4.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2					9	7			16
5.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR	3									0
5.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	1									0

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Balog Matej	4.	Gamča BA	7	9	7				51
2.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA			6				62
3.	Fiľová Lucia	3.	HA BR			0		0		0
4.	Gafurov Askar	2.	Gamča BA			0				0
5.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA	9	0	7				39
6.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA		0					10
7.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR			0				0
8.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	3	9	7				87
9.	Pulmann Ján	4.	Gamča BA		0	5				5
10.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA			7				24
11.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená							50
12.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	4	1		7			12
13.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha							12
14.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	0		7		7		44
15.	Šafin Jakub	2.	GPH MI							33
16.	Tóth Michal	3.	GJH BA		1	7	5			39
17.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	9	9	7	7	2		128
18.	Zemková Kristýna	3.	Prachatice ČR			6				6