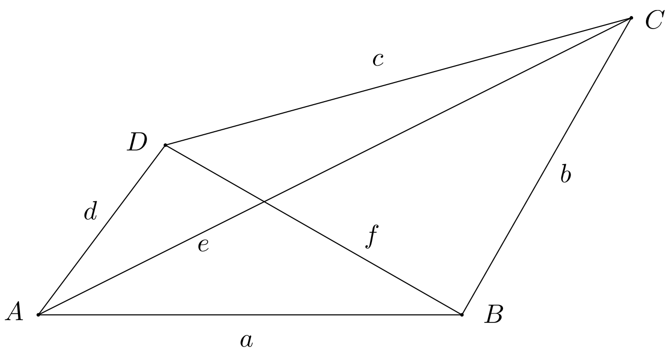
# Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2010/2011

**Úloha č. 1:** *Mojo si kreslil konvexné štvoruholníky. Pri ich kreslení si všimol zaujímavú vec. V každom štvoruholníku, čo nakreslil, bol obvod štvoruholníka väčší ako súčet dĺžok jeho uhlopriečok. Platí to v každom štvoruholníku? Nezabudnite svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť.*

Riešenie: (opravoval Mojo)




Vrcholy štvoruholníka nazveme $A, B, C, D$ a dĺžky jeho strán tiež klasicky $a, b, c$ a $d$. Dĺžky uhlopriečok $AC$ a $BD$ označíme $e$ a $f$ (obr.1). Z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva

$$\begin{aligned} a+b &> e \\ b+c &> f \\ c+d &> e \\ d+a &> f. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto nerovností dostávame $2a+2b+2c+2d > 2e+2f$. Po vydelení dvojkou máme

$$a+b+c+d > e+f.$$

Určite ste si všimli, že ľavá strana výslednej nerovnosti je obvod štvoruholníka a pravá strana je súčet dĺžok uhlopriečok. Tým sme dokázali tvrdenie zo zadania.

**Úloha č. 2:** *Zostrojme vnútri strán $AB, BC, CD, DA$ štvorca $ABCD$ postupne body $A', B', C', D'$ také, že*

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'|.$$

*Nech $P$ je ľubovoľný bod vnútri štvorca $ABCD$. Označme obsahy štvoruholníkov $AA'PD'$, $BB'PA'$, $CC'PB'$ a $DD'PC'$ postupne $S_1, S_2, S_3, S_4$. Dokážte, že platí $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.*

Riešenie: (opravoval Foxie a KatkaJ)

Mnohí z vás prišli na správne a elegantné riešenie. Z bodu $P$ môžeme viesť úsečky $AP$, $BP$, $CP$ a $DP$. Pre výšky v trojuholníkoch $BB'P$ a $DD'P$ platí, že $v_{BB'} + v_{DD'} = |AB|$ a navyše $|DD'| = |BB'|$. Preto

$$\frac{|BB'| \cdot v_{BB'}}{2} + \frac{|DD'| \cdot v_{DD'}}{2} = \frac{|BB'| \cdot |AB|}{2}.$$

Podobne, obsahy trojuholníkov $AA'P$ a $CC'P$ sa rovnajú $(|BC| \cdot |AA'|)/2$. Zo zadania platí, že $|AB| = |BC|$ a $|AA'| = |BB'|$, preto platí, že $S_{\triangle BB'P} + S_{\triangle DD'P} = S_{\triangle AA'P} + S_{\triangle CC'P}$. Podobne je to so súčtami obsahov trojuholníkov $A'BP$, $C'DP$ a $B'CP$, $D'AP$. Keďže súčet obsahov $AA'P$ a $D'AP$ tvorí $S_1$, $BB'P$ a $A'BP$ tvorí $S_2$, $CC'P$ a $B'CP$ tvorí $S_3$ a $DD'P$ a $C'DP$ tvorí $S_4$, už ostáva len poskladať to, čo vieme, dokopy:

$$(S_{\triangle AA'P} + S_{\triangle CC'P}) + (S_{\triangle B'CP} + S_{\triangle D'AP}) = (S_{\triangle BB'P} + S_{\triangle DD'P}) + (S_{\triangle A'BP} + S_{\triangle C'DP}).$$

To je ekvivalentné s tvrdením, že

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4.$$

A dôkaz máme hotový.

**Úloha č. 3:** *Ťažnice z vrcholov $A$ a $B$ trojuholníka $ABC$ sú na seba kolmé. Dokážte, že $AB$ je najkratšou stranou tohto trojuholníka.*

Riešenie: (opravoval Fofo a Beren)
Najprv si priblížme nejaké tvrdenia a fakty, vyplývajúce zo zadania, ktoré budeme v dôkaze používať.

1. Ťažisko rozdeľuje ťažnicu v pomere $1 : 2$, pričom $2/3$ dĺžky ťažnice sú medzi vrcholom a ťažiskom, $1/3$ dĺžky ťažnice je medzi ťažiskom a stredom protiľahlej strany.

2. V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta: $c^2 = a^2 + b^2$, kde $c$ je prepona.

3. Trojuholníky $ABT, BS_{BC}T$ a $S_{AC}AT$ sú pravouhlé, s pravým uhlom pri vrchole $T$ (ťažisko).

Teraz by sme už mali byť schopní vyjadriť si dĺžky strán trojuholníka pomocou dĺžok ťažníc. Aby sa nám tu neplietli zlomky, označme si

$$t_A = |AS_{BC}| = 3x \implies |AT| = 2x,\ |S_{BC}T| = x,$$

$$t_B = |BS_{AC}| = 3y \implies |BT| = 2y,\ |S_{AC}T| = y.$$

Zo spomínanej Pytagorovej vety môžeme veselo vyjadrovať

$$|AC| = 2|AS_{AC}| = 2\sqrt{|S_{AC}T|^2 + |AT|^2} = \sqrt{4|S_{AC}T|^2 + 4|AT|^2} = \sqrt{4(y^2 + 4x^2)} = \sqrt{4y^2 + 16x^2},$$

$$|BC| = 2|BS_{BC}| = 2\sqrt{|S_{BC}T|^2 + |BT|^2} = \sqrt{4|S_{BC}T|^2 + 4|BT|^2} = \sqrt{4(x^2 + 4y^2)} = \sqrt{4x^2 + 16y^2},$$

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |BT|^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2}.$$

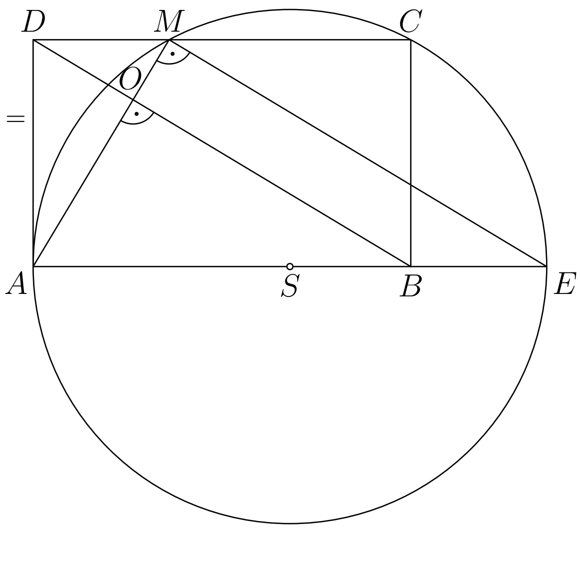
Keďže všetky uvedené premenné sú dĺžky, a teda musia byť kladné, môžeme s čistým svedomím vyhlásiť, že

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4y^2 + 16x^2} & > & \sqrt{4x^2 + 4y^2} \\ |AC| & > & |AB| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt{4x^2 + 16y^2} & > & \sqrt{4x^2 + 4y^2} \\ |BC| & > & |AB|. \end{array}$$

Teraz je už jasné, že $AB$ je najkratšia strana trojuholníka $ABC$, čo sme chceli dokázať. Hurá.

**Úloha č. 4:** *V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Narysujme kružnicu, ktorá má stred na úsečke $AB$ a prechádza bodmi $A$ a $C$. Táto kružnica pretne stranu $CD$ v bode $M$. Dokážte, že priamky $AM$ a $BD$ sú navzájom kolmé.*

Riešenie: (opravoval Kubman)
Ako geometrické príklady obvykle začínajú, začneme i my krásnym a prehľadným náčrtom. Jedným zo spôsobov, ako ukázať, že úsečky $AM$ a $BD$ sú kolmé, je nájsť inú úsečku (alebo priamku) kolmú na $AM$ a ukázať o nej, že je rovnobežná s $BD$. To je to, o čo sa pokúsime. Keďže body $M$ a $A$ patria kružnici zo zadania, tak bod $M$ je vrcholom pravého uhla nad priemerom prechádzajúcim cez $A$ (Tálesova kružnica). Teda spojnica bodu $M$ a druhého konca priemeru bude náš kandidát na úsečku kolmú na $AM$ a rovnobežnú s $BD$.
Okrem bodov zo zadania si dokreslíme aj bod $S$, ktorý bude stredom kružnice v zadaní. (Nájdeme ho napríklad ako prienik osi úsečky $AC$ s úsečkou $AB$. To, že sa pretnú, nám zaručí vlastnosť $|AB| > |BC|$.) Úsečka $AS$ je polomerom tejto kružnice, preto nanesením dĺžky $|AS|$ na polpriamku $SB$ dostaneme bod $E$, ktorý bude druhým koncom spomínaného priemeru prechádzajúceho cez $A$.




Úsečky $SM$ a $SC$ sú tiež polomery tej istej kružnice, preto je trojuholník $MSC$ rovnoramenný. Označme si pätu jeho výšky na stranu $MC$ ako $S'$. Ako správna päta výšky v rovnoramennom trojuholníku, $S'$ rozpoľuje stranu $MC$. (Zapíšeme $|MS'| = |S'C|$). Keďže celý obdĺžnik je osovo súmerný podľa osi strany $BC$, tak aj $|SB| = |S'C|$ a $|DS'| = |SA| = |SE|$. Nasleduje prelomová úvaha:

$$|DM| = |S'D| - |S'M| = |SE| - |SB| = |BE|,$$

teda $|DM| = |BE|$.
Štvoruholník $BEMD$ má dve strany rovnobežné a zhodné ($BE$ a $DM$), v tom prípade to musí byť rovnobežník. Teda úsečka $DB$ je rovnobežná s $ME$. A keďže uhol $AME$ je pravý (lebo leží na tej najtálesovskejšej kružnici nad priemerom $AE$, akú si viete predstaviť), tak k nemu súhlasný uhol $AOB$ (kde $O$ je priesečník $AM$ a $DB$) za ním nebude zaostávať.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Nech $P_1, P_2, \dots, P_{2011}$ sú rôzne body v rovine. Spojme body postupne úsečkami*

$$P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{2010}P_{2011}, P_{2011}P_1.$$

*Zostrojte priamku, ktorá prechádza vnútorným bodom každej z týchto úsečiek. Koľko riešení má úloha v závislosti od vzájomnej polohy bodov $P_1, P_2, \dots, P_{2011}$?*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Katka :P)

Ak chceme príklad riešiť, musíme si najskôr poriadne prečítať jeho zadanie. Mnohí z vás tak neurobili, a preto riešili trochu inú úlohu alebo vychádzali z tvrdení, ktoré neplatia.

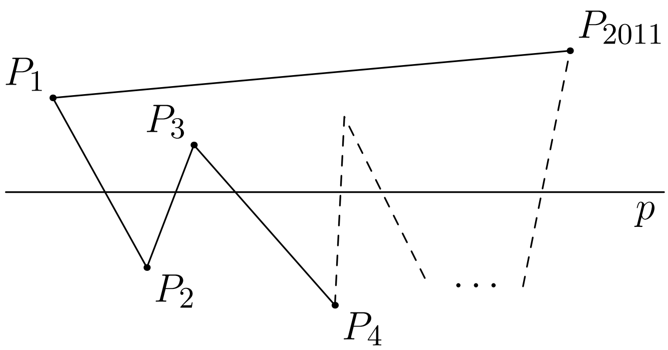
Najskôr by som rada upozornila na to, že $P_1, P_2, \dots, P_{2011}$ sú *rôzne* body v rovine. Nemôžeme teda predpokladať, že niektoré dva môžu byť totožné. Ďalej, hľadaná priamka má prechádzať *vnútorným bodom* každej z úsečiek, takže ak prechádza len nejakým krajným bodom $P_i$, nie je riešením úlohy.

Teraz už k samotnému príkladu. Predstavme si, že priamka $p$, ktorú hľadáme, existuje. Poďme sa pozrieť na to, ako musia byť okolo nej rozmiestnené body $P_1, P_2, \dots P_{2011}$. Rozlíšime dva prípady.

1. Nejaký bod $P_i$ na leží na priamke $p$. Potom, aby priamka obsahovala aj nejaký vnútorný bod úsečiek $P_{i-1}P_i$ a $P_iP_{i+1}$, musia aj body $P_{i-i}$ a $P_{i+1}$ ležať na priamke $p$. Ak sa nad tým hlbšie zamyslíme, zistíme, že na priamke $p$ musia postupne ležať všetky body. Ak teda body $P_1, P_2, \dots, P_{2011}$ ležia na jednej priamke, úloha má jedno riešenie.

2. Žiadny bod $P_i$ neleží na priamke $p$. V tomto prípade priamka rozdelí rovinu na dve polroviny. Zoberme si najprv bod $P_1$. Ak má priamka prechádzať vnútorným bodom úsečky $P_1P_2$, musí bod $P_2$ ležať v opačnej polrovine. Takýmto istým spôsobom je potom určená poloha bodu $P_3$, $P_4$ a všetkých ostatných bodov. Výsledkom bude, že body s párnym indexom sa budú nachádzať v jednej a body s nepárnym indexom v druhej polrovine (viď obrázok). V takomto prípade ale úsečka $P_1P_{2011}$ leží celá v jednej z polrovín a priamka neobsahuje žiadny jej vnútorný bod. V tomto prípade sme teda zistili, že priamka nespĺňa kritériá zadania. Tým sme dokázali, že pre inú polohu bodov $P_1, P_2, \dots, P_{2011}$, ako na priamke (1. prípad), žiadne riešenie neexistuje. Dobre si premyslite, či sme do týchto dvoch prípadov naozaj zahrnuli všetky možné polohy bodov.

<u>Komentár:</u> Mnohí z vás využívali vo svojom riešení vetu: *V mnohouholníku viem jednou priamkou preťať vždy najviac dve jeho strany.* Dojem, že táto veta platí, ste získali z toho, že ste si nakreslili konvexný štvoruholník alebo päťuholník. V nich to platí. Ale čo ak mnohouholník nie je konvexný? V zadaní sa hovorilo len o spájaní bodov úsečkami, o uhloch reč nebola. Mnohouholník dokonca ani vzniknúť nemusí, nakoľko úsečky sa môžu ľubovoľne pretínať. *Úloha:* Skúste si doma nakresliť nekonvexný mnohouholník, v ktorom vieme jednou priamkou preťať všetky jeho strany. Dá sa to pre ľubovoľný počet vrcholov?




<u>**Úloha č. 6:**</u> *Stredy strán $BC$, $CA$, $AB$ trojuholníka $ABC$ označíme postupne $K$, $L$, $M$. Dokážte, že uhly $AMC$ a $BLC$ majú rovnakú veľkosť práve vtedy, keď majú rovnakú veľkosť uhly $CAK$ a $BCM$.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Aďa)

Označme priesečník ťažníc $AK$, $CM$ a $BL$ ako $T$. Ukážeme najskôr implikáciu: ak platí, že uhly $BLC$ a $AMC$ sú zhodné, potom platí, že aj uhol $CAK$ je zhodný s uhlom $BCM$.

Najprv ukážeme, že štvoruholník $AMTL$ je tetivový. Označme si $\alpha = |\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle AMC|$. Uhly $CLB$ a $BLA$ sú susedné, teda $|\sphericalangle BLA| = 180 - \alpha$. Súčet protiľahlých uhlov v štvoruholníku $AMTL$ je 180°, z čoho vyplýva, že je tetivový, teda mu môžeme opísať kružnicu. Túto kružnicu označme $o$. Všimnime jej tetivu $LT$. Nad touto tetivou tvoria strany a uhlopriečky nášho tetivového štvoruholníka dva obvodové uhly, $LAT$ a $LMT$. Z vlastností obvodových uhlov vieme, že tieto uhly sú zhodné.

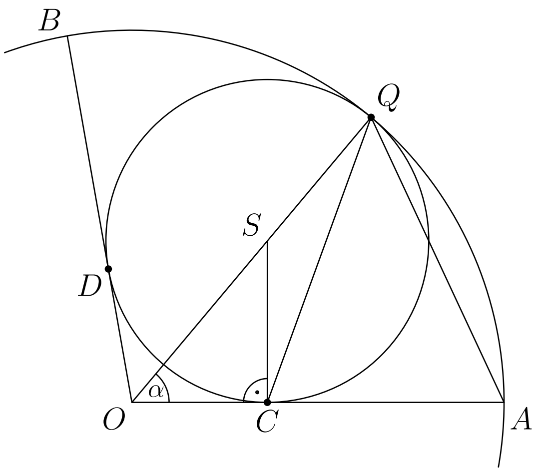
Všimnime si ďalšiu parádnu vec. Úsečka $ML$ je strednou priečkou trojuholníka $ABC$, teda $ML$ je rovnobežná s $BC$. Potom uhly $LMC$ a $MCB$ sú striedavé, a teda zhodné. Ukázali sme, že platí $|\sphericalangle LAT| = |\sphericalangle LMT| = |\sphericalangle TCB|$. Zároveň každú implikáciu možno nahradiť ekvivalenciou. (Premyslite si.) Tým je dôkaz hotový.

<u>**Úloha č. 7:**</u> *Majme na kružnici $k$ so stredom $O$ vyznačené dva polomery $OA$ a $OB$. Kružnica $l$ sa dotýka kružnice $k$ v bode $Q$ a dotýka sa aj spomínaných polomerov postupne v bodoch $C$ a $D$. Určte veľkosť uhla $AQC$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Marek a Paľo)

Najskôr si ukážeme priamočiare riešenie cez počítanie uhlov.

Označme si $S$ stred kružnice $l$. Všimnime si najprv, že body $O, S, Q$ ležia na priamke. Vyplýva to napríklad z toho, že kružnice $k, l$ sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti $Q$.




Ak sa chceme vyhnúť rovnoľahlosti, môžeme si všimnúť, že dotyčnica ku kružnici $k$ v bode $Q$ je zároveň dotyčnicou ku kružnici $l$. Vieme ale, že kolmica na dotyčnicu ku kružnici v bode dotyku prechádza stredom danej kružnice. Teda kolmica na spomínanú dotyčnicu v bode Q prechádza bodom $O$ aj bodom $S$.
Označme $\alpha$ veľkosť uhla $AOQ$ a poďme počítať uhly. Keďže kružnica $l$ sa dotýka priamky $OA$ v bode $C$, uhol $OCS$ je pravý. Z trojuholníka $OSC$ teda máme $|\sphericalangle OSC| = 90° - \alpha$.
Uhol $CSQ$ je susedný uhol k uhlu $OSC$ (tu sme využili kolineárnosť bodov $O, S, Q$), pre jeho veľkosť teda platí

$$|\sphericalangle CSQ| = 180° - |\sphericalangle OSC| = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha.$$

Keďže $SC$ a $SQ$ sú polomery kružnice $l$, trojuholník $CQS$ je rovnoramenný. Odtiaľ máme

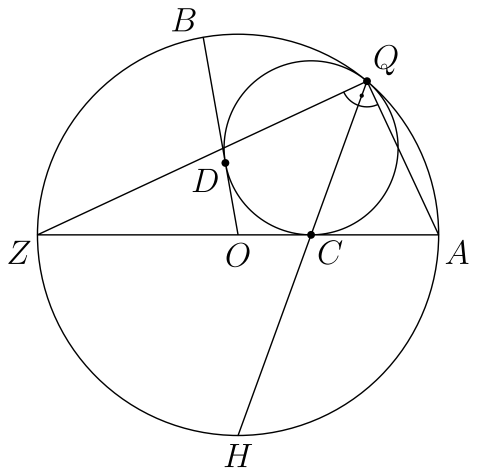
$$|\sphericalangle CQS| = \frac{180° - |\sphericalangle CSQ|}{2} = \frac{180° - (90° + \alpha)}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

Podobne i trojuholník $AQO$ je rovnoramenný, lebo $OA$, $OQ$ sú polomery kružnice $k$. Odtiaľ podobným výpočtom dostaneme $|\sphericalangle AQO| = 90° - \alpha/2$.
Hľadanú veľkosť uhla $AQC$ už vieme ľahko dopočítať,

$$|\sphericalangle AQC| = |\sphericalangle AQO| - |\sphericalangle CQO| = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 45°.$$

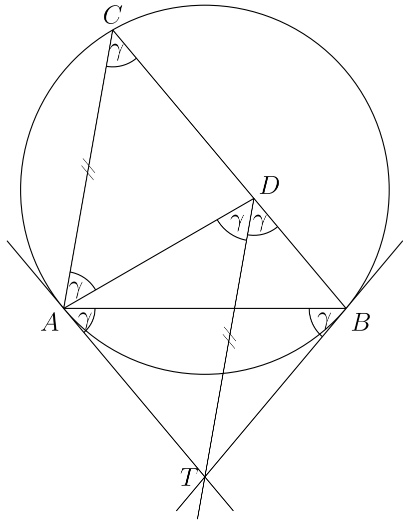
<u>Poznámka:</u> Toto riešenie z formálneho hľadiska zlyhá, ak je $AB$ priemer kružnice $k$. V takom prípade totiž $C = O\,(= D)$, a teda nemôžeme hovoriť o uhle $OCS$. Triviálne ale máme tiež $|\sphericalangle AQC| = 45°$.

<u>Iné riešenie:</u>
*(Podľa Le Anh Dunga)* Nech $H$ je priesečník priamky $CQ$ a kružnice $k$, rôzny od bodu $Q$. Nech $Z$ je priesečník priamky $OA$ a kružnice $k$, rôzny od bodu $A$.
Môžeme BUNV[1] predpokladať, že priamka $ZA$ je vodorovná, teda bod $C$ je najnižší bod kružnice $l$.
Bod $Q$ je bod dotyku kružníc $k, l$, preto je tiež stredom rovnoľahlosti zobrazujúcej kružnicu $l$ na kružnicu $k$. Pri tejto rovnoľahlosti sa bod $C$ zobrazí do bodu $H$, preto bod $H$ je najnižší bod kružnice $k$. Takže bod $H$ je stredom oblúku $AZ$. Oblúky $AH$ a $HZ$ sú teda rovnako dlhé, takže im zodpovedá rovnaká veľkosť obvodového uhlu na kružnici $k$. Z toho vyplýva, že priamka $CQ$ je osou uhla $AQZ$, ktorý je však pravý, lebo $AZ$ je priemer kružnice $k$. Takže $|\sphericalangle AQC| = 45°$.




**Úloha č. 8:** *Dotyčnice v bodoch $A$ a $B$ ku kružnici opísanej trojuholníku $ABC$ sa pretínajú v bode $T$. Rovnobežka s priamkou $AC$ prechádzajúca bodom $T$ pretína priamku $BC$ v bode $D$. Dokážte, že trojuholník $ACD$ je rovnoramenný.*

[1] bez ujmy na všeobecnosti

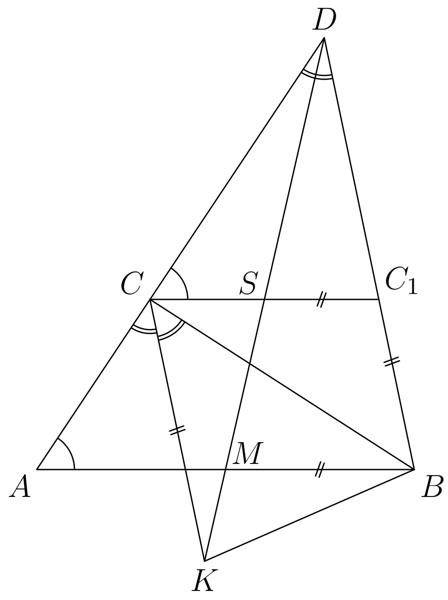



Riešenie: (opravoval JeFo)
Začnime prípadom, že bod $D$ leží vo vnútri kružnice opísanej trojuholníku $ABC$.
Označme si tradične $\gamma$ uhol pri vrchole $C$ v trojuholníku $ABC$. Rovnobežku s úsečkou $AC$ cez bod $T$ označme ako $p$, nech vieme, ako ju máme osloviť, mohla by sa nám zísť. Z rovnobežnosti $p$ a $AC$ máme $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TDB| = \gamma$. Taktiež $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle ABT| = \gamma$, sú to totiž úsekové uhly k obvodovému uhlu $ACB$.
Tak, už máme všetko, čo potrebujeme, a teraz to zužitkujeme. Všimnime si, že štvoruholník $TBDA$ je tetivový (dá sa mu opísať kružnica), lebo $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle BDT| = \gamma$, čiže sú to obvodové uhly nad tetivou $TB$. Potom aj $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle ADT| = \gamma$, lebo sú to obvodové uhly nad tetivou $TA$. A už je skoro hotovo, stačí si len všimnúť, že $|\sphericalangle ADT| = |\sphericalangle CAD| = \gamma$ (striedavé uhly). Potom je jasné, že trojuholník $ACD$ je rovnoramenný, lebo $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \gamma$.
Ostávajú ešte dva prípady, ak neberieme do úvahy patologické prípady, že niektoré body sa prekryjú, a potom sú riešenia triviálne:

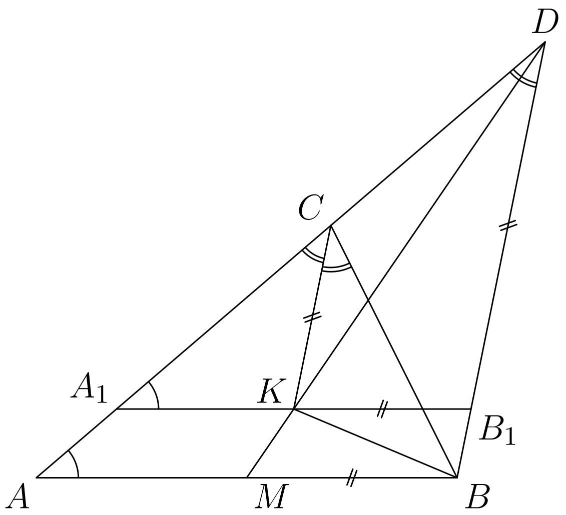
- Bod $D$ leží zvonka opísanej kružnice a trojuholník $ABC$ má tupý uhol pri vrchole $C$.
- Bod $D$ leží zvonka opísanej kružnice a trojuholník $ABC$ má ostrý uhol pri vrchole $C$.

Oba prípady sa vyriešia podobne, ako ten prvý, preto túto časť (nutnú pre úplne riešenie) ponecháme na čitateľa. Je dôležité si len uvedomiť, že vždy potrebujeme dajako ukázať, že body $A, B, D, T$ ležia na kružnici a z toho nám potom riešenie už ľahko vypadne.

**Úloha č. 9:** *Majme trojuholník $ABC$. Označme $M$ stred strany $AB$. Nech $D$ je bod na opačnej polpriamke k polpriamke $CA$, pre ktorý platí $|CB| = |CD|$. Priesečník osi uhla $ACB$ a priamky $MD$ označme $K$. Ukážte, že uhly $KBC$ a $BAC$ majú rovnakú veľkosť.*
Riešenie: (opravoval Edo)
Prišlo od vás dosť veľa rôznych riešení. Viacerí z vás si všimli, že tento príklad sa dal vyriešiť v podstate jednoducho, napríklad analyticky. Kto chce, môže si to vyskúšať, ale vzorové riešenie sa tým smerom uberať nebude. Z riešení, ktoré prišli, si ukážeme dva pekné spôsoby.




Označme si uhly pri vrcholoch v trojuholníku $ABC$ štandardne, teda pri vrchole $C$ bude uhol $\gamma$. Uhol $BCD$ je susedný k uhlu $BCA$, preto je jeho veľkosť $180° - \gamma$. Trojuholník $BCD$ je rovnoramenný, preto $|\sphericalangle CDB| = \gamma/2$. Odtiaľ vidno, že os uhla $ACB$ je rovnobežná s priamkou $BD$, pretože zvierajú s priamkou $AC$ rovnaký uhol.
Nech $C_1$ je priesečník rovnobežky s $AB$ cez bod $C$ a priamky $BD$. Keďže priamka $DK$ prechádza stredom $AB$, prechádza aj stredom $CC_1$, nazvime si ho $S$. Vyplýva to napríklad z rovnoľahlosti úsečiek $CC_1$ a $AB$ so stredom v bode $D$. Uhly $KSC$ a $C_1SD$ sú vrcholové, teda rovnaké. Aj uhly $CKS$ a $SDC_1$ sú zhodné, pretože priamky $CK$ a $DC_1$ sú rovnobežné. Navyše platí, že $|CS| = |C_1S|$. Trojuholníky $CKS$ a $C_1DS$ sú potom zhodné. Preto dĺžka úsečky $CK$ je rovnaká, ako dĺžka úsečky $C_1D$.
Zo zadania vieme, že $|CD| = |BC|$. Taktiež vieme, že uhly $KCB$ a $CDB$ majú oba veľkosť $\gamma/2$. Preto podľa vety *sus* sú trojuholníky $CC_1D$ a $BKC$ zhodné. Takže uhol $KBC$ je rovnaký ako $C_1CD$. Keďže priamka $CC_1$ je rovnobežná s $AB$, zviera rovnaký uhol s priamkou $AD$, a preto je uhol $C_1CD$ rovný uhlu $BAC$. Odtiaľ už vyplýva, že uhly $KBC$ a $BAC$ majú rovnakú veľkosť, čo bolo treba dokázať.
Iné riešenie:
Opäť začneme rovnako ako v prvom riešení a ukážeme si, že priamka $CK$ je rovnobežná s $BD$.
Uhol $BCD$ je susedný k uhlu $BCA$, preto je jeho veľkosť $180° - \gamma$. Trojuholník $BCD$ je rovnoramenný, preto uhol $CDB$ má veľkosť $\gamma/2$. Keďže priamka $CK$ je osou uhla $\gamma$ pri vrchole $C$ v trojuholníku $ABC$, tak uhol $ACK$ má tiež veľkosť $\gamma/2$, a teda $CK$ je rovnobežná s $BD$.




Zobrazme si body $A$, $M$, $B$ rovnoľahlosťou so stredom v bode $D$ tak, aby sa bod $M$ zobrazil do bodu $K$. Obrazy bodov $A$ a $B$ si označme $A_1$ a $B_1$. Keďže rovnoľahlosť zachováva rovnobežnosť, trojuholníky $A_1B_1D$ a $ABD$ sú podobné. Taktiež, keďže $M$ je stredom strany $AB$, tak $K$ je stredom $A_1B_1$, lebo rovnoľahlosť zachováva aj pomery dĺžok.

Všimnime si teraz, že $CK$ a $DB_1$ sú rovnobežné, body $A_1$, $C$, $D$ ležia na jednej priamke a takisto aj body $A_1$, $K$, $B_1$. Teda v rovnoľahlosti so stredom v bode $A_1$ sa úsečka $CK$ zobrazí na $DB_1$. Pretože $K$ je stredom $A_1B_1$, koeficient rovnoľahlosti je dva, tým pádom $|A_1C| = |CD|$ a podľa zadania $|CD| = |BC|$, preto $|A_1C| = |BC|$.

Trojuholníky $A_1CK$ a $BCK$ majú teda dve rovnako dlhé strany a zhodná je aj veľkosť uhla, ktorý zvierajú, preto sú zhodné. Teda uhol $KBC$ je rovnaký ako uhol $KA_1C$, ktorý je zhodný s uhlom $BAC$.

**Úloha č. 10:** *Daná je kružnica $k$ a bod $A$ ležiaci mimo nej. Pre rovnostranný trojuholník $PQR$ vpísaný do kružnice $k$ označíme $U$, $V$, $W$ postupne priesečníky priamok $AP$, $AQ$, $AR$ s kružnicou $k$ rôzne od $P, Q, R$. Dokážte, že hodnota výrazu*

$$\frac{AP}{AU} + \frac{AQ}{AV} + \frac{AR}{AW}$$

*nezávisí od polohy trojuholníka $PQR$.*

Riešenie: (opravoval HAgO)

Základom úspešného vyriešenia geometrickej úlohy je dobrý náčrt. Ešte pred jeho nakreslením sa ale dohodnime, že stred kružnice $k$ budeme označovať $S$ a jej polomer $r$. Hneď po nakreslení náčrtu nám do očí udrie veľa sečníc kružnice $k$, prechádzajúcich bodom $A$. To môže znamenať jediné — mocnosť. Mocnosť bodu $A$ ku kružnici $k$ je také číslo $M$, ktoré sa dá napísať ako súčin vzdialeností bodu $A$ od priesečníkov kružnice $k$ s jej ľubovoľnou sečnicou prechádzajúcou bodom $A$. Toto číslo nijako nezávisí od smeru sečnice. Prepísané do zrozumiteľnej reči to znamená

$$M = |AP| \cdot |AU| = |AQ| \cdot |AV| = |AR| \cdot |AW|.$$

Máme tam súčiny nejakých povedomých dĺžok. Jediné, čo kazí dojem, je, že vo výraze zo zadania sa tieto dĺžky nenachádzajú v súčine, ale v podieli. Keď však rozšírime všetky zlomky čitateľom, v menovateli dostaneme ten správny súčin

$$\frac{|AP|}{|AU|} + \frac{|AQ|}{|AV|} + \frac{|AR|}{|AW|} = \frac{|AP| \cdot |AP|}{|AP| \cdot |AU|} + \frac{|AQ| \cdot |AQ|}{|AQ| \cdot |AV|} + \frac{|AR| \cdot |AR|}{|AR| \cdot |AW|} = \frac{|AP|^2 + |AQ|^2 + |AR|^2}{M}.$$

Nakoľko sme si už dali toľko práce s upravovaním výrazu, tak sa odteraz budeme baviť o jeho upravenej verzii. Presnejšie iba o čitateli, pretože menovateľ nezávisí od polohy trojuholníka $PQR$. Stačí teda ukázať, že ani čitateľ nie je závislý od jeho polohy.

Dĺžka úsečky na druhú sa dá vypočítať napríklad z kosínusovej vety. Úsečky vystupujúce vo výraze sa nachádzajú v trojuholníkoch[2] $ASP$, $ASQ$ a $ASR$. Na kosínusovu vetu potrebujeme dve strany a kosínus uhla medzi nimi. Jedna strana je vo všetkých trojuholníkoch $AS$, druhá je polomerom kružnice $k$. Takže už len ten uhol. Označme si uhol $ASP$ ako $\alpha$. Uhol $ASQ$ je od neho o $120°$ (uhol $PSQ$) väčší a uhol $ASR$ ešte o ďalších $120°$ (uhol $QSR$) väčší.

To, čo sme si práve povedali, nie je tak úplne pravda. V podstate počítame uhly od polpriamky $SA$ proti smeru hodinových ručičiek. Nejaký z tých uhlov by nám mohol vyjsť viac ako $180°$. Vtedy je ten skutočný uhol doplnkom do $360°$. Mohla by sa nám však stať aj oveľa väčšia galiba, keby uhol vyšiel viac ako $360°$. Zachránime to odpočítaním $360°$. Nám však postačí kosínus uhla a ten sa týmito čachrami nemení. Teda platí

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= |AS|^2 + r^2 - 2|AS| r \cos\alpha, \\ |AQ|^2 &= |AS|^2 + r^2 - 2|AS| r \cos(\alpha + 120°), \\ |AR|^2 &= |AS|^2 + r^2 - 2|AS| r \cos(\alpha + 240°). \end{aligned}$$

Dosaďme naše úspechy na poli vyjadrovania druhých mocnín pomocou niečoho iného do výrazu a kosínusy rozbime

[2]Niektorý z nich môže byť zdegenerovaný trojuholník, to nám však nevadí, lebo preň rovnako platí kosínusová veta.

pomocou súčtových vzorcov. Postupne dostávame:

$$\begin{aligned} & |AP|^2+|AQ|^2+|AR|^2 = 3\left(|AS|^2+r^2\right) - 2|AS|r\left(\cos\alpha+\cos\left(\alpha+120^\circ\right)+\cos\left(\alpha+240^\circ\right)\right) = \\ = \ & 3\left(|AS|^2+r^2\right) - 2|AS|r\left(\cos\alpha+\cos\alpha\cos 120^\circ-\sin\alpha\sin 120^\circ+\cos\alpha\cos 240^\circ-\sin\alpha\sin 240^\circ\right) = \\ = \ & 3\left(|AS|^2+r^2\right) - 2|AS|r\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) = \\ = \ & 3\left(|AS|^2+r^2\right). \end{aligned}$$

A sme hotoví, pretože tento výraz očividne nezávisí od polohy trojuholníka $PQR$, čiže nebude závisieť ani po vydelení $M$ a po tejto úprave dospejeme k výrazu zo zadania.

**Úloha č. 11:** *Máme daný trojuholník $ABC$. Označme $k$ vpísanú kružnicu trojuholníka $ABC$ a $I$ jej stred. Nech $p$ je priamka dotýkajúca sa kružnice $k$ v bode $L$ tak, že $p$ nie je rovnobežná so žiadnou stranou trojuholníka $ABC$. Nech $A'$ je bod na $p$, pre ktorý je uhol $AIA'$ pravý. Podobne určíme body $B'$ a $C'$. Dokážte, že priamky $AA'$, $BB'$ a $CC'$ sa pretínajú v spoločnom bode.*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Podobne ako **Beta** tento rok zavítala do **Gamy**, tentoraz ste mohli byť svedkami toho, ako prišla **Gama** na návštevu do **Bety**.
Pred samotným čítaním dôkazu si pripomeňte, čo je Simsonova priamka (wiki: Simson line). Zavedieme pojmy pól a polára. Majme kružnicu $k$ s polomerom $r$ a jej stred $S$. Ďalej majme bod $P$ a priamku $p$ kolmú na priamku $SP$. Označme $r_1 = |SP|$ a vzdialenosť priamky $p$ od bodu $S$ ako $r_2$. Potom $P$ je pólom poláry $p$, ak $r_1/r = r/r_2$. Špeciálne, ak polára pretína kružnicu v bodoch $A_1$ a $A_2$, tak pólom je priesečník dotyčníc ku kružnici $k$ v bodoch $A_1$ a $A_2$. (Overte si, že definícia sedí aj v tomto prípade.) Znalcom by to malo pripomínať kružnicovú inverziu. Viac informácií o polárach nájdete na http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/PolePolar.shtml.

Nasledujúce tvrdenia ponechávame usilovnému čitateľovi ako cvičenia:

1. Póly $A$, $B$ a $C$ ležia na priamke práve vtedy, keď sa k nim prislúchajúce poláry pretínajú v jednom bode.
2. Priesečník polár prislúchajúci k bodom $A$ a $B$ je pólom poláry $AB$.

Pri riešení geometrie sa hovorí, že dobrý obrázok je polovicou riešenia. V tomto prípade to platilo dvojnásobne. Teraz očakávam, že si nakreslíte obrázok a budete sledovať riešenie. Pre istotu si nakreslite ešte jeden trocha iný obrázok, hádam vám to na jednom z nich bude vychádzať :-).
Označme postupne dotykové body vpísanej kružnice na stranách $AB$, $BC$ a $CA$ ako $Z$, $X$ a $Y$. Ďalej, nech $q$ je priamka rovnobežná s priamkou $AI$ prechádzajúca bodom $L$. Nakoniec označíme priesečník $q$ a priamky $YZ$ ako $X'$. Pozrime sa teraz na to, čo máme na obrázku. Bod $A'$ je pólom poláry $q$. Je to tak preto, lebo priamka $IA'$ je kolmá na poláru $q$ a priamka $LA'$ je dotyčnicou kružnice v bode $L$. To je už spomínaný špeciálny prípad poláry prechádzajúcej kružnicou. Kvôli druhému tvrdeniu je $X'$ pólom poláry $AA'$. Ešte si uvedomíme, že $X'$ je pätou kolmice na priamku $YZ$. Ctižiadostivým riešiteľom navrhujem, aby riešenie doklepli pomocou zvyšných dvoch tvrdení. Je krásne, keď si uvedomíte, ako to všetko do seba zaklapne.
Pre bežných smrteľníkov pokračujeme ďalej. Podobne ako sme konštruovali bod $X'$, skonštruujeme body $Y'$ a $Z'$. Body $X'$, $Y'$ a $Z'$ ležia na Simsonovej priamke. Keďže tieto póly ležia na priamke, k nim prislúchajúce poláry sa pretínajú v jednom bode. Takže priamky $AA'$, $BB'$ a $CC'$ sa pretínajú v jednom bode (sú kongruentné).
Navrhujem, aby ste si vzorové riešenie prečítali ešte aspoň raz a snažili sa zobrať si z neho čo najviac. Možno vzorák nepochopíte na prvýkrát, ale keď sa vám to po viacerých pokusoch podarí, určite sa z neho aj niečo naučíte.
Ako sa dalo vyriešiť túto úlohu bez vhodných poznatkov? Jedine časovo náročným postupom (a keďže sme korešpondenčný seminár, tak na to máte čas). Ak neviete o žiadnom tvrdení, ktoré pripomína to, ktoré chcete dokázať, je vhodné sa po nejakom obzrieť. V tomto prípade chcete transformovať kongruentnosť (pretínanie sa v jednom bode) na inú podmienku. Jedna z možností je Cevova veta. (V tomto príklade sa dal použiť goniometrický tvar.) Ďalšou z možností je ukázať, že vzdialenosť priesečníkov $AA'$ s $BB'$ a $BB'$ s $CC'$ je nula. Alebo ukázať, že spomínané priamky sú nejaké výšky, osi uhlov, ťažnice, … v nejakom trojuholníku. Potom si zvolíte spôsob riešenia, ktorý použijete (plán) a snažíte sa ho realizovať.
Dúfam, že toto vzorové riešenie bolo poučné a jeho úplne pochopenie zdvihlo ako vašu geometrickú úroveň, tak aj vašu náladu. V prípade akýchkoľvek nejasností sa, prosím, pýtajte na petrzlen@kms.sk. Želám veľa šťastia v tretej sérii.

**Úloha č. 12:** *Nech $a, b, c$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a+b+c=abc$. Dokážte, že*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

*a zistite, kedy nastáva rovnosť.*

Riešenie: (opravoval Filip)
Ukážeme si jednu super drsnú fintu, používanú na drsné nerovnosti. Názov tohto príkladu by mal byť „goniometrické substitúcie pre začiatočníkov“. Pokiaľ máme nerovnosť pre kladné reálne čísla, oplatí sa nahrádzať premenné nejakou funkciou, čo ich prebieha všetky [3]. Najvhodnejším kandidátom je funkcia tangens. Pre tangens poznáme všelijaké vzorce, ktoré pri goniometrických substitúciách treba často používať. Aby sme mali jednoznačné vyjadrenie, teda bijekciu na $\mathbb{R}^+$, zoberme tangens definovaný na intervale $(0, \pi/2)$. Položme $a = \tan A$, $b = \tan B$, $c = \tan C$, kde $A, B, C \in (0, \pi/2)$. Teraz príde pointa. Načo nám toto všetko bolo dobré? Kvôli väzbe, ktorú musíme nejako uchopiť. Dostávame $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$, odkiaľ po úprave obdržíme

$$\tan C = \frac{-(\tan A + \tan B)}{1 - \tan A \tan B} = \tan(\pi - A - B),$$

z čoho vyplýva $A + B + C = \pi$. Hneď to vyzerá krajšie ako pôvodná väzba v zadaní. Keď si prepíšeme zadanú nerovnosť v premenných $A, B, C$, vidíme, že máme dokázať

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Toto je už štandardný príklad na Jensenovu nerovnosť[4]. Nehovoriac o tom, že navyše využijeme konkávnosť funkcie kosínus na intervale $(0, \pi/2)$, na ktorom sú premenné $A, B, C$ definované. Detaily si rozmyslite sami, tak ako aj dôvod, prečo rovnosť nastáva práve pre $A = B = C = \pi/3$, teda keď $a = b = c = \sqrt{3}$.

**Úloha č. 13:** *Nech $n > 2$ je prirodzené číslo a $A_n$ počet neprázdnych množín $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ takých, že aritmetický priemer prvkov množiny $S$ je celé číslo. Dokážte, že $A_n - n$ je vždy párne číslo.*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Tento príklad má naozaj krátke vzorové riešenie, a preto by sa patrilo povedať niečo o tom, ako podobné úlohy riešiť. V tomto prípade je úloha trocha chyták, keďže v konečnom dôsledku dokážeme o niečo silnejšie tvrdenie.
Základom bolo správne pochopiť, čo od nás v zadaní chcú. Keďže tvrdenie $A_n - n$ *je párne číslo* veľmi nesúvisí so zvyškom zadania, porozmýšľajme, ako dané tvrdenie transformujeme na iné — použiteľnejšie. Preto chceme toto tvrdenie preložiť do reči množín.
Aby bol dôkaz interaktívny, uvedieme návodné otázky:

- Aká vlastnosť množín sa vyjadruje číslom?
- Ako množinovo vyjadríme rozdiel hodnôt tejto vlastnosti?
- Ako množinovo vyjadríme, že hodnota tejto vlastnosti je párna?
- Ako najjednoduchšie dokážeme, že dve množiny majú rovnakú hodnotu tejto vlastnosti?
- Ako môžu byť transformované podmienky zadania v reči množín?

Zanieteným riešiteľov odporúčame sa nad týmito otázkami chvíľu zamyslieť. Odpovedí na poslednú z nich je celkom veľa, skúste si niektoré z nich dokázať alebo sa presvedčiť o tom, že tadiaľ riešenie nevedie.
Postupne uvedieme správne odpovede. Na prvú otázku ste určite odpovedali správne — ide o mohutnosť množín. Rozdiel mohutností $|B| - |C|$ sa správa rovnako ako klasické odčítanie, keď $C$ je podmnožinou $B$. Mohutnosť množiny je párna, ak vieme množinu rozdeliť na dve rovnako mohutné disjunktné podmnožiny. Mohutnosť dvoch množín je rovnaká práve vtedy, keď medzi nimi existuje bijekcia. (Tento spôsob určite poznáte z kombinatoriky.) Ako môžeme teraz preformulovať zadanie?
Chvíľu porozmýšľajte.
Transformácia: „Ak odoberieme z množiny[5] $A_n$ množinu mohutnosti $n$, tak vzniknutú množinu vieme rozdeliť na dve rovnako mohutné množiny.“ Teraz sme už oveľa bližšie k riešeniu, lebo vieme, čo máme robiť. Treba nájsť vhodnú $n$-prvkovú podmnožinu $A_n$, a potom vhodnú vlastnosť, podľa ktorej vytvoríme bijekciu medzi dvomi podmnožinami.
Chvíľu porozmýšľajte.
Najjednoduchšou $n$-prvkovou podmnožinou $A_n$ je množina obsahujúca množiny $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$, ktorú si označíme $T$. Ďalej označme $s(B)$ aritmetický priemer prvkov množiny $B$. Rozdelíme množinu $E = A_n - T$ na množiny $E_1$ a $E_2$ tak, že v množine $E_1$ budú tie množiny, pre ktoré $s(E_1) \in E_1$ a v množine $E_2$ budú ostatné. Evidentne $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ a $E_1 \cup E_2 = E$. (Teda $\{E_1, E_2\}$ je *rozklad* množiny $E$.) Bijekciu $u$ medzi $E_1$ a $E_2$ skonštruujeme teraz už jednoducho: $u(X) = X - \{s(X)\}$, a teda $|E_1| = |E_2|$. Keďže sa $E$ dá rozložiť na dve rovnako mohutné množiny, číslo $|E| = |A_n| - n$ je párne.

[3] To znamená, že všetky kladné reálne čísla patria do oboru hodnôt tejto funkcie.
[4] pozri http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf, stranu 30
[5] Nech $A_n$ označuje nie počet (ako je to v zadaní), ale *množinu* neprázdnych množín $S$ zo zadania. Chceme teda ukázať, že $|A_n| - n$ je párne.

__Úloha č. 14:__ *Funkcia $f$ je definovaná na prirodzených číslach predpisom*

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right).$$

*a) Dokážte, že $f(n+1) > f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt $n$.*

*b) Dokážte, že $f(n+1) < f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt $n$.*

__Riešenie:__ (opravoval Filip)
Pozrime sa, čo robí súčet

$$\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor = nf(n)$$

a označme ho $g(n)$. Zrejme $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor$ sa rovná 1, ak $k$ delí $n$, inak sa rovná 0. Dostávame tak $g(n) = g(n-1) + d(n)$, kde $d(n)$ označuje počet prirodzených deliteľov čísla $n$. Keď si definujeme $g(0) = 0$, hneď máme

$$g(n) = d(1) + d(2) + \cdots + d(n).$$

Všimnime si, že $f(n)$ je aritmetický priemer čísel $d(1), d(2), \ldots, d(n)$. Ak teraz dokážeme, že $d(n+1) < f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt $n$ a tiež $d(n+1) > f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt $n$, vyhrali sme. A naozaj, $d(n+1) < f(n)$ pre všetky prvočísla $n+1$ a $d(n+1) > f(n)$ sa vyskytne zrejme tiež nekonečne veľakrát. (Rozmyslite si.)

## __Výsledková listina__

**kategória ALFA, Bratislava**

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | **k$_\alpha$** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Vozárová Viktória | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 8 | 9 | 9 | 5 | | | | 78 |
| 2. | Jurina Šimon | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | | 73 |
| 2. | Lipovský Mário | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | 9 | | | 7 | | 73 |
| 4. | Gafurov Askar | 2. | Gamča BA | 3 | | | 6 | 9 | 9 | | 8 | | 70 |
| 4. | Ondráš Ján | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 8 | 9 | 9 | 7 | | | | 70 |
| 6. | Kováčová Barbora | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 8 | 9 | 9 | 9 | | | | 68 |
| 7. | Krakovská Hana | 1. | Gamča BA | 2 | | 6 | 9 | | 9 | | 8 | | 63 |
| 8. | Prívozník Matej | 1. | GJH BA | 2 | | 7 | 9 | | 5 | | | | 60 |
| 9. | Mojžišová Karolína | 1. | Gamča BA | 2 | | 5 | 9 | | 8 | | | | 58 |
| 10. | Kurdelová Alžbeta | 1. | ŠPMNDG BA | 3 | | | 9 | 9 | 5 | | | | 52 |
| 10. | Smolík Martin | 2. | Gamča BA | 3 | | | 9 | 9 | 9 | | 7 | | 52 |
| 12. | Klimkovič Anna-Mária | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 5 | 1 | 8 | | 4 | 8 | | 50 |
| 13. | Šandalová Michaela | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 5 | 1 | 8 | | | | | 46 |
| 14. | Bošeľová Margita | 1. | GPan BA | 1 | | | | | | | | | 45 |
| 15. | Galanová Miriam | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 6 | 9 | | | | | | 42 |
| 16. | Iždinská Dominika | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | | | | | | 39 |
| 17. | Roštár Marek | 2. | 1SG BA | 2 | | | 5 | 0 | 0 | | | | 30 |
| 18. | Bednár Stanislav | 1. | GJH BA | 1 | | 1 | 1 | 0 | | 9 | | | 29 |
| 19. | Žilková Alexandra | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | | | | | | | | 25 |

**kategória ALFA, západ**

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | **k$_\alpha$** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Daniel Mark | 1. | GPár NR | 1 | 9 | 7 | 9 | 8 | | | 8 | | 79 |
| 2. | Korbela Michal | 1. | G Bánovce | 2 | | 9 | 9 | 9 | 9 | | 8 | | 78 |
| 3. | Pokrývka Filip | 1. | G Bánovce | 2 | | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 8 | | 77 |
| 4. | Horváth Samuel | 1. | GPár NR | 1 | 9 | 9 | 7 | 9 | | | 8 | | 75 |
| 5. | Franková Monika | 1. | GKom PE | 2 | | 6 | 9 | 9 | 3 | 2 | | | 59 |
| 6. | Šimková Ľudmila | 1. | GPár NR | 2 | | 5 | 9 | 9 | 9 | 9 | 8 | | 44 |
| 7. | Kováčová Radka | 1. | GPdC PN | 1 | 5 | 1 | 8 | 0 | | 2 | 0 | | 27 |

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8. | Pavlíková Stela | 1. | GĽŠ TN | 1 | 9 | | | | | | | | 25 |
| 9. | Šuppa Marek | 2. | GCM NR | 2 | | | | | | | | | 13 |
| 10. | Puček Samuel | 2. | GĽŠ TN | 3 | | | | | | | | | 11 |
| 11. | Lúčna Nina | 2. | GPdC PN | 3 | | | | | | | | | 6 |

**kategória ALFA, stred**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Sučík Samuel | 0. | ZŠ Čelovce | 0 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | 8 | | 89 |
| 2. | Hrivová Ivona | 1. | GVO ZA | 2 | | 9 | 9 | 9 | | | 9 | | 74 |
| 3. | Ječmenová Andrea | 1. | GVO ZA | 2 | | 8 | 9 | 9 | | | 6 | | 72 |
| 4. | Psota Miroslav | 1. | GHlin ZA | 2 | | 9 | 9 | 9 | 0 | | 8 | | 71 |
| 5. | Melo Jakub | 1. | GsvFA ZA | 2 | | 9 | 9 | 9 | 1 | | | | 64 |
| 6. | Hromcová Zuzana | 1. | GVO ZA | 2 | | 9 | 9 | 9 | 6 | | | | 63 |
| 6. | Magyarová Zuzana | 1. | GBST LC | 2 | | 5 | 9 | 8 | 6 | | 5 | | 63 |
| 8. | Nociarová Zuzana | 1. | GBST LC | 1 | 9 | 7 | 7 | 7 | | | | | 58 |
| 9. | Jankovichová Ľudmila | 1. | GJGT BB | 2 | | | 9 | | 5 | 2 | 1 | | 47 |
| 10. | Gašpárek Miroslav | 0. | SG ZA | 0 | | | | | | | | | 17 |
| 11. | Šubjaková Mária | 3. | GPOH DK | 3 | | | | | | | | | 15 |
| 12. | Kubišová Barbora | 3. | GJGT BB | 3 | | | | | | | | | 11 |
| 13. | Fiľová Lucia | 3. | HA BR | 3 | | | | | | | | | 0 |

**kategória ALFA, východ**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Stankovič Miroslav | 1. | GPoš KE | 2 | | 7 | 9 | 9 | | 9 | 8 | | 84 |
| 2. | Šromeková Karolína | 1. | GDT PP | 2 | | 6 | 9 | 3 | | | | | 52 |
| 3. | Magurová Lucia | 2. | GPoš KE | 3 | | | 9 | 9 | 9 | | 9 | | 49 |
| 4. | Pivovarník Roman | 1. | GJAR PO | 2 | | 9 | 9 | 9 | | | | | 39 |
| 5. | Hofierka Jaroslav | 1. | GJAR PO | 2 | | 9 | 9 | | | | | | 35 |
| 5. | Hojnoš Peter | 1. | GŠkol SN | 2 | | 9 | 7 | 1 | | | | | 35 |
| 7. | Dudič Ján | 2. | GPoš KE | 2 | 9 | | 7 | 1 | 6 | | | | 32 |
| 7. | Greššák Jerguš | 2. | GJAR PO | 3 | | | | | | | | | 32 |
| 7. | Országh Marián | 1. | GJAR PO | 1 | 6 | 9 | 9 | 8 | | | | | 32 |
| 7. | Stehlík Mojmír | 0. | GTreb KE | 0 | | 6 | 9 | 9 | 8 | | 0 | | 32 |
| 11. | Batmendijn Eduard | 0. | ZŠsvCM SL | 1 | | | | | | | | | 27 |
| 11. | Polovka Maroš | 1. | GKuk PP | 2 | | | 9 | | 8 | | | | 27 |

**kategória ALFA, zahraničie**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Zemková Kristýna | 3. | Prachatice ČR | 3 | | | 9 | 9 | 5 | | 8 | | 58 |
| 2. | Teiml Dominik | 2. | AG Praha | 3 | | | | | 4 | 8 | 8 | | 47 |
| 3. | Svoboda Josef | 2. | Frýdlant ČR | 2 | | | | | 9 | 9 | 9 | | 43 |
| 4. | Šimsa Štěpán | 2. | Litoměřice ČR | 3 | | | | | | 9 | 9 | | 35 |
| 5. | Le Anh Dung | 1. | Tachov ČR | 1 | | | | | | 9 | 9 | | 18 |
| 6. | Kratochvíl Pavel | 3. | Světlá ČR | 3 | | | | 9 | | | | | 9 |

# Výsledková listina

**kategória BETA**

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | **k**$_\alpha$ | **k**$_\beta$ | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Vodička Martin | 2. | GAlej KE | 5 | 5 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | 45 | 90 |
| 2. | Horňák Marián | 3. | GPár NR | 8 | 6 | | | 9 | 8 | 8 | 9 | | | 34 | 79 |
| 3. | Balog Matej | 4. | Gamča BA | 8 | 5 | | | 9 | 8 | 9 | 9 | | | 35 | 77 |
| 4. | Barančok Peter | 4. | Gamča BA | 5 | 1 | | 9 | 8 | 7 | 9 | 9 | | | 42 | 75 |
| 5. | Teiml Dominik | 2. | AG Praha | 3 | 0 | 4 | 8 | 8 | 7 | | | | | 27 | 72 |
| 6. | Stehlík Matúš | 4. | GAlej KE | 5 | 0 | 9 | 9 | 8 | 7 | 1 | 4 | | | 37 | 70 |
| 7. | Stankovič Miroslav | 1. | GPoš KE | 2 | 0 | | 9 | 8 | 7 | | 7 | | | 31 | 69 |
| 8. | Le Anh Dung | 1. | Tachov ČR | 1 | 0 | | 9 | 9 | 7 | 9 | 7 | | | 41 | 68 |
| 9. | Galovičová Soňa | 3. | GJH BA | 8 | 4 | | | 9 | 8 | 9 | 9 | 1 | | 36 | 66 |
| 9. | Šebo Marek | 4. | Gamča BA | 4 | 0 | 9 | 9 | 8 | 8 | | | | | 34 | 66 |
| 11. | Ficková Klára | 3. | GPoš KE | 4 | 0 | 5 | 9 | 9 | 7 | | 9 | | | 39 | 65 |
| 11. | Hlavatá Martina | 4. | Gamča BA | 10 | 4 | | | 9 | 8 | 9 | 7 | | | 33 | 65 |
| 11. | Zavřel Lukáš | 4. | GChod Praha | 5 | 3 | | | 8 | 7 | 9 | 7 | | | 31 | 65 |
| 14. | Halajová Barbora | 3. | GVO ZA | 7 | 2 | | 9 | 3 | 7 | 9 | 5 | | | 33 | 64 |
| 15. | Hanzely Filip | 2. | GAP SB | 5 | 1 | | 9 | 8 | 9 | 2 | | | | 28 | 63 |
| 16. | Hlaváčik Matúš | 2. | GAlej KE | 4 | 1 | | 9 | 8 | 8 | | | | | 25 | 62 |
| 16. | Koprda Pavol | 3. | GAM TT | 7 | 2 | | 9 | 8 | 7 | | | | | 24 | 62 |
| 16. | Šimsa Štěpán | 2. | Litoměřice ČR | 3 | 2 | | 9 | 9 | 9 | | | | | 27 | 62 |
| 16. | Žídek Augustin | 3. | Frýdlant ČR | 8 | 3 | | | 9 | 7 | 9 | 7 | | | 32 | 62 |
| 20. | Karásková Natália | 4. | GJH BA | 13 | 12 | | | 8 | 8 | 9 | 9 | | | 34 | 61 |
| 20. | Klembarová Barbora | 3. | GKuk PP | 8 | 3 | | | 9 | 7 | 9 | 9 | | | 34 | 61 |
| 20. | Sabatovičová Linda | 4. | GJH BA | 9 | 2 | | 9 | 9 | 7 | 3 | | | | 28 | 61 |
| 23. | Kozák Andrej | 4. | Gamča BA | 11 | 6 | | | 8 | 7 | 9 | 9 | | | 33 | 60 |
| 24. | Guričan Pavol | 4. | GJH BA | 11 | 7 | | | 8 | 8 | 9 | 9 | | | 34 | 59 |
| 25. | Duníková Katarína | 4. | GVO ZA | 6 | 1 | | 9 | 8 | 7 | 9 | 7 | | | 40 | 58 |
| 25. | Kubelka Tomáš | 3. | Žamberk ČR | 4 | 2 | | 9 | 8 | 8 | 9 | | | | 34 | 58 |
| 27. | Gafurov Askar | 2. | Gamča BA | 3 | 0 | 9 | | 8 | 7 | | | | | 24 | 56 |
| 27. | Zemková Kristýna | 3. | Prachatice ČR | 3 | 0 | 5 | | 8 | 7 | | 9 | | | 29 | 56 |
| 29. | Kossaczká Marta | 2. | Gamča BA | 5 | 3 | | | 9 | 7 | 5 | 9 | | | 30 | 55 |
| 30. | Komanová Kristína | 2. | GAS BB | 5 | 2 | | 9 | 8 | 7 | 2 | | | | 26 | 54 |
| 30. | Kopf Michal | 3. | Opava ČR | 8 | 3 | | | 9 | 7 | 9 | 3 | | | 28 | 54 |
| 30. | Phuong Bui Thi Mai | 4. | GJH BA | 4 | 0 | | | 9 | 7 | 9 | 9 | | | 34 | 54 |
| 33. | Pellerová Daniela | 2. | Gamča BA | 5 | 2 | | 9 | 9 | 7 | 4 | | | | 29 | 53 |
| 33. | Svoboda Josef | 2. | Frýdlant ČR | 2 | 0 | 9 | 9 | 9 | 7 | | 3 | | | 37 | 53 |
| 35. | Csiba Dominik | 4. | ŠPMNDG BA | 11 | 7 | | | 9 | 7 | 9 | | | | 25 | 52 |
| 35. | Marečáková Barbora | 3. | GKuk PP | 8 | 3 | | | 8 | 7 | 4 | 9 | | | 28 | 52 |
| 37. | Belanová Michaela | 3. | ŠPMNDG BA | 7 | 2 | | | 8 | 8 | 8 | | | | 24 | 49 |
| 37. | Jasenčáková Katarína | 3. | GVO ZA | 8 | 3 | | | 9 | 8 | 9 | 8 | | | 34 | 49 |
| 39. | Vlachynská Petra | 3. | GJH BA | 6 | 0 | 5 | | 8 | 3 | | | | | 16 | 48 |
| 40. | Hozza Ján | 4. | GJH BA | 9 | 8 | | | 8 | 9 | 2 | 3 | | | 22 | 47 |
| 40. | Tóth Michal | 3. | GJH BA | 8 | 3 | | | 8 | 8 | | 4 | | | 20 | 47 |
| 42. | Kováč Ondrej | 4. | GCM NR | 11 | 6 | | | 8 | 7 | | 9 | | | 24 | 46 |
| 43. | Babej Tomáš | 4. | GPoš KE | 4 | 0 | 9 | 9 | 8 | 7 | 3 | | | | 36 | 45 |
| 43. | Batmendijn Eduard | 0. | ZŠsvCM SL | 1 | 0 | | | | | | | | | 0 | 45 |
| 43. | Faguľová Kristína | 3. | GPoš KE | 7 | 2 | | 9 | 9 | 7 | | | | | 25 | 45 |
| 46. | Nociarová Jela | 2. | GBST LC | 4 | 0 | 1 | | 8 | | 8 | | | | 17 | 43 |
| 47. | Töpfer Martin | 3. | GNŠ Praha | 4 | 3 | | | 8 | 7 | 9 | | | | 24 | 42 |
| 48. | Bok Jan | 4. | Litoměřice ČR | 4 | 0 | 5 | | 9 | | | | | | 14 | 40 |
| 48. | Santer Jakub | 4. | GMH Trstená | 10 | 6 | | | 8 | 7 | | 7 | | | 22 | 40 |
| 50. | Petrucha Jaroslav | 2. | GMet BA | 5 | 1 | | | 9 | | | | | | 9 | 39 |
| 50. | Smolík Martin | 2. | Gamča BA | 3 | 0 | 9 | | 7 | | | | | | 16 | 39 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $k_\alpha$ | $k_\beta$ | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52. | Magurová Lucia | 2. | GPoš KE | 3 | 0 | 9 | | 9 | 4 | | | | | 22 | 38 |
| 53. | Krakovská Hana | 1. | Gamča BA | 2 | 0 | 9 | | 8 | | | | | | 17 | 32 |
| 53. | Surovčík Juraj | 2. | GPOH DK | 4 | 0 | 5 | | 8 | 1 | | | | | 14 | 32 |
| 55. | Rabatin Branislav | 3. | GJH BA | 6 | 1 | | | | | | 9 | | | 9 | 31 |
| 55. | Semanišinová Denisa | 2. | GAlej KE | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 31 |
| 57. | Szabados Viktor | 4. | Gamča BA | 11 | 6 | | | 8 | 7 | | | | | 15 | 30 |
| 58. | Langer Tomáš | 3. | GJH BA | 8 | 3 | | | 7 | 7 | 7 | | | | 21 | 29 |
| 58. | Macko Vladimír | 2. | GĽŠ ZV | 5 | 1 | | | 8 | | | | | | 8 | 29 |
| 60. | Hledík Michal | 2. | GJH BA | 5 | 1 | | | | | | | | | 0 | 26 |
| 61. | Greššák Jerguš | 2. | GJAR PO | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 24 |
| 62. | Cibulka Samuel | 2. | GAV LV | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 63. | Santrová Adriana | 3. | GMH Trstená | 5 | 0 | | | 8 | | | | | | 8 | 20 |
| 64. | Kavický Dušan | 2. | GJH BA | 4 | 1 | | | | | | | | | 0 | 18 |
| 65. | Kubišová Barbora | 3. | GJGT BB | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 65. | Smolík Milan | 2. | Gamča BA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 67. | Pulmann Ján | 4. | Gamča BA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 14 |
| 68. | Kmeťová Katarína | 3. | Kilmallock IR | 7 | 1 | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 69. | Švančara Patrik | 3. | GĽŠ TN | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 70. | Hojnoš Peter | 1. | GŠkol SN | 2 | 0 | | | | | | | | | 0 | 8 |
| 71. | Masár Juraj | 4. | GJH BA | 7 | 1 | | | | | | | | | 0 | 7 |
| 72. | Tokárová Natália | 2. | GJAR PO | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 3 |
| 73. | Šafin Jakub | 2. | GPH MI | 5 | 2 | | | | | | | | | 0 | 0 |

## Výsledková listina

**kategória GAMA**

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **p** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Balog Matej | 4. | Gamča BA | 9 | | 7 | | | | 67 |
| 2. | Csiba Dominik | 4. | ŠPMNDG BA | | | | | | | 62 |
| 3. | Fiľová Lucia | 3. | HA BR | | | | | | | 0 |
| 3. | Gafurov Askar | 2. | Gamča BA | | | | | | | 0 |
| 5. | Galovičová Soňa | 3. | GJH BA | 9 | 1 | | | | | 49 |
| 6. | Kratochvíl Pavel | 3. | Světlá ČR | | | | | | | 0 |
| 7. | Le Anh Dung | 1. | Tachov ČR | 7 | | 5 | | 7 | | 106 |
| 8. | Pulmann Ján | 4. | Gamča BA | | | | | | | 5 |
| 9. | Rabatin Branislav | 3. | GJH BA | 9 | | 7 | | 7 | | 47 |
| 10. | Stankovič Miroslav | 1. | GPoš KE | 7 | | | | | | 19 |
| 11. | Steinhauser Dominik | 3. | GJK Praha | | | | | | | 12 |
| 12. | Svoboda Josef | 2. | Frýdlant ČR | 3 | | 6 | | 7 | | 60 |
| 13. | Šafin Jakub | 2. | GPH MI | | | 7 | | | | 40 |
| 14. | Tóth Michal | 3. | GJH BA | 4 | | | | | | 43 |
| 15. | Vodička Martin | 2. | GAlej KE | 9 | 9 | | | | | 146 |
| 16. | Zemková Kristýna | 3. | Prachatice ČR | 9 | | 7 | | | | 22 |