Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2010/2011

Úloha č. 1: *Keď Ika naposledy cestovala vlakom, zažila nevšednú vec. Vlak mal niekoľko vozňov, pričom v každom z nich cestoval rovnaký počet ľudí. Počas jazdy už nik nepristúpil. V polovici cesty sa 10 vozňov odpojilo a cestujúci si z nich museli presadnúť. V každom zo zostávajúcich vozňov tak pribudol jeden človek. Tesne pred koncom sa odpojilo ďalších 15 vozňov, a preto v každom z ostatných vozňov pribudli ešte traja cestujúci. Koľko vozňov mal vlak na začiatku cesty?*

Riešenie: (opravovala Kika)
Označme si v počet vagónov na začiatku cesty a c počet cestujúcich v jednom vagóne. Počet všetkých cestujúcich na začiatku cesty je $c \cdot v$.
Ak odpojíme 10 vagónov, zostane $v - 10$ vagónov. Cestujúci z týchto 10 vagónov si presadnú do ostatných a počet cestujúcich v jednom vagóne narastie na $c + 1$. Počet cestujúcich vo vlaku sa teraz dá napísať ako $(v - 10) \cdot (c + 1)$.
Ak sa odpojí ďalších 15 vagónov, zostane ich $v - 25$. V každom vagóne pribudnú ďalší traja cestujúci a ich počet v jednom vagóne bude $c + 4$. Celkový počet cestujúcich sa dá teraz vyjadriť ako $(v - 25) \cdot (c + 4)$.
Vidíme, že máme počet cestujúcich vyjadrený tromi spôsobmi a pritom sa vôbec nezmenil. Môžeme zostaviť dve rovnice

$$cv = (v-10)(c+1), \qquad (v-10)(c+1) = (v-25)(c+4).$$

Ekvivalentnými úpravami ich môžeme pozmeniť na

$$\begin{aligned} cv &= cv + v - 10c - 10, & cv + v - 10c - 10 &= cv + 4v - 25c - 100,\\ 0 &= v - 10c - 10, & 0 &= 3v - 15c - 90. \end{aligned}$$

Už z nich stačí len vyjadriť c a v:

$$\begin{aligned} &0 = 15c - 60,\\ &c = 4,\\ &v = 10c + 10 = 50. \end{aligned}$$

Vlak mal na začiatku cesty 50 vagónov. Keďže sme robili len ekvivalentné úpravy, netreba robiť skúšku správnosti. Treba sa ale zamyslieť, či nájdené riešenie dáva zmysel — počet vagónov by mal byť počas celej cesty kladné celé číslo, a počet cestujúcich v jednom vagóne nezáporné celé číslo. Toto však nájdené riešenie spĺňa.

Komentár: Veľa z vás stratilo bod na tom, že ste zabudli na skúšku správnosti. Pri každej sústave rovníc ju treba robiť, pretože ak by sme používali neekvivalentné úpravy, riešenie, ktoré sme dostali, môže byť zlé. Skúšku môžeme vynechať, len ak boli všetky úpravy rovníc ekvivalentné.

Úloha č. 2: *Mojo ide do obchodu kúpiť zubnú kefku. Vie, že kefka bude stáť aspoň jeden cent a najviac 4 eurá a 99 centov. Doma má 10 mincí z každého druhu: 1, 2, 5, 10, 20, 50-centové a 1 a 2 eurové. Do peňaženky sa mu spolu zmestí len 6 mincí. Aké mince si má zobrať, aby mohol presne zaplatiť čo najviac rôznych cien? (Presne znamená bez vydávania.)*

Riešenie: (opravovala Katka J.)
Riešenie tohto príkladu zo skutočného života sa núka hneď po pár pokusoch vypisovania možností. Veľmi rýchlo začneme tušiť, že najviac možností ceny sa bude dať zaplatiť vtedy, keď si Mojo vyberie šesť rôznych mincí. Či sa skutočne jedná o správne riešenie a či je úplne jedno, ktorých šesť rôznych mincí si Mojo vyberie, ešte treba dokázať.
Poďme pekne po poriadku. Máme šesť rôznych mincí a chceme zistiť, koľko možných cien sa s nimi dá zaplatiť. Môžeme vybrať jednu mincu a tou zaplatiť, takých možností je práve šesť. Ak vyberieme dve mince a zaplatíme

nimi, počet možností je $\binom{6}{2}$, teda vyberáme dve mince zo šiestich. Podobne pokračujeme aj ďalej, pri platení troma, štyrmi, piatimi a šiestimi mincami je počet možností $\binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ a $\binom{6}{6}$. Platí

$$6 + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 63.$$

Vyzerá to tak, že maximálny počet možností, ako sa dá šiestimi rôznymi mincami zaplatiť cena za zubnú kefku, je práve 63. Tu sa skrýva malý háčik — žiadne dve možnosti sa nesmú rovnať. Všimnite si, že toto nastáva aj vtedy, keď sú nejaké dve mince rovnaké, z čoho vyplýva, že výber rovnakých mincí znižuje počet možných platieb. Navyše by takáto situácia mohla nastať vtedy, keby platilo, že súčet niekoľkých mincí sa rovná súčtu iných mincí z vybranej šestice. To sa nám s naším výberom mincí ale nemôže stať. Naše mince majú hodnoty 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 a 200 centov. Všimnime si, že pre každú jednu mincu platí, že súčet mincí menších od nej je vždy menší, než je ona sama. Z toho vyplýva, a to si poriadne premyslite, že ak vyberieme šesť navzájom rôznych mincí, tak nikdy nemôže nastať situácia, aby sa súčet niektorých dvoch alebo viacerých mincí z nášho výberu rovnal súčtu iných mincí.
Už sa nám podarilo dokázať, že keď si Mojo vyberie šesť rôznych mincí, počet cien, ktoré sa s nimi dajú zaplatiť, je 63. To je určite viac, než počet zaplatiteľných cien pre hocijakú šesticu mincí, kde sú aspoň dve mince rovnaké. Navyše sme dokázali, že našou rôznou šesticou mincí nevieme zaplatiť tú istú sumu inými kombináciami mincí. Ďalej si vieme ľahko spočítať, že hocijakých navzájom vybraných šesť mincí bude mať súčet viac než jeden cent a menej než 4,99 eura. Tým je pre všetky možné rôzne šestice splnená podmienka zo zadania. To je koniec, priatelia a kamaráti, podarilo sa nám dokázať, že Mojo dokáže zaplatiť najviac rôznych cien práve vtedy, keď si vyberie hociktorých šesť navzájom rôznych mincí.

Úloha č. 3: *Paľo s Marekom píšu na tabuľu* 2012*-ciferné číslo. Používajú však iba číslice* 1, 2, 3, 4 *a* 5*. Marek začína – napíše prvú cifru* 2012*-ciferného čísla zľava, Paľo napíše druhú cifru zľava, Marek tretiu atď. V písaní cifier sa striedajú. Paľo vyhrá, ak bude výsledné číslo deliteľné deviatimi, inak vyhrá Marek. Podarí sa Paľovi vždy vyhrať bez ohľadu na to, ako bude postupovať Marek? Ak áno, popíšte, ako má Paľo hrať, aby sa mu to vždy podarilo. Ak nie, popíšte, ako má postupovať Marek, aby Paľo nevyhral.*

Riešenie: (opravoval JeFo)
Paľo s Marekom majú ale dosť divnú hru, asi sa nudia na hodinách algebry, ale budiž. Keď si ani jeden nevie vymyslieť výhernú stratégiu, tak im poďme pomôcť.
Začnime s tým, čo už všetci vedia, ale je dobré si to pripomenúť. Číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi.
Zo zadania vieme, že na tabuľu dohromady napíšu 2012 cifier jedného čísla. Z toho je jasné, že každý z nich napíše 1006 cifier. Teda hra má akoby 1006 kôl, a v každom kole idú vždy obaja hráči práve raz v danom poradí — najskôr Marek a potom Paľo. Marek celú hru začne a Paľo ju skončí.
Paľo vyhrá, ak po jeho poslednom ťahu bude číslo deliteľné deviatimi. To znamená, že stačí, aby bol jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Marek vyhrá, ak vo svojom poslednom ťahu dokáže zabezpečiť, aby Paľo pridaním ďalšej cifry nedostal ciferný súčet deliteľný deviatimi. Marek teda vyhrá, ak dokáže zabezpečiť, že ciferný súčet čísla bez poslednej cifry bude po delení deviatimi dávať taký zvyšok, aby ho Paľo pridaním svojej cifry nedorovnal na číslo deliteľné deviatimi. Keďže Paľo môže použiť čísla $1, 2, 3, 4, 5$, tak Marek chce, aby po jeho poslednom ťahu dával súčet cifier celého čísla po delení deviatimi zvyšok 0, 1, 2 alebo 3.
V takýchto hrách sa dá pozrieť na to, či sa čísla, ktoré môžeme dopísať, nedajú dajako kombinovať, aby mal nasledujúci hráč vždy možnosť spraviť „opačný ťah“ k ťahu predchádzajúceho hráča. Po chvíli skúmania čísel zistíme, že ak jeden hráč zahrá ľubovoľné číslo, tak druhý vie vždy zahrať také číslo, aby súčet oboch čísel bol šesť $(1 + 5 = 6,\ 2 + 4 = 6,\ 3 + 3 = 6)$. Vyhovuje takýto postup Paľovi, ktorý ide vždy druhý a vždy dorovná tak, aby súčet v danom kole bol šesť? Súčet v každom kole je šesť a máme 1006 kôl, čo nám dá súčet 6036, čo ale nie je číslo deliteľné deviatimi. Paľovi tento postup nevyhovuje. Marek to teda skúsi zneužiť vo svoj prospech. V každom ťahu, ktorý nasleduje po Paľovom ťahu, napíše také číslo, aby dávalo súčet s predošlým šesť. Čo tým dosiahne? Keďže Marek bude mať takých ťahov 1005, takýmto spôsobom dosiahne súčet 6030 (deliteľný deviatimi) a ostáva mu ešte jedna (prvá) cifra a Paľovi ostáva tiež ešte jedna (posledná) cifra. Ale toto už pre Mareka vyzerá dosť dobre, lebo ak súčet oboch týchto cifier bude menší ako deväť, tak Marek vždy vyhrá. To je pre Mareka dobrá správa, lebo stačí, aby ako prvú cifru napísal číslo menšie ako štyri. Potom sa Paľo môže aj na hlavu postaviť, ale nech robí čo robí, už vyhrať nemôže.
Výherná stratégia teda existuje pre Mareka, ktorý ako prvú cifru napíše číslo menšie ako štyri, a potom v každom svojom ťahu dorovná predchádzajúci Paľov ťah tak, aby v súčte dávali šesť. Toto môže spraviť vždy, a teda aj vždy vyhrá.

Úloha č. 4: *Ondro tvrdí, že pre každé prirodzené číslo $k > 2$ existuje k rôznych prirodzených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$, pre ktoré platí rovnosť*

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} = \frac{3}{17}.$$

Ukážte, že Ondro má pravdu.

Riešenie: (opravoval Kubman, Ondro)
Pri riešení tejto úlohy si ako prvé uvedomme, čo platí pre zlomky, ktoré majú v čitateli jednotku a v menovateli prirodzené číslo. Poznáme jednoduchý vzťah medzi prvými dvoma zlomkami:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Rozdiel medzi 1/2 a 1/3 je 1/6, číslo, ktoré má v čitateli opäť jednotku. Pozrime sa teraz na rozdiel ďalších dvoch po sebe idúcich zlomkov, 1/3 a 1/4:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Skúsme to zovšeobecniť. Pre prirodzené číslo k platí vzťah

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Toto je vzťah, ktorý sa oplatí si zapamätať. Pozorné oko si všimne, že úlohu v tomto momente už máme skoro vyriešenú. Keby sme mali nejaký rozklad zlomku 3/17 na tri zlomky s rôznymi menovateľmi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{17}, \text{ kde } a < b < c,$$

vedeli by sme $1/c$ rozložiť podľa predošlého vzťahu na

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c(c+1)}.$$

Dostali by sme tak riešenie pre 4 zlomky. Keby sme pokračovali ďalej, tak zlomok $1/c(c+1)$ vieme rozložiť na dva zlomky a takto mať riešenie pre 5 zlomkov. Keď máme zostrojiť riešenie pre n zlomkov, zoberieme riešenie pre $n-1$ zlomkov a ten s najväčším menovateľom rozložíme na dva ďalšie. Ten s najväčším menovateľom vyberieme preto, aby sa nám náhodou nejaké zlomky neopakovali.
Predpokladali sme, že zlomok 3/17 vieme rozložiť na 3 zlomky. Poďme to teda urobiť. Po chvíľke skúšania sa nám podarí nájsť rozklad

$$\frac{3}{17} = \frac{1}{6} + \frac{1}{103} + \frac{1}{102 \cdot 103}.$$

Najprv sme odčítali od 3/17 číslo 1/6 a potom sme zvyšok 1/102 rozložili podľa vyššie uvedeného vzťahu. Teraz už môžeme pokračovať opakovaným rozkladaním zlomku s najväčším menovateľom.

Poznámka: Číslo v zadaní 3/17 vyzerá byť náhodné. Po dlhšom pátraní však vieme nájsť zlomok, ktorý sa nedá rozložiť na súčet troch zlomkov s jednotkami v čitateľoch. My sme našli zlomok 1805/1806. Dokážte, že tento zlomok nevieme rozložiť na súčet takých troch zlomkov. Ono to však pokračuje ďalej. Existujú zlomky, ktoré sa nedajú rozložiť na súčet 4, 5, … takých zlomkov.
Bonus: Skúste nájsť zlomok, ktorého čitateľ aj menovateľ sú prirodzené čísla, ktorý je menší ako 1 a nedá sa napísať ako súčet štyroch zlomkov s jednotkami v čitateľoch. Odmenou pre prvého je čokoláda. Posielajte na `kms@kms.sk` a do predmetu napíšte *uloha pre Ondra.*

Úloha č. 5: *Kika má zázračný mlynček. Keď doň hodí prirodzené číslo n, vypadne z neho číslo*

$$E(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots(10n+1).$$

Kika chce zistiť najväčší spoločný deliteľ čísel $E(1), E(2), \dots, E(2011)$. Pomôžte jej s tým a spočítajte ho.

Riešenie: (opravovala Katka :P)
Najskôr si zoberme typický školský prístup: urobiť rozklady všetkých čísel $E(1), E(2), \dots, E(2011)$, a potom zakrúžkovať spoločné prvočísla. To by ale trvalo strašne dlho.
Pozrime sa na to inak. Hľadaný najväčší spoločný deliteľ (ďalej už len NSD) určite delí prvé mlynčekové číslo $E(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. Takže nám stačí preveriť, ktoré prvočísla z množiny $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ a tiež v ktorej mocnine delia každé z čísel $E(1), E(2), \dots, E(2011)$.
Ešte sme nevyužili to, ako číslo $E(n)$ vzniká. Keď sa lepšie pozrieme na výraz $n(n+1)(2n+1)\dots(10n+1)$, všimneme si, že n je nesúdeliteľné s každou zo zátvoriek. Napríklad pre $E(2)$ vidíme, že všetky zátvorky sú nepárne. Avšak NSD delí $E(2)$, preto vieme, že prvočíselný rozklad NSD nebude obsahovať viac ako jednu dvojku. Rovnako to bude s hocijakým iným prvočíslom $p \leq 2011$, keďže NSD musí deliť $E(p)$. (Toto si dobre premyslite.) Teraz, keď vieme, že prvočíselný rozklad NSD môže obsahovať každé prvočíslo najviac v prvej mocnine, vrátime sa k $E(1)$ a všimneme si, že NSD môže byť najviac $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Poďme ukázať, že toto číslo je správny výsledok, teda že každé z čísel $E(1), E(2), \ldots, E(2011)$ je deliteľné číslom $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Túto časť ste robili dvoma rôznymi spôsobmi, preto načrtneme oba.
Prvý spôsob: Tento spôsob bol dosť pracný, no použila ho väčšina z vás. Pre každé prvočíslo p z množiny $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ vychádza dôkaz z tejto myšlienky: ak prvočíslo p delí n, tak potom delí aj $E(n)$. Ak p nedelí n, tak potom sa dá n napísať ako $pk + z$, kde $z \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ je zvyšok čísla n po delení prvočíslom p. Napríklad pre trojku: ak 3 nedelí n, vieme n napísať ako $3k+1$ alebo $3k+2$. Potom stačí vyskúšať, či existuje zátvorka deliteľná p. Napríklad pre $n = 3k + 1$ je hneď druhá zátvorka $2n + 1$ deliteľná tromi $(2 \cdot (3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1))$. Takto preskúmame všetky prvočísla (všetky možné zvyšky, ktoré môže n dávať po delení) a ku každému nájdeme aspoň jednu zátvorku, ktorá je ním deliteľná.
Druhý spôsob: Tento spôsob použili síce iba štyria riešitelia, no je omnoho elegantnejší (a hlavne kratší) ako ten prvý. Nie je založený na hľadaní „tej správnej“ zátvorky (rozumej deliteľnej prvočíslom p), ale na dôkaze jedného ľahkého tvrdenia: *Ak prvočíslo p nedelí n, tak čísla $(n+1), (2n+1), \ldots, ((p-1)n+1)$ majú rôzne zvyšky po delení p.* Dôkaz urobíme sporom: Nech dve z týchto čísel $an+1$ a $bn+1$ (pričom $a > b$) majú rovnaký zvyšok po delení p. Potom p musí deliť ich rozdiel $(an+1) - (bn+1) = (a-b)n$. Avšak vieme, že p nedelí n a tiež vieme, že $p > a - b$, takže p nedelí ani $a - b$. Prichádzame teda k sporu.
Z dokázaného tvrdenia priamo vyplýva, že medzi zátvorkami sa vždy nájde každý zo zvyškov po delení prvočíslami $2, 3, 5, 7$ a 11, a teda ich netreba hľadať ako v prvom spôsobe.
Či už použijeme prvý alebo druhý spôsob, dokážeme, že najväčší spoločný deliteľ čísel $E(1), E(2), \ldots, E(2011)$ je 2310.

Úloha č. 6: *Vedúce KMS každý týždeň zostavujú rebríček desiatich najmúdrejších vedúcich, pričom nikdy nedajú viacerých vedúcich na rovnaké miesto. Katka si všimla, že už T týždňov sú v rebríčku tí istí vedúci. Tiež si všimla, že vedúci v rebríčku počas týchto T týždňov nikdy neboli presne v rovnakom poradí. Navyše, ak nejaký vedúci v rebríčku (počas týchto T týždňov) klesol, v žiadnom ďalšom týždni už nestúpol na vyššiu priečku. (Kým však neklesol, mohol stúpať.) Akú najväčšiu hodnotu môže mať číslo T?*

Riešenie: (opravoval Beren a Paľo)
Pre správne vyriešenie tejto úlohy najprv zistíme, koľko takýchto usporiadaní teoreticky môže existovať, a potom vymyslíme spôsob, ako ich všetky dosiahnuť.
Na začiatok si uvedomíme, že keďže každý týždeň sa musí rebríček zmeniť, určite niekto klesne a niekto zasa stúpne. Keďže nikdy potom, čo vedúci klesne, nemôže už stúpnuť, je zrejmé, že vedúci, ktorý je na začiatku na prvom mieste nestúpne už nikdy. Ten čo je na druhom môže stúpnuť maximálne raz, ten na treťom maximálne dvakrát atď. Teda vedúci, čo je na začiatku na i-tom mieste, môže stúpnuť maximálne $(i-1)$-krát. Toto znamená, že sa určite nemôže stať viac zmien ako $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45$, lebo pri každej zmene týždňa niekto určite stúpne a existuje iba 45 rôznych možností stúpnutia. To znamená, že tí istí vedúci v rebríčku určite nebudú dlhšie ako 46 týždňov, lebo prvý týždeň boli nejako usporiadaní, a potom sa to nemohlo meniť viac než 45-krát.
Zostáva už len ukázať, že existuje 46 rôznych usporiadaní vedúcich vyhovujúcich našim podmienkam. Označme si vedúceho na prvom mieste V_1, na druhom V_2, na i-tom V_i.
Nech vedúci V_1 najprv klesne z prvého miesta na druhé, V_2 sa s ním teda vymení. Ďalej V_1 znova klesne na tretie miesto, potom na štvrté a takto postupne až na posledné. To máme (kým sa V_1 nedostal na posledné miesto) 9 usporiadaní, kde klesal len V_1. Sú určite rôzne, lebo v každom bol V_1 na inom mieste. Ďalej vezmime V_2, ktorý je práve navrchu a rovnakým spôsobom ho posuňme na 9. miesto. Získame ďalších 8 usporiadaní, navzájom rôznych (lebo V_2 bol vždy na inom mieste) a rôznych aj od tých predošlých, lebo to boli usporiadania, kde V_1 nebol na poslednom mieste. Teraz vezmeme V_3 a posunieme ho postupne na 8. miesto. Takto získame ďalších sedem usporiadaní, navzájom rôznych, a rôznych aj od predošlých, lebo tam V_2 nebol na 9. mieste.
Takto budeme postupovať s každým vedúcim, ktorý sa nám objaví na vrchole, postupne ho posunieme až na $(11 - i)$-te miesto, kde i je začiatočná pozícia. Máme teda $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45$ rôznych preusporiadaní, no k tomuto číslu treba ešte prirátať počiatočné usporiadanie vedúcich. Dokopy to je 46 rôznych usporiadaní, čo bolo naším cieľom, čiže sme spokojní a šťastní.

Úloha č. 7: *Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu A a Maťko klebety A a B, hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve n rôznych klebiet?*

Riešenie: (opravoval Marek a Mojo)
Preformulujme si zadanie do reči množín, nech sa nám s tým dobre pracuje. Označme K množinu všetkých n klebiet. Ďalej označme K_V množinu tých klebiet, ktoré pozná vedúci V. Zjavne $K_V \subset K$. Navyše, keďže každí dvaja vedúci A a B poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu, musí tiež platiť $K_A \cap K_B \neq \emptyset$. A samozrejme, keďže žiadni dvaja vedúci A, B nepoznajú presne tie isté klebety, platí aj $K_A \neq K_B$.
Našou úlohou je nájsť maximálny počet rôznych podmnožín n-prvkovej množiny, z ktorých každá dvojica má neprázdny prienik.
Nech M je n-prvková množina a nech hľadané maximum je m. Musíme nájsť m a dokázať, že

1. vieme vybrať nejakých m podmnožín spĺňajúcich spomínanú podmienku,
2. ak ľubovoľne vyberieme viac ako m podmnožín, tak podmienku nespĺňajú, teda niektoré dve sú disjunktné.

Skúsme najskôr nájsť nejaký horný odhad pre číslo m.
Vieme, že počet všetkých rôznych podmnožín n-prvkovej množiny je 2^n. Rozdeľme podmnožiny množiny M do dvojíc tak, aby v každej dvojici bola jedna množina komplementárna k tej druhej (t.j. ich prienik je prázdny a ich zjednotenie je množina M)[1]. Takto nám vznikne 2^{n-1} dvojíc. Z každej môžeme vybrať iba jednu podmnožinu, lebo ak by sme vybrali z nejakej dvojice obe, tak už máme dve disjunktné podmnožiny. Týmto sme ukázali horný odhad $m \leq 2^{n-1}$.
Stačí už len nájsť 2^{n-1} takých podmnožín. To sa dá spraviť napríklad tak, že z každej zo spomínaných dvojíc vyberieme podmnožinu s väčším počtom prvkov (ak majú obe rovnaký, tak hociktorú). *Cvičenie*: sporom dokážte, že takýmto spôsobom nedostaneme disjunktnú dvojicu podmnožín.
Iný spôsob je vybrať jeden prvok množiny M, ktorý budú obsahovať všetky podmnožiny. Tým zaručíme, že každá dvojica bude mať neprázdny prienik. Zo zvyšných $n-1$ prvkov potom môžeme spraviť 2^{n-1} rôznych podmnožín. Maximálny počet vedúcich je teda 2^{n-1}.

Komentár: Vyskytlo sa niekoľko riešení, ktoré tvrdili, že vybrať jeden prvok množiny M, ktorý budú obsahovať všetky podmnožiny, je *najvýhodnejšie*, a preto sa viac ako 2^{n-1} rôznych podmnožín nedá vytvoriť. Čo však znamená najvýhodnejší? Ak to znamená, že tak vytvoríme najviac podmnožín spĺňajúcich spomínanú podmienku a inak sa vytvoriť nedajú, tak to nie je pravda (pozorný čitateľ vzoráku už vie prečo). Ak to znamená, že takto síce vytvoríme najviac podmnožín, čo vyhovujú podmienkam zo zadania, ale nie je to jediný spôsob, ako to dosiahnuť, tak to síce pravda je, ale potom treba takéto tvrdenie dokázať. Väčšina takýchto riešení však neobsahovala ani pokus toto tvrdenie dokázať, čo malo za následok stratu bodov.

Úloha č. 8: *Dané sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla x, y väčšie ako 1. Pre každú takú dvojicu x, y nájdite všetky prirodzené čísla n také, že číslo $x+y$ nie je deliteľom čísla $x^n + y^n$.*

Riešenie: (opravoval Bebe)
V príkladoch, v ktorých vystupuje všeobecné n, je dôležité pozrieť sa na situácie pre malé n. Ak $n = 1$, tak zjavne $x + y$ delí $x + y$. Pre $n = 2$ je situácia trochu zložitejšia. Vieme, že platí

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy. \tag{1}$$

Zrejme $x + y$ delí $(x + y)^2$. Takže deliteľnosť výrazu $x^2 + y^2$ výrazom $x + y$ závisí od toho, či $x + y$ delí $2xy$. Keďže x a y sú nesúdeliteľné, tak sú nesúdeliteľné $x + y$ s x a aj $x + y$ s y. (Rozmyslite si, prečo.) Tým pádom sú nesúdeliteľné aj $x + y$ s xy. Preto ak $x + y$ delí $2xy$, tak nutne $x + y$ musí deliť 2. To však nie je možné, pretože podľa zadania $x, y > 1$. Takže $x + y$ nedelí $x^2 + y^2$.
Ak zalovíme v pamäti (poprípade v tabuľkách), môžeme poľahky vyriešiť prípad pre $n = 3$. Platí

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Vo výraze $x^2 - xy + y^2$ vystupujú iba celé čísla, preto $x + y$ delí $x^3 + y^3$. Napokon sa pozrime ešte aj na prípad $n = 4$. Ak by sa nám podarilo rozložiť výraz $x^4 + y^4$ na niektoré z predchádzajúcich výrazov ($x^n + y^n$ pre $n \leq 3$), mohlo by to našu situáciu značne uľahčiť. Po chvíľke skúšania môžeme dospieť k tvaru

$$x^4 + y^4 = (x + y)(x^3 + y^3) - xy(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Je jasné, že $x + y$ delí $(x + y)(x^3 + y^3)$. Na druhej strane sme už ukázali, že $x + y$ je nesúdeliteľné s xy a nedelí $x^2 + y^2$. Preto $x + y$ nedelí ani $xy(x^2 + y^2)$, a tým pádom ani skúmaný výraz $x^4 + y^4$.
Ako tieto pozorovania zovšeobecniť? Pre nepárne $n \leq 3$ sme odvodili, že $x + y$ delí $x^n + y^n$. Platí to aj vo všeobecnosti? Ak znova zalistujeme v tabuľkách, môžeme naďabiť na vzorec

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + (-1)^k x^{n-1-k} y^k + \cdots + y^{n-1}),$$

ktorý platí pre nepárne n. Z toho dôvodu pre nepárne n je vždy $x^n + y^n$ deliteľné $x + y$.
Naopak pre párne $n \leq 4$ číslo $x + y$ nedelilo $x^n + y^n$. Bude to platiť aj naďalej? Ak si všimneme podobnosť vzťahov (1) a (2), môžeme pre všeobecné párne n dospieť k rovnosti

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

Je zrejmé, že $x + y$ delí $(x + y)(x^{n-1} + y^{n-1})$. Na druhej strane sme už ukázali, že $x + y$ je nesúdeliteľné s xy. Ak teda $x + y$ nedelí $x^{n-2} + y^{n-2}$, nedelí ani $x^n + y^n$. Keďže n je párne, je párne aj $n - 2$. Preto môžeme matematickou indukciou ukázať, že ak n je párne, tak $x + y$ nedelí $x^n + y^n$. (Prvý krok indukcie pre $n = 2$ sme už spravili, ostatné

[1] Premyslite si, prečo sa takéto rozdelenie do dvojíc dá vždy urobiť.

ostávajú na domácu úlohu.) Takže pre každú dvojicu nesúdeliteľných prirodzených čísel x, y väčších ako 1 platí, že $x + y$ nedelí $x^n + y^n$ práve vtedy, keď je n párne.

Iné riešenie:
Deliteľnosť akýmsi súčtom sa skúma nepríjemne, označme si preto $t = x + y$. Chceme zistiť, pre ktoré n je výraz $x^n + (t - x)^n$ deliteľný číslom t. Po roznásobení tohto výrazu zistíme, že jediné členy bez t sú x^n a $(-1)^n x^n$. Stačí teda zistiť, pre ktoré n číslo t delí výraz $x^n + (-1)^n x^n$. Zjavne ho delí pre všetky nepárne n. Pre párne n platí $x^n + (-1)^n x^n = 2x^n$, ale x a t sú nesúdeliteľné, a $t = x + y > 2$, takže pre párne n ho nedelí.

Úloha č. 9: *Nech n je prirodzené číslo. Čísla $1, 2, \dots, 2n$ rozdelíme na dve kopy A a B tak, že v oboch bude rovnako veľa čísel. Čísla v kope A označíme $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, aby platilo $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Podobne čísla v kope B označíme $b_1, b_2, \dots, b_n$ tak, aby platilo $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Dokážte, že pri ľubovoľnom rozdelení na kopy platí*

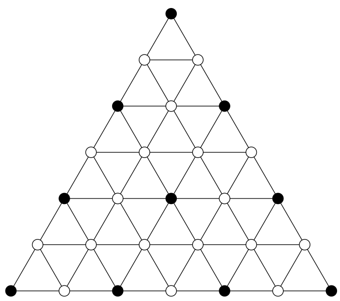
$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

Riešenie: (opravoval Edo)
(Podľa *Andreja Kozáka*.) Nazvime *malými* čísla $1, 2, \dots, n$ a *veľkými* čísla $n+1, n+2, \dots, 2n$. Nech v kope A je k malých čísel, teda čísla $a_1, \dots, a_k$ sú malé a čísla $a_{k+1}, \dots, a_n$ sú veľké. Zvyšných $n - k$ malých čísel musí byť v kope B, preto čísla $b_{k+1}, \dots, b_n$, ktorých je presne $n - k$, sú malé a čísla $b_1, \dots, b_k$ sú veľké. Ako si môžeme všimnúť, vždy je jedno z čísel a_i a b_i veľké a jedno malé. Zakaždým preto odčítavame malé číslo od veľkého (čo je v absolútnej hodnote to isté ako veľké od malého). Celkový súčet je teda súčet veľkých mínus súčet malých:

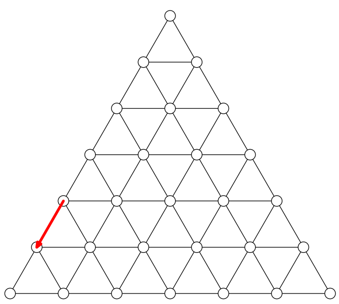
$$n + 1 - 1 + n + 2 - 2 + \cdots + 2n - n = n \cdot n = n^2.$$

Úloha č. 10: *Na každej strane rovnostranného trojuholníka T si označíme 5 bodov tak, že týchto 5 bodov rozdelí stranu na 6 rovnakých častí. Takto určených 15 bodov pospájame úsečkami rovnobežnými so stranami trojuholníka T. Týmito úsečkami sme trojuholník T rozdelili na 36 malých rovnostranných trojuholníkov. Na každý z 28 vrcholov malých trojuholníkov položíme práve jednu žabu. V každej sekunde každá žaba skočí na susedný vrchol. Navyše vieme, že ak zoberieme tri pozície ľubovoľnej žaby za sebou (v časoch t, $t+1$ a $t+2$), tak tieto pozície neležia na jednej priamke (takže žaba sa nemôže vracať, ani pokračovať vo svojom smere). Dokážte, že v nejakom čase budú nejaké dve žaby na rovnakom vrchole.*

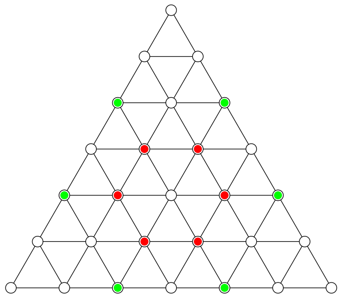
Riešenie: (opravoval Petržlen)



Podľa zadania treba ukázať, že žaby nemôžu skákať tak, aby nikdy neboli nejaké dve na rovnakom vrchole. Ako prvé si uvedomíme, že ak je v nejakom čase niektoré políčko prázdne, tak sme hotoví (potom z Dirichletovho princípu existuje políčko, na ktorom sú aspoň dve žaby).
Jeden z možných prístupov spočíva vo vybratí vhodnej skupiny žiab a uvažovaní kam sa môžu resp. nemôžu dostať po dvoch sekundách. Druhý prístup je založený na pozorovaniach. Dá sa totiž ukázať, že medzi niektorými políčkami žaby nemôžu skákať.
Rozvinieme najprv prvý prístup. Uvažujme žaby na čiernych políčkach (obr. 1) v čase t. Zo zadania vieme, že v nasledujúcich dvoch sekundách (v časoch $t + 1$ a $t + 2$) tieto žaby nebudú na žiadnom z čiernych políčok. Ale nejaké žaby na čiernych políčkach v týchto dvoch sekundách museli byť. Je zrejmé, že žiadna žaba nemohla byť dvakrát na nejakom čiernom políčku v časoch $t + 1$ a $t + 2$.



Ak to zhrnieme, tak vieme, že v čase t bolo na čiernych políčkach 10 žiab, ktoré tam neboli v časoch $t + 1$ a $t + 2$. A aj v časoch $t + 1$ a $t + 2$ boli na čiernych políčkach odlišné žaby. Z toho vyplýva, že v každom z časov t, $t + 1$ a $t + 2$ bola na každom z čiernych políčok iná žaba. Takže dokopy musí existovať aspoň $10 + 10 + 10 = 30$ rôznych žiab. To je ale spor s počtom žiab v zadaní. Takže náš predpoklad, že žaby tak môžu skákať, je nesprávny.
Druhý prístup si ukážeme na riešení *Miša Tótha*. Dokážeme sporom, že žaby nemôžu skákať medzi dvoma políčkami tak, ako je to na druhom obrázku. Nech nejaká žaba takto skočila v čase t. Potom je už v ľavom dolnom rohu jednoznačne určené, ktorá žaba do rohu skočila a kam žaba z rohu vyskočila. Po chvíli uvažovania zistíme, že v čase $t + 1$ neexistuje spôsob, ako mohla žaba skočiť do toho rohu.



Ako inak by ešte mohla daná žaba skákať? Kde mohla doskákať v čase $t+2$? Po chvíli uvažovania zistíme, že mohla doskákať len na dve políčka. Podobnou úvahou pre všetkých 6 žiab na sivých políčkach (obr. 3) zistíme, že tieto žaby museli skončiť práve na čiernych políčkach. Ale potom žaba v úplnom strede v čase $t+1$ nemá kde skočiť, lebo všetky okolité políčka sú už obsadené. Aj týmto spôsobom sa dostávame k sporu.

Komentár: Prišlo málo riešení. Myslíme si, že to bolo spôsobené tým, že riešenie vyžadovalo „trik“, resp. „správne“ pozorovanie. Tým pádom neexistoval jednoznačný postup, ako takýto príklad vyriešiť. Dalo sa len uvažovať o tom, ako také riešenie bude vyzerať, prípadne skúšať veľa rôznych vecí. Ale platí, že ak jeden prístup zlyháva, tak treba vyskúšať iný.

Úloha č. 11: *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí*[2]

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Riešenie: (opravoval Maťo a HAgO)
Je to nerovnosť. Možností ako sa k nej dá pristupovať je neúrekom. Pozrieme sa detailne na jednu z nich.
Čo nám na nerovnosti môže vadiť, je to, že sa na oboch jej stranách vyskytujú písmenká. Tak ich teda dostaneme všetky na jednu stranu. Deliť celú nerovnosť ľavou stranou nie je práve príťažlivé, skúsime príjemnejšiu variantu — vynásobme ju kladným výrazom $(a+b+c)$. Dostaneme

$$\frac{a^2+ab+ac}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2+bc+ba}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2+ca+cb}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{9}{4}.$$

Z AG-nerovnosti vyplýva $ab\le(a^2+b^2)/2$. Podobne vieme odhadnúť aj ac a bc. (Vieme, že $a, b, c>0$.) Použijeme tieto odhady na ľavú stranu nerovnosti a vynásobíme celú nerovnosť dvojkou, aby sme ju odstránili z menovateľa. Dostaneme

$$\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{9}{2}.$$

To sa dá zapísať aj ako

$$\frac{4a^2+2b^2+2c^2-b^2-c^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+2c^2+2a^2-c^2-a^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+2a^2+2b^2-a^2-b^2}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{9}{2}.$$

Teraz rozbijeme každý zlomok ľavej strany na dve časti:

$$\left(2-\frac{b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2}\right)+\left(2-\frac{c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}\right)+\left(2-\frac{a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2}\right)\le\frac{9}{2}.$$

Z toho máme

$$\frac{b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge\frac{3}{2},$$

kde by už skúsený riešiteľ mal uvidieť Nesbittovu nerovnosť. Táto nerovnosť platí pre všetky kladné reálne čísla, a pre tých, ktorí sa s ňou ešte nestretli, vyzerá takto:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}.$$

Čo má ale spoločné s tou našou nerovnosťou? Úplne všetko, líšia sa len substitúciou

$$x=b^2+c^2,\quad y=c^2+a^2,\quad z=a^2+b^2.$$

Tieto x, y, z sú očividne kladné, čiže pre ne bude nerovnosť platiť. Ak jej veríme, tak máme hotovo. Ak jej neveríte, skúste si ju dokázať.[3]
Ako sme už spomínali, ciest k úspešnému dokázaniu nerovnosti je mnoho. Načrtnime si zopár iných.

Iné riešenie:
Nakoľko je nerovnosť homogénna, môžeme si povedať, že $a^2+b^2+c^2=1$. Na ľavej strane potom dostaneme podobné výrazy, ktoré sú vlastne funkčnými hodnotami v bodoch a, b, c, funkcie

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

[2] Veľmi kvalitný text o nerovnostiach môžete nájsť na `mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf`.
[3] Napríklad na wikipédii `en.wikipedia.org/wiki/Nesbitt's_inequality` sa nachádza až päť jej dôkazov, ale rovnako dobre poslúži aj text z predošlej poznámky strany 29 a 53.

Toto by malo nabádať na Jensenovu nerovnosť, hlavne keď zistíme, že funkcia f je na intervale $(0,1\rangle$, na ktorom sa pohybujeme, konkávna (pri konkávnosti je totiž to správne znamienko nerovnosti). Odhadnime ľavú stranu pomocou Jensena, a zostáva nám ukázať

$$3\frac{\frac{a+b+c}{3}}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2+1} \le \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

To už stačí len upraviť, prenásobiť menovateľmi, využiť podmienku $a^2+b^2+c^2=1$ a jednoduchú AG-nerovnosť.

Iné riešenie:
Samozrejme, ak je niekto masochista, alebo len dobre vie, čo robí, tak môže na začiatku nerovnosť prenásobiť menovateľmi a všetko roznásobiť. Potom už stačí len správne sčítanie AG-čiek, poprípade štvorcov, ktoré nám dá tých tisíc, alebo koľko ich bude, členov naľavo a napravo.

Úloha č. 12: *Neprázdna množina M má n prvkov. Označme $P(M)$ množinu všetkých podmnožín množiny M. Ďalej nech $f : P(M) \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá má nasledujúce vlastnosti:*

(i) $f(M-A) = f(A)$,

(ii) $f(A\cup B) \le \max\{f(A), f(B)\}$ *pre všetky* $A, B \in P(M)$.

Dokážte, že funkcia f môže nadobúdať maximálne n rôznych hodnôt.

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Po čase sme zdvihli náročnosť dvanástej úlohy. Už len zadanie pôsobilo vysokoškolským dojmom. Dúfame, že všetci ktorí úlohu riešili, sa naučili s množinami a funkciami pracovať intuitívnejšie.
Ako pri každom riešení, najprv sa so zadaním pohráme. Označíme vzťahy zo zadania ako (1) a (2). Ďalej označme

$$m = \max\{f(A)|A\in P(M)\}.$$

Nech C je taká množina, pre ktorú platí $C\in P(M)$ a $f(C)=m$. Ak $C=\emptyset$, tak podľa (1) aj $f(M)=f(M-M)= = f(\emptyset) = f(C) = m$ vyhovuje podmienkam pre C. Teda môžeme predpokladať, že C je neprázdna množina. Prvky C si označíme $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Potom aplikovaním (2) dostávame vzťah

$$m = f(C) \le \max\{f(\{x_1\}), f(C-\{x_1\})\} \le \max\{f(\{x_1\}), \max\{f(\{x_2\}), f(C-\{x_1,x_2\})\}\} \le \ldots \le m.$$

Preto existuje x_i také, že $f(\{x_i\}) = m$. Preznačme ho na x_n (teda $f(\{x_n\}) = m$).
Pre $n=1$ a $n=2$ vieme platnosť zadania triviálne overiť. Teraz by sme radi využili indukciu, ale narážame na problém, že nemáme dobrý dolný odhad funkcie f. Tento problém časom vyriešime, ale najprv sa pozrieme na vlastnosti funkcie f na množine, kde budeme využívať indukčný predpoklad.
Označme $M' = M - \{x_n\}$. Všimneme si, že

$$\begin{aligned} \forall A\in P(M'):\quad m = f(\{x_n\}) = f(M-\{x_n\}) = f(M') = f(A\cup(M'-A)) &\le \\ \le \max\{f(A), f(M'-A)\} = \max\{f(A), f(M-(M'-A))\} = \max\{f(A), f(A\cup\{x_n\})\} &\le m. \end{aligned}$$

Z toho dostávame

$$\max\{f(A), f(A\cup\{x_n\})\} = m. \tag{3}$$

Keby sme vedeli vyjadriť minimum z čísel $f(A), f(A\cup\{x_n\})$, tak by sme vedeli hodnoty funkcie f v týchto bodoch. Zavedieme si preto funkciu $g: P(M') \to \mathbb{R}$, pričom $g(A) = \min\{f(A), f(A\cup\{x_n\})\}$ pre každé $A\in M'$.
Začnime ju skúmať. Keďže

$$\forall A\in P(M'):\quad f(A\cup\{x_n\}) = f(M'-A),$$

tak dostávame

$$\forall A\in P(M'):\quad g(A) = \min\{f(A), f(M'-A)\}. \tag{4}$$

Keď spojíme (3) a (4), získame nový vzťah

$$\forall A\in P(M'):\quad g(A)+m = \min\{f(A), f(A\cup\{x_n\})\} + \max\{f(A), f(A\cup\{x_n\})\} = f(A) + f(A\cup\{x_n\}).$$

Využitím tohoto vzťahu dostávame

$$\begin{aligned} g(M'-A)+m &= f(M'-A) + f((M'-A)\cup\{x_n\}) = f(M-(M'-A)) + f(M-((M'-A)\cup\{x_n\})) = \\ &= f(A\cup\{x_n\}) + f(A) = g(A)+m, \end{aligned}$$

z čoho $g(A) = g(M'-A)$.
Už predošlý krok sme robili s tým, že chceme ukázať podobné vlastnosti funkcií g a f. Keďže nestojí veľkú námahu overiť (2) pre g, tak to urobíme. (Ak by to vyšlo, mali by sme funkciu pre indukčný predpoklad).

Nech teda $A, B \in P(M')$. Chceme ukázať, že $g(A \cup B) \leq \max\{g(A), g(B)\}$. Ak by $g(A) = m$ alebo $g(B) = m$, tak by ten vzťah triviálne platil. Preto v ďalšom predpokladáme, že $g(A), g(B) \leq m$. Z definície funkcie g je jedno z čísel $f(A)$ a $f(A \cup \{x_n\})$ menšie ako m a to isté platí pre B. Nech X je tá množina z množín A a $A \cup \{x_n\}$, pre ktorú $f(X) = g(A) \leq m$ a podobne Y pre B. Poznamenajme, že $(X \cup Y) \in \{A \cup B, A \cup B \cup \{x_n\}\}$.
Z toho už vyplýva

$$g(A \cup B) = \min\{f(A \cup B), f(A \cup B \cup \{x_n\})\} \leq f(X \cup Y) \leq \max\{f(X), f(Y)\} = \max\{g(A), g(B)\}.$$

Na funkciu g sa vzťahuje indukčný predpoklad a teda nadobúda maximálne $n-1$ rôznych hodnôt. Navyše, podľa toho ako sme konštruovali g vieme, že čísla $f(A)$ a $f(A \cup \{x_n\})$ majú hodnoty práve $g(A)$ a m. Z čoho triviálne všetky funkčné hodnoty f sú buď $g(A)$ alebo m. A teda f nadobúda maximálne n rôznych hodnôt.
Dá sa povedať, že riešenie bolo pomerne trikové (hlavne definovanie funkcie g). Na druhej strane si myslíme, že sa dalo získať veľa užitočných pozorovaní bez väčšej námahy. Vzorák to síce nie je najkrajší ani najkratší, ale je celkom poučný. Gratulujeme a ďakujeme všetkým, ktorým sa podarilo prehrýzť sa ním až do konca.

<u>Úloha č. 13:</u> *Nech $EFGH$, $ABCD$, $E_1F_1G_1H_1$ sú tri konvexné štvoruholníky zároveň spĺňajúce obe nasledujúce podmienky:*

(i) Body E, F, G, H ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA tak, že platí

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1\cdot$$

(ii) Body A, B, C, D ležia postupne na stranách $H_1E_1, E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1$. Navyše $EF \parallel E_1F_1, FG \parallel F_1G_1, GH \parallel G_1H_1, HE \parallel H_1E_1$.

Označme $f = E_1A/AH_1$. Vyjadrite pomer F_1C/CG_1 ako funkciu jedinej premennej f.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Filip)
Rozoberme najprv jednoduchší prípad, teda keď $EF \parallel AC$. Potom $BE/EA = BF/FC$ a použitím (i) dostávame $DH/HA = DG/GC$. Odtiaľ $HG \parallel AC$, čo dokopy dáva $E_1F_1 \parallel AC \parallel H_1G_1$. To znamená, že $F_1C/CG_1 = E_1A/AH_1 = f$.
Zostalo vyriešiť možnosť, že EF nie je rovobežná s AC. Priamky EF a AC nech sa pretnú v bode T. Podľa Menelaovej vety platí

$$\frac{CF}{FB} \cdot \frac{BF}{EA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1,$$

čo použitím (i) prevedieme na

$$\frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1.$$

Z opačnej implikácie Menelaovej vety zase vyplýva, že body T, H, G sú kolineárne. Predpokladajme, že priamky TF a TG pretnú priamku E_1H_1 v bodoch M a N. Všimnime si, že z $EB_1 \parallel EF$ obdržíme $E_1A = AM \cdot BA/EA$. Podobným spôsobom dostaneme $H_1A = AN \cdot AD/AH$. Potom

$$\frac{E_1A}{H_1A} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AH}{AD}.$$

Na druhej strane

$$\frac{AM}{AN} = \frac{EQ}{QH} = \frac{S_{AEC}}{S_{AHC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} \cdot \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AD}{AH}.$$

Nakoniec z predchádzajúcich dvoch rovností

$$\frac{E_1A}{H_1A} = \frac{EQ}{QH} \cdot \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AH}{AD} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}.$$

Takisto aj $F_1C/CG_1 = S_{ABC}/S_{ADC}$, čo dokopy dáva $F_1C/CG_1 = E_1A/AH_1 = f$.

<u>Úloha č. 14:</u> *Pre dané kladné reálne čísla r a s nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, pre ktoré platí*

$$s(r+s)x = rf(x) + f(f(x))$$

pre všetky $x \in \langle 0, \infty)$.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Filip)
Ponajprv si urobíme malú prípravu — rýchlokurz ľahkých rekurentných relácií. Homogénna lineárna rekurentná relácia p-teho rádu je predpis pre $(n+p)$-ty člen postupnosti tvaru

$$x_{n+p} = b_{p-1}x_{n+p-1} + b_{p-2}x_{n+p-2} + \cdots + b_0x_n.$$

Našim cieľom je nájsť explicitné (jednoduché) vyjadrenie n-tého člena. Postupovať budeme tak, že si najprv zostrojíme charakteristický polynóm, čo je polynóm tvaru $x^p - b_{p-1}x^{p-1} - b_{p-2}x^{p-2} - \cdots - b_0$. Potom nájdeme jeho korene. V tomto vzoráku sa budeme zaoberať iba jednoduchším prípadom, keď všetky korene budú reálne a rôzne. Označme ich $t_1, t_2, \ldots, t_p$. Vtedy vieme povedať, že všetky postupnosti, ktoré vyhovujú danej rekurentnej relácii, sú tvaru $x_n = \lambda_1 t_1^n + \lambda_2 t_2^n + \cdots + \lambda_p t_p^n$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sú pevne dané reálne konštanty. Tie nakoniec určíme z nejakých dodatočných podmienok, napr. z prvých p členov.

Dosť bolo teórie, vráťme sa k nášmu príkladu. Finta, s ktorou sa určite ešte stretnete veľakrát, je vytvorenie postupnosti predpisom $x_{n+1} = f(x_n)$. Urobme to aj my, pričom za x_0 zoberme ľubovoľné pevne dané nezáporné reálne číslo. Pre každé také x_0 je nekonečná postupnosť dobre definovaná, lebo definičný obor a obor hodnôt sú rovnaké množiny. Pre n-tý člen dostávame vyjadrenie $x_n = -rx_{n-1} + s(r+s)x_{n-2}$. My však už vieme, že potom platí $x_n = as^n + b(-r-s)^n$, pre nejaké $a, b \in \mathbb{R}$. Keďže $x_n \geq 0$ pre všetky n, musí byť $b = 0$. (Toto si dobre rozmyslite.) Dosadíme všetko do vzťahu a postupne máme $x_0 = a$, $f(x_0) = x_1 = as = sx_0$. Avšak x_0 bolo ľubovoľné nezáporné, preto jediným možným riešením zostáva $f(x) = sx$. Ľahko si sami overíte, že tento výsledok skutočne vyhovuje pôvodnej rovnici.

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Lipovský Mário	1.	GJH BA	2		7	9	9	7	5	3		110
2.	Kováčová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9		9	5	2		100
2.	Vozárová Viktória	1.	GJH BA	1	8	7				7			100
4.	Prívozník Matej	1.	GJH BA	2		8	9		9	9	3		98
5.	Gafurov Askar	2.	Gamča BA	3			9	7	3	6	1		96
5.	Jurina Šimon	1.	Gamča BA	1	9	7		2	4		1		96
5.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2		7	9		6	9	2		96
8.	Mojžišová Karolína	1.	Gamča BA	2		8	9		9	6	3		93
9.	Ondráš Ján	1.	Gamča BA	1	9	8	2						89
10.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	3			7	9	5	5	9		87
11.	Iždinská Dominika	1.	GJH BA	2		7	9		9	1	2		67
12.	Šandalová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	2		3	5			6			60
13.	Galanová Miriam	1.	GJH BA	1	3	7	4						56
14.	Kurdelová Alžbeta	1.	ŠPMNDG BA	3									52
15.	Klimkovič Anna-Mária	1.	ŠPMNDG BA	2									50
16.	Bošeľová Margita	1.	GPan BA	1									45
17.	Roštár Marek	2.	1SG BA	2		5	2	3	0				40
18.	Janitor Filip	1.	ŠPMNDG BA	1	9	7		0	9	6	3		34
19.	Žilková Alexandra	1.	ŠPMNDG BA	2									25
20.	Bednár Stanislav	1.	GJH BA	1									22

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Pokrývka Filip	1.	G Bánovce	2		7	9	9	9	6	3		117
2.	Horváth Samuel	1.	GPár NR	1	8	7	9	9	8				116
3.	Korbela Michal	1.	G Bánovce	2		8	9	9	5	5	5		114
4.	Daniel Mark	1.	GPár NR	1	8	6				1			94
5.	Šimková Ľudmila	1.	GPár NR	2		9		6	9	5	9		82
6.	Franková Monika	1.	GKom PE	2		7	3						69
7.	Kováčová Radka	1.	GPdC PN	1	7	6	2						42
8.	Pavlíková Stela	1.	GĽŠ TN	1									25
9.	Šuppa Marek	2.	GCM NR	2		4	3		0		2		22
10.	Puček Samuel	2.	GĽŠ TN	3									11
11.	Lúčna Nina	2.	GPdC PN	3									6

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Sučík Samuel	0.	ZŠ Čelovce	0	8	8	9		9	7			130
2.	Psota Miroslav	1.	GHlin ZA	2		8	9	9	6	6	9		112
3.	Hromcová Zuzana	1.	GVO ZA	2		8		9	9	7	6		111
4.	Hrivová Ivona	1.	GVO ZA	2		7	9		9	6	3		108
5.	Ječmenová Andrea	1.	GVO ZA	2		6	9		9	6	3		105
5.	Magyarová Zuzana	1.	GBST LC	2		9	9	9	7	8			105
7.	Melo Jakub	1.	GsvFA ZA	2		8	9		8	6	3		98
8.	Jankovichová Ľudmila	1.	GJGT BB	2		7	9		9	6			78
9.	Nociarová Zuzana	1.	GBST LC	1	8								66
10.	Gašpárek Miroslav	0.	SG ZA	0									17
11.	Šubjaková Mária	3.	GPOH DK	3									15
12.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	3									11
13.	Fiľová Lucia	3.	HA BR	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2					9	8	9		110
2.	Šromeková Karolína	1.	GDT PP	2		8			7		3		70
3.	Magurová Lucia	2.	GPoš KE	3									49
3.	Pivovarník Roman	1.	GJAR PO	2		5				5			49
5.	Országh Marián	1.	GJAR PO	1	5	5				6			48
6.	Hofierka Jaroslav	1.	GJAR PO	2		7					3		45
7.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	2									35
8.	Polovka Maroš	1.	GKuk PP	2			4			2			33
9.	Dudič Ján	2.	GPoš KE	2									32
9.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	3									32
9.	Stehlík Mojmír	0.	GTreb KE	0									32
12.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	1									27

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Zemková Kristýna	3.	Prachatice ČR	3			9		8		3		78
2.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2					6	8	9		66
3.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	3						9	9		53
4.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	3									47
5.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	1									18
6.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR	3									9

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	5	5			9	9	9	9	9		45	135
2.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2	0	9	8	9	6	9				41	110
3.	Balog Matej	4.	Gamča BA	8	5			3	9	9		9		30	107
4.	Ficková Klára	3.	GPoš KE	4	0	9	8	9	8					34	99
4.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	3	2		9	9	9	9		1		37	99
6.	Phuong Bui Thi Mai	4.	GJH BA	4	0			9	8	9	9	9		44	98
7.	Hanzely Filip	2.	GAP SB	5	1		8	7	9	9				33	96

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
8.	Barančok Peter	4.	Gamča BA	5	1		7	3	4	4		1		19	94
9.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA	8	4			9	9	9				27	93
10.	Hlavatá Martina	4.	Gamča BA	10	4			9	9	9				27	92
11.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2	0	6	8	9	6			9		38	91
12.	Šebo Marek	4.	Gamča BA	4	0	9	5	3		7				24	90
12.	Zavřel Lukáš	4.	GChod Praha	5	3			8	7	9		1		25	90
14.	Karásková Natália	4.	GJH BA	13	12			9	9	9				27	88
15.	Sabatovičová Linda	4.	GJH BA	9	2		7	1	8	9				25	86
16.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	1		6	9	3	9				27	85
16.	Guričan Pavol	4.	GJH BA	11	7			9	8	9				26	85
18.	Koprda Pavol	3.	GAM TT	7	2		5	3	7	7				22	84
19.	Halajová Barbora	3.	GVO ZA	7	2		6	3	4	4		1		18	82
19.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA	5	3			9	9	9				27	82
21.	Hlaváčik Matúš	2.	GAlej KE	4	1		8	3	8					19	81
21.	Klembarová Barbora	3.	GKuk PP	8	3			3	7	9	0	1		20	81
21.	Kozák Andrej	4.	Gamča BA	11	6	0	0	3	8	9	0	1		21	81
24.	Babej Tomáš	4.	GPoš KE	4	0	9	6	9	8			3		35	80
24.	Žídek Augustin	3.	Frýdlant ČR	8	3			3	6	9				18	80
26.	Horňák Marián	3.	GPár NR	8	6									0	79
27.	Tóth Michal	3.	GJH BA	8	3			3	9	9	9			30	77
28.	Kopf Michal	3.	Opava ČR	8	3			9	3	9	0			21	75
29.	Hozza Ján	4.	GJH BA	9	8			9	9	9				27	74
30.	Nociarová Jela	2.	GBST LC	4	0	9	9	3		9				30	73
31.	Pellerová Daniela	2.	Gamča BA	5	2		7	3	2	7				19	72
31.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	3	0									0	72
33.	Zemková Kristýna	3.	Prachatice ČR	3	0	8		3	4					15	71
34.	Bok Jan	4.	Litoměřice ČR	4	0	4	8	3	6	9				30	70
34.	Faguľová Kristína	3.	GPoš KE	7	2		6	6	9	3		1		25	70
34.	Stehlík Matúš	4.	GAlej KE	5	0									0	70
37.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	11	7			0	8	9				17	69
38.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	1	0									0	68
39.	Komanová Kristína	2.	GAS BB	5	2		6	3	1	3	0			13	67
39.	Marečáková Barbora	3.	GKuk PP	8	3			3	7	4	0			14	67
41.	Gafurov Askar	2.	Gamča BA	3	0	3	6	1						10	66
42.	Jasenčáková Katarína	3.	GVO ZA	8	3			3	4	9				16	65
43.	Belanová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	7	2			3	2	8				13	62
44.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	4	3			3	9			5		17	59
45.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	4	2									0	58
45.	Petrucha Jaroslav	2.	GMet BA	5	1		7	3		9				19	58
45.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	3	0	5	5	9						19	58
48.	Surovčík Juraj	2.	GPOH DK	4	0	5	7	3	1	4				20	52
49.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2	0	6	9	2						17	49
50.	Szabados Viktor	4.	Gamča BA	11	6			9	9					18	48
50.	Vlachynská Petra	3.	GJH BA	6	0									0	48
52.	Kováč Ondrej	4.	GCM NR	11	6									0	46
53.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	1	0									0	45
54.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená	10	6									0	40
55.	Magurová Lucia	2.	GPoš KE	3	0									0	38
56.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA	6	1									0	31
56.	Semanišinová Denisa	2.	GAlej KE	4	0									0	31
58.	Langer Tomáš	3.	GJH BA	8	3									0	29
58.	Macko Vladimír	2.	GĽŠ ZV	5	1									0	29
60.	Hledík Michal	2.	GJH BA	5	1									0	26
61.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	3	0									0	24
62.	Cibulka Samuel	2.	GAV LV	5	0									0	21

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
63.	Santrová Adriana	3.	GMH Trstená	5	0									0	20
64.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	4	1									0	18
65.	Kmeťová Katarína	3.	Kilmallock IR	7	1		5							5	17
66.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	3	0									0	16
66.	Smolík Milan	2.	Gamča BA	4	0									0	16
68.	Pulmann Ján	4.	Gamča BA	4	0									0	14
69.	Švančara Patrik	3.	GĽŠ TN	5	0									0	11
70.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	2	0									0	8
71.	Masár Juraj	4.	GJH BA	7	1									0	7
72.	Tokárová Natália	2.	GJAR PO	4	0									0	3
73.	Šafin Jakub	2.	GPH MI	5	2									0	0

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Balog Matej	4.	Gamča BA		9					76
2.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA							62
3.	Fiľová Lucia	3.	HA BR							0
3.	Gafurov Askar	2.	Gamča BA							0
5.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA							49
6.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR							0
7.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR							106
8.	Pulmann Ján	4.	Gamča BA							5
9.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA							47
10.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE							19
11.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha							12
12.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR		9					69
13.	Šafin Jakub	2.	GPH MI							40
14.	Tóth Michal	3.	GJH BA	9						52
15.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	9	9					164
16.	Zemková Kristýna	3.	Prachatice ČR					2		24