Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2010/2011

Úloha č. 1: *Igor má 16 kariet očíslovaných od 1 do 16 a ukladá ich na stôl. Jeho brat Paľo mu dovolí dať vedľa seba len také dve karty, ktorých súčet je druhá mocnina prirodzeného čísla. Je možné, aby Igor takto uložil na stôl všetky karty*

a) *do jedného radu?*
b) *na obvod jedného kruhu?*

Riešenie: (opravoval Fofo)
Najväčší možný súčet dvoch kartičiek je $15+16=31$, najmenší $1+2=3$. Medzi týmito číslami ležia len štyri druhé mocniny, teda súčet susedných kartičiek môže byť iba $4, 9, 16$ alebo 25. Všimnime si, že ak budeme mať vedľa seba tri kartičky a súčet prvej a druhej bude napríklad 9, tak súčet druhej a tretej už nemôže byť to isté číslo (v takom prípade by čísla na prvej a tretej kartičke museli byť rovnaké).
Pozrime sa na čísla 8 a 16. Kartička 16 môže susediť iba s číslami, s ktorými dá súčet 25 (nemôže dať súčet 16 lebo nemáme nulovú kartu, ani nižší, lebo nemáme karty so zápornými číslami). Má preto iba jedného možného suseda, a to číslo 9. Z podobných dôvodov má aj číslo 8 iba jedného možného suseda, jednotku. Máme dve kartičky, ktoré môžu mať najviac jedného suseda, preto nevieme usporiadať kartičky do kruhu, kde má každá kartička dvoch susedov. Druhá časť úlohy je týmto vyriešená.
Pokúsme sa ale zostaviť rad, kde 16 a 8 budú ležať na koncoch. Na začiatok dáme kartičku s číslom 16. Vedľa nej môže ležať jedine 9, pretože $25-16=9$. Ako ďalšiu musíme položiť 7, pretože $16-9=7$ (iná možnosť nie je, lebo 16 sme už pred chvíľou použili). Podobne postupujeme ďalej. Ďalšia kartička je vždy jednoznačne určená predošlými dvoma, takže dostaneme:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, \ldots$$

Rozoberme si, čo môže ležať vedľa trojky: $25-3=22$ je príliš veľa, $16-3=13$ už v rade raz máme, $9-3=6$, $4-3=1$. Máme teda dve možné pokračovania, 6 a 1, z ktorých nevieme jednoznačne vybrať. Vyskúšajme preto obidve.
Prvá možnosť – pokračujeme jednotkou. Rýchlo zistíme, že jednotka má tiež dvoch možných susedov, 8 alebo 15. Vieme však, že 8 je „koncová kartička“ a keby sme ju položili, dostali by sme rad, v ktorom nie sú všetky čísla. Preto za 1 musí nasledovať 15, a potom rad pokračuje ďalej, lebo ďalšie kartičky sú jednoznačne určené. Dostaneme rad

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 1, 15, 10, 6.$$

Takýto rad obsahuje už 15 kartičiek. Chýba len kartička 8, ale tú tam nemôžeme pridať, lebo $6+8=14$, čo nie je druhá mocnina. Vidíme, že cesta „pokračujeme jednotkou“ nebola správna, preto skúsime pokračovať šestkou. V tomto prípade budú všetky ďalšie kartičky jednoznačne určené a rýchlo dostaneme výsledný rad

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.$$

Keby sme pôvodne začali kartičkou 8, dostali by sme po rovnakých úvahách ten istý rad otočený zrkadlovo.

Úloha č. 2: *Maškrtní manželia Katka a Miško majú v kuchyni tri misky. Ráno do nich Katka nasypala cukríky. Do prvej ich dala* 2010*, do druhej tiež* 2010 *a do tretej, čo zvýšilo. V priebehu dňa ich Miško vyjedal. Vždy si zobral buď* 3 *cukríky z niektorej misky, alebo po jednom z každej. Večer boli všetky tri misky prázdne. Koľko cukríkov mohlo byť v tretej miske? Nájdite všetky možnosti.*

Riešenie: (opravovali Katka J. a Kika K.)
Po niekoľkých viac-menej vydarených pokusoch si všimneme, že misky zostanú večer prázdne iba vtedy, ak je počet cukríkov v tretej miske násobkom troch. Tento náš dojem však musíme aj poriadne dokázať.

Keď je v tretej miske počet cukríkov deliteľný tromi (vieme ho napísať ako $3k$), ľahko ukážeme, že sa do večera dajú všetky vyprázdniť. Napríklad tak, že Miško postupne odjedá po tri cukríky z každej misky a keď vyprázdni jednu, pustí sa do ďalšej (2010 je tiež deliteľné tromi). Ešte ale musíme ukázať, že ako riešenie vyhovujú iba čísla deliteľné tromi a ostatné nie.

Pozrime sa na to, ako by sa dalo odjedať z misiek, keby bolo v tretej miske $3k+1$ alebo $3k+2$ cukríkov (nie počet deliteľný tromi). Miško rozhodne nemôže odjedať tak, ako predtým, teda vždy iba po tri cukríky z jednej misky, lebo v tretej miske by nám zostal jeden alebo dva cukríky. Ak bude odjedať iba po jednom cukríku z každej misky, nikdy sa mu nepodarí odjesť toľko, aby v každej miske zostal počet cukríkov deliteľný tromi. (Premyslite si, prípadne aj názorne demonštrujte doma.) Rozhodujúce je pozorovať, ako sa menia počty cukríkov a ich deliteľnosť tromi – ak v jednej miske je napríklad $3k+1$ a v zvyšných dvoch $3m$, po odjedení jedného cukríka z každej z misiek sa nedostaneme do stavu, že vo všetkých troch miskách je počet cukríkov deliteľný troma. Keby sa to podarilo, Miško by už mohol odjedať stále po tri cukríky z jednej misky tak, ako sme spomenuli v úvode. (Pozor! Tento argument môžeme použiť iba vďaka tomu, že dôležité je iba to, koľkokrát Miško odjedá po tri cukríky z jednej misky a koľkokrát po jednom cukríku z každej misky – nezáleží na tom, v akom poradí to robí.)

Podarilo sa nám dokázať, že ak je počet cukríkov v tretej miske $3k$, Miško vie zjesť všetky cukríky, ale ak je tento počet $3k+1$ alebo $3k+2$, vždy mu nejaké cukríky zostanú. Správna odpoveď teda znie, že počet cukríkov v tretej miske na začiatku musel byť deliteľný tromi (alebo rovný nule).

Úloha č. 3: *Každý lístok lotérie Šťastná sedmička má na sebe 7-ciferné číslo. Kubo sleduje žrebovanie v priamom prenose a v ruke drží svoj lístok. Moderátor vyžrebuje víťaza a hovorí: „Číslo na tomto lístku má všetky cifry rôzne.“ Kubo od napätia vstáva z gauča, pretože jeho číslo toto spĺňa. „Navyše je deliteľné každou svojou cifrou,“ pokračuje moderátor. Kubo jasá, pretože jeho číslo spĺňa aj toto. Z akých cifier sa skladá číslo na jeho lístku? Môže existovať viac víťazných čísel?*

Riešenie: (opravovala Ika a Marek)

Pri riešení tejto úlohy sa oplatí poznať kritériá deliteľnosti číslami 1 až 9, a fakt, že ak je n deliteľné číslom k, tak je deliteľné aj všetkými deliteľmi čísla k. (Premyslite si to a všimnite si, kde to použijeme.)

Ako prvú vec by sme si mali všimnúť, že Kubovo číslo nemôže obsahovať cifru 0, lebo deliť nulou sa nedá. Ostáva teda 9 možných cifier, pričom hľadané číslo obsahuje 7 z nich.

Ak by sa naše číslo skladalo len z nepárnych cifier, mohlo by byť najviac päťciferné. Musí teda obsahovať aspoň dve párne cifry, a keďže podľa zadania nimi musí byť aj deliteľné, musí byť deliteľné dvomi. Podľa kritéria deliteľnosti dvomi teda posledná cifra Kubovho čísla musí byť párna. Ďalšie kritérium, ktoré hovorí niečo o poslednej cifre, je kritérium deliteľnosti piatimi. Číslo deliteľné 5, musí mať poslednú cifru 0 alebo 5. Nulu sme ale už vylúčili a 5 je nepárna cifra, preto nemôže byť na konci. Kubovo číslo teda určite nebude deliteľné piatimi a preto nemôže obsahovať cifru 5. Tým sme vylúčili ďalšiu cifru – ostalo nám 8 cifier, z ktorých 7 použijeme.

Podobne ako deliteľnosť dvomi, vieme ukázať, že Kubovo číslo musí byť deliteľné tromi. (Vyskúšajte si to, pomôže Vám, že aj 6 a 9 sú deliteľné tromi.) Podľa kritéria deliteľnosti tromi musí mať naše číslo ciferný súčet deliteľný tromi. To bude len vtedy, ak vylúčime cifru (viac ako jednu cifru už nemôžeme) 1, 4, alebo 7 (ciferný súčet bude 39, 36, alebo 33, skúste si). Určite tam teda bude cifra 9 (a aj 2, 3, 6, 8), takže (podľa kritéria deliteľnosti číslom 9) ciferný súčet musí byť deliteľný aj deviatimi. Zo spomínaných súčtov tomu vyhovuje len 36, takže musíme vylúčiť cifru 4.

Vyšlo nám, že Kubovo číslo sa môže skladať jedine z cifier 1, 2, 3, 6, 7, 8 a 9. Skúsme nejaké také číslo nájsť. Vieme už, že je deliteľné číslami 9, 3, a 1. Aby bolo deliteľné číslom 8 (potom samozrejme aj 4 a 2), musí byť posledné trojčíslie deliteľné ôsmimi. Keďže ho delí aj 3, tak bude deliteľné aj číslom 6. No a nakoniec (ne)šťastná sedmička, ktorá nemá „pekné“ kritérium deliteľnosti. Môžeme zobrať kalkulačku, a začať skúšať pred nejaké trojčíslie deliteľné ôsmimi zoradiť zvyšné štyri cifry tak, aby to číslo bolo deliteľné siedmimi. Nebude to trvať dlho a nejaké určite nájdeme – a nie len jedno, dokonca šesť. Takže víťazné číslo nie je len jedno.

Úloha č. 4: *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $1+2^2+3^3+4^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla.*

Riešenie: (opravoval Kubo a Paľo)

V tejto úlohe bolo základom pracovať s výrazom $1+2^2+3^3+4^n$, ktorý by sa mal rovnať druhej mocnine prirodzeného čísla (označíme ju x^2). Najskôr si rovnicu upravíme na tvar $32 = x^2 - 4^n$, čo ďalej rozložíme na

$$32 = x^2 - (2^n)^2.$$

Podľa známeho vzorca pre rozdiel dvoch druhých mocnín platí

$$32 = (x - 2^n)(x + 2^n).$$

Všimnime si teraz, že $(x - 2^n)$ je určite celé číslo, a zároveň $(x + 2^n)$ je prirodzené číslo. Keďže súčinom týchto dvoch zátvoriek dostaneme 32, čo je tiež prirodzené číslo, platí, že $(x - 2^n)$ je tiež prirodzené číslo. Ďalej platí, že $(x - 2^n) < (x + 2^n)$, lebo 2^n je kladné. Keďže obe zátvorky sú prirodzené čísla a ich súčin je 32 vieme, že musia byť deliteľmi čísla 32. Preto si vypíšme tie dvojice deliteľov 32, ktorých súčinom toto číslo získame. Sú to dvojice $(1, 32)$,$(2, 16)$ a $(4, 8)$.

Keďže $(x - 2^n) < (x + 2^n)$, musíme riešiť tri prípady:

$$(x - 2^n) = 1 \qquad (x + 2^n) = 32,$$
$$(x - 2^n) = 2 \qquad (x + 2^n) = 16,$$
$$(x - 2^n) = 4 \qquad (x + 2^n) = 8.$$

Vyriešením prvej sústavy dostaneme $2x = 33$, z čoho vyplýva, že x by nebolo prirodzené číslo. Ak by platilo $(x-2^n) = 2, (x+2^n) = 16$, tak vyriešením zistíme, že $2^n = 7$ (n by zas nebolo prirodzené číslo). Konečne, v treťom prípade vychádza $x = 6$ a $2^n = 2$, z čoho vyplýva $n = 1$. Urobíme ešte skúšku, a naozaj

$$1 + 2^2 + 3^3 + 4^1 = 32 + 4^1 = 6^2.$$

Riešenie je teda jedno, a je to $n = 1$.

Iné riešenie: Prvý krok pri riešení príkladov by mal byť počiatočný experiment. Najprv treba za n dosadiť mnoho čísel aby sme si vytvorili nejakú predstavu o tom, aké bude riešenie úlohy. To, že jednotka je jedno z riešení, sme si mohli všimnúť už po prvom pokuse. Ak ju dosadíme za n, dostaneme 36, čo je druhá mocnina šestky. Po ďalšom dosadzovaní strácame nádej, že ešte niečo nájdeme a začneme predpokladať, že úloha má len jedno riešenie. Ale to musíme poriadne dokázať. Prvé čísla sčítame a dostaneme výraz $32 + 4^n$. Člen 4^n sa dá upraviť ako $2^{2n} = (2^n)^2$, teda na druhú mocninu prirodzeného čísla.

O druhých mocninách sa oplatí vedieť, že ich vzdialenosti sa stále zväčšujú. Konkrétne $a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$. (Ak neveríš, tak si to roznásob a uprav.) Preto ak k dostatočne veľkej druhej mocnine prirátame 32, už to nebude druhá mocnina. Ešte treba zodpovedať otázku, čo je to dostatočne veľká druhá mocnina. Bude to taká druhá mocnina, pri ktorej rozostup medzi ňou a ďalšou druhou mocninou bude už väčší ako 32. Teraz využijeme to, čo vieme o rozostupoch medzi druhými mocninami:

$$2a + 1 > 33,$$

a teda

$$a > 16 = 2^4.$$

Teraz si to zhrnieme. Pri $a > 16$ je už medzera medzi a^2 a $(a+1)^2$ väčšia ako 32, teda ak bude $4^n > 16^2$, náš výraz už nemôže byť druhou mocninou prirodzeného čísla (platí pre $n > 4$). A čo s možnosťami predtým? Tie stačí overiť. Na konci nám ostane jediné, už spomenuté riešenie $n = 1$. Happy end.

Úloha č. 5: *Na matematickú súťaž sa prihlásilo d dievčat a ch chlapcov. Organizátori nakoniec vyvesili poradie, v ktorom bol na každom mieste práve jeden človek. Kika si poradie prezrela, vyznačila všetky dievčatá a sčítala ich umiestnenia. Tento súčet si označila ako A. Potom preskúmala všetky možné dvojice chlapec – dievča. Ak v dvojici dopadol lepšie chlapec, urobila si čiarku. Počet čiarok označila B. Ukážte, že $A - B = d(d+1)/2$.*

Riešenie: (opravovali Katka :P a Mojo)

Pozrime sa najskôr na situáciu, keď sú všetky dievčatá na vrchných pozíciách v poradí, teda na miestach 1 až d. Vtedy bude A rovné presne $1 + 2 + \cdots + d = d(d+1)/2$. Tento vzorec tu berieme ako samozrejmosť, jeho dôkaz nebol súčasťou úlohy (ak ho nepoznáš, skús si ho dokázať matematickou indukciou). Hodnota B bude v tomto prípade nula, lebo žiadny chlapec sa neumiestnil lepšie ako dievča.

Teraz si ukážeme, že z tohoto poradia vieme získať akékoľvek iné poradie len tým, že budeme medzi sebou vymieňať dvojice chlapec – dievča, ktoré sa umiestnili vedľa seba. Ak napríklad chceme, aby sa najlepší chlapec umiestnil na 3. mieste, „vymeníme“ ho s posledným dievčaťom, potom s predposledným, a tak ďalej, až napokon s tým, ktoré bolo pôvodne na 3. mieste. Takýmto istým spôsobom vieme dostať ďalšieho a ďalšieho chlapca na miesta, ktoré chceme. (Premyslite si.)

Nakoniec ukážeme, že „jednorázovou výmenou“ dvojice chlapec – dievča sa rozdiel $A - B$ nezmení. Dievča, ktoré sme posunuli, si zhorší pozíciu o jedno miesto. Tým sa A zväčší o jedna. Zároveň nám však pribudne aj jedna dvojica chlapec – dievča, v ktorej je chlapec lepší (lebo dané dievča predbehol). Teda aj B sa zväčší o jedna. Všimnime si, že rozdiel $A-B$ sa nezmenil, teda ostal taký, ako v prípade, ktorý sme uvažovali na začiatku, čiže rovný $d(d+1)/2$.

Iné riešenie: Aby sme túto úlohu úspešne vyriešili, stačilo sa len zamyslieť nad tým, čo znamená „umiestnenie“ pre konkrétne dievča. Je to vlastne počet dievčat, ktoré sú pred ním, plus počet chlapcov, ktorí sú pred ním (počet čiarok, ktoré dané dievča pridá do súčtu B) plus jedna. (Premyslite si, prečo je to tak.) Ak sčítame pre všetky dievčatá počet chlapcov, ktoré sú pred nimi, dostaneme B. Ak sčítame pre všetky dievčatá počet dievčat, ktoré sú pred nimi, dostaneme

$$0 + 1 + 2 \cdots + (d-1) = \frac{(d-1)d}{2},$$

lebo pred prvým dievčaťom nie je žiadne, pred druhým jedno, … a pred posledným $(d-1)$. Ak pridáme pre každé dievča spomínanú jednotku, bude ich d. Ak sčítame umiestnenia všetkých dievčat, dostaneme A. Teda platí, že

$$A = B + \frac{(d-1)d}{2} + d,$$

čím sme dokázali, čo sme chceli.

Úloha č. 6: *Tri bachraté mravce Ika, Ajka a Maťo spolu sedia v jednom vrchole pravidelného n-uholníka. Každú minútu sa niektorý z nich (nemusí to byť vždy ten istý) pohne do susedného vrcholu v smere hodinových ručičiek, ďalší do susedného vrcholu proti ich smeru a posledný ostane sedieť na mieste. Pre aké n sa môže stať, že sa po nejakom čase všetky tri mravce stretnú v jednom vrchole, ale inom ako na začiatku?*

Riešenie: (opravoval Beren a Aďa)

Po prečítaní zadania si najprv na pár jednoduchých príkladoch ozrejmíme, ako to celé vlastne funguje. Vyskúšame si najprv najjednoduchší n-uholník, čo je trojuholník. V prvom kroku sa jeden mravec pohne vpravo, druhý vľavo a tretí ostane na štartovacej pozícii. Vidíme, že hneď ďalším krokom sa vieme so všetkými mravcami dostať do ľubovoľného vrcholu trojuholníka. Čiže pre trojuholník to ide. Pre štvorec a päťuholník nám to ani po dlhej chvíli skúšania nepôjde. Pre šesťuholník nám to zase vyjde. Jeden mravec pôjde stále vpravo a ďalší dvaja nastriedačku vľavo.

Pri takomto systéme prejde mravec, ktorý ide vpravo, dvakrát toľko vrcholov, čo mravce, ktoré idú vľavo, čiže kým prvý prejde $2/3$ vrcholov n-uholníka, ďalšie dva prejdú každý $1/3$ vrcholov. Tento postup sa zjavne dá použiť pre všetky n-uholníky, kde $n/3$ a $2n/3$ sú celé čísla, čiže pre všetky n deliteľné tromi. Pre iné n však tento postup nefunguje, rovnako ako žiadny iný, čo nám napadne vyskúšať. Preto máme podozrenie, že pre žiadne iné n ako deliteľné tromi sa to nedá. Tento fakt teraz musíme všeobecne dokázať.

Pozrime sa bližšie na to, čo sa stane v jednom ťahu. Pre názornosť si označme vrcholy n-uholníka číslami od 1 po n v smere hodinových ručičiek. Nech sú mravce v bodoch a, b a c. Jeden mravec, bez ujmy na všeobecnosti povedzme, že to bol a, sa pohol proti smeru hodinových ručičiek na vrchol $a-1$. Mravec b ostal na mieste a mravec c sa pohol v smere hodinových ručičiek na $c+1$. Pozícia prvého mravca sa zmenšila o jedna, pozícia posledného sa zväčšila o jedna, čiže súčet pozícii ostal nezmenený. Jediný problém môže nastať pri posune z vrcholu 1 do vrcholu n alebo naopak. Vtedy sa súčet zväčší alebo zmenší o n. (Premyslite si, prečo.) Čiže súčet sa buď nezmení, alebo sa zmení o n.

Nech sú všetky tri mravce na začiatku vo vrchole 1, čiže súčet ich pozícií je 3. V ľubovoľnej minúte bude teda súčet pozícii 3, $3+n$ alebo $3+2n$. Všimneme si, že súčet $3+3n$ už nemôže nastať, lebo maximálny súčet pozícii je $3n$. Keďže všetci traja sú na konci v rovnakom vrchole, súčet ich pozícii je deliteľný tromi. Ale súčet 3 nie je vyhrávajúca pozícia, pretože jediná možnosť ako dosiahnúť súčet 3 je tak, že sú všetci vo vrchole 1, čo je však začiatok. Teda $3+n$ alebo $3+2n$ musí byť deliteľné 3. A to sa dá dosiahnuť jedine ak n je deliteľné 3, čiže pre iné n to nejde.

Dokázali sme, že ak n nie je deliteľné 3, tak to nejde a našli sme spôsob ako vyriešiť úlohu pre všetky n deliteľné 3, čím sme vyriešili všetky možnosti. Howgh.

Úloha č. 7: *V štáte Obdĺžnisisipi je mn miest rozmiestnených rovnomerne v pravouhlej mriežke rozmerov $m \times n$, pričom m aj n sú prirodzené čísla. Do každého mesta vedie presne k ciest, ktoré spájajú toto mesto s niekoľkými jeho susednými mestami. Susedné mestá k nejakému mestu sú tie, ktoré sú hore, dole, naľavo alebo napravo od daného mesta (nie diagonálne). Dve mestá môžu byť spojené aj viac ako jednou cestou. Vyhovujúce rozmiestnenie ciest je také, že z ľubovoľného mesta sa postupne po cestách vieme dostať do ľubovoľného iného. Určite všetky možné trojice čísel (m,n,k), pre ktoré existuje nejaké vyhovujúce rozmiestnenie ciest. Zdôvodnite tiež, prečo pre iné trojice vyhovujúce rozmiestnenia neexistujú.*

Riešenie: (opravoval Cvrki a JeFo)

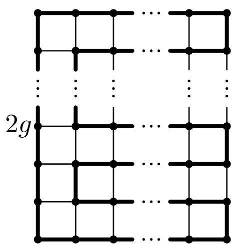
Trojica čísel (m,n,k) vyhovuje zadaniu, ak existuje vyhovujúce rozmiestnenie ciest. Na začiatok si môžeme všimnúť, že ak vyhovuje trojica (m,n,k), tak vyhovuje aj trojica (n,m,k), a ak nevyhovuje trojica (m,n,k), tak nevyhovuje ani trojica (n,m,k) (stačí nám pretočiť mriežku o 90 stupňov). Mesto so súradnicami x a y si označme (x,y).

Všimnime si najskôr prípad, keď $m=1$. Ak $n=1$, tak máme len jedno mesto $(1,1)$, pričom z neho nemôže ísť ani jedna cesta (nemá kam), ale zároveň sa z neho dostaneme do všetkých miest. Dostávame teda prvú vyhovujúcu trojicu $(1,1,0)$. Ak $n=2$, tak máme dve mestá, a to $(1,1)$ a $(1,2)$, medzi ktorými môže ísť cesta. Keď si zvolíme ľubovoľné $k \geq 1$, tak medzi tieto dve mestá môžeme dať k ciest, pričom z každého mesta pôjde k ciest a dostaneme sa z každého mesta do každého (ak $k=0$, tak sa nedostaneme z $(1,1)$ do $(1,2)$). Dostávame teda vyhovujúce trojice $(1,2,k)$ a $(2,1,k)$ pre všetky $k \geq 1$. Ak $n \geq 3$, tak môžeme predpokladať, že $k \geq 1$. Potom medzi mestami $(1,1)$ a $(1,2)$ musí byť presne k ciest. (Keďže $(1,1)$ nemá iných susedov, iba mesto $(1,2)$.) To však znamená, že všetky cesty z $(1,2)$ vedú do (Ríma) $(1,1)$, čiže z mesta $(1,1)$, ani z mesta $(1,2)$ sa nedokážeme dostať do mesta $(1,3)$ (jediné mesto kam sa dá dostať z $(1,1)$ je $(1,2)$ a jediné mesto kam sa dá dostať z $(1,2)$ je $(1,1)$), takže takéto rozmiestnenie ciest nie je vyhovujúce. Môžeme teda povedať, že trojice $(1,a,k)$ a $(a,1,k)$ pre $a \geq 3$ nevyhovujú.

Poďme sa teraz pozrieť na možnosti kde $m,n \geq 2$:

- Ak m aj n sú nepárne. Ukážeme, že neexistuje žiadna vyhovujúca trojica (m,n,k). Predpokladajme, že takáto trojica (m,n,k) existuje. Zafarbíme si mestá ako šachovnicu. Potom čierne mestá susedia iba s bielymi a naopak. Z toho vyplýva, že každá cesta je medzi bielym a čiernym mestom. Preto zo všetkých čiernych miest ide rovnako veľa ciest ako zo všetkých bielych miest. Zároveň z každého mesta ide presne k ciest. Z toho vyplýva, že musí byť rovnako veľa čiernych a bielych miest. (Skúste si premyslieť, prečo.) Potom všetkých miest dokopy bude párny počet, ale miest je spolu $m \cdot n$, čo je nepárne číslo, takže sme sa dostali k sporu.

- Ak m je párne. Najmenšia možná mriežka bude v takomto prípade 2×2. Tým pádom, ak chceme vytvoriť vyhovujúce rozmiestnenie, tak nutne $k \geq 2$.(Premyslite si, prečo.) Najskôr ukážeme, že pre $k = 2$ to vždy ide. Vytvorme si cesty medzi mestami takýmto spôsobom (viď obrázok):



Prvá cesta pôjde z mesta $(1, 2)$ do mesta $(1, 3)$. Potom z $(1, 3)$ do $(1, 4)$, odtiaľ do $(1, 5)$, a tak ďalej, až nakoniec z $(1, n-1)$ do $(1, n)$. Odtiaľ pôjde cesta do $(2, n)$, a opäť „zahne“ až do $(2, 2)$, stade pôjde cesta do $(3, 2)$, a znova pôjdeme hore až do mesta $(3, n)$. Tento postup vytvárania ciest budeme opakovať. Všimnite si, že na striedačku vždy vyjdeme do $(2g - 1, n)$ a následne zídeme do $(2g, 2)$. Skončíme teda v meste $(m, 2)$ (nie v (m, n), pretože m je párne), odtiaľ pôjdeme nahor do mesta $(m, 1)$ a stade sa postupne vrátime cez mestá $(m - 1, 1)$, $(m - 2, 1)$, $\dots$, $(2, 1)$ a $(1, 1)$ do mesta $(1, 2)$. Prešli sme cez všetky mestá, čiže platí, že sa z každého dostaneme do každého, a taktiež platí, že z každého mesta vychádzajú dve cesty, takže trojica $(m, n, 2)$ je vyhovujúca a zároveň aj trojica $(n, m, 2)$ je vyhovujúca pre m párne.

Teraz ešte ukážeme, ako vyššie uvedené vyhovujúce rozmiestnenie ciest pre $k = 2$ prerobiť na vyhovujúce rozmiestnenie ciest pre ľubovoľné k väčšie ako 2. Rozdeľme si celý štát na $mn/2$ susedných dvojíc štátov. (Premyslite si, ako sa to dá spraviť, nezabúdajte pritom na to, že m je párne.) Teraz medzi každú takúto dvojicu štátov pridajme $k - 2$ ciest. Porozmýšľajme, čo to spôsobí. Keďže sme mali rozmiestnenie ciest také, že sme sa boli schopní dostať z každého mesta do každého a k tomuto rozmiestneniu sme nejaké cesty pridali, ale žiadne neubrali, tak stále je možné dostať sa z každého mesta do každého. Navyše z každého mesta teraz pôjde o $k - 2$ ciest viac, čiže spolu $(k - 2) + 2$, čo je presne k. Tým pádom sme dostali vyhovujúce rozmiestnenie ciest pre m párne a $k > 2$.

Vyhovujúce trojice sú teda $(1, 1, 0)$, $(1, 2, k)$, $(2, 1, k)$ pre všetky $k \geq 1$, (m, n, k) a (n, m, k) pre všetky m párne a $k \geq 2$.

<u>Úloha č. 8:</u> *Nájdite všetky dvojice (a, b) nezáporných celých čísel, pre ktoré sú obidve čísla $a^2 + 4b$ aj $b^2 + 4a$ druhou mocninou celého čísla.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Stanka)
(*Podľa Štěpána Šimsu*) Predpokladajme, že už máme nezápornú usporiadanú dvojicu (a, b) takú, že a^2+4b a b^2+4a sú štvorce a hľadáme nutnú podmienku pre (a, b). Najprv rozoberme prípad, keď jedno z riešení je 0. Nech bez ujmy na všeobecnosti je to a. Chceme, aby $4b$ a b^2 boli štvorce. Ak $4b = m^2$, tak $b = (m/2)^2$. Toto, spolu s podmienkou o celočíselnosti b, implikuje, že b musí byť štvorec. Avšak, toto je i postačujúca podmienka, aby $(0, b)$ bolo riešením. (Overte si.) Prípad $(a, 0)$ je symetrický.
Teraz sa pozrime na prípad, keď $a, b \geq 1$. Nech c a d sú také, že $a^2 + 4b = c^2$ a $b^2 + 4a = d^2$. Máme $4b | c^2 - a^2$, z čoho vyplýva, že $2 | (c - a)(c + a)$, teda 2 musí deliť jednu zo zátvoriek. Či už je to prvá alebo druhá, dostávame, že c a a majú rovnakú paritu. Navyše, číslo $4b$ je kladné, takže máme $c \geq a + 2$, z čoho vyplýva $c^2 \geq (a + 2)^2$. Z toho a z $a^2 + 4b = c^2$ máme $a^2 + 4b \geq (a + 2)^2$. Po úprave dostaneme $b \geq a + 1$. Symetricky pre druhú rovnosť platí $a \geq b + 1$. Teda $b \geq a + 1 \geq (b + 1) + 1$, čo vedie ku $0 \geq 2$, čo je spor. Jediné riešenia sú tvaru $(0, k^2)$, $(k^2, 0)$ pre k celé číslo.

<u>Úloha č. 9:</u> *Kde bolo, tam bolo, v Kráľovstve Múdrych Stvorení, slávny rytier Eduard prezývaný Edo sa po večeroch venoval svojmu koníčku – matematike. Jeden upršaný deň mu spríjemnila istá zvláštna podmnožina A množiny čísel $\{2,\ 3,\ ,\dots,\ 2010\}$. O tejto podmnožine sa v kráľovstve šepkalo, že mala aspoň 1003 prvkov. Táto správa sa dostala aj dvornému šašovi Mišovi. Ten po chvíli usúdil, že množina A musí obsahovať aspoň jednu mocninu dvojky, alebo dve čísla, ktorých súčet je mocninou dvojky. Dokážte, že sa nemýlil.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Kenny)
Budeme sa snažiť nájsť množinu B, pre ktorú šašova podmienka neplatí. (Používame teda dôkaz sporom.) Začneme so základnými počtami. Máme 2009 čísel, z ktorých chceme vybrať 1003. Keďže v množine B nemôžu byť mocniny dvojky, niektoré z čísel (napríklad $2, 4, 8, \dots$) môžeme rovno vylúčiť. Keď vylúčime 5 takýchto čísel, budeme mať 2004 čísel a budeme chcieť vybrať 1003 čísel. Na to, aby sme ukázali, že 1003 čísel nemôžeme vybrať, stačí popárovať 2004 čísel do párov tak, aby z každej dvojice mohlo byť v množine B najviac jedno číslo – napríklad tak, že páry budú mať súčet rovný nejakej mocnine dvojky. Potom ak je v množine B 1003 čísel, určite existuje pár, ktorý je v tejto množine. (Máme 1002 párov a 1003 čísel, preto aspoň jedna dvojica čísel patrí do jedného páru.) Ale tento pár dáva súčet rovný mocnine dvojky a šašova vlastnosť platí. Poďme teda nájsť naše páry.

Začneme od konca. Ktoré číslo tvorí pár s číslom 2010? Najbližšia mocnina dvojky je 2048, preto je to číslo 38. Máme pár P_1. Podobne spárujeme čísla 2009 a 39, 2008 a 40, ..., 1025 a 1023. Dostávame páry P_1, P_2,..., P_{986}. (Naozaj? Overte si to.) Popárovali sme čísla od 38 po 2010, s výnimkou 1024. Našťastie $1024 = 2^{10}$ a preto toto číslo vylúčime automaticky. Máme 986 párov, jedno vylúčené číslo a 36 čísel, z ktorých potrebujeme vytvoriť 16 párov a 4 vylúčené čísla.
Najväčšie číslo, ktoré nám ostalo je 37. To tvorí pár P_{987} s číslom 27. (V súčte dávajú 64, čo je mocnina dvojky.) Podobne vytvoríme páry $P_{988} = (36, 28)$, $P_{989} = (35, 29)$, ..., $P_{991} = (33, 31)$. Ostali nám čísla 2 až 26 a číslo 32. Číslo 32 je mocninou dvojky, preto ho prehlásime za druhé vylúčené číslo. Z čísel 2 až 26 potrebujeme vytvoriť 11 párov a vybrať 3 vylúčené čísla.
Číslo 26, ktoré je najväčšie zo zvyšných čísel, tvorí pár P_{992} s číslom 6. Podobným spôsobom ako doteraz dostávame páry P_{993}, ..., P_{1001} z čísel 25 a 7, ..., 17 a 15. Číslo 16 je mocnina dvojky, bude to naše tretie vylúčené číslo. A už sa blížime ku koncu. Ostali nám čísla $2, 3, 4, 5$, z ktorých chceme vytvoriť posledný pár a vybrať dve vylúčené čísla.
Čísla 2 a 4 sú mocniny dvojky, vylúčené čísla teda máme z krku. Ostáva nám dúfať, že čísla 3 a 5 sa sčítajú do nejakej mocniny dvojky. A je to naozaj tak, pretože $8 = 2^3$.
Zopakujme si, čo sme spravili. Vybrali sme čísla $1024, 32, 16, 4$ a 2, ktoré v množine B nemôžu byť, pretože by bola splnená šašova podmienka. Vytvorili sme 1002 párov čísel, z ktorých môže byť v množine B najviac jedno. Množina B teda môže obsahovať maximálne 1002 prvkov. Zo zadania vieme, že obsahuje 1003 prvkov. Preto je jasné, že buď obsahuje nejakú mocninu dvojky, alebo nejaký pár P_1, ..., P_n. V druhom prípade obsahuje dvojicu čísel, ktorých súčet je mocninou dvojky. Šašo mal pravdu!

Komentár: Mnohí z vás začali úlohu riešiť dobre, no namiesto rozdelenia čísel do dvojíc vyberali vždy to väčšie číslo. Tento postup nie je celkom správny, pretože bolo treba ukázať, že pre ľubovoľnú množinu A vlastnosť zo zadania platí. Vy ste konštruovali konkrétnu množinu s cieľom nájsť protipríklad, ale vyšlo Vám, že vlastnosť platí. A z toho ste usúdili, že vlastnosť bude platiť stále. Ale čo ak sa dala množina konštruovať nejako inak?

Úloha č. 10: *Jefo si (ako obvykle) z dlhej chvíle písal cez prestávku v škole postupnosť nezáporných celých čísel. Katka mu nakúkala ponad plece a zrazu začala skákať od nadšenia. Jefo sa zľakol, no potom mu Katka vysvetlila, že jeho postupnosť má zaujímavú vlastnosť. Označme jej členy x_0, x_1, $x_2, \ldots,$ x_n, pričom $n \geq 0$. Pre všetky j $(0 \leq j \leq n)$ platí, že x_j vyjadruje počet výskytov čísla j v tejto postupnosti. Akú postupnosť mohol mať Jefo napísanú na papieri? Nájdite všetky možnosti.*

Riešenie: (opravovali Kubo Konečný a Ondro Mikuláš)
Postupnosť zo zadania má $n+1$ členov. Skúsme dosadiť za x_0 číslo nula. V postupnosti je teraz aspoň jedna nula. Platí teda $x_0 \geq 1$. Dostávame spor s tým, že $x_0 = 0$, preto $x_0 \geq 1$. Člen postupnosti x_i vraví, koľkokrát sa v postupnosti vyskytne i. Členov postupnosti je $n+1$, preto $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n + 1$. Uvedený vzťah môžeme upraviť nasledovne:

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - 1) = 0 \tag{1}$$

Rozdeľme si teraz čísla v postupnosti na tri množiny.

- V množine A bude číslo x_0.
- V množine B budú všetky čísla x_i, ktoré sú rovné nule. Vyššie sme ukázali, že $x_0 \notin B$
- V množine C budú všetky čísla z postupnosti, ktoré nie sú v množine A ani v množine B.

Pre veľkosť množiny B platí $|B| = x_0$. Rovnicu (1) teraz môžeme rozpísať nasledovne:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=0}^{n} (x_i - 1) &= (x_0 - 1) + \sum_{\forall i,\, x_i \in B} (x_i - 1) + \sum_{\forall j,\, x_j \in C} (x_j - 1) = \\ &= (x_0 - 1) + (-1) \cdot x_0 + \sum_{\forall x_j \in C} (x_j - 1). \end{aligned}$$

V druhom riadku sme využili vlastnosť množiny B, že súčet jej prvkov je nula.
Pre prvky množiny C teda dostaneme:

$$\sum_{\forall j,\, x_j \in C} (x_j - 1) = 1.$$

Všetky prvky v množine C sú kladné celé čísla. Preto pre každý jej prvok x_j platí nerovnosť $x_j - 1 \geq 0$. V množine C sa teda nachádza práve jedna dvojka a okrem nej niekoľko jednotiek. (Rozmyslite si.) Inak povedané, pre všetky $i \geq 1, x_i \in \{0, 1, 2\}$. Poďme teraz preskúmať, akému číslu sa môže rovnať prvý člen postupnosti x_0.

- $x_0 = 1$, potom $x_1 \neq 0$. Člen x_1 sa nemôže rovnať číslu 1, lebo potom by sme mali v postupnosti už dve jednotky (x_0 a x_1). V množine C sú len jednotky a jedna dvojka, preto na výber x_1 máme jedinú možnosť $x_1 = 2$. Potom nutne $x_3 = 0$. Dostávame prvé riešenie, postupnosť $1, 2, 1, 0$.
- $x_0 = 2$, potom $x_2 = 2$, lebo práve jedna dvojka je v množine C a jedna je x_0. Ak $x_1 = 0$, tak dostávame ďalšie riešenie, štvorprvkovú postupnosť $2, 0, 2, 0$. Ak $x_1 = 1$, tak dostávame riešenie $2, 1, 2, 0, 0$.
- $x_0 = k, k \geq 3$, potom pre $i \geq 2$ platí, že $x_i < 2$, lebo ináč by v C boli aspoň dve čísla väčšie ako 2. Jediný člen, ktorý môže byť 2, je x_1. Potom $x_2 = 1$. Prvé tri členy postupnosti po poradí sú k, 2 a 1. Člen x_k sa musí rovnať 1, lebo $x_0 = k$. Zvyšné členy postupnosti sú nulové. Výsledná postupnosť potom vyzerá nasledovne:

$$k, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-3 \text{ núl}}, 1, 0, 0, 0.$$

Spolu sme teda našli nasledovné riešenia:

$$(1, 2, 1, 0), (2, 0, 2, 0), (2, 1, 2, 0, 0), (k, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-3 \text{ núl}}, 1, 0, 0, 0),$$

kde $k \geq 3$.

__**Úloha č. 11:**__ *Palacinkového cesta nikdy nie je dosť. Vďaka tomuto heslu ho Kubo navyrábal toľko, že sa mu ledva zmestilo do 40 hrncov (tie si musel požičať aj od susedov). Hanke sa to vôbec nepáčilo. Nie to, že toho cesta bolo tak veľa, ale to, že Kubo cesto rozdelil úplne nerovnomerne. Hanka to chcela napraviť. Rozhodla sa, že hladinu cesta v hrncoch bude vyrovnávať nasledovným spôsobom. Zobrala si vždy n hrncov a poprelievala medzi nimi cesto tak, aby vo všetkých n hrncoch bolo rovnako veľa cesta. Toto opakovala dovtedy, kým dosiahla vo všetkých 40 hrncoch rovnakú hladinu cesta. Kubo sa zamyslel, aké najmenšie môže byť takéto n, aby sa to Hanke podarilo bez ohľadu na počiatočné rozloženie palacinkového cesta v hrncoch. Zistite to aj vy.*

__Riešenie:__ (opravoval Myrec a HAgO)
S podobným príkladom sa najprv treba zoznámiť. Najlepšie je nájsť akékoľvek n, ktoré vyhovuje a následne hľadať menšie. Úplne triviálne je $n = 40$, týmto Hanka zarovná všetky naraz. Ale čo tak nejaké menšie? Ako sľubný kandidát znie $n = 20$. Hanka vie vytvoriť dve skupinky po 20 s rovnakým objemom, potom zobrať 10 z jednej a 10 z druhej skupiny a zarovnať tieto. Napokon zoberie zvyšné z jednej aj z druhej skupiny a aj tie zarovná. Takto dostane všade rovnako. Obdobným spôsobom (rozumej vydeľ všetky čísla v postupe dvomi) vie pre $n = 10$ dostať 20 hrncov s rovnakým objemom. Čiže vieme, síce trochu zložitejšie, pracovať, akoby n bolo 20. Hanka by to teda zvládla aj pre $n = 10$. Ide to aj pre menšie n? Nech robím, čo robím, s menším n to nijako neviem. A keďže už som fakt presvedčený, že to pre menšie nejde, tak to skúsim aj dokázať.
Predstavme si, že v jednom hrnci je cesto inej farby, jeho množstvo si označme a litrov. Budeme sledovať, koľko ho bude v jednotlivých hrncoch po niekoľkých preliatiach. Pod prelievaním si predstavujme také niečo, že do každého zo zúčastnených hrncov nalejem n-tinu z každého zo zúčastnených hrncov. Označme si množstvo cesta inej farby v zúčastnených hrncoch ako $h_1 a$, $h_2 a$, $\ldots$ $h_n a$. Po preliatí bude v každom z nich n-tina z každého.[1]

$$\frac{h_1 a}{n} + \frac{h_2 a}{n} + \cdots + \frac{h_n a}{n} = \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n} a$$

Všimnime si, že na začiatku sme mali v jednom hrnci $1 \cdot a$ a v ostatných $0 \cdot a$ litrov inej farby. Koeficienty pred a boli racionálne. Pri každom preliatí ich len sčítame a vydelíme n, čiže racionálnymi aj zostanú. Dosaďme teda za všetky $h_i = p_i / q_i$.

$$\frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n} a = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}}{n} a = \frac{\frac{bordel}{q_1 q_2 \ldots q_n}}{n} a = \frac{bordel}{q_1 q_2 \ldots q_n \cdot n} a$$

Na začiatku máme koeficienty $\frac{1}{1} a$ a $\frac{0}{1} a$. V menovateli je teda 1, čo je očividne mocnina n (na nultú). Do menovateľa sa pri prelievaní dostane súčin menovateľov zúčastnených hrncov vynásobený n. Ak boli predtým všetky menovatele mocninou n, budú aj potom. A keďže na začiatku boli, tak budú aj po každom ďalšom preliatí.[2] Teda na konci bude v nejakom hrnci $\frac{b}{n^k} \cdot a$ litrov inej farby.
Na dokázanie, že minimum je 10 je dobré si zobrať nejaké špeciálne rozloženie na začiatku. Skúmali sme, čo sa stane s cestom z jedného hrnca. Jeden by sa teda mohol od ostatných líšiť. Napríklad byť iracionálny. Oveľa krajšie a aj jednoduchšie však je dať do jedného 1 liter a ostatné nechať prázdne. Do každého sa teda musí dostať 40-tina toho jedného. Vo svete matiky($a = 1$):

$$\frac{b}{n^k} \cdot 1 = \frac{1}{40} \cdot 1$$

[1] aritmetický priemer
[2] obyčajná matematická indukcia

$$40b = n^k$$

Z toho máme $40|n^k$. Čo znamená, že v rozklade n na prvočísla musia byť prvočísla z rozkladu 40. Čiže 2 a 5. A najmenšie také číslo je $n = 10$. A to sme chceli dokázať.

Úloha č. 12: *V trojuholníku ABC sa vpísaná kružnica dotýka strán AB, BC, CA po rade v bodoch K, L, M. Dokážte, že priesečník výšok trojuholníka KLM, stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a stred opísanej kružnice trojuholníka ABC ležia na jednej priamke.*

Riešenie: (opravoval Hanka, Filip)

(Podľa Josefa Svobodu) Označíme si priesečník výšok ako H, stred vpísanej kružnice ako I, stred kružnice opísanej ako S. Stredy oblúkov AB, BC, CA, na ktorých neležia po rade body C, A, B si označíme S_c, S_a, S_b. V nasledujúcom texte ukážeme pravdivosť nasledujúceho tvrdenia:

Rovnoľahlosť, ktorá zobrazuje vpísanú kružnicu na opísanú kružnicu, zobrazuje (i)I na S a (ii)H na I. (Existujú dve také rovnoľahlosti.)

Ak toto tvrdenie platí, tak I,S aj H ležia na jednej priamke, a teda úloha je vyriešená. Časť (i) je zrejmá, lebo stred kružnice sa zobrazí na stred druhej kružnice. Zaoberajme sa preto už len časťou (ii). Najprv si uvedomíme, kam sa zobrazí trojuholník KLM. Dotyčnica opísanej kružnice rovnobežná s AB sa dotýka tejto kružnice v bode S_c. Preto sa bod K (ako bod dotyku dotyčnice AB s kružnicou vpísanou) zobrazí na S_c. Rovnako sa zobrazia body L na S_a a M na S_b. Takže obrazom trojuholníka KLM je trojuholník $S_cS_aS_b$.

Pretože rovnoľahlosť zachováva ortocentrum trojuholníkov, stačí ukázať, že ortocentrum trojuholníka $S_aS_bS_c$ je I. Pre stredy oblúkov S_i platí, že ležia na osiach uhlov trojuholníka ABC. Takže S_a,I,A ležia na spoločnej priamke (podobne pre B a C). Stačí nám teda dokázať, že

$$S_aI \perp S_bS_c \Leftrightarrow AI \perp S_bS_c$$

(podobne pre BI, CI). Pre dôkaz tejto ekvivalencie použijeme ďalšiu vlastnosť S_a.

$$\begin{array}{ccccc} |S_aB| & = & |S_aC| & = & |S_aI| \\ |S_bA| & = & |S_bC| & = & |S_bI| \\ |S_cA| & = & |S_cB| & = & |S_cI| \end{array}$$

Z toho vyplýva, že AS_bS_cI je deltoid (dve a dve strany sú rovnaké). O deltoidoch vieme, že jeho uhlopriečky sú na seba kolmé a preto $AI \perp S_bS_c$ a podobne platí $BI \perp S_aS_c$ a $CI \perp S_aS_b$.

Záver: Bod I sa zobrazí na bod S, bod H na bod I a úloha je vyriešená.

Úloha č. 13: *Prvočíslo p dáva zvyšok jedna po delení štyrmi. Zjednodušte výraz*

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{k^2}{p} \right\},$$

kde $\{x\}$ je desatinná časť x. Desatinná časť x je daná predpisom $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť x (najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie než x).

Riešenie: (opravoval Filip, Petržlen)

(*Podľa Le Anh Dunga*) Najprv si všimnime, že $(-k)^2 \equiv (p-k)^2 \equiv k^2 \ (mod\ p)$. Taktiež ak $x^2 \equiv y^2 \ (mod\ p)$, kde $1 \leq x, y \leq \frac{p-1}{2}$, tak $(x-y)(x+y) \equiv 0 \ (mod\ p)$. Ale $1 < x+y < p$, a preto $x = y$. Z týchto úvah vyplýva, že medzi číslami $1^2, 2^2, ..., (\frac{p-1}{2})^2$ sa nachádzajú všetky kvadratické zvyšky modulo p. Navyše vieme, že všetkých spomínaných $\frac{p-1}{2}$ čísel dáva $\frac{p-1}{2}$ rôznych zvyškov.

Teraz podľa Eulerovho kritéria (dalo sa to aj inak) pre $p \equiv 1 \ (mod\ 4)$ dostaneme $(\frac{-1}{p}) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, a hneď máme, že -1 je kvadratický zvyšok. Pretože $(\frac{-b}{p}) = (\frac{-1}{p})(\frac{b}{p})$, b je kvadratický zvyšok práve vtedy, keď $-b \equiv p - b \ (mod\ p)$. Preto množina $\{1^2, 2^2, ..., (\frac{p-1}{2})^2\}$ sa skladá z párov $\{a_1, p-a_1, a_2, p-a_2, ..., a_{\frac{p-1}{4}}, p - a_{\frac{p-1}{4}}\}$ modulo p.

Nakoniec keďže $1 < a_l, p - a_l < p$, tak $\{\frac{a_l}{p}\} + \{\frac{p-a_l}{p}\} = \frac{a_l+p-a_l}{p} = 1$ a hľadaný súčet je $\frac{p-1}{4}$.

Riešeniu je koniec. Bolo to stručné, krásne a jasné. Pre tých, ktorí mali problémy s niektorými časťami dôkazu, uvádzame pár drobností na vysvetlenie.

1. Kvadratický zvyšok: hovoríme, že n je kvadratický zvyšok modulo p práve vtedy, keď existuje také m, že $m^2 \equiv n \ (mod\ p)$.

2. Legendrov symbol: Def.: Legendrovým symbolom nazývame výraz $(\frac{a}{p})$ kde a je celé číslo a p je nepárne prvočíslo. Nadobúda hodnoty $0, 1, -1$ podľa toho, či a je násobkom p, alebo a je nenulový kvadratický zvyšok, alebo a nie je kvadratický zvyšok (resp. je kvadratický nezvyšok).

3. Eulerovo kritérium: $(\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}$. Dôkaz: ak $a \equiv 0 \ (mod\ p)$, potom zrejme $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0$, a naopak. Všimnime si, že pre $p \not| a$ dostávame $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p) \Rightarrow (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 \ (mod\ p) \Rightarrow (a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (mod\ p) \vee a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p))$.

Ak a je kvadratický zvyšok rôzny od nuly, potom existuje b také, že $b^2 \equiv a$, a teda $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$, podľa malej Fermatovej vety. Na dokončenie dôkazu treba ukázať, že ak $(\frac{a}{p}) \equiv 1 \ (mod\ p)$, potom a je kvadratický zvyšok (a je nenulové). Ale pre každé prvočíslo p platí (toto vôbec nie je triviálne, ale oplatí sa to vedieť), že existuje primitívny koreň b_p, že pre každý nenulový zvyšok q existuje i také, že $q \equiv b_p^i \ (mod\ p)$. Teda aj pre ľubovoľné a existuje j také, že $a \equiv {b_p}^j \ (mod\ p)$. Po dosadení dostávame $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv ({b_p}^j)^{\frac{p-1}{2}} \equiv {b_p}^{j \cdot \frac{p-1}{2}} \ (mod\ p)$. Odtiaľ vidíme, že j je párne a opäť z malej Fermatovej vety dostávame, čo sme chceli.

Úloha č. 14: *Kladné reálne čísla a, b, c, x, y, z spĺňajú vzťahy $cy + bz = a$, $az + cx = b$, $bx + ay = c$. Určte minimálnu hodnotu výrazu*

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1}.$$

Riešenie: (opravoval Filip, Petržlen)
Keďže obaja (inak jediní) úspešní borci Josef Svoboda a Le Anh Dung sa popasovali s touto úlohou podobne a to veľmi elegantne, uvádzame tu ich riešenia. Odporúčame každému, kto sa chce zlepšiť v riešení nerovností, nech si to skúsi urobiť sám, podľa nasledujúcich návodov, a keď to nepôjde, potom nakuknúť do vzoráku.
1. Vyjadriť x, y, z pomocou a, b, c. 2. Dosadiť do pôvodného výrazu, upraviť a odhadnúť pomocou CS-nerovnosti (Cauchy-Schwarzovej nerovnosti). 3. To čo dostaneme, odhadneme číslom $\frac{1}{2}$ pomocou Schurovej nerovnosti.
Toto bude zároveň naša osnova. Tak poďme na to. Prvé, čo musíme urobiť pri riešení nerovností s väzbou (áno, tak sa volajú tie podmienky v zadaní), je upriamiť svoj pohľad práve na ňu: správne ju pochopiť, uvedomiť si jej dopad na správanie sa premenných, ideálne upraviť do nejakého krajšieho ekvivalentného tvaru. Toto je ten prípad, kde to je očividné. Máme sústavu troch lineárnych rovníc s tromi kladnými reálnymi neznámymi x, y, z a tromi kladnými reálnymi parametrami a, b, c. Z tejto sústavy je triviálne vyjadriť

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Podľa zadania x, y, z sú kladné, a teda aj $b^2 + c^2 - a^2 > 0$.
Prvý krok sme zvládli. Keď to teraz dosadíme do zadaného výrazu, tak triviálnymi úpravami výrazov, kde používame iba štandardnú úpravu zlomkov postupne dostávame

$$\sum_{cyc} \frac{(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1} = \sum_{cyc} \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{2bc(b^2 + c^2 - a^2) + 4b^2c^2}.$$

Pri riešení mnohých nerovností sa dostaneme do stavov, kedy to s nami vyzerá už fakt zle, ako tu. A práve vtedy sa netreba vzdávať, ale začať s tým niečo robiť. Takýto výraz by sa ťažko odhadoval nejakou konštantou (čo nakoniec vlastne chceme), preto ho skúsme odhadnúť niečím iným. Všimnime si tvar našej nerovnosti. Nie je to nič iné, ako súčet troch zlomkov. Z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti máme (toto sa hodí často pri nerovnostiach so zlomkami) $(\frac{e}{k} + \frac{f}{l} + \frac{g}{m})(k + l + m) \geq (\sqrt{e} + \sqrt{f} + \sqrt{g})^2$, pre $e, f, g, k, l, m > 0$. Keďže my máme kladné čitatele aj menovatele, môžme to použiť a dostaneme

$$\sum_{cyc} \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{2bc(b^2 + c^2 - a^2) + 4b^2c^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{cyc} 2bc(b^2 + c^2 - a^2) + 4b^2c^2}.$$

Tým sa nám podarilo z troch zlomkov spraviť jeden. Najvyšší čas dostať sa ku koncu. Chceme zistiť minimum. Aké to bude? Najčastejšie sa stáva, že to je pri rovnosti všetkých premenných. Keď do pôvodného výrazu dosadíme $a = b = c = 1$, čomu prislúchajú $x = y = z = \frac{1}{2}$, dostaneme výsledok $\frac{1}{2}$, teda túto hodnotu výraz naozaj nadobúda. Skúsme teraz dokázať, že náš zlomok je vždy väčší rovný $\frac{1}{2}$ a budeme hotoví. Prenásobíme náš hnusný zlomok menovateľom a chceme dokázať, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{cyc} 2bc(b^2 + c^2 - a^2) + 4b^2c^2.$$

Roznásobíme a dostaneme

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - ab^3 - b^3c - bc^3 - c^3a - ca^3 + a^2bc + ab^2c + abc^2 \geq 0.$$

A tu úplne jasne vidno, že hoci nerovnosti často vyžadujú nejakú prax a úsilie na úpravu výrazov, najťažšia časť je vidieť za tým niečo viac. Napríklad, že posledná nerovnosť je špeciálny prípad Schurovej nerovnosti pre $k = 2$. (Schurovu nerovnosť nájdete na `http://en.wikipedia.org/wiki/Schur's_inequality`).
Nakoniec len toľko, že gama príklady a hlavne vzoráky si kladú za cieľ vás niečo naučiť. A čo si vziať z tohto príkladu? Rady do života:

1. Ak mám väzbu, zjednoduším ju, ak sa dá.
2. Ak odhadujem súčet zlomkov, tak môže pomôcť Cauchy-Schwarz.
3. Existuje niečo ako Schurova nerovnosť (a pozrite si aj jej veľmi poučný dôkaz).
4. Pri odpovedaní na otázku, prečo to dali Česi krajšie ako vzorák, sa môžete obzrieť po texte z českého seminára: `http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf` (Seriál o nerovnostiach).

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	k_β	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	0	0	9	9	9	9	9				45	45
1.	Hozza Ján	4.	GJH BA	8	7			9	9	9	9	9		45	45
1.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	5	4			9	9	9	9	9		45	45
4.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená	9	5			9	9	9	8	9		44	44
4.	Stehlík Matúš	4.	GAlej KE	6	0	9	8	9		9	9			44	44
6.	Horňák Marián	3.	GPár NR	7	5			7	9	9	9	9		43	43
7.	Lux Filip	4.	Žamberk ČR	4	0	9	6	9	9	6	9	6		42	42
7.	Šafin Jakub	2.	GPH MI	4	1	9	7	8	9	9	9	3		42	42
9.	Bílý Michael	4.	Klatovy ČR	4	2		9	8	9	9	3	6		41	41
9.	Koblížek Miroslav	4.	Žamberk ČR	4	2		8	8	9	7	9	6		41	41
9.	Tóth Michal	3.	GJH BA	7	2		9	8	9	9	3	6		41	41
12.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	3	0	9	9	6	9	7				40	40
12.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	3	1		9	8	6	9	8	6		40	40
12.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	2	1		9	8	9	9	5			40	40
12.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	3	2		9	8	8	9		6		40	40
16.	Kopf Michal	3.	Opava ČR	6	1		9	8	9	9	2	4		39	39
17.	Balog Matej	4.	Gamča BA	7	3			9	9	9	9	1		37	37
18.	Kozák Andrej	4.	Gamča BA	11	5			9	9	9	9			36	36
18.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	2	0	9	9	1	7	7	4	2		36	36
18.	Zavřel Lukáš	4.	GChod Praha	4	2		6	8	9	9	4	4		36	36
21.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	10	6			9	9	9	3	5		35	35
21.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA	5	2		6	8	8	9	4			35	35
21.	Szabados Viktor	4.	Gamča BA	11	5			8	8	8	5	6		35	35
24.	Hledík Michal	2.	GJH BA	4	0	9	9		9	7				34	34
24.	Karásková Natália	4.	GJH BA	12	11			9	9	9	4	3		34	34
24.	Kováč Ondrej	4.	GCM NR	10	5			8	7	9	6	4		34	34
24.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA	5	0	9		4	9	8		4		34	34
28.	Anderle Michal	4.	GBST LC	6	0	9	7	8	9					33	33
28.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	0	9	7	5	5	7				33	33
28.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA	7	3			8	9	8	3	5		33	33
28.	Petrucha Jaroslav	2.	GMet BA	4	0	7	6	8		9		3		33	33
32.	Cibulka Samuel	2.	GAV LV	3	0	9	7			8		8		32	32
32.	Hanzely Filip	2.	GAP SB	4	0	9	7		9	7		0		32	32
32.	Hlaváčik Matúš	2.	GAlej KE	4	0	9	5	9	9					32	32
32.	Žídek Augustin	3.	Frýdlant ČR	6	1		8	6	9	7		2		32	32
36.	Gonda Tomáš	2.	Gamča BA	3	0	9	7			7	4	4		31	31
36.	Langer Tomáš	3.	GJH BA	7	2		5	9	9	8				31	31
36.	Pellerová Daniela	2.	Gamča BA	5	1		5	8	9	7	2			31	31
36.	Surovčík Juraj	2.	GPOH DK	4	0	9	5	5	3	9				31	31
40.	Halajová Barbora	3.	GVO ZA	7	1		7	4	9	7	3			30	30
40.	Jasenčáková Katarína	3.	GVO ZA	8	2		7	4	9	8	2			30	30
40.	Smolík Michal	2.	Gamča BA	4	0	9	5	6		7	1	3		30	30
43.	Semanišinová Denisa	2.	GAlej KE	5	0	9	5		6	9				29	29
43.	Smolík Milan	2.	Gamča BA	4	0	8	4	8		7		2		29	29
45.	Sabatovičová Linda	4.	GJH BA	9	2		6	2	9	7		4		28	28
46.	Barančok Peter	4.	Gamča BA	6	1		4	6	7	7		3		27	27

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
46.	Strakáčová Jana	2.	Gamča BA	3	0	9	4	6	4	4				27	27
48.	Hlavatá Martina	4.	Gamča BA	10	3			6	9	6	2	3		26	26
48.	Klembarová Barbora	3.	GKuk PP	7	2		5	7	4	8	2	1		26	26
48.	Macko Vladimír	2.	GĽŠ ZV	4	0	6	4	6		7	3	3		26	26
48.	Marečáková Barbora	3.	GKuk PP	7	2		5	6	7	7		1		26	26
52.	Benešová Katarína	2.	GAS BB	4	0	9	5	4	0	7				25	25
52.	Koprda Pavol	3.	GAM TT	6	1		8	1	7	7		2		25	25
52.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	4	0	9	5			7	2	2		25	25
55.	Belanová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	7	2			6	8	7		3		24	24
55.	Guričan Pavol	4.	GJH BA	10	6			9	7	7	1			24	24
55.	Kupčulák Marián	2.	Gamča BA	3	0	9	7		7			1		24	24
58.	Faršang Štefan	4.	SJG KN	7	2			7	0	7	9			23	23
59.	Kubincová Petra	4.	ŠPMNDG BA	8	1		6		4	9	3			22	22
59.	Vlček Andrej	3.	EvSŠ LM	6	1		9	7	3		3			22	22
61.	Komanová Kristína	2.	GAS BB	4	1		5	4	1	7		3		20	20
61.	Santrová Adriana	3.	GMH Trstená	5	0	9	4	6	1					20	20
61.	Sládek Samuel	-1.	GAB NO	-1	0	6	6		8					20	20
64.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	4	0	4	4	4	0	7				19	19
65.	Švančara Patrik	3.	GĽŠ TN	5	0		7	3	8					18	18
66.	Hlásek Filip	4.	Plzeň ČR	5	3			8	9					17	17
67.	Nociarová Jela	2.	GBST LC	4	0	9	4		3					16	16
68.	Baxová Zuzana	3.	GĽŠ TN	7	2		5		7	3		0		15	15
68.	Mikuš Peter	1.	GJAR PO	1	0		4	4		7				15	15
68.	Páleník Jakub	2.	ŠPMNDG BA	3	0	3		3	0	6		3		15	15
71.	Bohiniková Alžbeta	4.	Gamča BA	8	1		4	2		7				13	13
72.	Tunová Anna	2.	GPár NR	4	0	9			1					10	10
73.	Matejovičová Tatiana	2.	Gamča BA	4	0	9								9	9
74.	Macháč Juraj	4.	GJH BA	6	0		4	4						8	8
75.	Bok Jan	4.	Litoměřice ČR	4	0					5				5	5
76.	Benej Martin	4.	GLS HE	4	0						2	0		2	2

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Kováčová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	8	6		9	9		6		38
2.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2		9	8	4	8	4			33
2.	Mojžišová Karolína	1.	Gamča BA	2		9	9	0	9	6			33
2.	Olerínyová Anna	2.	GVaz BA	2		9	8	6	6	4			33
5.	Klimkovič Anna-Mária	1.	ŠPMNDG BA	1	7	9	7	0	7				30
6.	Prívozník Matej	1.	GJH BA	1	7	3	9	4		4	3		27
7.	Iždinská Dominika	1.	GJH BA	1	6	9	9						24
7.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	3					9	9	6		24
7.	Kurdelová Alžbeta	2.	GLN BA	3		5	9	8		4	3		24
10.	Pieš Adrián	1.	ŠPMNDG BA	1	3	2	8			4	6		23
11.	Šandalová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	7	1	6	4			3		21
12.	Bednár Stanislav	1.	GJH BA	1	6	1	4	4		4			19
12.	Krajčovič Matej	2.	GJH BA	3			3	9	6		1		19
12.	Strakáčová Jana	2.	Gamča BA	3					9	4	6		19
15.	Gonda Tomáš	2.	Gamča BA	3					9	7			16
15.	Kupčulák Marián	2.	Gamča BA	3					9	7			16
17.	Žilková Alexandra	1.	ŠPMNDG BA	1	6		7						13

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
18.	Lipovský Mário	1.	GJH BA	1	9								9
19.	Ivanov Marián	2.	GJH BA	2			7						7
19.	Vršanský Martin	1.	1SG BA	1	1	4				2			7
21.	Hraška Peter	2.	Gamča BA	3					6				6
21.	Páleník Jakub	2.	ŠPMNDG BA	3					3		3		6

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Šimková Ľudmila	1.	GPár NR	2		9	9	9	9	7			43
2.	Lúčna Nina	2.	GPdC PN	2		9	7	9	9	4			38
3.	Korbela Michal	1.	G Bánovce	1	7	9	6	5	9	5	3		36
4.	Pokrývka Filip	1.	G Bánovce	1	9	8		5	9	4			35
5.	Balážová Michaela	1.	G Bánovce	1	9	9	9	1		3			31
6.	Franková Monika	1.	GKom PE	1	9	9	8	4					30
7.	Pavlíková Stela	1.	GĽŠ TN	1	6	9	5	4					24
8.	Kováčová Milada	2.	GCM NR	3			9	9		4	1		23
9.	Cibulka Samuel	2.	GAV LV	3					9	7			16

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Samuel	-1.	GAB NO	-1	8	9	9	9	6	6			41
2.	Hrivová Ivona	1.	GVO ZA	2		9	9	9	9	4			40
3.	Jankovichová Ľudmila	1.	GJGT BB	2		9	9	6	9	5	4		38
3.	Sučík Samuel	0.	ZŠ Čelovce	0	6	9	8	9	6				38
5.	Magyarová Zuzana	1.	GBST LC	1	8	9	9	5	4	4	4		35
5.	Psota Miroslav	1.	GHlin ZA	1	6	9	7	1	9	4	3		35
7.	Hromcová Zuzana	1.	GVO ZA	2	6	9	7	4	9	4	5		34
8.	Melo Jakub	1.	GsvFA ZA	1	7	9	9	1	6				32
9.	Ječmenová Andrea	1.	GVO ZA	2	7	9	9	4	0		2		24
10.	Hudec Lukáš	3.	GBST LC	3			7	8			4		19
11.	Doboszová Helena	1.	BG ZA	1	9		9						18
12.	Siviček Ján	2.	GBST LC	3		3	5	4	1	5			15
13.	Perešíni Martin	1.	SPŠJM BB	1	4	2	4	1	1				12
14.	Santer Martin	2.	GMH Trstená	3			7						7

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	2		9	9	9	9	9	9		45
2.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	0		9			9	9	9		36
3.	Bátoryová Jana	1.	GAlej KE	2		5	7	5	9	4			30
4.	Midlik Šimon	1.	GJAR PO	1	9	6		5		5	4		29
5.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2		9			9	4	4		26
6.	Hofierka Jaroslav	1.	GJAR PO	1	6	4	7	2	4	4			25
7.	Mikuš Peter	1.	GJAR PO	1	7	3		6		4	4		24
7.	Pivovarník Roman	1.	GJAR PO	1	8	9	7	0					24
9.	Dudič Ján	2.	GPoš KE	2	5	2	7	0	9	4			22
10.	Rapavý Martin	1.	GAlej KE	2	0	9	7	1	0	4			21
10.	Šromeková Karolína	1.	GDT PP	1	6	3	9	0		3			21
12.	Tokárová Natália	2.	GJAR PO	3			5		9	3	3		20

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
13.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	1	6	1	9	1		1			18
14.	Polovka Maroš	1.	GKuk PP	2		3			4	4	4		15
15.	Turlík Tomáš	2.	GJAR PO	2		3	5						8

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	2	6	2	9	9	9	9	1		38
2.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	3						9	8		17
2.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	2						9	8		17
2.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	3						9	8		17
5.	Anh Dung Le	1.	Tachov ČR	1									0
5.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2									0

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Anh Dung Le	1.	Tachov ČR			7	7	6		20
2.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	3	5		2	1		11
3.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR			7	7	7		21
4.	Šafin Jakub	2.	GPH MI	9	3	0				12