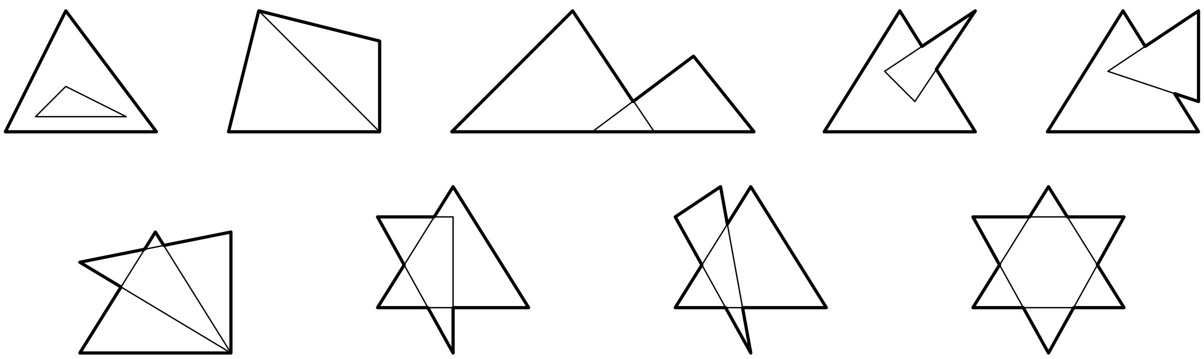
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2010/2011

Úloha č. 1: *Ondrík nakreslil do roviny dva červené trojuholníky. Tieto trojuholníky vytvorili spolu jeden červený n-uholník. Zistite všetky možné hodnoty n. Červené trojuholníky sa pritom môžu ľubovoľne prekrývať.*

Riešenie: (opravovala Ika)

Keďže v zadaní nie je napísané, aké trojuholníky Ondrík mal (pravouhlé, rovnoramenné atď.), môžeme považovať za vyhovujúci každý n–uholník, ktorý sa nám z nejakých dvoch trojuholníkov podarí poskladať. Teraz máme dve možnosti. Buď sa pre dané n takýto n–uholník zostrojiť dá alebo nedá. To, že sa dá, dokážeme najľahšie tak, že ho zostrojíme. Po kratšom alebo dlhšom skúšaní sa nám takto podarí vytvoriť n–uholníky pre $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12$.



Pre zvyšné n nám neostáva nič iné, než dokázať, že sa n–uholník zostrojiť nedá. Najľahšie to bude pre n menšie než 3. Je jasné, že ak by sme trojuholníky nakreslili akokoľvek, menej ako tri vrcholy výsledný útvar nikdy mať nebude (ani keby boli totožné – vtedy by boli vrcholy práve tri).

Teraz poďme zistiť, prečo sa nedajú zostrojiť n–uholníky pre n väčšie ako 12. Vrcholy hľadaného n–uholníka budú buď vrcholmi niektorého z pôvodných trojuholníkov (nazveme ich pôvodné vrcholy), alebo vzniknú ako priesečníky strán pôvodných trojuholníkov (tieto nazveme priesečníkové vrcholy) . Vrcholov pôvodných trojuholníkov je 6. Priesečníkov strán môže byť tiež najviac 6, lebo každá strana jedného trojuholníka pretne najviac dve strany druhého trojuholníka. Dokopy teda môžeme mať najviac $6 + 6 = 12$–uholník.

Nakoniec sa poďme pozrieť, prečo sa nedá vytvoriť jedenásťuholník. Tu len sú dve možnosti – buď z týchto jedenástich vrcholov je 6 vrcholov pôvodných a 5 vrcholov priesečníkových alebo naopak 5 vrcholov pôvodných a 6 vrcholov priesečníkových. Rozoberme si tieto dve možnosti:

- ak je 5 vrcholov pôvodných, znamená to, že ten šiesty nezarátaný vrchol niektorého trojuholníka musí ležať vnútri druhého trojuholníka alebo na jeho strane. Potom ale obe strany vychádzajúce z tohto vrchola pretnú každá najviac jednu stranu druhého trojuholníka. (Nakreslite si to.) Z toho ale dostaneme, že priesečníkové vrcholy tu môžu byť najviac 4 a nie šesť.

- ak je 6 pôvodných vrcholov a 5 priesečníkových vrcholov, začneme tak, že označíme jeden z pôvodných trojuholníkov ABC. Pozrime sa, ako sú na obvode ABC rozmiestnené priesečníkové vrcholy. Vieme, že na jednej strane môžu byť najviac 2 takéto vrcholy a spolu ich chceme mať päť. Teda rozmiestnenie na jednotlivých stranách musí byť: dva vrcholy na jednej, dva vrcholy na druhej a jeden vrchol na tretej strane. Nech sú po dva priesečníkové vrcholy na stranách AB a AC. To znamená že B aj C musia ležať mimo druhého trojuholníka (inak by nepreťal obe strany dvakrát). Ale keď ležia mimo, tak strana BC buď pretne obe strany druhého trojuholníka (a máme $6 + 6 = 12$, lebo každý taký priesečník je nový vrcholom), alebo nepretne žiadnu (a máme najviac $6 + 4$). Takže sa nám nikdy nepodarí získať päť priesečníkových vrcholov, čím je príklad vyriešený.

Úloha č. 2: *V trojuholníku TBC označme stred strany TB ako D a stred strany TC ako E. Priesečník osí uhlov BDE a CED označme F. Ukážte, že ak F leží na úsečke BC, tak platí $2|BC| = |TC| + |TB|$.*

Riešenie: (opravovala Aďa)

Po nakreslení obrázku a chvíli pozerania naň si všimneme, že ED je stredná priečka v trojuholníku TBC. Z toho vyplýva, že $ED \parallel BC$. Ďalej, ak F leží na CB, uhly EDF a DFB sú striedavé, teda majú rovnakú veľkosť. Preto aj $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle EFC|$.

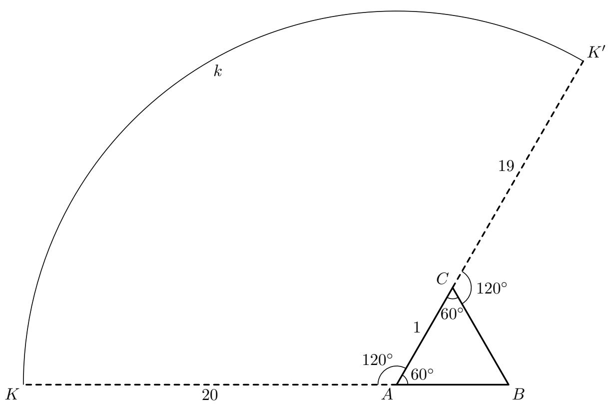
Ešte vieme, že DF je os uhla BDE, teda uhly EDF a BDF sú zhodné. Pozrime sa bližšie na trojuholník BDF: keďže uhly BDF a DFB sú zhodné, potom je tento trojuholník rovnoramenný so základňou DF. V tomto rovnoramennom trojuholníku ramená musia byť zhodné, teda $|DB| = |BF|$. Rovnako môžeme ukázať rovnosť $|EC| = |CF|$. (Premyslite si.)

Zo zadania ešte vieme, že $|EC| = |CT|/2$, ako aj $|DB| = |BT|/2$. Teraz už vieme všetko na to, aby sme mohli odvodiť rovnosť požadovanú v zadaní:

$$|BC| = |CF| + |BF| = |EC| + |DB| = \frac{1}{2}|CT| + \frac{1}{2}|BT| \Rightarrow 2|BC| = |TC| + |TB|.$$

Úloha č. 3: *Psia búda má pôdorys tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou 1 meter. Jej rohové body sú označené A, B a C tak, ako je nakreslené na obrázku. V bode A je prichytená reťaz, na ktorej konci K je pes. Reťaz je dlhá 20 m a je úplne napnutá. Navyše body K, A a B ležia na jednej priamke. Pes začne bežať v smere hodinových ručičiek, pričom beží tak, že je reťaz stále napnutá. Určte vzdialenosť, ktorú takto prejde, kým sa celá reťaz neomotá okolo búdy.*

Riešenie: (opravovala Hanka a Marek)



Ak má byť reťaz stále napnutá, pes nemá inú možnosť, než začať bežať po kružnici k so stredom v bode A a polomerom dĺžky reťaze, teda 20 m. Kým je pes v polrovine opačnej k polrovine určenej priamkou AC a bodom B, reťazi nič nebráni v pohybe. V momente, keď dobehne na polpriamku $\overrightarrow{AC}$ sa časť reťaze oprie o stranu AC (stenu búdy), a už tam zostane nehybne. Zatiaľ pes prešiel nejakú časť kružnice k, o ktorej vieme, že má celkovú dĺžku $2\pi \cdot 20$ m. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, $|\sphericalangle BAC| = 60°$, a preto $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle KAB| - |\sphericalangle CAB| = 180° - 60° = 120°$. Pes prešiel teda $120°/360° = 1/3$ dĺžky spomínanej kružnice, čo je $(2\pi/3) \cdot 20$ m.

Teraz je situácia podobná ako na začiatku, len otočená o 120°. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, tak sa okrem dĺžky reťaze nič nezmenilo a tú istú úvahu môžeme zopakovať, len s reťazou o 1 m kratšou, lebo $|AC| = 1$ m. (Premyslite si to.)

Opakovaním rovnakého postupu, až kým sa reťaz nenamotá úplne celá, dospejeme k výsledku

$$20\frac{2\pi}{3} + 19\frac{2\pi}{3} + \cdots + 1\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}(20 + 19 + \cdots + 1).$$

Pre súčet prvých n prirodzených čísel platí $1+2+...+n = n(n+1)/2$ (Dokážte si to. Pomôcka: $1+n = 2+(n-1) = 3 + (n-2) = \cdots = (n-2) + 3 = (n-1) + 2 = n + 1$.), preto

$$\frac{2\pi}{3}(20 + 19 + \cdots + 1) = \frac{2\pi}{3}\frac{20 \cdot 21}{2} = 140\pi (\doteq 439,82).$$

Pes teda zabehne 140π metrov.

Úloha č. 4: *V obdĺžniku $ABCD$ má strana AB veľkosť $2r$ a strana BC veľkosť r. Nad stranou AB zostrojíme kružnicu k tak, že AB je jej priemerom. Priesečník uhlopriečky BD a kružnice k označme X. Vypočítajte pomer $|BD| : |BX|$.*

Riešenie: (opravoval Beren)

Najpriamočiarejší spôsob ako zrátať daný pomer, je vyčísliť veľkosti obidvoch úsečiek a navzájom ich vydeliť. Poďme to teda skúsiť. Ako prvú vec by bolo dobré si všimnúť, že bod X leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, čiže AXB je pravý. Dĺžku úsečky BD je celkom ľahké vyrátať z Pytagorovej vety:

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2} = \sqrt{5}r.$$

Vieme vyrátať aj dĺžku $|BX|$? Označíme si veľkosť uhla ABX ako α. Potom, ak poznáme goniometrické funkcie, tak vieme, že platí $|BX| = |AB| \cos\alpha$. Čiže nám už stačí len vypočítať uhol α. Z definície funkcie tangens vieme,

že tg α je daný ako $|AD|/|AB|$, čiže je rovný 1/2. Z toho by sme už mohli dorátať uhol α, ale potrebovali by sme na to buď kalkulačku alebo podstatne ťažšiu matiku. V takomto prípade však väčšinou existuje aj nejaké krajšie a jednoduchšie riešenie, takže nezúfajme.
Trojuholníky ABX aj ABD sú oba pravouhlé. Zároveň $\sphericalangle ABX$ a $\sphericalangle ABD$ je ten istý uhol, predtým sme si ho označovali α. Trojuholníky ABD a ABX majú potom 2 rovnaké uhly, sú teda podobné podľa vety *uu*. Presnejšie, aby sedeli prislúchajúce vrcholy, trojuholník ABD je podobný trojuholníku XBA. Poriadne sa pozrieme, ktoré strany prislúchajú ktorým a zistíme, že musí platiť rovnosť

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BX|}. \tag{1}$$

Dĺžky $|BD|$ a $|AB|$ poznáme, $|BX|$ nepoznáme. Skúsime si teda vyjadriť z rovnosti (1) veľkosť $|BX|$ len pomocou $|BD|$ a $|AB|$ a následne dať do pomeru $|BD|$ a $|BX|$. Dostaneme, že

$$\frac{|BD|}{|BX|} = \frac{|BD|^2}{|AB|^2}.$$

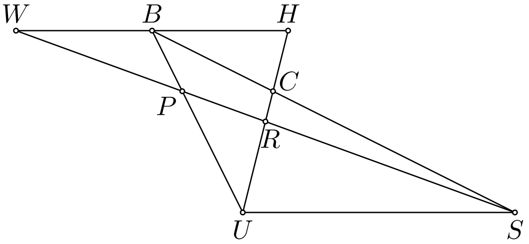
Keďže vieme, že $|BD| = \sqrt{5}r$ a $|AB| = 2r$, dostávame dlho očakávaný výsledok

$$\frac{|BD|}{|BX|} = \frac{(\sqrt{5}r)^2}{(2r)^2} = \frac{5}{4}.$$

Heuréka.

Úloha č. 5: *V trojuholníku USB zvolíme na strane UB bod P a na strane SB bod C tak, že $2|BP| = |PU|$ a $2|BC| = |CS|$. Na polpriamke UC leží za bodom C bod H, pre ktorý platí $2|HC| = |CU|$. Podobne na polpriamke SP leží za bodom P bod W, pre ktorý platí $2|WP| = |PS|$. Dokážte, že $USHW$ je rovnobežník.*

Riešenie: (opravovala Katka J.)
Pozrime sa na obrázok, ktorý vychádza zo zadania (obr. 1, R je priesečník SW a UH):



Čo by muselo platiť, aby bol $USHW$ rovnobežník? Napríklad nám stačí dokázať, že $|UR| = |RH|$ a zároveň $|SR| = |RW|$ – teda, že uhlopriečky nášho štvoruholníka sa rozpoľujú. (Skúste si dokázať: ak sa uhlopriečky štvoruholníka rozpoľujú, tak štvoruholník je rovnobežník.)
Poďme sa pozrieť, čo vieme o úsečkách SW a UH. Môžeme si všimnúť napríklad zaujímavý trojuholník PCB. Keďže $|UB| = 3|PB|$ a $|SB| = 3|CB|$, podľa vety *sus* sú trojuholníky PCB a USB podobné s koeficientom podobnosti 3. Z toho vyplýva, že $|US| = 3|PC|$ a zároveň, že $PC \parallel US$.
Čo ďalej? Niečo o tom, kde leží bod R, nám napovedia trojuholníky PCR a SUR. Keďže $PC \parallel US$, z vety *uu* vyplýva, že trojuholníky PCR a SUR sú podobné. Platí $|US| = 3|PC|$, koeficient podobnosti je znova 3. Potom platí aj $|RS| = 3|PR|$ a $|RU| = 3|CR|$.
Teraz naše zistenia už len stačí dať dokopy s faktami zo zadania. Vieme, že $|PS| = 2|WP|$ a $|UC| = 2|HC|$. Platí, že $|PS| = |PR| + |RS| = 4|PR|$. Potom

$$|WR| = |WP| + |PR| = \frac{1}{2}|PS| + |PR| = \frac{1}{2}4|PR| + |PR| = 3|PR|.$$

A je hotovo, lebo rovnako aj $|RS| = 3|PR|$, takže $|WR| = |RS|$. Tak isto by sme ukázali (a teda analogicky platí), že $|UR| = |HR|$. Dokázali sme, že $|WR| = |RS|$ a $|HR| = |RU|$. Uhlopriečky štvoruholníka $WUSH$ sa teda rozpoľujú, čím sme dokázali, že ide o rovnobežník.

Komentár: Vo Vašich riešeniach sa často stáva, že do obrázka zakreslíte body, s ktorými potom rátate, ale v texte nevysvetlíte, co zač tieto body vlastne sú (pozri náš popis k bodu R). Z toho potom vznikajú kadejaké nedorozumenia, ktoré sa môžu skončiť udelením nedostatočného počtu bodov. Okrem toho by ste v riešení nemali zabúdať ani na diskusiu – napríklad o tom, či bod R, s ktorým sme rátali, vždy leží vnútri trojuholníka USB. V našom prípade to platí vždy a naše riešenie tak môžeme prehlásiť za úplné.

Úloha č. 6: *Daná je kružnica k, do ktorej je vpísaný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Kružnica ℓ obsahuje body A a B a pretína stranu BC v bode P, ktorý je rôzny od bodu B. Dotyčnica ku kružnici ℓ v bode B pretne kružnicu k v bode Q, ktorý je rôzny od bodu B. Dokážte, že P leží na úsečke AQ práve vtedy, keď je úsečka AQ kolmá na priamku BC.*

Riešenie: (opravovala Kika)
Ako si väčšina z Vás správne všimla, cieľom úlohy bolo dokázať ekvivalenciu, čo znamená dokázať dve implikácie:

$$(AQ \perp BC) \Rightarrow (P \in AQ)$$

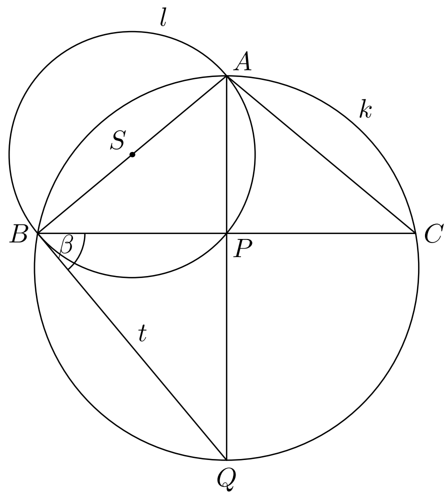
a

$$(P \in AQ) \Rightarrow (AQ \perp BC).$$

Dôkaz prvej z nich je o niečo ľahší, preto ním začneme.
Vychádzame z tvrdenia, že $AQ \perp BC$. Čo to znamená pre priamku AQ? Trojuholník ABC je rovnoramenný, priamka AQ je kolmá na jeho základňu a prechádza hlavným vrcholom. To znamená, že AQ je osou uhla BAC a leží na nej stred kružnice k. Čiže k je Tálesovou kružnicou nad AQ a smelo môžeme napísať $|\sphericalangle ABQ| = 90$.
Výborne, čo ďalej? Zistili sme niečo o uhle pri vrchole B. Je v zadaní niečo o vrchole B, čo by nám pomohlo? Bodom B prechádza dotyčnica ku kružnici l. Taká dotyčnica musí byť kolmá na priemer kružnice l obsahujúci bod B. No ale AB je kolmé na BQ, navyše $A \in l$, takže AB je priemerom l. Ďalej, l je Tálesovou kružnicou nad AB, preto $|\sphericalangle APB| = 90$. Alebo inak: $AP \perp BC$. Vychádzali sme z tvrdenia $AQ \perp BC$. Ak ich spojíme, dostaneme to, čo bolo treba dokázať: $P \in AQ$.

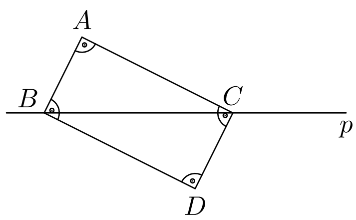
Poďme teraz dokázať druhú implikáciu. Ukážeme si dva rôzne prístupy.
1. (podľa *Matúša Stehlíka*)
Priamy dôkaz, dokazujeme $(P \in AQ) \Rightarrow (AQ \perp BC)$
Na úvod si povieme niečo o úsekových uhloch. Majme kružnicu l, v ktorej je tetiva BP. Urobme dotyčnicu t ku kružnici l v bode B. Menší uhol medzi úsečkou BP a t označme β. Tento uhol sa volá úsekový. V tej polrovine určenej priamkou BP, v ktorej neleží uhol β, vyznačme hocikde na kružnici l bod A. Uhol BAP je obvodový. (Podobnosť značenia bodov so značením v príklade nie je náhodná.) Vlastnosť, ktorú v dôkaze využijeme, je, že obvodový a úsekový uhol majú rovnakú veľkosť. Za domácu úlohu si môžete dokázať, že to skutočne platí.
Poďme na samotný dôkaz. Zo zadania platí $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAQ|$. Platí tiež $|\sphericalangle CBQ| = |\sphericalangle CAQ|$, lebo tieto uhly sú obvodové nad tetivou CQ. Ďalej $\sphericalangle CBQ$ je úsekový k obvodovému $\sphericalangle BAP$, teda sú rovnaké, a aj $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle BAP|$. Priamka AP je potom osou uhla CAB. Keďže trojuholník ABC je rovnoramenný, tak platí $AP \perp BC$. Teda ak $P \in AQ$, potom $AQ \perp BC$. Hotovo.

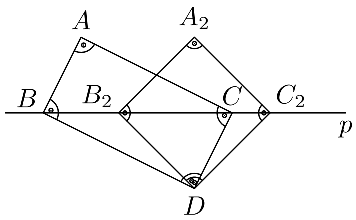
2. (podľa *Eda Batmendijna*)
Nepriamy dôkaz, dokazujeme $(|\sphericalangle AQ, BC| \neq 90) \Rightarrow (P \notin AQ)$.
Sledujúc obrázok, posuňme bod Q po kružnici k doprava, bližšie k bodu C. Týmto sa aj priesečník $AQ \cap BC$ posunie doprava a $\sphericalangle QBA$ sa zmenší. Pre stred kružnice l (označený S) naďalej musí platiť $|\sphericalangle QBS| = 90$. Preto už S neleží na AB, ale na osi AB a mimo trojuholníka ABC, teda podľa obrázka vyššie a vľavo oproti pôvodnej polohe. Kružnica l je opísaná trojuholníku ABP, preto S leží na osi BP. Ak sa S posunie doľava, aj os BP sa posunie doľava a bod P tiež.
Pred posunutím bol $P \in AQ \cap BC$, po posunutí sa bod P posunul vzhľadom na bod $AQ \cap BC$ preč po priamke BC. Jediný bod, ktorý leží na BC (čo je podmienka pre P) a zároveň na AQ (čo by sme radi dokázali alebo vyvrátili), je ich priesečník. A keďže P už neleží v tomto priesečníku, nemôže ležať ani na AQ. Na domácu úlohu si premyslite, ako by to bolo, keby sme bod P posúvali opačným smerom, teda bližšie k bodu B.

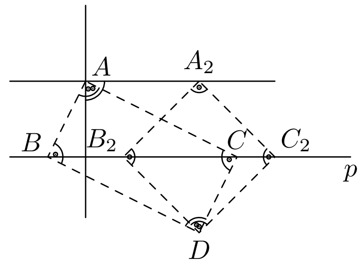


<u>**Úloha č. 7:**</u> *Máme pravítko bez mierky, ktoré nám umožňuje viesť dvomi danými bodmi priamku a spraviť kolmicu na danú priamku v jej danom bode. Zistite, či vieme týmto nástrojom zostrojiť kolmicu na danú priamku z daného bodu ležiaceho mimo tejto priamky.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval JeFo)
(Podľa *Andreja Kozáka*.) „Kľúčom k úspechu je nájdenie rovnobežky s danou priamkou prechádzajúcej daným bodom (*).
footnoteKolmica na rovnobežnú priamku v danom bode by bola kolmá aj na danú priamku. Vieme urobiť rovnobežky?"
„No jasné! Stačí spraviť dve kolmice."
Niekto sa však hneď ozýva, že takto vieme spraviť rovnobežku len v určitej vzdialenosti.
Pýtajú sa ho: „Máte lepší nápad?"
„Mám," odpovedá. „Napoviem Vám. Načo kolmica?"
Zamyslia sa. „A fakt. Stačí obdĺžnik."
Menej chápaví sa tvária udivene.
„Tak sa pozerajte," chytí sa slova nižší plešatý pán. „Spravme si ľubovoľnú priamku prechádzajúcu daným bodom (*). V danom bode na ňu vieme spraviť rovno aj kolmicu. A hľa – čo máme? Pravdaže, pravouhlý trojuholník (*). A čím je pravouhlý trojuholník? Polovicou obdĺžnika. A čo znamená polovicou? Že keď ho dokreslíme do obdĺžnika, protiľahlé body budú mať od danej priamky (jeho uhlopriečky) rovnakú vzdialenosť. Vieme ho dokresliť? Vieme, veď má samé pravé uhly. Nuž, učiňme tak.





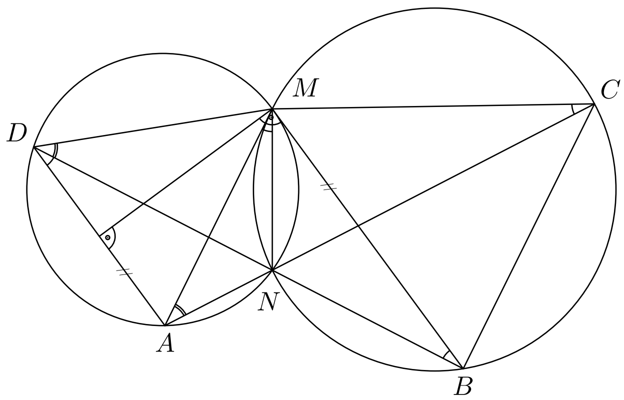


Máme jeho tri body A, B, C a uhlopriečku p. Mimochodom, hľadáme kolmicu na p prechádzajúcu bodom A. Ale vráťme sa k problému. Keď spravíme v bodoch B, resp. C kolmice na priamky AB, resp. AC, ich prienikom dostaneme bod D, štvrtý do kvarteta, posledný do obdĺžnika. Bod D je rovnako vzdialený od op p ako bod A, tak už to v obdĺžnikoch chodí (*). No a teraz vieme nájsť nejaký bod A_2, ktorý je rovnako ďaleko od p ako bod D, a teda aj ako bod A.
Stačí si vybrať nejaký iný obdĺžnik, tzn. zvoliť si iné navzájom kolmé priamky ako DB a DC, ktoré prechádzajú bodom D. Rovnakým postupom dostaneme A_2, v rovnakej polrovine určenej priamkou p ako je bod A. Platí $|A_2p| = |Ap|$ a $A_2A||p$. Našli sme rovnobežku s danou priamkou prechádzajúcu daným bodom. Môžeme urobiť kolmicu (*). Vyhrali sme!“ Muž si sadol. Sálou sa ozval potlesk a pokriky - „deväť, deväť, deväť, …!“

Komentár: Miesta označené (*) nedotiahol autor úplne do konca, tak si ich treba dobre premyslieť. Pri prvej hviezdičke som Vám trochu pomohol. Ešte jedno upozornenie. Takto nemá vyzerať správne riešenie, keby sa tento príklad vyskytol v MO. My v KMS však niekedy oceníme aj správne, aj keď v detailoch nedotiahnuté, vtipné riešenie. Mimochodom, nižší plešatý pán to má za deväť.

Úloha č. 8: *Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré sa pretínajú v dvoch bodoch M a N. Dotyčnica v bode M ku kružnici k_2 pretína kružnicu k_1 v bode A. Dotyčnica v bode M ku kružnici k_1 pretína kružnicu k_2 v bode B. Priesečník priamky AN a kružnice k_2 rôzny od bodu N označme C a priesečník priamky BN a kružnice k_1 rôzny od bodu N označme D. Dokážte, že dĺžky úsečiek AC a BD sú rovnaké.*

Riešenie: (opravoval Myrec)



Najprv sa pozrieme, čo obrázku zo zadania chýba. Áno, čiary AD, BC, MD a MC.
V kružniciach si môžeme všimnúť tetivové štvoruholníky $ADMN$ a $BCMN$. V nich platí, že $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle NDM|$ a $|\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle NCM|$ (vyplýva to z vlastností obvodových uhlov). Takže trojuholníky MAC a MDB sú podobné.
Teraz potrebujeme dokázať, že sú nielen podobné, ale zhodné. Čiže chceme dokázať, že $|AM| = |DM|$ alebo $|BM| = |CM|$.
Nevyužili sme ešte, že AM je dotyčnica ku kružnici k_2. Preto $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle NBM|$. (Tento uhol sa volá úsekový a mohli by ste si to skúsiť dokázať sami.) Teraz vidíme, že $AD \parallel MB$, lebo $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle ADN|$ (obvodové uhly), teda AD a MB zvierajú s DB rovnaký uhol.
Záverom: MB je dotyčnica, teda je kolmá na MS_1 (S_1 je stred k_1), a potom aj AD je kolmá na MS_1. Z toho vidíme, že platí $AM = DM$, pretože trojuholník AMD je osovo súmerný podľa priamky MS_1. Pekný deň.

Úloha č. 9: *V trojuholníku ABC sú P a Q také body na strane AB (bod P je medzi A a Q), že $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle QCB|$. Označme AD os uhla BAC, pričom bod D leží na strane BC. Táto os pretína úsečky CP a CQ postupne v bodoch M a N. Navyše platí, že $|PN| = |CD|$ a $3|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle BCA|$. Dokážte, že trojuholníky CQD a QNB majú rovnaký obsah.*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Prvé, čo by nám malo udrieť do očí je, že $3|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle BCA|$, pričom $|\sphericalangle BAC|$ je rozdelený na 2 rovnaké časti a $|\sphericalangle BCA|$ je rozdelený na 3 rovnaké časti. Teda všetky tieto časti musia byť rovnaké.

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle QCB| = \alpha$$

Zo zadania ešte vieme $|CD| = |PN| = a$.
Nakoľko dva rovnaké uhly nad tou istou úsečkou znamenajú tetivový štvoruholník, tak by nás všetky tie zhodné uhly mohli nabádať k hľadaniu takýchto zjavov. Napríklad $\sphericalangle PAN$ a $\sphericalangle PCN$ sú rovnaké uhly nad tetivou PN, takže štvoruholník $APNC$ je tetivový. Z vety o obvodovom uhle nad tetivou AP vyplýva $|\sphericalangle ANP| = |\sphericalangle ACP| = \alpha$. A z vety o obvodovom uhle nad tetivou CN zasa dostávame $|\sphericalangle NPC| = |\sphericalangle NAC| = \alpha$.
Ďalší tetivový štvoruholník dostaneme, keď si všimneme $\sphericalangle QAD$ a $\sphericalangle QCD$ nad tetivou QD, a to štvoruholník $AQDC$. Z vety o obvodovom uhle nad tetivou CD máme $|\sphericalangle DQC| = |\sphericalangle DAC| = \alpha$.

Teraz si všimnime trojuholníky CQD, PCN a NAP. Majú dva zhodné uhly (oba α) a jednu stranu(a), čo znamená, že sú zhodné. Z ich zhodnosti dostávame dve dôležité veci:

1. $|PC| = |CQ|$. Trojuholník PCQ je potom rovnoramenný a uhly CPQ a PQC sú zhodné. Takže aj ich doplnky do priameho uhla budú zhodné, čiže $|\sphericalangle CPA| = |\sphericalangle CQB|$. Ešte vieme, že $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle BCQ|$. Trojuholníky APC a BQC majú zhodnú stranu a dva uhly, čo znamená, že sú zhodné. Z toho nám vyplýva $|AP| = |BQ|$.

2. CQD a NAP majú zhodný obsah (lebo sú zhodné). Potrebujeme ešte ukázať, že obsahy trojuholníkov NAP a QNB sú rovnaké. Výška v týchto trojuholníkoch na strany AP resp. BQ je očividne rovnaká. A nakoľko sa rovnajú aj tieto strany, obsahy budú tiež rovnaké.

A dôkaz máme hotový.
Poznámka: To, že $|AP| = |BQ|$ sa dalo ukázať aj pomocou rovností $|AP| = |PN| = |NC| = |CD| = |DQ| = |BQ|$ využívajúc množstvo rovnoramenných trojuholníkov, ktoré nám zadanie poskytuje. Na pripomenutie, dôkaz rovnosti obvodových uhlov využíva práve rovnoramenné trojuholníky, takže je to istým spôsobom podobné riešenie.

Úloha č. 10: *Máme trojuholník ABC a jeho vnútorný bod P spĺňajúci $|\sphericalangle BPC| = 90°$ a $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP|$. Označme M a N v tomto poradí stredy strán AC a BC. Predpokladajme, že $|BP| = 2|PM|$. Ukážte, že body A, P a N ležia v tejto situácii na jednej priamke.*

Riešenie: (opravoval Kubo, Edo)
Prvým krokom pri riešení geometrickej úlohy je obvykle urobiť si náčrt. Niektorí z Vás sa pokúsili situáciu aj narysovať, tu však narazili na problém. Bod P spĺňajúci podmienky zo zadania totiž vo všeobecnosti nemusí vôbec existovať – dá sa nájsť len v niektorých špeciálnych trojuholníkoch. (Príkladom je trojuholník so stranami $|AB| = 6$, $|BC| = 8$ a $|AC| = \sqrt{46}$. Bod P je umiestnený v tomto trojuholníku tak, že $|AP| = 1$ a $|CP| = 6$.) Z toho však ešte nijako nevyplýva, že by zadanie úlohy bolo sporné, alebo že by tvrdenie, ktoré chceme dokázať, neplatilo. V zadaní sa totiž píše, že máme už vopred daný trojuholník aj s bodom P tak, že sú splnené všetky prepoklady – nesnažíme sa bod P zostrojiť ani nepotrebujeme zisťovať, pre ktoré trojuholníky taký bod existuje.
Keď sme si toto ujasnili, môžeme sa pustiť do samotného riešenia. Na začiatok je dobré si úlohu čo najviac zjednodušiť. Všimnime si napríklad, že bod N dosť málo súvisí so zvyškom obrázku a vieme sa ho ľahko zbaviť. Je pre nás vlastne zaujímavý len z jediného dôvodu – potrebujeme dokázať, že leží na priamke AP. To je ekvivalentné tvrdeniu, že uhol APN je priamy. Označme si gréckym písmenom α veľkosti uhlov $|\sphericalangle BAP|$ a $|\sphericalangle BCP|$, ktoré sú podľa zadania rovnaké. Z pravouhlého trojuholníka CPB vieme, že aj $|\sphericalangle CPN| = \alpha$, teda dokazované tvrdenie je ekvivalentné tomu, či $|\sphericalangle APC| = 180° - \alpha$. Ďalej už v dôkaze bod N nebudeme vôbec potrebovať.
Pokračovať môžeme dvoma spôsobmi. V prvom z nich sa zameriame na zadané vlastnosti uhlov. Mohli by sme sa pokúsiť postupne vyjadrovať veľkosti všetkých uhlov na obrázku, ďaleko sa však nedostaneme. Poloha uhlov BAP a BCP by nám však mala pripomenúť vetu o obvodovom uhle. Úlohu tetivy tu hrá úsečka BP. Jediný problém je v tom, že body A a C sa nachádzajú v opačných polrovinách vzhľadom na priamku BP. Preto skúsime bod C zobraziť v osovej súmernosti podľa BP na bod C'. V tom, že to je dobré rozhodnutie, by nás mal podporiť fakt, že podľa zadania je pätou kolmice z bodu C na priamku BP akoby náhodou práve bod P. Novovzniknutý bod C' tým pádom nebude len nejakým náhodným obrazom nejakého iného náhodného bodu podľa náhodne zvolenej priamky, ale bude mať aj ďalšie dobré vlastnosti – leží spolu s bodmi P a C na tej istej priamke a je rovnako vzdialený od bodu P ako bod C. Teraz už môžeme použiť vetu o obvodovom uhle. Podľa nej ležia body B, P, A a C' na jednej kružnici, pretože tetive BP náleží v bode A aj v bode C' ten istý obvodový uhol α. Teraz sa nám zídu dobré vlastnosti bodu C'. Všimnime si, že úsečka PM je strednou priečkou v trojuholníku $AC'C$. Preto $|AC'| = 2|PM| = |BP|$, teda tetivový štvoruholník $AC'BP$ je navyše aj rovnoramenným lichobežníkom. Vďaka jeho osovej súmernosti vieme, že $|\sphericalangle APC'| = |\sphericalangle PAB| = \alpha$, z čoho už vieme vypočítať $|\sphericalangle APC| = 180° - |\sphericalangle APC'| = 180° - \alpha$, čo sme chceli dokázať.
Druhým z možných postupov je zamyslieť sa nad tým, prečo máme zadanú takú zvláštnu podmienku $|BP| = 2|PM|$. Ak nám nenapadne hľadať stredné priečky trojuholníka, môžeme skúsiť úsečku PM predĺžiť na dvojnásobne dlhú úsečku PM'. Dostaneme tým rovnobežník $APCM'$, o ktorom sa dá dokázať, že je tvorený dvoma zhodnými trojuholníkmi APM' a $CM'P$, ktoré sú navyše zhodné aj s trojuholníkom APB. (Toto je len náznak riešenia, premyslite si, prečo platí). Dopočítať veľkosť uhla $\sphericalangle APC$ je už jednoduché.

Úloha č. 11: *V trojuholníku BUS sú body K a L postupne stredmi strán US a BS. Bod P leží vnútri trojuholníka BUS tak, že uhly UBP, PSB a KBS majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že uhly PLB a BKU majú rovnakú veľkosť.*

Riešenie: (opravoval Foto)
Inkriminovaná veľkosť oných troch uhlov označená budiž φ. Uhol KBU a uhol SBP sú oba doplnkom uhla φ do uhla SBU, preto našou úlohou je dokázať, že trojuholníky BUK a BPL sú podobné. O trojuholníku BPL toho veľa nevieme, ale núka sa nám iné pozorovanie. Úsečka LP je ťažnicou trojuholníka BPS, ktorého uhly poznáme. Úsečka UK bude potom zodpovedajúcou ťažnicou v zodpovedajúcom trojuholníku BUB', kde B' bude obrazom bodu B cez stred súmernosti K. Záverom otázka na pery a na pero sa pýta: Nie je náhodou zodpovedajúci trojuholník BUB' podobný s trojuholníkom BPS? Odpoveď nechávame už na úsudok ctenému čitateľovi.

Úloha č. 12: *Definujme vzdialenosť dvoch kruhov v rovine ako reálne číslo, ktoré vznikne odčítaním polomerov oboch kruhov od vzdialenosti ich stredov. V rovine je daných n bodov, pričom $n \geq 1$. Dokážte, že vždy vieme nájsť konečne veľa kruhov, ktoré pokryjú všetkých n bodov, navyše je súčet ich priemerov menší než n a vzdialenosť ľubovoľných dvoch z nich je väčšia než 1.*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Krátka poznámka na začiatok: kružnica je len obvod, kruh je aj s výplňou.
Označme ľubovolnú množinu n bodov a k kruhov ako (n, k)–pokrytie, keď majú túto vlastnosť: k kruhov pokryje n bodov a súčet priemerov týchk k kruhov je menej ako $n - k + 1$. Konkrétnejšie, nech "kompletné (n, k)–pokrytie" je také, že každé dva kruhy z pokrytia sú vzdialené viac ako 1 (vzdialenosť podľa zadania).
Teraz algoritmickou konštrukciou ukážeme, že pre ľubovolných n bodov existuje kompletné (n, k)–pokrytie.
Krok 1: Každý z n bodov pokryjeme kruhom s priemerom menším ako $1/n$. Týchto n kruhov vytvára (n, n)–pokrytie, keďže súčet priemerov je menší ako 1.
Procedúra 1: Ak existujú v pokrytí C_1 dva kruhy k_1, k_2, ktorých vzdialenosť x je kladná, ale nepresahuje 1, tak označme S_1, S_2 stredy a d_1, d_2 priemery kruhov k_1, k_2. Uvažujme priamku S_1S_2 a jej priesečníky P_1,P_2 s kružnicou k_1 a priesečníky Q_1,Q_2 s kružnicou k_2, také, že $P_2S_2 \geq P_1S_2$ a rovnako $Q_2S_1 \geq Q_1S_1$. Nech R je stred úsečky P_2S_2. Potom kružnica k_3 s polomerom $RP_2 = RQ_2$ sa dotýka zvonka kruhov k_1 a k_2. Teda kruh k_3 obsahuje všetky body, ktoré obsahujú k_1 a k_2. Priemer kruhu k_3: $d_3 = d_1 + d_2 + x \leq d_1 + d_2 + 1$. Množina kruhov, kde namiesto k_1 a k_2 berieme k_3 potom tvorí s pôvodnými n bodmi nové pokrytie C_2. Tento krok síce zvýši súčet priemerov nanajvýš o 1, ale zníži počet kruhov o 1. Keďže C_1 bolo pokrytie, tak aj C_2 je pokrytie.
Procedúra 2: Opakuj Procedúru 1 kým je splnená podmienka.
Zhrnutie: Do Procedúry 1 hodíme pokrytie z Kroku 1. Je jasné, že Procedúra 1 sa nemôže opakovať donekonečna, lebo nám klesá počet kruhov (klesajúca postupnosť na prirodzených číslach je konečná). Matematickou indukciou je výstup Procedúry 1 vždy pokrytie. Po vykonaní Procedúry 2 v pokrytí nie sú kruhy so vzdialenosťou $x \leq 1$, čo znamená že výsledné pokrytie je kompletné. Keďže vo výslednom pokrytí je aspoň jedna kružnica, tak súčet priemerov kruhov pokrytia je menší ako n.

Úloha č. 13: *Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ spĺňa $1 < a_1 < 2$ a pre všetky prirodzené k platí $a_{k+1} = a_k + k/a_k$. Dokážte, že existuje najviac jedna taká dvojica (i, j), že $i < j$ a zároveň $a_i + a_j$ je celé číslo.*

Riešenie: (opravoval Filip Sládek)
(Podľa *Le Anh Dunga*) Dokážeme pár tvrdení, z ktorých dostaneme, čo potrebujeme. Prvé tvrdenie: $a_k > k$ pre každé prirodzené číslo k. Dostaneme to matematickou indukciou so základom $a_1 > 1$, lebo

$$a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k} = k \cdot \frac{a_k}{k} + \frac{k}{a_k} \geq (k+1) \cdot \sqrt[k+1]{\frac{{a_k}^{k-1}}{k^{k-1}}} > k + 1,$$

kde $a_k > k$ z indukčného predpokladu.
Ďalej máme $a_{k+1} - a_k = \frac{k}{a_k} < 1$. Spolu s tým, že $1 < a_1 < 2$ a $a_k > k$ hneď ľahko indukciou dostaneme, že $k < a_k < k + 1$ pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ a tiež, že postupnosť $\{a_k - k\}_{k=1}^{\infty}$ je zhodná s postupnosťou$\{a_k - \lfloor a_k \rfloor\}_{k=1}^{\infty}$ a je klesajúca. (Rozmyslite si, prečo.)
Keďže máme

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{(a_1 - 2)(2a_1 - 1)}{2a_1} + \frac{5}{2} < \frac{5}{2},$$

tak z predchádzajúceho tvrdenia vyplýva $a_k - \lfloor a_k \rfloor < 1/2$ pre všetky $k > 1$. Teda ak $a_i + a_j$ je celé, potom $i = 1$ a z monotónnosti spomínaných postupností vyplýva, že taká dvojica exituje nanajvýš jedna. QED

Úloha č. 14: *Množina X má 56 prvkov. Nájdite najmenšie prirodzené n také, že platí nasledovné tvrdenie: Ak vyberieme ľubovoľných 15 podmnožín X takých, že počet prvkov zjednotenia ľubovoľných sedem z nich je aspoň n, potom z týchto 15 podmnožín určite vieme vybrať tri s neprázdnym prienikom.*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Prečítajte si zadanie. Ešte raz. A ešte raz. Treba ho mať pod kožou na to, aby ste pochopili, o čom tu budeme písať. Riešenie vyzerá nasledovne. Nájdeme n, ukážeme preň, že pre každých 15 podmnožín X, keď je počet prvkov ich zjednotenia aspoň n, existujú tri so spoločným prienikom. Potom pre $n - 1$ nájdeme kontrapríklad pätnástich podmnožín X, pre ktoré to neplatí.
Prvým krokom bolo zistiť n. Na to sa dalo prísť až úvahou pri $n - 1$.
Takže $n = 41$. Zoberieme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_{15} \subseteq \{1, 2, \ldots, 56\}$ také, že:

$$|A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_7}| \geq 41. \tag{2}$$

Dokážeme sporom, že žiadne tri nemajú spoločný prienik. Predpokladáme, že každý prvok X je maximálne v dvoch množinách A_i. Takéto množiny budeme volať *sporné*. Keď je nejaký prvok $x \in X$ v práve jednej množine A_i, tak jeho pridaním do inej podmnožiny A_j podmienka (2) zostáva v platnosti. Takisto množiny $A_1, A_2, \cdots, A_j \cup x, \cdots, A_{15}$

sú naďalej sporné. Podobne to vieme urobiť s prvkom $y \in X$ ktorý nepatrí do žiadnej A_i. Týmto postupom sme si nakonfigurovali spornú množinu tak, že každý prvok z X je v práve dvoch A_i.
Skonštruujeme nasledujúci multigraf G (môže mať násobné hrany). Vrcholy $\{1, 2, \ldots, 15\}$ reprezentujú množiny A_i. Pre každú dvojicu $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pridáme do G hranu medzi i a j. Takže počet hrán G je práve 56. Vieme z (2), že pre každých 7 vrcholov, je počet hrán s aspoň jedným koncom v týchto 7 vrcholoch aspoň 41. Z toho vyplýva, že pre každých 8 vrcholov je počet hrán takých, že oba konce sú v týchto 8 vrcholoch, maximálne $56 - 41 = 15$. Zoberme ľubovolný vrchol $v \in G$. Označme $\deg(v)$ stupeň tohoto vrchola. Odhadneme počet hrán vo zvyšných vrcholoch:

$$56 - \deg(v) \leq 15 \times \frac{\binom{14}{8}}{\binom{12}{6}} = 15 \times \frac{\binom{14}{2}}{\binom{8}{2}} = 48.75.$$

Z toho vyplýva $\deg(v) \geq 8$. Ako sme prišli na náš odhad? Zobrali sme každý 8 vrcholový podgraf G, tých je $\binom{14}{8}$. V podgrafe s ôsmymi vrcholmi môže byť z nášho predošlého odhadu maximálne 15 hrán (15). Každú hranu sme ale zarátali toľkokrát, koľko je 8 vrcholových podgrafov G obsahujúcich oba koncové vrcholy hrany, tých je $\binom{12}{6}$. Keď je ale stupeň každého vrchola aspoň 8, tak potom počet hrán v G je aspoň $(15 \cdot 8)/2 = 60 > 56$. A máme spor s počtom hrán G. Takže $n = 41$ vyhovuje zadaniu.
Sporná množina pre $n = 40$ je určená kompletným bipartitným grafom B na partíciách 7 a 8 (Tj. zoberiem 7 vrcholov doľava a 8 doprava, pospájam každý ľavý vrchol s každým pravým vrcholom). V tomto momente si to odporúčam nakresliť. V krátkosti si povedzme, prečo B vyhovuje. B má $7 \times 8 = 56$ hrán (a teda každej hrane môžem priradiť prvok z X). To, že žiadne tri podmnožiny nemajú spoločný prienik je ekvivalentné s tým, že v B neexistuje trojuholník. To, že B spĺňa (2) vyplýva z toho, že počet hrán s aspoň jedným koncom v ľubovolných 7 vrcholoch je aspoň 40 (lebo sme nezarátali maximálne $a \times (8 - a)$ hrán pre $a \in \{0, 1, \ldots, 7\}$). Odporúčam si to prečítať ešte raz, prípadne si tie grafy aspoň schematicky nakresliť.

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k$_\alpha$	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kováčová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	5	8				78
2.	Kurdelová Alžbeta	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9	9	8		7		69
3.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2		7	9	9		0			58
3.	Mojžišová Karolína	1.	Gamča BA	2		2	8	9		4	2		58
5.	Prívozník Matej	1.	GJH BA	1	6		8	9			1		51
6.	Žilková Alexandra	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	9	9					48
7.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	3					9	5	9		47
7.	Olerínyová Anna	2.	GVaz BA	2		3	8	2	1				47
9.	Šandalová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	6		9	9					45
10.	Klimkovič Anna-Mária	1.	ŠPMNDG BA	1	7		6	1					44
11.	Lipovský Mário	1.	GJH BA	1	6	8	6	9		4			42
12.	Gonda Tomáš	2.	Gamča BA	3					9	7	9		41
13.	Bednár Stanislav	1.	GJH BA	1	6		6	8	0		1		40
13.	Pieš Adrián	1.	ŠPMNDG BA	1	8		9						40
15.	Iždinská Dominika	1.	GJH BA	1	6		9						39
16.	Vršanský Martin	1.	1SG BA	1	6		7	9					29
17.	Galanová Miriam	1.	GJH BA	1	6		9	6					21
18.	Krajčovič Matej	2.	GJH BA	3									19
18.	Strakáčová Jana	2.	Gamča BA	3									19
20.	Rusinko Martin	1.	GJH BA	1	9	2	5		2				18
21.	Ivanov Marián	2.	GJH BA	2			3	7					17
22.	Kupčulák Marián	2.	Gamča BA	3									16
23.	Balašov Pavel	1.	GJH BA	1	6		7	1					14
24.	Hraška Peter	2.	Gamča BA	3									6

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Šimková Ľudmila	1.	GPár NR	2		9	9	9	7	9			86
2.	Korbela Michal	1.	G Bánovce	1	5	9	8	9	8	4			75
3.	Pokrývka Filip	1.	G Bánovce	1	7		9	9	5		9		74
4.	Lúčna Nina	2.	GPdC PN	2		4	9	9	0	1			61
5.	Franková Monika	1.	GKom PE	1	5	9	7	1	1				53
6.	Balážová Michaela	1.	G Bánovce	1	4	1	8	3	0				47
7.	Kováčová Milada	2.	GCM NR	3			8	8	3				42
8.	Pavlíková Stela	1.	GĽŠ TN	1									24

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Samuel	-1.	GAB NO	-1	8	8	9	9	9	9	9		86
2.	Hrivová Ivona	1.	GVO ZA	2	7	9	9	9	4	1	9		80
3.	Magyarová Zuzana	1.	GBST LC	1	9	8	9	9	8				78
4.	Sučík Samuel	0.	ZŠ Čelovce	0	7	9	9	9		5			77
5.	Melo Jakub	1.	GsvFA ZA	1	9	9	9	6	1				66
6.	Jankovichová Ľudmila	1.	GJGT BB	2			9	9	1	5	1		63
6.	Psota Miroslav	1.	GHlin ZA	1	6		7	8	0		7		63
8.	Ječmenová Andrea	1.	GVO ZA	2		6	8	9	0	4			51
9.	Hromcová Zuzana	1.	GVO ZA	2			9	5					48
10.	Santer Martin	2.	GMH Trstená	3			9	9	9	3			37
11.	Siviček Ján	2.	GBST LC	3			9	9					33
12.	Perešíni Martin	1.	SPŠJM BB	1	5	0	9	3	1				30
13.	Hudec Lukáš	3.	GBST LC	3			4	2	0				25
14.	Slivka Norbert	1.	GJGT BB	2		9	7	2			1		19
15.	Doboszová Helena	1.	BG ZA	1									18

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	2		9	9	7	8	7	9		87
2.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2		9	5	9	9	9			67
3.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	0					9	9	9		63
4.	Midlik Šimon	1.	GJAR PO	1	5	3	9	5		3			54
5.	Rapavý Martin	1.	GAlej KE	2		4	9	9	9				52
6.	Pivovarník Roman	1.	GJAR PO	1	7		9	9	0				49
7.	Dudič Ján	2.	GPoš KE	2	7	9	7	7		0			45
8.	Bátoryová Jana	1.	GAlej KE	2		1	8	2	0				41
9.	Hofierka Jaroslav	1.	GJAR PO	1	3		9	2			1		40
10.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	1	6	1	9	5			0		39
10.	Šromeková Karolína	1.	GDT PP	1	4	3	9	2					39
10.	Tokárová Natália	2.	GJAR PO	3			7	9	0	3			39
13.	Polovka Maroš	1.	GKuk PP	2			9		1		1		26
14.	Mikuš Peter	1.	GJAR PO	1									24
15.	Turlík Tomáš	2.	GJAR PO	2			7						15

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	2		9	9	9	3	2	0		70
2.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	2						9	9		35

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
2.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	3						9	9		35
4.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	3						8	9		34
5.	Anh Dung Le	1.	Tachov ČR	1					9	9	9		27
6.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR	3			9	8					17
7.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha	3					9	6			15
8.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2									0

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	0	0	9	9	9		9	9			45	90
1.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	5	4			9	9	9	9	9		45	90
3.	Horňák Marián	3.	GPár NR	7	5			9	9	9	9	9		45	88
4.	Lux Filip	4.	Žamberk ČR	4	0	9	9	9	9	9	6	9		45	87
5.	Koblížek Miroslav	4.	Žamberk ČR	4	2		9	9	9	9		9		45	86
6.	Tóth Michal	3.	GJH BA	7	2		9	9	9	9		9		45	85
7.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	3	1		8	9	9	9		9		44	84
8.	Stehlík Matúš	4.	GAlej KE	6	0	9	9	2	9	9				38	82
9.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	3	0	9	5	9	9	9				41	81
9.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená	9	5			1	9	9	9	9		37	81
11.	Šafin Jakub	2.	GPH MI	4	1		7	9	9	5		8		38	80
12.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	10	6			9	9	9	9	8		44	79
13.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA	5	0	9	7	9	9		9			43	77
14.	Kopf Michal	3.	Opava ČR	7	2		6	9	4	9	9			37	76
14.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	2	1		9	9	9	9				36	76
16.	Hozza Ján	4.	GJH BA	8	7			9	9	9	2			29	74
16.	Jasenčáková Katarína	3.	GVO ZA	8	2		9	9	9	9	8			44	74
16.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	3	2		9	9	5	9	1			33	74
16.	Zavřel Lukáš	4.	GChod Praha	4	2		8	9	5	7		9		38	74
20.	Balog Matej	4.	Gamča BA	7	3			9	9	9	9			36	73
20.	Halajová Barbora	3.	GVO ZA	7	1		7	9	9	9	9			43	73
22.	Szabados Viktor	4.	Gamča BA	11	5			9	9	9	9			36	71
23.	Karásková Natália	4.	GJH BA	12	11			9	9	9	9			36	70
23.	Klembarová Barbora	3.	GKuk PP	7	2		9	9	9	9	9			45	70
25.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA	7	3			9	9	9	9			36	69
26.	Žídek Augustin	3.	Frýdlant ČR	6	1		8	9	5		9	4		35	67
27.	Faršang Štefan	4.	SJG KN	7	2		9	9	9	5	9			41	64
27.	Hledík Michal	2.	GJH BA	4	0	7	5	9	9					30	64
27.	Marečáková Barbora	3.	GKuk PP	7	2		5	7	9	9	8			38	64
30.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	0	6	3	9	5		7			30	63
30.	Hanzely Filip	2.	GAP SB	4	0	4	5	9	4	9				31	63
30.	Langer Tomáš	3.	GJH BA	7	2		5	9	9	9				32	63
33.	Hlavatá Martina	4.	Gamča BA	10	3			9	9	9	9			36	62
34.	Kozák Andrej	4.	Gamča BA	11	5			9	9	7	0			25	61
35.	Guričan Pavol	4.	GJH BA	10	6			9	9	9	9			36	60
36.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA	5	2		9		9	6				24	59
37.	Benešová Katarína	2.	GAS BB	4	0	8	6	3	9	7				33	58
38.	Gonda Tomáš	2.	Gamča BA	3	0	9	7	9						25	56
39.	Hlaváčik Matúš	2.	GAlej KE	4	0	9	4		9					22	54
40.	Pellerová Daniela	2.	Gamča BA	5	1		5	4	4	5	4			22	53
41.	Koprda Pavol	3.	GAM TT	6	1		6	9	9	1	2			27	52
41.	Kováč Ondrej	4.	GCM NR	10	5				9	9				18	52

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	$\mathbf{k}_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
43.	Komanová Kristína	2.	GAS BB	4	1		4	9	9	9				31	51
43.	Semanišinová Denisa	2.	GAlej KE	5	0	9	9		4					22	51
45.	Belanová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	7	2			9		9		8		26	50
45.	Macko Vladimír	2.	GĽŠ ZV	4	0	6	3	6	9		0			24	50
47.	Sládek Samuel	-1.	GAB NO	-1	0	9	9	9						27	47
48.	Cibulka Samuel	2.	GAV LV	4	0	0	4	6	4					14	46
48.	Petrucha Jaroslav	2.	GMet BA	4	0	9	4							13	46
48.	Surovčík Juraj	2.	GPOH DK	4	0	2	4	8	1					15	46
51.	Anh Dung Le	1.	Tachov ČR	1	0	9	9	9	9			9		45	45
52.	Hlásek Filip	4.	Plzeň ČR	5	3			9	9	9				27	44
52.	Smolík Milan	2.	Gamča BA	4	0	9	5	0			1			15	44
54.	Baxová Zuzana	3.	GĽŠ TN	7	2		4		9	8	7			28	43
55.	Anderle Michal	4.	GBST LC	6	0	9								9	42
56.	Bílý Michael	4.	Klatovy ČR	4	2									0	41
56.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	2	0	3	2	0		0				5	41
58.	Vlček Andrej	3.	EvSŠ LM	6	1				9	9				18	40
59.	Ficková Klára	3.	GPoš KE	5	0	9	9	2	9	9				38	38
60.	Nociarová Jela	2.	GBST LC	4	0	1	6	9	5					21	37
61.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	4	0	5	5							10	35
62.	Páleník Jakub	2.	ŠPMNDG BA	4	0	1	2	9	4					16	31
63.	Smolík Michal	2.	Gamča BA	4	0									0	30
64.	Sabatovičová Linda	4.	GJH BA	9	2									0	28
65.	Barančok Peter	4.	Gamča BA	6	1									0	27
65.	Strakáčová Jana	2.	Gamča BA	3	0									0	27
67.	Kupčulák Marián	2.	Gamča BA	3	0									0	24
68.	Švančara Patrik	3.	GĽŠ TN	5	0		5							5	23
69.	Kubincová Petra	4.	ŠPMNDG BA	8	1									0	22
70.	Santrová Adriana	3.	GMH Trstená	5	0									0	20
71.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	4	0									0	19
72.	Mikuš Peter	1.	GJAR PO	1	0									0	15
73.	Bohiniková Alžbeta	4.	Gamča BA	8	1									0	13
74.	Tunová Anna	2.	GPár NR	4	0									0	10
75.	Matejovičová Tatiana	2.	Gamča BA	4	0									0	9
76.	Macháč Juraj	4.	GJH BA	6	0									0	8
77.	Bok Jan	4.	Litoměřice ČR	4	0									0	5
77.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR	3	0				5					5	5
79.	Benej Martin	4.	GLS HE	4	0									0	2
80.	Búlik Martin	4.	GJGT BB	5	0	1								1	1

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Anh Dung Le	1.	Tachov ČR		9	7	6	4		46
2.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	9	8	6				34
3.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha			4				4
4.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR							21
5.	Šafin Jakub	2.	GPH MI		8					20
6.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	9	9	6	7	7		56