Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2011/2012

Úloha č. 1: *Gyro Vynálezca kopíruje v počítači n rovnako veľkých súborov. Počítač mu zobrazuje dva progress bary[1]. Horný ukazuje, koľko percent zo všetkých dát je už skopírovaných. Spodný ukazuje, koľko percent z práve kopírovaného súboru je už skopírovaných. Na začiatku sú oba progress bary na 0%. Koľkokrát sa počas celého kopírovania stane, že budú oba progress bary ukazovať rovnako veľa percent a na koľkých percentách to bude?*

Riešenie: (opravovala Aďa)

Najprv sa zamyslime nad situáciou, keď máme iba jeden súbor. Vtedy oba progress bary postupujú súbežne.

Iné je to, keď máme súbory dva. Vtedy začínajú aj končia progress bary spolu, avšak medzitým je horný vždy buď presne polovica zo spodného (počas kopírovania prvého súboru), alebo o 50% viac (počas kopírovania druhého súboru). Teda sa stretnú práve dvakrát.

Preskúmajme ešte možnosť s troma súbormi. Progress bary sa stretnú zrejme na začiatku a na konci kopírovania. Stretnú sa však aj medzi tým? V tomto prípade sa dá tipnúť, že sa stretnú aj v strede kopírovania, keď je skopírovaných $1,5$ súboru. Teda spolu trikrát. Môžeme si teraz tipnúť, že by to mohlo byť n-krát, keď to vyšlo pre $n = 2$ a $n = 3$. Je to však skutočne tak?

Poďme sa teraz pozrieť na všeobecný prípad. Majme n rovnako veľkých súborov. Druhý progress bar nech je práve na P percentách. Skopírovaných už máme Q súborov. Potom prvý progress bar bude práve na

$$100 \cdot \frac{Q + \frac{P}{100}}{n} \%.$$

My chceme zistiť, kedy sú oba progress bary na rovnakej hodnote. Musí platiť rovnosť

$$100 \cdot \frac{Q + \frac{P}{100}}{n} = P,$$

ktorú upravíme na

$$\frac{P}{100} = \frac{Q}{n-1}.$$

Zamyslime sa teraz nad tým, čo sme dostali. Ľavá strana je určite číslo rovné nanajvýš 1. To isté musí potom platiť aj pre pravú stranu. Teda Q je nanajvýš $n - 1$. Keďže Q je počet súborov, tak máme práve n možností: $Q = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Zároveň už vidíme, že progress bary sa stretnú vždy na hodnote $100 \cdot Q/(n - 1)$ percent. Howgh.

Úloha č. 2: *Snehulienka si myslí prvočíslo $p > 7$. Trpaslíci tvrdia, že $p^2 - 1$ je deliteľné číslom 24. Dokážte, že majú pravdu.*

Riešenie: (opravovala Betka a Mary)

Keď dokazujeme deliteľnosť, lepšie sa nám pracuje so súčinom, takže si rozložíme číslo $p^2 - 1$ na súčin $(p+1)(p-1)$. Čísla $(p + 1)$, p, $(p - 1)$ sú tri po sebe idúce čísla, čo znamená, že jedno z nich je násobkom 3. Vieme, že to nebude p, keďže p je prvočíslo a platí $p > 7$. Preto to musí byť jedno zo zvyšných dvoch čísel a teda súčin $(p + 1)(p - 1)$ je určite násobkom 3.

Ďalej vieme, že $(p - 1)$ a $(p + 1)$ sú po sebe idúce párne čísla, tým pádom je jedno z nich navyše aj násobok 4, a teda ich súčin $(p + 1)(p - 1)$ je násobok 8.

Keďže $(p + 1)(p - 1)$ je násobkom 8 aj 3, tak je aj násobkom 24. Tým sme dokázali, že $p^2 - 1$ je deliteľné 24.

Úloha č. 3: *Vlk sľúbil Červenej Čiapočke, že ju nezožerie, ak dokáže, že pre ľubovoľné dve reálne čísla a a b platí*

$$\left(a^2 + b^2\right)^3 \geq \left(a^3 + b^3\right)^2.$$

[1] indikátor, ktorý ukazuje, koľko percent súboru je skopírovaných

Zachráňte Červenú Čiapočku a dokážte túto nerovnosť.

Riešenie: (opravovala Maťa a Mojo)

Zadanú nerovnosť roznásobíme a ekvivalentne upravíme:

$$\left(a^2+b^2\right)^3 \geq \left(a^3+b^3\right)^2,$$
$$a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 \geq a^6+2a^3b^3+b^6,$$
$$3a^4b^2+3a^2b^4 \geq 2a^3b^3,$$
$$3a^4b^2+3a^2b^4-2a^3b^3 \geq 0,$$
$$a^2b^2\left(3a^2+3b^2-2ab\right) \geq 0,$$
$$a^2b^2\left(2a^2+2b^2+(a-b)^2\right) \geq 0. \tag{1}$$

Keďže druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je nezáporné číslo, tak $(a-b)^2 \geq 0$, $a^2 \geq 0$ a $b^2 \geq 0$. (Čiže aj $a^2b^2 \geq 0$, $2a^2 \geq 0$, $2b^2 \geq 0$.) Súčet aj súčin nezáporných čísel je nezáporné číslo (premyslite si, prečo), a teda výraz na ľavej strane nerovnosti (1) je vždy nezáporný. Tým sme dokázali to, čo sme mali dokázať.

Úloha č. 4: *Morská panna hrá na pláži hru, ktorej cieľom je prepísať MI na MU. Na začiatku hry má v piesku napísané slovo MI. So slovom, ktoré je napísane v piesku, potom môže robiť nasledujúce úkony:*

i) ak sa slovo končí na I, môže na koniec pridať U,

ii) ak sú v slove tri I za sebou, môže ich nahradiť za U,

iii) slovo Mx, kde x je akákoľvek postupnosť písmen, môže nahradiť za Mxx,

iv) dve U za sebou môže zmazať.

Je možné, aby po konečnom počte úkonov ostalo v piesku napísané MU? Ak áno, ako? Ak nie, vysvetlite prečo.

Riešenie: (opravoval Vero a JeFo)

Veľa z vás si všimlo, že v tomto príklade bude dôležitá deliteľnosť tromi. Priraďme teda každému slovu hodnotu tak, že sa bude rovnať súčtu počtu písmen I a trojnásobku počtu písmen U. Takéto priradenie zachováva podľa pravidla ii) rovnocennosť U s tromi I. Toto ohodnotenie slova je výhodné najmä preto, že sa jeho zvyšok po delení tromi správa veľmi pekne.

Uvažujme slovo s hodnotou a. Keď budeme teraz hovoriť o zvyšku, myslíme tým zvyšok po delení hodnoty a tromi.

i) Použitím prvého pravidla pridáme U, a teda nová hodnota slova bude $a+3$. Zvyšok sa nám nezmení.

ii) Pri vymenení troch I za jedno U sa hodnota a, a teda ani zvyšok nezmení.

iii) Tretie pravidlo nám reťazec písmen za počiatočným M zdvojnásobí, čiže nová hodnota bude $2a$.

iv) Vymazaním dvoch U sa hodnota zníži na $a-6$, čiže opäť sa zvyšok nezmení.

Našou úlohou je dostať slovo MU, čo zodpovedá hodnote 3. Vieme kombináciou týchto pravidiel dostať hodnotu $a=3$? Vieme vôbec získať hodnotu deliteľnú tromi? Začíname so slovom MI, ktoré má hodnotu rovnú 1 a zvyšok po delení tiež 1. Keďže pravidlá i), ii) a iv) nám tento zvyšok nemenia, pozrieme sa bližšie na tretie pravidlo. Po zmene slova s ľubovoľnou hodnotou a a zvyškom 1 (čiže $a=3b+1$) tretím pravidlom dostaneme novú hodnotu $2a=2(3b+1)=3(2b)+2$ so zvyškom 2. Môžeme ísť ďalej: zistime, čo spraví toto pravidlo s hodnotou a, ak má zvyšok 2 ($a=3c+2$). Dostávame dvojnásobok $2a=3(2c)+4=3(2c)+3+1=3(2c+1)+1$, čo znamená, že máme hodnotu znovu so zvyškom 1! Tretie pravidlo nás zacyklí na hodnotách, ktoré nie sú deliteľné tromi. Tým pádom použitím hociktorého pravidla nedostaneme hodnotu, ktorá by dávala zvyšok 0. Hodnota a nikdy nebude 3. Tým pádom sme dokázali, že použitím konečného počtu pravidiel i) – iv) nemôžeme dostať slovo MU.

Úloha č. 5: *Nech x, y, z, a, b, c sú reálne čísla a zároveň a, b, c sú nenulové. Ďalej nech*

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad a+b+c=1 \quad \text{a} \quad a^2+b^2+c^2=1.$$

Dokážte, že $xy+yz+zx=0$.

Riešenie: (opravoval Kozzy a Paľo)

K dispozícii máme celkom pekné množstvo rovností. Keď si ešte uvedomíme vzťahy medzi nimi, možno sa nám podarí zistiť ešte niečo viac. Poďme sa pozrieť, čo sa stane s rovnosťou $a+b+c=1$ po umocnení oboch strán na druhú. Pravá strana sa zjavne veľmi nezmení. Po umocnení ľavej strany uvidíme aj členy, o ktorých už niečo vieme:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=1.$$

Presnejšie, vieme, že $a^2+b^2+c^2=1$, čo môžeme smelo dosadiť:

$$1 + 2(ab + bc + ac) = 1,$$
$$ab + bc + ac = 0.$$

Dozvedeli sme sa niečo nové, aby sme to mohli oceniť, skúsme ešte jednu úpravu. Podľa zadania a, b, c sú nenulové, nerobí nám teda problém deliť rovnosť výrazom abc:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Pomaly, ale isto sa blížime k tvaru podobnému tomu poslednému zo zadania, k čomu sme sa ešte nedostali. Všimnime si tvar dokazovanej rovnosti. Sú to tri dvojčleny, z každého chýba jedno z trojice písmeniek x, y, z. V zadaní máme tri zlomky, kde v čitateli je vždy práve jedno písmenko zo spomenutých troch — pokojne môže byť práve tým tretím, ktoré v dokazovanej rovnosti mať nechceme. To nám jednoznačne našepkáva, že posledný tvar rovnosti, ktorú sme upravovali, bude dobré prenásobiť výrazom xyz:

$$\frac{xyz}{a} + \frac{xyz}{b} + \frac{xyz}{c} = 0,$$
$$\frac{x}{a} \cdot yz + \frac{y}{b} \cdot xz + \frac{z}{c} \cdot xy = 0.$$

Využitím znalosti zo zadania môžeme za y/b ako aj z/c dosadiť x/a, a následne tento člen vyňať:

$$\frac{x}{a}(xy + yz + xz) = 0.$$

Napokon máme súčin dvoch výrazov rovný nule, teda určite bude rovný nule aspoň jeden z nich. Treba si uvedomiť, že ak by to bol zlomok x/a, potom na základe rovností v zadaní aj $y/b = 0$ a $z/c = 0$, to by ale znamenalo, že $x = y = z = 0$, a teda aj $xy + yz + xz = 0$. Na základe toho posledná uvedená rovnosť platí v každom prípade, teda sme ukázali, čo bolo treba.

__Úloha č. 6:__ *Popolvár najväčší na svete sa opäť raz hrá sám v humne na sene. Má mriežku veľkosti $2 \times n$ a čísla 1, 2, …, $2n$. Koľkými spôsobmi môže vyplniť mriežku číslami tak, aby každé číslo k, okrem 1 a $2n$, susedilo jednou stranou s $k-1$ a ďalšou stranou s $k+1$? Na jedno políčko mriežky ide jedno číslo.*

Riešenie: (opravoval Beren)

Nazvime si Popolvára familiárne ako Popi a poďme sa pozrieť, čo nám vyhútal. Čo sa Popi snaží urobiť, je akýsi hadík zo vzostupného radu čísel, ktorý nikde neprechádza cez seba a pokrýva celú sieť $2 \times n$. Najdôležitejšie budú zrejme krajné čísla, teda 1 a $2n$. Zaujímať sa budeme ale iba o začiatočné číslo, teda 1. Poďme sa bližšie pozrieť, kde sa môže nachádzať.

1. Číslo 1 sa nachádza v rohu:
   Popi vypĺňal čísla postupne od najmenšieho po najväčšie, keď si uvedomil (a my by sme si mali tiež), že akonáhle sa niekde vyskytne situácia, že má dve čísla (k a $k+1$) vodorovne vedľa seba a pod nimi nič, je už iba jeden spôsob ako vyplniť tabuľku. Viď šípky na obrázku.

$\cdots$	$k-1$	k	$k+1$	$\rightarrow$	$\cdots$	$\rightarrow$	$\searrow$
$\cdots$	$k-2$	$2n$	$2n-1$	$\leftarrow$	$\cdots$	$\leftarrow$	$\swarrow$

   Keď sa nechceme dostať do takejto situácie, musíme robiť z čísel, a teda z nášho hadíka akési vlnky, a potom v nejakom bode sa rozhodneme, že už stačí a dokončíme hadíka ako na obrázku. Koľko vlniek môžeme spraviť? Najmenej 0, najviac $n-1$, čo je n možností. Vlnku v poslednom stĺpci rátať nebudeme, keďže tá tam musí byť vždy, veď ako inak by sa hadík otočil okolo rohov? Čiže máme štyri rohy, v ktorých môže byť číslo 1, pre každý roh n možností ako robiť vlnky, dohromady je to $4n$ možností. Samozrejme, okrem prípadu, keď $n = 1$, potom je to iba $2n$, čiže 2 možnosti.

2. Číslo 1 sa nenachádza v rohu:
   Popi nemôže dať číslo 2 vedľa v zvislom smere, lebo potom by si tabuľku rozdelil na 2 nespojené sektory. Musíme sa teda pohnúť vodorovne do niektorej strany, čím sa dostaneme do situácie ako na prvom obrázku. Potom musíme nášho hadíka otočiť okolo rohov a vrátiť sa k číslu 1. Tešte sa, lebo nasleduje druhý obrázok.

$\cdots$	k+1	k	$k-1$	$\leftarrow$	$\cdots$	$\rightarrow$	$\nwarrow$
$\cdots$		1	2	$\rightarrow$	$\cdots$	$\rightarrow$	$\nearrow$

   Toto už nie je nič iné ako 1. prípad, lenže nezačíname číslom 1, ale $k+1$ a nemáme n stĺpcov, ale iba nejakých m. Čo vytvára m rôznych možností ako dokončiť tabuľku. Lenže takisto sme mohli začať na druhú stranu, kde nám ostalo $n-m-1$ stĺpcov (dokopy stĺpcov musí byť $n-1$, keďže 1 sme zabrali číslami 1 a k), čo je ďalších $n-m-1$ možností. Čiže pre každú pozíciu čísla 1 dostávame $m+n-m-1 = n-1$ možností. Keďže máme $2(n-2)$ možností kde umiestniť číslo 1, v tejto časti dostávame $2(n-1)(n-2)$ možností.

Popimu už stačí tieto dve čísla sčítať a má výsledok, čiže $4n + 2(n-1)(n-2)$ možností ako vyplniť tabuľku. Samozrejme, okrem prípadu, keď $n = 1$, vtedy sú to iba dve možnosti. No a zazvonil zvonec, toto je koniec a Popolvár žil šťastne, až kým nepomrel.

Úloha č. 7: *Okolo táboráka sa posadilo* 2011 *dievčat a* 2012 *chlapcov. Každú hodinu sa medzi dvoch ľudí rovnakého pohlavia posadilo dievča, medzi dvoch ľudí rôzneho pohlavia sa posadil chlapec a pôvodné osadenstvo táboráka sa išlo hrať do lesa, takže okolo táboráka bolo vždy práve* 4023 *ľudí. Dokážte, že po konečnom počte hodín nemôžu zostať okolo táboráka samé dievčatá.*

Riešenie: (opravoval Kubo K.)
Ako to už býva pri takýchto úlohách, kde treba dokázať, že sa niečo nedá, najjednoduchšie je začať riešiť sporom. Predpokladať, že to nastalo, a potom sa pozrieť ako to muselo vyzerať predtým. Predpokladajme teda, že v nejakej hodine sú okolo ohňa samé dievčatá. Predpokladajme navyše, že táto hodina je prvá, v ktorej tento stav nastal. Pozrime sa, ako to muselo vyzerať hodinu predtým. Keďže dievčatá si sadajú len medzi dvojice rovnakého pohlavia, museli byť pred hodinou okolo ohňa všetci rovnakého pohlavia. Keďže sme predpokladali, že toto je prvá hodina, kedy sú okolo ohňa samé dievčatá, museli tam pred nimi byť samí chlapci. A teraz sa opäť pozrieme, ako museli byť deti okolo ohňa pousádzané, aby si tam potom sadli samí chlapci. Chlapci si sadajú len medzi dvojice rôzneho pohlavia, teda okolo ohňa museli byť chlapci a dievčatá na striedačku.
To však znamená, že tam muselo byť rovnako veľa chlapcov ako dievčat. Čiže spolu ich musel byť párny počet. My ale vieme, že okolo ohňa je vždy 4023 detí, čo je nepárne číslo. Tým sme dostali spor.

Iné riešenie:
Tento príklad sa však dal riešiť aj inak ako sporom. Uvedieme len návod, poriadne si to dokončite ako cvičenie. Dá sa ukázať, že ak v nejakej hodine sú okolo ohňa aspoň jeden chlapec a jedno dievča, potom aj v ďalšej hodine bude okolo ohňa aspoň jeden chlapec a aspoň jedno dievča. Z princípu matematickej indukcie potom vyplýva, že nikdy pri ohni nemôžu ostať len dievčatá.

Úloha č. 8: *O prirodzenom čísle*[2] n *vieme, že čísla* $2n+1$ *a* $3n+1$ *sú štvorcami celých čísel. Môže byť potom číslo* $5n+3$ *prvočíslom?*

Riešenie: (opravoval Kubo S.)
Zamyslime sa najprv, čo od nás úloha chce. Chceme zistiť, či $5n+3$ môže byť prvočíslo. Keď sa hovorí o prvočíslach, malo by nám hneď udrieť do hlavy slovné spojenie „práve dva kladné delitele“. Chceme zistiť, či $5n+3$ môže mať práve dvoch kladných deliteľov, a to 1 a $5n+3$. Pri takýchto úlohách nám často pomôže vyjadriť dané číslo ako súčin prirodzených čísel. Poďme sa o niečo také pokúsiť.
Vieme, že

$$2n + 1 = a^2, \tag{1}$$

$$3n + 1 = b^2, \tag{2}$$

pre nejaké celé čísla a, b. O číslach a, b môžeme dokonca predpokladať, že sú to prirodzené čísla, lebo platí $(-a)^2 = a^2$. Naším cieľom je iným spôsobom vyjadriť číslo $5n+3$. Čo tak použiť čísla $2n+1$ a $3n+1$? Priam sa nám núkajú:

$$5n + 3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4a^2 - b^2 = (2a+b)(2a-b).$$

Teraz máme číslo $5n+3$ zapísané ako súčin dvoch prirodzených čísel. (Číslo $2a-b$ je kladné, pretože $5n+3$ aj $2a+b$ sú kladné.) Z toho, čo sme si povedali na začiatku, vyplýva, že ak $5n+3$ je prvočíslo, tak nutne $2a+b = 5n+3$ a $2a-b = 1$ (keďže $2a+b > 2a-b$).
Ak $2a-b = 1$, tak $b = 2a-1$. Dosadením do rovnosti $5n+3 = 2a+b$ dostaneme

$$\begin{aligned} 5n + 3 &= 2a + b = 4a - 1, \\ 5n &= 4a - 4 = 4(a-1). \end{aligned} \tag{3}$$

Na druhej strane, z rovností (1) a (2) máme

$$\begin{aligned} 5n &= 2n + 3n = a^2 - 1 + b^2 - 1 = (a-1)(a+1) + (b-1)(b+1) = \\ &= (a-1)(a+1) + (2a-2)2a = (5a+1)(a-1). \end{aligned} \tag{4}$$

Porovnaním rovností (3) a (4) dostaneme $4 = 5a+1$, čiže $a = 3/5$, čo však nie je prirodzené číslo. Z predpokladu, že $5n+3$ je prvočíslo, sme postupnými úvahami prišli k záveru, že a nie je prirodzené číslo. Teda predpoklad, že $5n+3$ je prvočíslo, bol zlý. (Táto metóda dokazovania sa volá *dôkaz sporom.*) A tak môžeme vyhlásiť, že pre žiadne prirodzené n vyhovujúce zadaniu nie je číslo $5n+3$ prvočíslom.

Úloha č. 9: *Hago má doma kocku s dĺžkou hrany* 3*, ktorá je rozdelená na* 27 *rovnakých malých kociek s dĺžkami hrán* 1*. Hago každé z čísel* $1, 2, \ldots, 27$ *priradil práve jednej malej kocke. Potom spočítal súčet týchto čísel pre každú*

[2] Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo.

trojicu kociek ležiacich na jednej priamke rovnobežnej s nejakou hranou kocky. Takto dostal 27 súčtov. Zistite, koľko najviac z týchto súčtov môže byť nepárnych.

Riešenie: (opravoval Hago a Lindtka)
Pri prvom pohľade na tento príklad si môžeme všimnúť, že na číslach samotných nezáleží, záleží iba na ich parite. Máme 14 nepárnych čísel (budeme ich označovať N) a 13 párnych čísel (budeme ich označovať P) — toľko ich totiž je medzi číslami 1 až 27. Takisto sa pozrime, kedy je nejaký súčet párny. To sa stane práve vtedy, keď sa v ňom nachádza párny počet nepárnych čísel. Teraz už máme základné informácie, ktoré nám pomôžu pri riešení príkladu. Pozrime sa na našu kocku $3 \times 3 \times 3$, avšak iba na tie súčty, ktoré sú navzájom rovnobežné (súčty rovnobežné s jednou konkrétnou hranou). Takto sme získali 9 súčtov, pričom každé číslo je v práve jednom z týchto deviatich súčtov. Ak zrátame týchto 9 súčtov, zrátame všetky čísla od 1 po 27. Ale to je 14 N a 13 P, čiže tento súčet je párny. Tým pádom vieme, že z našich deviatich súčtov je párny počet nepárnych. Z toho vyplýva, že je medzi nimi aspoň jeden párny súčet.
Ak si ale teraz vyberieme iných 9 rovnobežných súčtov, takisto tam musí byť párny počet nepárnych súčtov, čiže aspoň jeden párny súčet a platí to aj pre zvyšných 9 súčtov. (Sú tri rôzne smery hrán.)
Takto máme 3 trojice s párnym súčtom, ktoré ale nie sú navzájom rovnobežné, čiže sú určite rôzne. Počet nepárnych súčtov bude teda najviac 24. Teraz nám stačí ukázať, že pre 24 nepárnych súčtov vieme vyhovujúco očíslovať kocky a budeme hotoví. Najľahšie sa to bude dokazovať nájdením takej kocky. Nakreslíme ju po jednotlivých poschodiach:

N	P	P
P	N	P
P	P	N

N	N	N
N	N	N
N	N	N

N	P	P
P	N	P
P	P	P

.

Úloha č. 10: *CéDečka prestalo baviť skákať po nekonečnej šachovnici koňom, ktorý chodí klasicky do tvaru písmena L. Preto si vymyslel (a, b)-koňa, ktorý skáče o a políčok jedným smerom, o b políčok druhým smerom a postavil ho na svoju nekonečnú šachovnicu. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla a a b sa jeho (a, b)-kôň vie dostať na vedľajšie políčko, susediace stranou so začiatočným políčkom, na menej ako $a + b$ ťahov.*

Riešenie: (opravoval CD)
Pre začiatok by sme si radi zapísali pohyb koňa po šachovnici v reči matematiky, aby sme sa v tom lepšie vyznali. Použijeme súradnicovú sústavu a BUNV[3] začíname v bode $[0, 0]$. Keďže vieme plochu symetricky otočiť, tak BUNV sa chceme dostať do bodu $[0, 1]$. Kôň v každom kroku zmení každú zo svojich súradníc o $\pm a$ alebo $\pm b$, teda po niekoľkých ťahoch budú obe súradnice jeho polohy tvaru $ka + lb$, pre nejaké celočíselné k, l. Čo vieme o týchto k, l? Opisujú, o koľko viac skočil kôň o $+a$, respektíve $+b$ ako o $-a$ respektíve $-b$. (Premyslite si.) Teraz už máme pohyb koňa opísaný, hŕŕ sa do samotného príkladu.
Celý príklad pozostáva z troch pozorovaní, pričom v treťom využijeme prvé dve. Prvé pozorovanie vychádza z rovnice pre y-ovú súradnicu $ka + lb = 1$. Čo by sa stalo, ak by boli a, b súdeliteľné? Potom by sa dali zapísať ako $a = d \cdot a_0, b = d \cdot b_0$ pre nejaké $d > 1$ a celá rovnica by sa dala prepísať ako $1 = kda_0 + ldb_0 = d \cdot (ka_0 + lb_0)$. Vidíme, že d delí pravú stranu, takže d musí deliť aj ľavú stranu. Keďže platí $d > 1$, tak nastal spor. Teda a, b sú nesúdeliteľné.
Druhé pozorovanie sa dalo obísť, avšak prinášalo sympatické riešenie. Použijeme bežné ofarbenie šachovnice. BUNV začíname na čiernom políčku a teda $[0, 1]$, na ktoré sa chceme dostať, je biele. V závislosti od a, b bude kôň po každom skoku meniť farbu, alebo bude stále skákať po čiernych. Keďže kôň začína na čiernom políčku, a na konci má byť na bielom políčku, tak je zrejmé, že bude meniť farby. A taktiež je zrejmé, že musí spraviť nepárny počet skokov.
Ešte sme nevyužili, že x-ová súradnica má byť na konci 0. Z pohľadu pohybu nášho koňa to znamená, že $ka+lb = 0$ a teda $ka = -lb$. (Toto sú iné k, l ako v prvom pozorovaní.) Máme $a|ka$, z čoho vyplýva $a| - lb$. Keďže z prvého pozorovania sú a, b nesúdeliteľné, tak $a|l$. Z analogickej úvahy dostávame aj $b|k$. Čo ak by $k = 0$? Potom aj $l = 0$. To ale znamená, že počet skokov o $+a$ respektíve $+b$ je rovný počtu skokov o $-a$ respektíve $-b$, z čoho ďalej vyplýva, že sme urobili párny počet skokov. To je ale spor s druhým pozorovaním, že potrebujeme nepárny počet skokov. Ostáva teda možnosť, že $k \neq 0$. Keďže $b|k$, tak $|k| \geq b$. Analogicky dostávame nerovnosť $|l| \geq a$. Z informácií, ktoré máme o k, l dostávame, že potrebujeme aspoň $a + b$ skokov, aby sme sa dostali na $[0, 1]$. (Tiež si premyslite.)
Odpoveď na otázku zo zadania je, že neexistujú prirodzené a, b, pre ktoré by sme sa vedeli dostať na susediace políčko na menej ako $a + b$ skokov.

Úloha č. 11: *Petržlen je guvernérom štátu, kde medzi každými dvoma mestami existuje priame cestné spojenie, bez križovatiek s inými cestami. V štáte je n miest a platí sa mýto v cene x_{ij} za použitie cesty medzi mestami i a j. Cesta medzi dvoma mestami je oboma smermi rovnako drahá. Okružnou cestou nazveme postupnosť n ciest prechádzajúcich cez každé mesto práve raz. Petržlen chce byť spravodlivý, a preto nariadil zákon, ktorý každej okružnej ceste určuje v súčte rovnakú cenu. Dokážte, že potom existujú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ také, že pre každé i, j platí $x_{ij} = a_i + b_j$.*

[3] bez ujmy na všeobecnosti

Riešenie: (opravoval Edo a Matúš)
(Podľa *Mira Stankoviča*.) Najprv dokážeme pomocné tvrdenie.
Lema: Cena každej okružnej cesty je rovnaká práve vtedy, keď pre každú štvoricu miest a, b, c, d platí

$$x_{ac} + x_{bd} = x_{ab} + x_{cd}.$$

Dôkaz: Dokážeme dve implikácie:

$\boxed{\Rightarrow}$ Vezmime si okružnú cestu S, ktorá prechádza zaradom mestami $a - b - c - d$. Zmenou úseku $a - b - c - d$ na $a - c - b - d$ v ceste S sa cena zmení z $C + x_{ab} + x_{bc} + x_{cd}$ na $C + x_{ac} + x_{bc} + x_{bd}$, kde C je cena zvyšku cesty S. Ak je cena každej okružnej cesty rovnaká, tak tieto dve ceny sa rovnajú. Po úprave máme

$$x_{ac} + x_{bd} = x_{ab} + x_{cd}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ak pre každú štvoricu platí $x_{ac} + x_{bd} = x_{ab} + x_{cd}$, tak ukážeme, že ak v okružnej ceste presunieme jedno mesto na iné miesto, cena sa nezmení. Potom vhodnými presunmi miest vieme dostať všetky okružné cesty, teda ich ceny musia byť rovnaké. Zmeníme okružnú cestu $S_1 = \cdots - a - b - c - \cdots - k - l - \cdots$ na $S_2 = \cdots - a - c - \cdots - k - b - l - \cdots$. S využitím predpokladu najskôr pre štvoricu miest (b, c, k, l) a potom pre (a, b, c, k) máme

$$\text{Cena } S_1 = C + x_{ab} + x_{bc} + x_{kl} = C + x_{ab} + x_{bl} + x_{ck} = C + x_{ac} + x_{bl} + x_{bk} = \text{Cena } S_2.$$

Teraz nájdeme celé čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ s požadovanou vlastnosťou, čím dokážeme, že existujú.
Ak si zvolíme hodnotu a_1 ľubovoľne, jednoznačne tým určíme hodnoty $b_2, \ldots, b_n$ (zo vzťahu $x_{1i} = a_1 + b_i$). Ďalej ukážeme, že existuje vhodné a_2, aby platil vzťah zo zadania. To existuje, ak pre každé i, j platí

$$\begin{aligned} x_{2i} - b_i &= x_{2j} - b_j (= a_2), \\ x_{2i} - b_i - a_1 &= x_{2j} - b_j - a_1, \\ x_{2i} - x_{1i} &= x_{2j} - x_{1j}, \\ x_{2i} + x_{1j} &= x_{2j} + x_{1i}, \end{aligned}$$

čo určite platí vďaka leme.
Máme už určené čísla a_1, a_2, $b_2, \ldots, b_n$. Hodnotu b_1 určíme zo vzťahu $b_1 = x_{21} - a_2$. Zvyšné hodnoty vieme zistiť zo vzťahu

$$a_k = x_{k1} - b_1.$$

Hodnota nebude závisieť na voľbe cesty, cez ktorú to počítame, lebo

$$\begin{aligned} x_{kj} - b_j &= x_{ki} - b_i, \\ x_{kj} - b_j - a_1 &= x_{ki} - b_i - a_1, \\ x_{kj} - x_{1j} &= x_{ki} - x_{1i}, \\ x_{kj} + x_{1i} &= x_{ki} + x_{1j}, \end{aligned}$$

čo platí podľa lemy, teda takto zvolené čísla budú spĺňať vzťah $x_{ij} = a_i + b_j$, pre všetky i, j.
Našli sme teda čísla $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, pre ktoré platí $x_{ij} = a_i + b_j$. Ešte dokážeme, že každá okružná cesta má rovnakú cenu. Podľa lemy nám stačí dokázať, že pre ľubovoľnú štvoricu miest k, l, m, n platí

$$\begin{aligned} x_{km} + x_{ln} &= x_{kl} + x_{mn}, \\ a_k + b_m + a_l + b_n &= a_k + b_l + a_m + b_n, \\ a_l + b_m &= a_m + b_l, \\ x_{lm} &= x_{ml}, \end{aligned}$$

čo podľa zadania platí.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	3	0			9	9	9	9	9		45	45
1.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	3	1			9	9	9	9	9		45	45
1.	Lukáček Viktor	4.	GsvM PO	5	2			9	9	9	9	9		45	45
1.	Šafin Jakub	3.	GPH MI	6	3			9	9	9	9	9		45	45
1.	Vodička Martin	3.	GAlej KE	8	9			9	9	9	9	9		45	45
6.	Hanzely Filip	3.	GAP SB	8	4			9	8	9	9	9		44	44
6.	Šimsa Štěpán	3.	Litoměřice ČR	6	6			9	8	9	9	9		44	44
8.	Horváth Samuel	2.	GPár NR	4	0	9	9	9	9	6				42	42
8.	Tóth Michal	4.	GJH BA	11	7			9	7	9	9	8		42	42
10.	Cibulka Samuel	3.	GJH BA	6	0	9	9	9	9	5				41	41
10.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	2	0	9	5	9	9	9				41	41
10.	Pokrývka Filip	2.	G Bánovce	5	1		9	9		9	9	5		41	41
10.	Stankovič Miroslav	2.	GPoš KE	5	4			9	8	9	6	9		41	41
14.	Liu Zhen Ning Dávid	2.	Gamča BA	3	1		4	9	9	9	9			40	40
14.	Smolík Milan	3.	GJH BA	5	0	6	8	9	8	9				40	40
16.	Kopf Michal	4.	Opava ČR	11	6			9	8	9	8	5		39	39
17.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	3	0	9	9	9	8	3				38	38
17.	Matejovičová Tatiana	3.	Gamča BA	5	1		4	9	9	9	7			38	38
17.	Puza Marko	2.	GPoš KE	3	0	9	8	7	8	5	6			38	38
20.	Ficková Klára	4.	GPoš KE	6	3			9	9	6	9	3		36	36
20.	Horňák Marián	4.	GPár NR	10	9			9	9	9	9			36	36
20.	Kossaczká Marta	3.	Gamča BA	8	5			9	9	9	9			36	36
23.	Bačinská Irena	2.	G Lipany	2	0	9	3	9	5	9				35	35
23.	Macko Vladimír	3.	GĽŠ ZV	6	3			9	8	9	9			35	35
25.	Halajová Barbora	4.	GVO ZA	10	4			9	9	6	9			33	33
25.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	2	1		9	9	9	6				33	33
25.	Svoboda Josef	3.	Frýdlant ČR	5	2		6	9	9	9				33	33
28.	Surovčík Juraj	3.	GPOH DK	7	2		6	9	8	9				32	32
29.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	2	0		9	9	9		4			31	31
29.	Jasenčáková Katarína	4.	GVO ZA	11	5			9	9	8	5			31	31
29.	Šimková Ľudmila	2.	GPár NR	5	1		9	9	4	9				31	31
32.	Klembarová Barbora	4.	GKuk PP	10	4			9	9	8		4		30	30
33.	Gafurov Askar	3.	Gamča BA	5	1		9	9	2	9				29	29
33.	Koprda Pavol	4.	GAM TT	10	4			9	9	9	2			29	29
33.	Korbela Michal	2.	G Bánovce	5	1		8	9		4	7	1		29	29
33.	Kováčová Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	6		9	9	5				29	29
37.	Daniel Mark	2.	GPár NR	4	0	9	2	9	8					28	28
37.	Prívozník Matej	2.	GJH BA	5	1		9	9		9		1		28	28
37.	Rapavý Martin	2.	GAlej KE	4	0	6	5	9	8					28	28
37.	Žídek Augustin	4.	Frýdlant ČR	11	5			9	9	5	4	1		28	28
41.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	2	0	9	9	8	1					27	27
41.	Hlaváčik Matúš	3.	GAlej KE	6	2			9	8	9	1			27	27
41.	Marečáková Barbora	4.	GKuk PP	11	5			7	8	6	6			27	27
44.	Kurdelová Alžbeta	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	8	9						26	26
45.	Rabatin Branislav	4.	GJH BA	7	1			9	8	8				25	25
46.	Hledík Michal	3.	GJH BA	6	2			9			6	9		24	24
46.	Mojžišová Karolína	2.	Gamča BA	5	1		4	9	2	9				24	24
48.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	4	1		1	7	6	9				23	23
48.	Komanová Kristína	3.	GAS BB	6	2		6	9	0	8				23	23
48.	Magyarová Zuzana	2.	GBST LC	5	1		8	9	1	5				23	23
48.	Oravec Matej	1.	GVar ZA	1	0	9	6	7		1				23	23
52.	Bahyl Jakub	3.	GVar ZA	3	0	6	2	9		3	2			22	22
52.	Psota Miroslav	2.	GHlin ZA	5	1		6	9	1	6				22	22

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
54.	Greššák Jerguš	3.	ŠPMNDG BA	4	0	2	4	9	0	6				21	21
54.	Kavický Dušan	3.	GJH BA	5	2		7	9		5				21	21
54.	Kmeťová Katarína	4.	Kilmallock IR	8	1		4	9	8					21	21
54.	Krakovská Hana	2.	Gamča BA	5	1		4	9	2	6				21	21
54.	Lipovský Mário	2.	GJH BA	4	0		4	9	8					21	21
54.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3	0	9	3	9	0					21	21
60.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3	0		5	9		6				20	20
61.	Belanová Michaela	4.	ŠPMNDG BA	10	4			9	0	9	1			19	19
61.	Ječmenová Andrea	2.	GVO ZA	5	1		5	9		5				19	19
61.	Magurová Lucia	3.	GPoš KE	5	0	9		9	1					19	19
61.	Šromeková Karolína	2.	GDT PP	5	0	9	1	9						19	19
65.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2	0						9	9		18	18
65.	Benešová Katarína	3.	ŠPMNDG BA	7	2		3	9	0	6				18	18
65.	Galovičová Soňa	4.	GJH BA	11	8			9	9					18	18
65.	Iždinská Dominika	2.	GJH BA	4	0	9		9						18	18
65.	Santer Martin	3.	GMH Trstená	6	0	9		9						18	18
65.	Semanišinová Denisa	3.	GAlej KE	5	0	9		9						18	18
65.	Vlček Andrej	4.	EvSŠ LM	7	2			9	9					18	18
72.	Hrivová Ivona	2.	GVO ZA	5	1		4	9	0	4				17	17
72.	Nociarová Jela	3.	GBST LC	6	1	9	8	9						17	17
74.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3	0	2	4	9	1					16	16
75.	Koľveková Veronika	3.	GPoš KE	3	0		1	9		5				15	15
76.	Šandalová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	4							13	13
77.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3	0				9					9	9
77.	Hraška Peter	3.	Gamča BA	4	0			9						9	9
77.	Pellerová Daniela	3.	Gamča BA	8	3			9						9	9
77.	Petrucha Jaroslav	3.	GMet BA	8	3			9						9	9
81.	Mikuš Peter	2.	GJAR PO	3	0		3	4		1				8	8
82.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	2		9	8	9	9	9	8		44
2.	Murin Martin	1.	GJH BA	2		9	8	9	6		9		41
2.	Ralbovský Peter	0.	ŠPMNDG BA	0		9	7	7	9	0	9		41
4.	Longa Marián	1.	ŠPMNDG BA	2		9	8	9		4	9		39
5.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3			7	5	9	3	9		33
6.	Králik Matej	1.	GJH BA	2		9	9	4			9		31
6.	Palko Maximilián	2.	1SG BA	3			7	7	4	4	9		31
8.	Lâm Tuân Dûng	1.	GJH BA	2		9	2		9		9		29
9.	Krakovská Ema	1.	Gamča BA	1		9	7	3			9		28
10.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	3					9	9	9		27
11.	Veselá Simona	1.	GJH BA	1		9		7			8		24
12.	Vajner Elisabeth	1.	GLS BA	2		9	5	4		3			21
13.	Svitková Patricia	2.	GLN BA	3			2	7		1	9		19
14.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	2						9	9		18
14.	Rebro Marcel	2.	ŠPMNDG BA	2		9					9		18
14.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	2						9	9		18
17.	Šteňová Júlia	1.	GJH BA	2		9		8					17
18.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3					2	4	9		15
18.	Kobák Michal	2.	Gamča BA	2					6		9		15
20.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3						5	9		14
21.	Liu Zhen Ning Dávid	2.	Gamča BA	3						4	9		13
22.	Martinková Sandra	1.	GJH BA	1	3								3

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Madaj Pavel	1.	GVBN PD	1	7	9	7	9	9	9	9		45
1.	Mečiar Adam	1.	GVBN PD	1	9	9	9	5	9	4	9		45
3.	Prešinská Kristína	1.	GPár NR	2		9	9	7	9		9		43
4.	Marčeková Katarína	1.	GPár NR	1		9	9	5	6		9		38
5.	Kováčová Mária	1.	GsvCM NR	1	3	9	9	7			9		37
6.	Bafrnec Matúš	1.	GPár NR	1		9	9	8	6	0	4		36
6.	Kluvanec Roman	1.	GPár NR	1	3	9	9	2	6		9		36
8.	Bieliková Michaela	2.	GVMS	3			8	6		6	9		29
9.	Hladká Barbora	1.	GPár NR	1	4	6	9	7			0		26
9.	Straková Valentína	2.	GVMS	3			7	6		4	9		26
11.	Tóth Andrej	2.	GPár NR	3			8	5		2	4		19
12.	Mikulec Jaromír	1.	GsvJ NM	2		1	4	8	1	3			17

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Santrová Michaela	1.	GMH Trstená	2		9	7	7		6	9		38
2.	Dráček František	1.	GŠkol PB	2		9	6	9	0	2	9		35
3.	Halamová Mária	1.	GVO ZA	2		9	7	7			9		32
4.	Kňaze Adam	1.	GJCh BR	2		9	2	7		4	9		31
4.	Mores Martin	2.	GVar ZA	3			7	9	6		9		31
4.	Nepšinská Silvia	1.	GJCh BR	2		9	3	6		4	9		31
4.	Rizman Daniel	2.	GVar ZA	3			8	9	6		8		31
8.	Barbora Dávid	1.	GFS	1	9		9	9					27
8.	Hošták Viliam	2.	GVar ZA	2		9	7	6		5	0		27
8.	Labjaková Gabriela	1.	GMH Trstená	1	2	9	8	8					27
11.	Oravec Matej	1.	GVar ZA	1			2		9	6	7		24
11.	Tomašec Samuel	2.	GVar ZA	3			4	5		9	6		24
13.	Bahyl Jakub	3.	GVar ZA	3					6	2	9		17
14.	Dendis Tomáš	1.	BiG Sučany	1	3	1	0	1					5
15.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kurimská Mária	2.	GsvM PO	2		9	9	6		2	9		35
2.	Ténai Alexander	1.	GPoš KE	1	6	9	6			4	9		34
3.	Puza Marko	2.	GPoš KE	3		9	9		9	8	7		33
4.	Ženčuchová Andrea	1.	GJAR PO	1	5	9	7	1	0	2			24
5.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	2					9	5	9		23
6.	Bačinská Irena	2.	G Lipany	2					9	3	9		21
7.	Trembecký Richard	3.	GAlej KE	3						9	9		18
8.	Flóriánová Lucia	2.	GPoš KE	2			9	6					15
9.	Dudič Ján	3.	GPoš KE	3			9	1		3	1		14
10.	Koľveková Veronika	3.	GPoš KE	3						1	9		10
11.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	3							9		9
11.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	2					0		9		9
13.	Mikuš Peter	2.	GJAR PO	3						3	4		7
14.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Štěpánek Martin	1.	Příbor ČR	2		9	7	9		4	9		38
2.	Žárský Jan	1.	Kopřivnice ČR	2			7	9					16
3.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	3							9		9