Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2011/2012

Úloha č. 1: *Mário dostal na Vianoce špeciálnu omaľovánku. Skladá sa z lichobežníka $ABCD$[1], v ktorom je M stred strany AD a $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Jeho súrodenci mu však počarbali trojuholník MBD ružovou farbou. Vypočítajte, akú časť lichobežníka tvorí ružová plocha.*

Riešenie: (opravovala Kika)
Najprv si nakreslime obrázok a pozrime sa naň. A teraz sa zamyslime — aká je očakávaná odpoveď na otázku zo zadania? Dám vám tri možnosti: i) vo štvrtok, ii) nie, iii) podiel obsahu trojuholníka a lichobežníka.
Už máte správnu odpoveď? :) Potom asi tušíte, že treba hľadať obsahy $ABCD$ a MBD.
Vieme, že $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Z toho žiaden obsah nespočítame, ale pre jednoduchosť si označíme $|CD| = x$. Ako by sme vedeli spočítať obsah $ABCD$? Vzorček zrejme všetci poznáte, chýba nám len výška. Dokreslíme ju a označíme v. Obsah lichobežníka teraz vieme vyjadriť pomocou x a v. Ale pozor! Ani jedna z týchto dĺžok nie je zadaná. To by nevadilo, ak by sa nám podarilo vyjadriť aj obsah trojuholníka MBD pomocou x a v. Ak potom budeme robiť podiel týchto dvoch obsahov, neznáme dĺžky sa v zlomku možno vykrátia.
Trojuholník MBD je súčasťou trojuholníka ABD. Obsah ABD vieme vypočítať, lebo poznáme základňu ($3x$) aj výšku (v). Keďže M je stred strany AD, úsečka BM je ťažnicou v trojuholníku ABD. A čo robí ťažnica s trojuholníkom? Delí ho na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Inak povedané $S_{MBD} = S_{ABD}/2$.
Teraz to celé v skratke zapíšeme ešte raz:

$$S_{ABCD} = \frac{(3x+x)v}{2} = 2xv,$$

$$S_{ABD} = \frac{3xv}{2},$$

$$S_{MBD} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{3xv}{4},$$

$$\frac{S_{MBD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3xv}{4}}{2xv} = \frac{3}{8}.$$

Ružová časť zaberá 3/8 z omaľovánky.

Úloha č. 2: *Keď sa Mojo hral s jedlom, našiel v omáčke ostrouhlý trojuholník FUJ. Hneď si všimol, že keď si označí Y pätu výšky z bodu J na stranu FU a S stred strany UJ, tak úsečka YS je rovnobežná so stranou FJ. Pomôžte mu dokázať, že trojuholník FUJ je rovnoramenný.*

Riešenie: (opravovali Betka a Marek Š.)
Úsečky FJ a YS sú rovnobežné. Potom pre súhlasné uhly platí $|\sphericalangle FJU| = |\sphericalangle YSU|$ a $|\sphericalangle JFU| = |\sphericalangle SYU|$.
Trojuholníky FUJ a YUS sú podobné, pretože majú zhodné uhly. To však pre pomery strán znamená $UJ/US = FU/YU = FJ/YS$. Keďže bod S je stred strany UJ, tak $UJ/US = 2$. Teda aj $FU/YU = 2$, čo znamená, že Y je stred strany UF.
Teraz si všimneme trojuholníky FYJ a YUJ. Majú spoločnú stranu YJ, $|\sphericalangle FYJ| = |\sphericalangle UYJ| (= 90°)$ a $FY = YU$. Podľa vety *sus* sú teda zhodné. Potom uhly pri vrcholoch F a U sú zhodné, čo však znamená, že FUJ je rovnoramenný trojuholník.

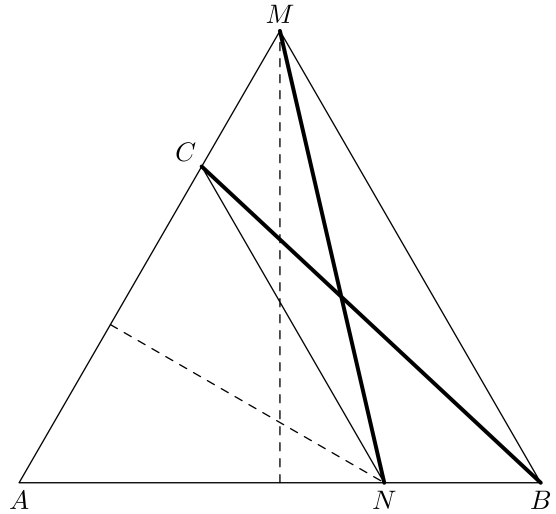
Úloha č. 3: *Veronika má v záhrade aspoň tri krtince. Tieto krtince majú zaujímavú vlastnosť: Existuje také reálne číslo r, že v každej trojici krtincov sú aspoň dva krtince vzdialené od seba najviac r. Dokážte, že Veronika môže vyznačiť na zemi dva kruhy s polomerom r tak, že ich zjednotenie bude obsahovať všetky krtince.*[2]

[1] Ako to štandardne býva, základňami lichobežníka $ABCD$ sú strany AB a CD.
[2] Krtince chápeme ako body.

Riešenie: (opravovali Mary a Vero)
V tomto príklade využijeme jednu strašne super vec, čo sa volá extremálny princíp — všimneme si jednu konkrétnu, niečím extrémnu dvojicu krtincov. Nech sú to teda tie dva krtince, čo sú od seba najďalej, a nazvime ich K_1 a K_2. Čo vieme teraz povedať?
Ak $|K_1K_2| \leq r$, tak z predpokladu, že K_1 a K_2 sú tie najvzdialenejšie krtince, vyplýva, že vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma krtincami je tiež menšia alebo rovná r. Teda pre všetky krtince A platí $|K_1A| \leq r$ a tiež $|K_2A| \leq r$. V tomto prípade nám teda stačí jediný kruh so stredom v ľubovoľnom z bodov (krtincov) K_1, K_2.
Čo ak $|K_1K_2| > r$? Potom sa pre každý krtinec A pozrieme na trojicu A, K_1, K_2. V tejto trojici je podľa zadania nejaká dvojica krtincov od seba vzdialená najviac r, a keďže K_1, K_2 to nie je, musí to byť K_1, A alebo K_2, A. Inými slovami, každý krtinec je aspoň od jedného z krtincov K_1, K_2 vzdialený nanajvýš r. A čo to znamená pre náš príklad? Zvolíme kruhy so stredmi v K_1, K_2 a sme v cieli.

Úloha č. 4: *Lindu v noci vystrašil trojuholník ABC so 60 stupňovým uhlom pri vrchole A. Hneď, ako sa spamätala, označila si M priesečník priamky AC a osi strany AB. Potom si označila N priesečník priamky AB a osi strany AC. Lindu trojuholník prestane strašiť, až keď dokáže, že $|BC| = |MN|$. Pomôžte jej s tým.*

Riešenie: (opravoval JeFo)
Len pre prípad si zopakujeme, čo je os úsečky. Je to množina bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od oboch koncových bodov úsečky. Po vyzbrojení sa týmto poznatkom, je úloha hneď o čosi ľahšia, lebo teraz vieme, že bod M má rovnakú vzdialenosť od bodov A a B.
Je teda jasné, že trojuholník ABM je rovnoramenný, a čo viac, je aj rovnostranný. (Rovnoramenný trojuholník so 60-stupňovým uhlom je vždy rovnostranný.) Potom má aj uhol pri vrchole M veľkosť 60 stupňov. A už to skoro máme. Stačí si len uvedomiť, že to isté platí aj pre trojuholník ACN.
Už ostáva iba skonštatovať očividné. Vzdialenosti $|BC|$ a $|MN|$ musia byť rovnaké, lebo keď sa pozrieme na útvar $BMCN$ je jasné, že je to rovnoramenný lichobežník (Ak ti to náhodou nie je jasné, tak sa nad tým poriadne zamysli.) a jeho uhlopriečky majú rovnakú dĺžku.



Úloha č. 5: *Kružnica je rozdelená na štyri oblúky. Dokážte, že keď spojíme každú dvojicu stredov daných oblúkov úsečkou, určite vznikne aspoň jedna dvojica navzájom kolmých úsečiek.*

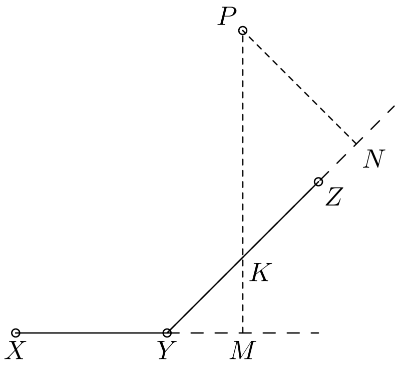
Riešenie: (opravovali Maťa a Peťo)
Označme postupne A, B, C a D body, ktoré delia kružnicu na štyri oblúky a stredy týchto oblúkov ako S_{AB}, S_{BC}, S_{CD} a S_{DA}. Týmto máme kružnicu rozdelenú na osem oblúkov, pričom sú tam štyri dvojice rovnakých oblúkov. Súčet stredových uhlov k týmto oblúkom je 360°, teda súčet obvodových uhlov je 180°. Preto keď vyberieme z každej dvojice rovnakých oblúkov jeden, súčet ich obvodových uhlov bude 90°.
Pozrime sa teraz na trojuholník $S_{BC}S_{CD}T$, kde T je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{DA}$. Veľkosť uhla $S_{BC}S_{CD}T$ je vlastne súčtom obvodových uhlov k oblúkom $S_{AB}B$ a BS_{BC}, rovnako veľkosť uhla $S_{CD}S_{BC}T$ je súčtom obvodových uhlov k oblúkom $S_{CD}D$ a DS_{DA}. Dané oblúky sú každý z inej dvojice rovnakých oblúkov, na ktoré je rozdelená kružnica. Súčet veľkostí týchto uhlov je teda 90°, čo znamená, že tretí uhol v trojuholníku $S_{BC}S_{CD}T$ musí byť pravý. Tým sme ukázali, že uhlopriečky štvoruholníka $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{DA}$ budú na seba vždy kolmé.

Úloha č. 6: *Vnútri konvexného mnohouholníka[3] je bod P, z ktorého vedieme kolmicu na každú priamku určenú nejakou jeho stranou. Dokážte, že aspoň jedna z piat týchto kolmíc leží na obvode daného mnohouholníka.*

Riešenie: (opravoval Marek K.)
Nakreslime si konvexný n-uholník a bod P v ňom. Označme si vrcholy $A_1, \ldots, A_n$. Dokreslime spojnice všetkých vrcholov mnohouholníka s bodom P, čize úsečky A_iP. Tým sme náš n-uholník rozdelili na n trojuholníkov. V každom trojuholníku uvažujme výšku z bodu P. Chceme dokázať, že aspoň v jednom trojuholníku bude päta tejto výšky ležať na strane daného trojuholníka. Poďme to dokázať sporom: Nech všetky päty ležia mimo.
Všimnime si, že v trojuholníku XYP neleží päta výšky z bodu P na strane XY práve vtedy, keď má daný trojuholník tupý uhol buď pri vrchole X alebo Y.
Tak nech má trojuholník A_1A_2P tupý uhol pri vrchole A_2. Z konvexnosti mnohouholníka potom vieme, že v trojuholníku A_2A_3P nemôže byť tupý uhol pri vrchole A_2 (uhol $A_1A_2A_3$ by nebol konvexný), takže trojuholník A_2A_3P musí mať tupý uhol pri vrchole A_3.
Vieme, že ľubovoľný tupouhlý trojuholník má najdlhšiu stranu oproti tupému uhlu. Preto $|A_1P| > |A_2P| > |A_3P|$.

[3] Konvexný mnohouholník je taký mnohouholník, ktorého veľkosti všetkých vnútorných uhlov sú menšie ako 180°.

Predošlé úvahy fungujú rovnako pre ľubovoľnú dvojicu susedných trojuholníkov, preto máme $|A_1P| > |A_2P| > |A_3P| > \cdots > |A_nP| > |A_1P|$, čiže $|A_1P| > |A_1P|$, čo je spor.



Iné riešenie:
Ukážeme si elegantné riešenie využívajúce extremálny princíp: Zo všetkých piat uvažujme tú najbližšiu k bodu P, označme ju M. Nech je to päta na stranu XY a nech N je päta na susednú stranu YZ. Čo sa stane, ak M neleží na úsečke XY? Nech leží napr. na polpriamke opačnej k polpriamke YX. Z konvexnosti mnohouholníka a z toho, že P leží v jeho vnútri vieme, že priamka YZ pretína vnútro úsečky PM, označme si tento priesečník K. Takže máme $|PK| < |PM|$. Zrejme ale $|PN| \leq |PK|$. Odtiaľ máme $|PN| < |PM|$, čo je ale spor s naším predpokladom, že M je najbližšia päta.

Poznámka: Toto riešenie nám dokonca dáva informáciu navyše — nielenže vieme, že aspoň jedna päta leží na obvode mnohouholníka, vieme dokonca, že vždy tá najbližšia.

Komentár: Mnohí riešili úlohu nasledovne:
Pre každú stranu mnohouholníka spravme kolmice na túto stranu v jej koncových bodoch. Takto nám vznikne nad každou stranou nekonečný pás. Ak sa bod P nachádza v nejakom páse, tak kolmica z neho na prislúchajúcu stranu leží na danej strane, čiže sme vyhrali. Zjednotenie všetkých takýchto pásov zjavne pokryje celý mnohouholník, takže bod P nemá kde ležať tak, aby tvrdenie zo zadania neplatilo.
Toto riešenie by bolo správne, ak by sme dokázali, že tie pásy ho naozaj celý pokryjú. Ono to totiž zjavné nie je. Keďže dôkaz tohto je dlhý a nie príliš zaujímavý, ani ho tu neuvedieme.

Úloha č. 7: *Zostrojte štvorec $ABCD$, keď máte daný jeho vrchol A a vzdialenosti jeho vrcholov B a D od daného bodu E.*

Riešenie: (opravovali Kubo K. a Mojo)
Bod B určite leží na kružnici b so stredom v bode E a polomerom $|BE|$. Obdobne D leží na kružnici d so stredom E a polomerom $|DE|$. Predstavme si, že sme našli štvorec $ABCD$. Čo sa stane keď rovinu zrotujeme okolo bodu A o 90 stupňov v kladnom alebo zápornom smere[4]? Buď sa bod B zobrazí na bod D alebo sa bod D zobrazí na bod B. Keď teda zrotujeme kružnicu b o 90 stupňov v kladnom a zápornom smere tak mi vzniknú kružnice b' a b'', o ktorých viem, že bod D leží na aspoň jednej z nich. V tom prípade však vieme, že $D \in d \cap b'$ alebo $D \in d \cap b''$. Takto sme objavili všetky možné polohy bodu D, a keď už máme body A a D, tak štvorec $ABCD$ ľahko dokončíme. (Premyslite si ako.)
Diskusia o počte riešení: Jediné miesto v postupe, kde nám môže vzniknúť viacero riešení je veľkosť prieniku kružníc d a b' (resp. d a b''). Keďže kružnica b' je obrazom kružnice b'' v osovej súmernosti podľa osi AE a kružnica d je súmerná podľa tejto osi, tak veľkosť prieniku b' a d je rovnaká ako veľkosť prieniku b'' a d. Preto nám stačí vyšetriť len vzájomnú polohu kružníc b' a d. Dve kružnice môžu mať spoločných 0, 1, 2 alebo nekonečno (všetky) bodov. Už nám teda stačí len zistiť podmienky, za ktorých tieto situácie nastávajú. Väčšina z vás, ktorí ste napísali aj tieto podmienky, ste však zabudli na to, že sa môžu nepretnúť aj kvôli tomu, že menšia zrotovaná kružnica je stále vnútri väčšej. Na určenie podmienky kedy sa teda kružnice pretínajú postačí nakresliť si obrázok a Pytagorova veta. Dostaneme, že ak $|\,|BE| - |DE|\,| < \sqrt{2}|AE| < |BE| + |DE|$, kružnice sa pretínajú v dvoch bodoch, a teda dostaneme 4 riešenia. Ak platí $|\,|BE| - |DE|\,| = \sqrt{2}|AE|$ alebo $\sqrt{2}|AE| = |BE| + |DE|$, kružnice sa dotýkajú a teda máme 2 riešenia. V prípade $A = E$ a $|BE| = |DE|$ sú kružnice d a b' totožné a úloha má nekonečne veľa riešení. Ak ani jeden z týchto prípadov nenastáva, kružnice sa nepretínajú a úloha nemá riešenie.

Komentár: Strhali sme 2 body, keď ste zabudli otáčať kružnicu do oboch strán. Strhali sme ďalšie 2 body v prípade, že ste sa nijak nezamýšľali nad tým, či sa kružnice vôbec musia pretínať. Nevyžadovali sme to poriadne, pretože v zadaní nebolo priamo napísané, že máte z vecí, ktoré poznáte zo zadania vyjadriť počet riešení. Týmto spôsobom chceme verejne pochváliť *Filipa Hanzelyho* a *Kláru Fickovú*, ktorí to jediní vyjadrili správne. Na sústredení vás čaká malé prekvapenie.

Úloha č. 8: *Kružnice k a l ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku p, ktorej sa navyše dotýkajú v bodoch A a B. Kružnica m sa dotýka zvonka kružníc k a l v bodoch X a Y. Dokážte, že body A, B, X a Y ležia na spoločnej kružnici.*

Riešenie: (opravovali Paľo G. a Kubo S.)
V príklade sa veľmi často spomínajú slová ako kružnica a dotyčnica. Často to znamená (ako mnohí už určite viete), že sa pri riešení možno využije vlastnosť úsekového uhla. Bude to tak aj v tomto príklade a tak si v krátkosti pripomeňme o čo ide.
Veľkosť úsekového uhla je rovná veľkosti príslušného obvodového uhla. Teda ak máme body A, B, C na kružnici k a bodom A vedieme dotyčnicu p ku kružnici k, tak platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle XAB|$, kde X patrí priamke p a neleží

[4] Kladný smer je proti smeru hodinových ručičiek, záporný v smere.

v polrovine danej priamkou AB a bodom C. Obdobne ak bodom B vedieme dotyčnicu q ku kružnici k, tak $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABY|$, kde Y patrí q a Y neleží v polrovine danej priamkou AB a bodom C. V našom riešení budeme potrebovať rovnosť $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle ABY|$, ktorá očividne platí.
Teraz je už riešenie veľmi jednoduché. Máme kružnice k, l a m. Keďže sa dvojica kružníc k a m navzájom zvonka dotýka v jednom bode X, vieme týmto bodom viesť priamku q, ktorá bude spoločnou dotyčnicou kružníc k a m. Obdobne pre kružnice l a m existuje priamka r, ktorá bude ich spoločnou dotyčnicou v bode Y. Keď sa teraz pozrieme na vnútorné uhly štvoruholníka $ABYX$, tak si môžeme všimnúť, že je to súčet nejakých uhlov, ktoré zvierajú priamky p, q, r s tetivami AX, XY, YB. Uvažujme teraz v polrovine danej priamkou XY a bodom A body M a N také, že M leží na priamke q a N leží na priamke r. Potom z vlastnosti úsekových uhlov vieme povedať, že platia nasledujúce rovnosti:

$$|\sphericalangle MXA| = |\sphericalangle BAX| = \alpha,$$
$$|\sphericalangle MXY| = |\sphericalangle NYX| = \beta,$$
$$|\sphericalangle NYB| = |\sphericalangle ABY| = \gamma.$$

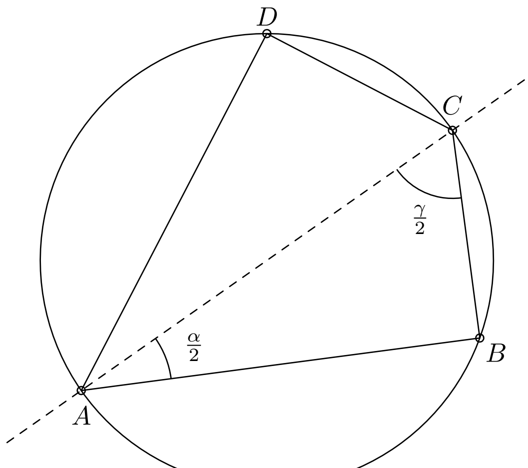
Ak chceme dokázať, že je nejaký štvoruholník tetivový, tak sa väčšinou pokúšame pracovať s jeho uhlami, keďže tetivový štvoruholník má súčet protiľahlých uhlov rovnaký (tzn. 180°). Pozrime sa teda na súčty veľkostí protiľahlých uhlov štvoruholníka $ABYX$:

$$|\sphericalangle AXY| + |\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle AXM| + |\sphericalangle MXY| + |\sphericalangle ABY| = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$|\sphericalangle BAX| + |\sphericalangle BYX| = |\sphericalangle BAX| + |\sphericalangle NYX| + |\sphericalangle NYB| = \alpha + \beta + \gamma.$$

Teda $|\sphericalangle AXY| + |\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle BAX| + |\sphericalangle BYX|$, čím sme dokázali, že štvoruholník $ABYX$ je tetivový. Vyhrali sme. :)

Úloha č. 9: *Majme štvoruholník vpísaný do kružnice, ktorého osi dvoch rôznych vnútorných uhlov sú rovnobežné. Dokážte, že potom súčet štvorcov dĺžok niektorých jeho dvoch strán je rovný súčtu štvorcov dĺžok jeho zvyšných dvoch strán.*

Riešenie: (opravovali Cédéčko a Natali)
O štvoruholníku máme dve informácie. Vieme, že je vpísaný do kružnice, a že osi nejakých dvoch jeho vnútorných uhlov su rovnobežné.
Ako prvé treba zistiť, ktoré dva vrcholy by to mohli byť. Jedna zo základných vlastností štvoruholníka vpísaného do kružnice je tá, že všetky jeho vnútorné uhly sú menšie ako 180°. V takomto prípade nemôžu byť rovnobežné osi dvoch susedných uhlov (Vieme to jednoducho dokázať napríklad sporom, premyslite si.) takže nám je jasné, že sa jedná o protiľahlé vrcholy. Povedzme, že ide o vrcholy A a C. Zvyšné dva vrcholy a všetky uhly označíme zvyčajným spôsobom.
Sú dve možnosti — os uhla α prechádza vrcholom C, alebo pretína jednu zo strán BC, CD. Poďme sa teraz pozrieť na obe z nich.



- Os uhla α prechádza cez C, inak povedané, úsečka AC je osou uhla α.

  Aby bola os uhla γ rovnobežná s AC, musí byť totožná s AC. Potom vieme, že $|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCD| = \frac{\gamma}{2}$

  V tomto momente si uvedomíme, že sme zatiaľ nijako nevyužili to, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový (vpísaný do kružnice). Tetivové štvoruholníky majú súčty protiľahlých uhlov 180° (Skúste si to dokázať. Pokiaľ ste to nikdy nerobili, pomôže Vám pri tom veta o stredovom a obvodovom uhle.) a teda v našom prípade $\alpha + \gamma = 180°$, a z toho vieme, že $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BCA| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$. V trojuholníku ABC potom platí $|\sphericalangle ABC| = 180° - (|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB|) = 90°$. Inými slovami, trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AC.

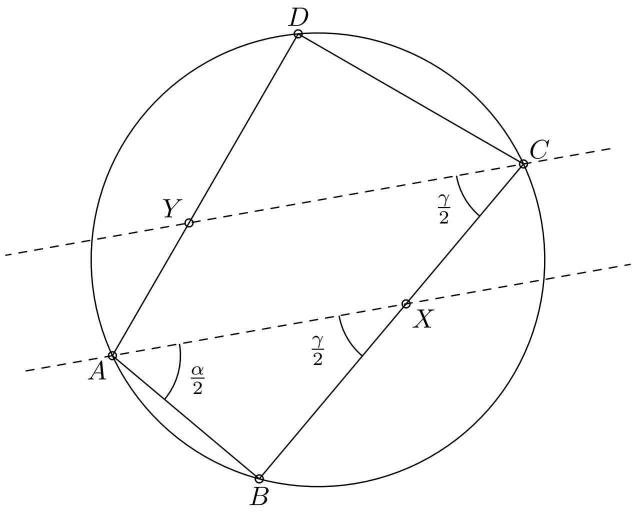
  Analogickou úvahou, alebo využitím $\beta + \delta = 180°$ zistíme, že aj trojuholník ACD je pravouhlý s preponou AC a na dokončenie dôkazu nám stačí už len Pytagorova veta:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2.$$

- Os uhla α pretína jednu zo strán BC alebo CD.

  Bez ujmy na všeobecnosti povedzme že ide o stranu BC. Potom os uhla γ musí pretínať stranu AD. (Premyslite si.) Označme X priesečník osi uhla α so stranou BC a Y priesečník osi uhla γ so stranou AD a znovu určíme veľkosti niektorých uhlov: $|\sphericalangle XAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle BCY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCD| = \frac{\gamma}{2}$. Keďže $AX \parallel CY$, uhly BCY a BXA sú súhlasné, preto $|\sphericalangle BXA| = |\sphericalangle BCY| = \frac{\gamma}{2}$. Spomenieme si, že aj teraz musí platiť, že $\alpha + \gamma = 180°$ a zistíme, že vieme veľkosť uhla ABC: $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABX| = 180° - (|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle XAB|) = 180° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}) = 90°$

  Táto možnosť sa teda od prvej nelíši, trojuholníky ABC a ACD sú pravouhlé a preto $|AB|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2$.



Úloha č. 10: *Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a uhlami α, β, γ postupne pri vrcholoch A, B a C. Označme bod D ležiaci v opačnej polrovine od bodu C vzhľadom na priamku AB, pre ktorý $|\sphericalangle DAB| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle DBA| = \beta/2$. Rovnakým spôsobom označíme body E a F pre strany BC a CA. Ukážte, že ak bodom C hýbeme po oblúku AB kružnice k (obsahujúcom bod C), tak sa veľkosť uhla EDF nemení.*

Riešenie: (opravoval Hago)

V zadaní máme uhly, ktoré sú polovičné oproti vnútorným uhlom trojuholníka. Takéto uhly vytvárajú aj osi uhlov, tak si ich môžeme skúsiť dokresliť do obrázku. Spoločne s nimi nám vznikne aj ich priesečník, ktorý si označíme I. Bod I je stredom vpísanej kružnice, no tento fakt nebudeme potrebovať. Postačí nám skutočnosť, že osi uhlov sa pretínajú v jednom bode.

Preklopením trojuholníka ABI cez os AB dostaneme trojuholník ABD (vďaka tým rovnakým uhlom). Rovnako sa trojuholník ACI preklopí cez os AC na trojuholník ACF. Nutne teda musí platiť $|AD| = |AI| = |AF|$, z čoho vyplýva, že trojuholník ADF je rovnoramenný. Jeden z jeho vnútorných uhlov má veľkosť 2α a zvyšné dva majú byť rovnaké, takže ich veľkosť bude $90° - \alpha$. Tým sme ukázali, že $|\sphericalangle ADF| = 90° - \alpha$. Obdobným postupom vieme ukázať, že $|\sphericalangle BDE| = 90° - \beta$.

Z trojuholníka ADB dopočítame veľkosť uhla ADB, ktorá činí $180° - \alpha/2 - \beta/2$. Teraz už ľahko vyjadríme, že

$$|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ADF| - |\sphericalangle BDE| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Tento uhol sa nemá meniť pri hýbaní bodom C po oblúku AB kružnice k. Toto hýbanie určite nemení uhol γ, pretože je obvodovým uhlom nad úsečkou AB, s ktorou sa nič nedeje. Keďže $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ani súčet $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ sa nemení, a teda ani jeho polovica, čo je presne veľkosť uhla EDF.

To však nie je všetko. Tak skryto sme predpokladali, že ani jeden z uhlov α, β nie je tupý. Poďme sa teraz pozrieť na situáciu, že $\alpha > 90°$ (pre β by sa to spravilo rovnako). Skoro všetko funguje rovnako, až na to, že uhol DAF sa trochu preklopil a jeho veľkosť je $360° - 2\alpha$. Trojuholník ADF je stále rovnoramenný, no $|\sphericalangle ADF| = \alpha - 90°$. Napokon

$$|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ADF| - |\sphericalangle BDE| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + (\alpha - 90°) - (90° - \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Takže aj za týchto okolností zostáva uhol EDF zachovaný.

Iné riešenie:

Ak sa vám nepáči rozoberanie prípadov, ide to aj bez neho.

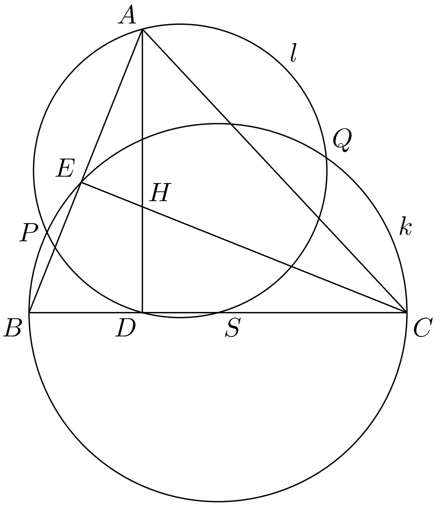
Môžeme si všimnúť, že body D, E, F sú obrazmi stredu vpísanej kružnice (bod I) v osovej súmernosti podľa AB, BC, CA. Vzdialenosť bodu I od jednotlivých strán je rovnaká — polomer vpísanej kružnice. Potom musí platiť, že $|ID| = |IE| = |IF|$, a to je rovné dvojnásobku polomeru vpísanej kružnice. Bod I je teda stredom kružnice opísanej trojuholníku DEF.

Uhol EDF je obvodový uhol a k nemu prislúchajúci stredový je uhol EIF. Keď si uvedomíme, že úsečka EI je kolmá na BC a úsečka FI kolmá na CA, vieme veľkosť uhla EIF vyjadriť ako $180° - \gamma$. Potom $|\sphericalangle EDF| = 90° - \gamma/2$, a teda závisí len od uhla γ, ktorý sa (ako sme si už povedali) nemení.

Úloha č. 11: *Ortocentrum[5] ostrouhlého trojuholníka ABC si označme H. Dotyčnice ku kružnici nad priemerom BC prechádzajúce bodom A sa dotýkajú danej kružnice v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q a H ležia na jednej priamke.*

[5] Ortocentrom nazývame priesečník výšok trojuholníka.

Riešenie: (opravoval Edo)
Označme si k kružnicu nad priemerom BC a S jej stred. Body P a Q sú dotykové body dotyčníc vedených z bodu A ku kružnici k, preto $|\sphericalangle APS| = |\sphericalangle AQS| = 90°$ a teda body A, P, Q a S ležia na kružnici s priemerom AS, označme si ju l.



Všimnime si teraz, že priamka PQ je chordálou kružníc k a l. Ako vieme, chordála kružníc k a l je priamka, na ktorej ležia práve tie body, ktoré majú rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Body P, Q a H teda ležia na priamke práve vtedy, ak H má rovnakú mocnosť ku kružnici l ako ku kružnici k.
Označme si postupne päty výšok v trojuholníku ABC na strany BC a AB ako D a E. Ľahko vidno, že mocnosť bodu H ku kružnici k si vieme vyjadriť ako $|HE| \cdot |HC|$. Pretože $|\sphericalangle ADS| = 90°$ (poprípade $D = S$), leží bod D na kružnici l a teda mocnosť bodu H ku kružnici l si môžeme vyjadriť ako $|HA| \cdot |HD|$. Teda bod H leží na chordále kružníc k a l práve vtedy, keď $|HE| \cdot |HC| = |HA| \cdot |HD|$. No keďže H leží vnútri úsečky AD aj CE, spomínaná rovnosť nastane práve vtedy, keď body A, C, D, E ležia na kružnici. Body D a E ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AC, a teda naozaj $|HE| \cdot |HC| = |HA| \cdot |HD|$ a body P, Q, H ležia na jednej priamke.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	3.	GAlej KE	8	9			9	9	9	9	9		45	90
2.	Lukáček Viktor	4.	GsvM PO	5	2			8	9	9	9	9		44	89
3.	Hanzely Filip	3.	GAP SB	8	4			9	8	8	9	9		43	87
4.	Horváth Samuel	2.	GPár NR	4	0	9	9	8	6	9	9			44	86
4.	Šafin Jakub	3.	GPH MI	6	3			9	5	9	9	9		41	86
6.	Batmendijn Eduard	1.	CGsvM SL	3	0		9	7	5	9	9			39	84
6.	Šimsa Štěpán	3.	Litoměřice ČR	6	6			7	6	9	9	9		40	84
8.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	3	1			7	6	9	6	9		37	82
9.	Liu Zhen Ning Dávid	2.	Gamča BA	3	1		9	9	7	7	9			41	81
10.	Stankovič Miroslav	2.	GPoš KE	5	4			9	6	9	6	9		39	80
11.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	2	0	9	9		5	8	6			37	78
12.	Tóth Michal	4.	GJH BA	11	7			8	8	9	0	9		34	76
13.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	2	0		9	5	6	9	8	9		41	72
13.	Klembarová Barbora	4.	GKuk PP	10	4			7	8	9	9	9		42	72
13.	Puza Marko	2.	GPoš KE	3	0	9	3	5	6	8	6			34	72
13.	Šimková Ľudmila	2.	GPár NR	5	1		9	5	9	9	9			41	72
17.	Kopf Michal	4.	Opava ČR	11	6			4	6	7	6	9		32	71
18.	Hlaváčik Matúš	3.	GAlej KE	6	2			7	9	9	9	9		43	70
19.	Horňák Marián	4.	GPár NR	10	9			7	8	9	9			33	69
19.	Kossaczká Marta	3.	Gamča BA	8	5			7	8	9	9			33	69
19.	Smolík Milan	3.	GJH BA	5	0	1	9		6	8	5			29	69
22.	Macko Vladimír	3.	GĽŠ ZV	6	3			8	5	9	4	6		32	67

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	k_β	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
22.	Svoboda Josef	3.	Frýdlant ČR	5	2			2	6	9	8	9		34	67
24.	Cibulka Samuel	3.	GJH BA	6	0	9	3		6	7				25	66
24.	Marečáková Barbora	4.	GKuk PP	11	5			7	8	9	6	9		39	66
26.	Daniel Mark	2.	GPár NR	4	0	9	3	9	8	8	3			37	65
26.	Matejovičová Tatiana	3.	Gamča BA	5	1		3	9	6	9				27	65
28.	Žídek Augustin	4.	Frýdlant ČR	11	5			9	6	8	4	9		36	64
29.	Galovičová Soňa	4.	GJH BA	11	8			9	9	9	9	9		45	63
29.	Pokrývka Filip	2.	G Bánovce	5	1		3	2	8	9	0			22	63
29.	Psota Miroslav	2.	GHlin ZA	5	1		9	8	6	6	9	9		41	63
29.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	2	1		3	7	6	8	6			30	63
33.	Ficková Klára	4.	GPoš KE	6	3			7	9	9				25	61
33.	Greššák Jerguš	3.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	7	6	9				40	61
35.	Bačinská Irena	2.	G Lipany	2	0		3		7	8	6			24	59
35.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	3	0	1	3	7	2	8				21	59
35.	Koprda Pavol	4.	GAM TT	10	4			7	8	9	6			30	59
35.	Korbela Michal	2.	G Bánovce	5	1		9	7	5	8	1			30	59
35.	Magurová Lucia	3.	GPoš KE	5	0	9		9	7	9	6			40	59
40.	Jasenčáková Katarína	4.	GVO ZA	11	5			6	8	7	6			27	58
40.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	4	1		4		8	7	9	7		35	58
40.	Semanišinová Denisa	3.	GAlej KE	5	0	9		7	8	7	9			40	58
43.	Halajová Barbora	4.	GVO ZA	10	4			5	6	7	6			24	57
43.	Rapavý Martin	2.	GAlej KE	4	0	9	2	5	5	8				29	57
45.	Hrivová Ivona	2.	GVO ZA	5	1		8	9	6	7	6	9		39	56
46.	Kováčová Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	3	5		8				25	54
47.	Gafurov Askar	3.	Gamča BA	5	1			7	9	8				24	53
47.	Kobák Michal	2.	Gamča BA	2	0	9	7	9	6	7				38	53
47.	Trembecký Richard	3.	GAlej KE	3	0	9		7	6	7	6			35	53
50.	Prívozník Matej	2.	GJH BA	5	1		9		6	9				24	52
51.	Bahyl Jakub	3.	GVar ZA	3	0	9	1	9	3	7				29	51
52.	Krakovská Hana	2.	Gamča BA	5	1		9	0	7	9	2			27	48
52.	Mojžišová Karolína	2.	Gamča BA	5	1		3	1	7	7	6			24	48
54.	Surovčík Juraj	3.	GPOH DK	7	2		3			7	4			14	46
55.	Ječmenová Andrea	2.	GVO ZA	5	1		5		2	9	6			22	41
55.	Kurdelová Alžbeta	2.	ŠPMNDG BA	4	0		2		5	8				15	41
57.	Belanová Michaela	4.	ŠPMNDG BA	10	4			7	6	8				21	40
58.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	2	0	9	3							12	39
59.	Magyarová Zuzana	2.	GBST LC	5	1		7		8					15	37
59.	Rabatin Branislav	4.	GJH BA	7	1			5	3	4	0	0		12	37
61.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2	0						9	9		18	36
61.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3	0	9	1	5						15	36
63.	Nociarová Jela	3.	GBST LC	6	1		9			9				18	35
63.	Šromeková Karolína	2.	GDT PP	5	0				7	9				16	35
65.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3	0		4			7	7			14	34
66.	Lipovský Mário	2.	GJH BA	4	0		9							9	30
66.	Oravec Matej	1.	GVar ZA	1	0	4	3							7	30
68.	Benešová Katarína	3.	ŠPMNDG BA	7	2		9							9	27
69.	Šandalová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0	5		7						12	25
70.	Faguľová Kristína	4.	GPoš KE	10	4			7	2	6				15	24
70.	Hledík Michal	3.	GJH BA	6	2									0	24
72.	Komanová Kristína	3.	GAS BB	6	2									0	23
73.	Pellerová Daniela	3.	Gamča BA	8	3				6	7				13	22
74.	Kavický Dušan	3.	GJH BA	5	2									0	21
74.	Kmeťová Katarína	4.	Kilmallock IR	8	1									0	21
76.	Iždinská Dominika	2.	GJH BA	4	0									0	18
76.	Santer Martin	3.	GMH Trstená	6	0									0	18

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
76.	Vlček Andrej	4.	EvSŠ LM	7	2									0	18
79.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	2	0		3			5				8	17
80.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3	0									0	16
81.	Koľveková Veronika	3.	GPoš KE	3	0									0	15
82.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3	0									0	9
82.	Hraška Peter	3.	Gamča BA	4	0									0	9
82.	Petrucha Jaroslav	3.	GMet BA	8	3									0	9
85.	Mikuš Peter	2.	GJAR PO	3	0									0	8
86.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	2		9	5	9	9	3			79
2.	Ralbovský Peter	0.	ŠPMNDG BA	0	8	6		5		3			63
3.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3			0	9	9	1	5		57
4.	Lâm Tuân Dûng	1.	GJH BA	2		9		9	9				56
5.	Murin Martin	1.	GJH BA	2		9	2			3			55
6.	Krakovská Ema	1.	Gamča BA	1	9	9	5						51
6.	Králik Matej	1.	GJH BA	2		9	7			4			51
8.	Palko Maximilián	2.	1SG BA	3			0	9		3	5		48
9.	Rebro Marcel	2.	ŠPMNDG BA	2		9	7	9					43
10.	Kobák Michal	2.	Gamča BA	2					9	7	9		40
11.	Longa Marián	1.	ŠPMNDG BA	2									39
12.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	3					1	3	7		38
13.	Veselá Simona	1.	GJH BA	1	9								33
14.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	2						9	5		32
15.	Liu Zhen Ning Dávid	2.	Gamča BA	3						9	9		31
15.	Vajner Elisabeth	1.	GLS BA	2		9		1					31
17.	Svitková Patricia	2.	GLN BA	3			5				5		29
18.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	2						3	7		28
19.	Martinková Sandra	1.	GJH BA	1	9	9							21
20.	Híveš Zdenko	2.	1SG BA	2		6	1	7			5		19
21.	Šteňová Júlia	1.	GJH BA	2									17
22.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3									15
23.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3						4			14
24.	Žilková Alexandra	2.	ŠPMNDG BA	3			4	9					13
25.	Pilňan Branislav	1.	GJH BA	1		9							9

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Bafrnec Matúš	1.	GPár NR	1	9	8	2	9	2	3	0		67
2.	Kluvanec Roman	1.	GPár NR	1	9	9	5	3		3			65
2.	Prešinská Kristína	1.	GPár NR	2		9	2	9		2			65
4.	Kováčová Mária	1.	GsvCM NR	1	9	9	5			3			63
5.	Marčeková Katarína	1.	GPár NR	1	9	9	1			3			60
6.	Bieliková Michaela	2.	GVMS	3			8	9	9	3			58
7.	Madaj Pavel	1.	GVBN PD	1									45
7.	Mečiar Adam	1.	GVBN PD	1									45
9.	Straková Valentína	2.	GVMS	3			2		9	4			41
10.	Mikulec Jaromír	1.	GsvJ NM	2		3	3	9	3	3			38
11.	Hladká Barbora	1.	GPár NR	1									26
12.	Tóth Andrej	2.	GPár NR	3									19

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Santrová Michaela	1.	GMH Trstená	2		9	5	9	4	3			68
2.	Hošták Viliam	2.	GVar ZA	2		9	4	9	9	4			62
3.	Nepšinská Silvia	1.	GJCh BR	2		9	6	9		3	2		60
4.	Kňaze Adam	1.	GJCh BR	2		9	7	6		6			57
5.	Oravec Matej	1.	GVar ZA	1		8	9	1	4	3			49
6.	Bahyl Jakub	3.	GVar ZA	3			2	9	9	1	9		47
6.	Mores Martin	2.	GVar ZA	3			9		4	3			47
8.	Halamová Mária	1.	GVO ZA	2		9	1		2				44
9.	Tomašec Samuel	2.	GVar ZA	3			9	8		2			43
10.	Labjaková Gabriela	1.	GMH Trstená	1	7	6	0	1			1		42
11.	Barbora Dávid	1.	GFS Nová Baňa	1		9	1						37
12.	Dráček František	1.	GŠkol PB	2									35
13.	Rizman Daniel	2.	GVar ZA	3			0			2			33
14.	Šeligová Kristína	1.	GsvFA ZA	1	9	9		2			1		21
15.	Dendis Tomáš	1.	BiG Sučany	1									5
16.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kurimská Mária	2.	GsvM PO	2		9	1	9	4	2			60
1.	Ténai Alexander	1.	GPoš KE	1	9	9	5	2		1	1		60
3.	Puza Marko	2.	GPoš KE	3				9	9	3	5		59
4.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	2					9	9			41
5.	Ženčuchová Andrea	1.	GJAR PO	1	5	9	0				1		39
6.	Trembecký Richard	3.	GAlej KE	3					9		7		34
7.	Batmendijn Eduard	1.	CGsvM SL	3						9	7		25
8.	Bačinská Irena	2.	G Lipany	2						3			24
9.	Flóriánová Lucia	2.	GPoš KE	2									15
10.	Dudič Ján	3.	GPoš KE	3									14
11.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	2						3			12
12.	Koľveková Veronika	3.	GPoš KE	3									10
13.	Mikuš Peter	2.	GJAR PO	3									7
14.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Štěpánek Martin	1.	Příbor ČR	2		4	6			3			51
2.	Žárský Jan	1.	Kopřivnice ČR	2		9	5						30
3.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	3							7		16